LIVRE I
THEORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE I (ETAT 4)
LOGIQUE MATHEMATIQUE

Rédaction n° 064

Nombre de pages : 55

Nombre de feuilles : 55

Livre I Chap I | Etat 4

Logique mathématique

64

A 68

LIVRE I

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE I (Etat 4)

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

Sommaire

LIVRE I

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE I (État 4)

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1. La formation des relations.

Comme nous l'avons dir dans l'Introduction, le premier but des chapitres I et II est d'expliquer en quoi consiste la formalisation de la Mathématique, et comment on peut, afin de vérifier la correction de tel ou tel raisonnement, le "traduire" tout entier dans le langage formalisé.

1. Les signes mathématiques.

Un texte mathématique formalisé se compose essentiellement de démonstrations mathématiques, dont chacune est une succession de combinaisons de certains signes, les signes mathématiques ; ces combiansions sont appelées relations. Les relations ne sont pas des assemblages quelconques de signes mathématiques ; leur constitution est régie par certaines règles dites règles de formation ; on verra d'autre part (§ 2) que certaines relations sont dites vraies, et comment on peut former des relations vraies au moyen d'autres règles, dites règles de déduction. Enfin, nous verrons de façon plus précise au § 3 comment se classent les relations dans une démonstration mathématique.

Le plus souvent, un texte mathématique formalisé comprendra aussi un commentaire (en langage ordinaire) expliquant suivant quelles règles se fait le passage de chaque relation à la suivante ; on peut en supprimer tout ou partie si on juge le lecteur suffisamment exercé pour retrouver lui-même sans erreur possible la justification de chacun de ces passages.

Les règles de formation et de déduction constituent essentiellement ce qu'on appelle la <u>logique mathématique</u> : le chap.I est consécré à leur exposé et à leurs conséquences immédiates ; ce n'est qu'au chap.II que commence la Mathématique formalisée proprement dite.

Les signes mathématiques fondamentaux sont de deux sortes :

1° Les <u>arguments</u>, qui sont des signes dont la forme peut être choisie arbitrairement ; le plus souvent, on prend des lettres de divers alphabets, affectées éventuellement d'indices ou d'accents.

Rappelons que, du point de vue "naïf" (cf. Introduction) les arguments "représentent" des "objets arbitraires" ou "variables" d'un certain "type d'objets" ; pour rester aussi proche que possible de ce point de vue, et rendre plus aisée l'assimilation des raisonnements, on s'efforce d'ordinaire de réserver, par convention, les lettres d'un même alphabet (ou d'une même partie d'un alphabet) aux "variables d'un même type" : par exemple, on notera le plus souvent les arguments qui "représentent" les "éléments d'un ensemble" par des minuscules italiques, ceux qui "représentent" les "parties de l'ensemble" par des majuscules romaines (cf.chap.II, §3) ; il n'est pas toujours facile de satisfaire à des exigences de cet ordre.

A tout endroit d'un texte mathématique, il est toujours possible d'introduire, dans les relations que l'on écrit, des arguments autres que ceux qui figuraient dans les relations écrites antérieurement ; nous verrons même un peu plus loin que cette introduction est rendue nécessaire par certaines des règles de la ~~tmpa~~ logique (n° 4). L'emploi des signes abréviateurs (v. ci-dessous) et de certaines règles de logique (cf. n° 4, règle s_{13}) permet heureusement, dans la plupart des cas, d'éviter l'emploi d'un trop grand nombre d'arguments.

2° Les <u>signes de liaison</u>, qui ont une forme fixée une fois pour toutes. Ce sont, d'une part, les trois signes $=$, $\in$ et $|$, qui interviennent dans la formation des relations primitives (que nous définirons au chap.II) ; d'autre part, les cinq signes suivants, dits <u>signes logiques fondamentaux</u>, qui permettent, comme nous allons le voir au n°2 , de former des relations nouvelles à partir de relations déjà écrites :

non   et   ou

appelés respectivement "signe de négation" , "signe de conjonction" et "signe de disjonction" ;

$\forall$ $\exists$

appelés respectivement ~~"signe de négation" et "signe~~ "quantificateur universel" et "quantificateur existentiel" .

Le lecteur aura soin de ne pas confondre l'usage des signes "non", "et", "ou" dans l'écriture des relations et leur emploi comme <u>mots</u> dans le langage ordinaire. Certains logiciens évitent cette confusion en les remplaçant respectivement (dans l'écriture des relations) par des signes tels que $\sim$, $\&$, $\vee$, qui ne sont plus des mots. Il nous a semblé que le risque d'erreur était faible lorsqu'on prend soin de toujours distinguer, par la disposition des diverses parties du texte, les relations des commentaires qui les accompagnent ; en outre, les signes "non", "et", "ou" sont très brefs et ont l'avantage de rendre plus facile la lecture d'une relation et son interprétation "naïve" .

$\forall$ x se lit "quel que soit x" , $\exists$ y se lit "il existe y tel que" (et de même lorsqu'au lieu de x et y figure un argument quelconque) ; ceci fixe en même temps l'interprétation "naïve" de ces deux signes.

A côté de ces signes mathématiques fondamentaux, figurent encore dans les relations, d'une part des signes de séparation : cadres et parenthèses, dont nous parlerons au n°2 ; d'autre part un très grand nombre d'autres signes mathématiques, dits <u>signes abréviateurs</u>(*). L'emploi de ces derniers n'est pas strictement indispensable en Mathématique formalisée, où ils n'ont qu'un rôle de commodité (d'ailleurs très grand) ; aussi seront-ils décrits chacun en son lieu et expliquerons-nous au fur et à mesure comment chacun d'eux doit être utilisé (cf. n°5).

2. Les règles de formation.

Dans ce n°, nous ne décrirons pas <u>tous</u> les procédés de formation des relations, mais seulement ceux qui, à partir de relations données, permettent d'en écrire d'autres en "combinant" les relations données à l'aide des signes logiques.

Les autres règles de formation sont : 1° celles qui définissent les <u>relations primitives</u> (cf. chap.II) : par exemple $x \in Y$, $u=u$ sont des relations primitives ; 2° les règles de formation associées à chacun des signes abréviateurs (n°5), et qui seront introduites au fur et à mesure de l'introduction des signes abréviateurs correspondants.

Toute relation, correctement écrite (c'est-à-dire sans aucun des "abus de langage" que nous nous permettrons par la suite) contient <u>au moins un argument</u> écrit une ou plusieurs fois.

Cela peut paraître en contradiction avec le point de vue "naïf" puisque par exemple la relation $3+1=2+2$ ne contient (en apparence) aucun argument ; nous verrons au chap.III que cela résulte d'abus de langage.

(*) La distinction entre signes fondamentaux et signes abréviateurs n'est pas absolue ; nous verrons au n°5 qu'on pourrait considérer certains des signes fondamentaux comme signes abréviateurs.

Parmi les arguments qui figurent dans une relation, certains sont dits *libres*, les autres *liés* : tout argument de la relation appartient à une et une seule de ces deux catégories, mais il peut se faire que dans une relation il n'y ait que des arguments libres, ou que des arguments liés. Les règles de formation qui suivent ne permettent pas, à elles seules, de savoir si un argument donné, dans une relation donnée, est libre ou lié ; mais en supposant que cette distinction soit faite pour les arguments d'un certain nombre de relations données, elles permettent de la faire pour toutes les relations qu'on en déduit par application de ces règles.

Règle f_1 : *Etant donnée une relation quelconque, l'assemblage de signes obtenu en insérant cette relation dans le cadre rectangulaire du schéma*

(1) non $\boxed{\qquad}$

est une relation ; *les arguments libres* (resp. *liés*) *de cette relation sont par définition les arguments libres* (resp. *liés*) *de la relation donnée*.

La relation obtenue ainsi à partir du schéma (1) est dite la *négation* de la relation insérée dans le cadre de ce schéma.

Règle f_2 : *Etant données deux relations*, *distinctes ou non*, *telles qu'aucun argument libre dans l'une ne soit lié dans l'autre, l'assemblage de signes obtenu en insérant dans le schéma*

(2) $\boxed{\qquad}$ et $\boxed{\qquad}$

resp. *dans le schéma*

(3) $\boxed{\qquad}$ ou $\boxed{\qquad}$

l'une des relations dans l'un des cadres, l'autre relation dans l'autre cadre, *est une relation* ; *les arguments libres* (resp. *liés*) *de cette relation sont par définition les arguments qui sont libres* (resp. *liés*) *dans l'une* (*au moins*) *des deux relations données*.

La relation obtenue ainsi à partir du schéma (2) (resp. (3)) est dite la *conjonction* (resp. la *disjonction*) de la relation insérée dans le cadre de gauche et de la relation insérée dans le cadre de droite.

La restriction apportée à la formation de la conjonction (ou de la disjonction) de deux relations est conforme à la pratique des mathématiciens ; du point de vue naïf , une relation telle que

p est premier et il existe p tel que 4 divise p

est tout à fait choquante ; on dira

p est premier et il existe n tel que 4 divise n

(voir plus loin, n°4 , la règle générale qui permet d'appliquer d'une manière analogue l'opération "et" même lorsque les deux relations ne satisfont pas à la restriction de la règle f_2 , en modifiant convenablement ces relations). Du point de vue logique, la restriction qui figure dans la règle f_2 est indispensable pour pouvoir définir les arguments libres dans une relation, et remplacer des arguments libres par d'autres (n°3) sans risquer d'obtenir ainsi des résultats contradictoires (cf. § 3, n°4) par application des règles du § 2 .

Règle f_3 : *Etant donnée une relation quelconque, l'assemblage de signes obtenu en insérant cette relation dans le cadre du schéma*

(4) $\quad (\forall)\ \boxed{}$

resp. *dans le cadre du schéma*

(5) $\quad (\exists)\ \boxed{}$

et en insérant dans la parenthèse, à la suite du signe $\forall$ (resp. *du signe* $\exists$) *un argument non lié dans la relation donnée, est une relation ; les arguments liés de cette relation sont par définition les arguments liés dans la relation donnée, et l'argument inséré à la suite du signe* $\forall$ (resp. $\exists$) ; *les arguments libres sont par définition* les autres arguments de la relation (c'est-à-dire ceux qui sont libres dans la relation initiale et distincts de l'argument inséré à la suite de $\forall$ (resp. $\exists$)).

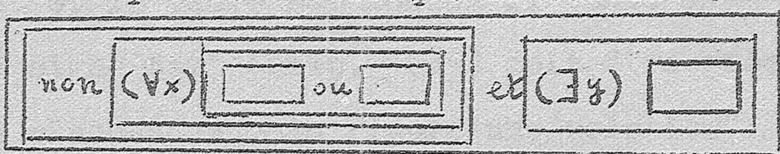
Dans une relation formée suivant l'un des schémas (4) ou (5), on dit que l'argument inséré à la suite du signe $\forall$ (resp. $\exists$) est quantifié par ce signe.

Ici encore, la restriction apportée à la quantification d'un argument dans une relation est conforme à la pratique : on n'écrit pas d'ordinaire de relations telles que

il existe n tel que, quel que soit n , n+1 = 1+n .

Du point de vue logique, par contre, la restriction introduite dans la règle f_3 pourrait être levée sans aucun inconvénient.

A partir des schémas (1) à (5), que nous appellerons schémas de relation fondamentaux, on peut former des relations en les "superposant" c'est-à-dire en insérant l'un d'eux dans le cadre d'un autre schéma (ou du même), et recommençant arbitrairement l'opération ; on obtient ainsi des "schémas complexes" tels que le suivant :

(6) $(\exists z)$ 

Mais il faut bien préciser comment on forme une relation suivant un tel schéma. Pour cela, convenons d'appeler cadres d'ordre zéro dans un tel schéma ceux qui sont vides, cadres d'ordre un ceux qui ne contiennent que des cadres d'ordre zéro, cadres d'ordre deux ceux qui ne contiennent que des cadres d'ordre zéro ou un, et ainsi de suite (le schéma complexe (6) contient par exemple des cadres allant jusqu'à l'ordre quatre) : chaque cadre contient donc un schéma fondamental, dont un des cadres au moins a un rang inférieur d'une unité à celui du cadre considéré, l'autre (s'il existe) ayant un rang inférieur (d'une ou plusieurs unités) à celui du cadre considéré. Former une relation suivant un tel schéma, c'est alors insérer une relation dans chacun des cadres d'ordre zéro ; mais il faut vérifier successivement que les relations contenues dans les cadres d'ordre un, deux, etc. sont formées conformément aux règles f_2 et f_3 , en ce qui concerne les restrictions apportées par ces règles aux arguments des relations que l'on peut insérer dans les schémas (2) à (5).

L'emploi des signes logiques fondamentaux est complété par une règle qui limite leur usage aux seuls cas prévus par les règles f_1, f_2 et f_3 .

De façon précise, dans une relation correctement écrite et sans abréviations logiques (cf. n°5) :

1° chaque signe "non" doit être suivi d'un cadre où figure une relation : on dit que le signe "non" porte sur ce cadre ; s'il y a dans la relation donnée d'autres signes que le signe "non" considéré et ceux qui sont contenus dans le cadre sur lequel il porte, ils doivent se trouver à l'extérieur d'un nouveau cadre contenant le signe "non" et le cadre sur lequel il porte ;

2° chaque signe "et" (resp. "ou") doit être précédé et suivi d'un cadre dans chacun desquels figure une relation : on dit que le signe "et" (resp. "ou") porte sur ces deux cadres ; s'il y a dans la relation donnée d'autres signes que le signe "et" (resp. "ou") considéré et ceux qui sont contenus dans les cadres sur lesquels il porte, ils doivent se trouver à l'extérieur d'un nouveau cadre contenant le signe "et" (resp. "ou") et les cadres sur lesquels il porte ; enfin aucun argument libre d'une des relations sur lesquels porte le signe "et" (resp. "ou") ne doit être lié dans l'autre ;

3° chaque signe $\forall$ (resp. $\exists$) doit être contenu entre deux parenthèses ou figure en outre, à sa suite, un argument ; ces parenthèses doivent être suivies d'un cadre dans lequel figure une relation où l'argument qui suit $\forall$ (resp. $\exists$) ne doit pas être lié (on dit que le signe $\forall$ (resp. $\exists$) <u>porte</u> sur ce cadre); si tous les signes ainsi décrits ne constituent pas la totalité de la relation, ils doivent être contenus dans un nouveau cadre, et tous les autres signes de la relation doivent être extérieurs à ce cadre.

On observera que ces règles impliquent que deux cadres sur lesquels portent des signes logiques fondamentaux ne se coupent jamais.

Pour alléger la suite de cet exposé, nous allons exprimer autrement les règles f_1, f_2, f_3 : nous dirons encore que les schémas

(7) $\quad$ non $\underline{R}$

(8) $\quad$ $\underline{R}$ et $\underline{S}$

(9) $\quad$ $\underline{R}$ ou $\underline{S}$

(10) $\quad$ $(\forall x)\underline{R}$

(11) $\quad$ $(\exists x)\underline{R}$

sont les <u>schémas de relation fondamentaux</u>, en entendant par là que ces assemblages <u>deviennent</u> des relations lorsqu'on y remplace chacune des lettres $\underline{R}$, $\underline{S}$ par une relation mise dans un cadre, les relations (distinctes ou non) substituées à $\underline{R}$ et à $\underline{S}$ dans les schémas (8) et (9) étant soumises à la condition qu'aucun argument libre dans l'une ne soit lié dans l'autre, la relation substituée à $\underline{R}$ dans (10) et (11) étant soumise à la condition que x n'est pas lié dans cette relation ; nous sous-entendons en outre que la même règle vaut lorsque dans (10) et (11) figure un argument <u>quelconque</u> à la place de x .

A partir de ces schémas, on peut en former d'autres par "superposition" comme il a été expliqué ci-dessus, par exemple

$$(\exists\, y)\ \boxed{\boxed{\underline{R} \text{ ou } \underline{S}} \quad \text{et} \quad \boxed{(\forall x)\underline{T}}}$$

étant toujours sous-entendu qu'un tel schéma ne devient une relation que lorsque les relations qu'on substitue aux lettres $\underline{R}$, $\underline{S}$, $\underline{T}$ qui y figurent sont telles que les relations contenues dans les cadres d'ordre un, deux, etc.. sont formées conformément aux règles f_2 et f_3 . On sous-entend toujours aussi que si une même lettre $\underline{R}$, $\underline{S}$, $\underline{T}$, figure plusieurs fois dans un schéma, elle doit être remplacée par <u>la même</u> relation en tous les endroits où elle se trouve.

<u>Remarques</u>.- 1) L'usage des "lettres de remplacement" $\underline{R}$, $\underline{S}$, $\underline{T}$ dans les règles précédentes, est tout à fait analogue à l'emploi des "variables" dans l'interprétation "naïve" de la Mathématique (cf. Introduction) : elles tiennent la place des objets matériels que sont les relations, et servent uniquement à expliquer de façon plus rapide et plus claire des modes opératoires applicables à ces objets (de même, par exemple, que la notation abrégée d'une partie d'échecs décrit les mouvements successifs des pièces du jeu pendant cette partie). De là vient le nom de "variables propositionnelles" qu'on leur donne parfois ; mais nous tenons à souligner que, dans ce chapitre et le suivant, elles jouent un rôle <u>tout à fait différent</u> des <u>arguments</u> : dans la Mathématique formalisée, nous avons vu (Introduction) que les arguments ne remplacent aucun objet et que les relations ne sont pas davantage des indications abrégées d'opérations effectuées sur des objets donnés ; d'autre part, nous nous interdirons toujours de traiter les assemblages de signes où figurent des lettres de remplacement comme si ces lettres étaient des arguments et les assemblages considérés des relations.

Pour éviter toute confusion, nous réserverons aux lettres de remplacement les caractères italiques gras majuscules.

Le lecteur devra donc avoir bien présent à l'esprit le fait que dans toutes les règles qui vont suivre, où figureront des lettres de remplacement, ces dernières n'ont qu'un rôle de pure commodité, et qu'il serait toujours possible (au prix d'encombrantes circonlocutions) d'énoncer les mêmes règles sans utiliser de lettres de remplacement.

2) Comme nous le verrons au chap. II, dans une relation <u>primitive</u>, tous les arguments sont <u>libres</u> par définition. Il s'ensuit que dans une relation obtenue à partir d'un certain nombre de relations primitives par application répétée des schémas (7) à (11), c'est-à-dire dans une relation <u>qui ne contient aucun signe abréviateur</u>, la distinction des arguments liés est immédiate : un argument est lié s'il suit un des signes $\forall$, $\exists$ dans la relation, il est libre dans le cas contraire. Pour se convaincre de l'exactitude de cette règle, il suffit d'observer que, si elle est valable pour deux relations sans signe abréviateur, elle l'est encore pour les relations qu'on en déduit (si cela est possible) par application à ces relations d'un quelconque des schémas (7) à (11), ce qui est immédiat. On observera que ce "raisonnement" est très voisin du "raisonnement par récurrence" de la mathématique classique ; il importe cependant de bien l'en distinguer. Nous venons seulement d'indiquer un processus de vérification expérimental, qui sera applicable à toute relation sans signe abréviateur, une fois qu'on l'aura écrite ; et nous avons la conviction (d'ordre expérimental) que ce procédé de vérification réussira toujours. Du point de vue "naïf", ce qui correspondrait à ce résultat dans une application classique du raisonnement par récurrence serait qu'un tel raisonnement donne un procédé opératoire

permettant de vérifier que n'importe quel entier explicité possède une certaine propriété (ce qui a encore un sens expérimental) ; mais on sait que l'on en déduit une conséquence qui n'a plus aucun sens expérimental, à savoir que tous les entiers ont la propriété en question.

Nous rencontrerons par la suite d'autres "raisonnements" du genre du précédent, que l'on appelle des "démonstrations métamathématiques"; mais le lecteur qui pourrait craindre que de tels raisonnements ne soient contraires aux principes de la Mathématique formalisée, en y réintroduisant des "objets indéterminés" (les " relations arbitraires") pourra observer qu'aucune de ces "démonstrations" n'est strictement indispensable à l'édification de cette dernière ; elles n'ont qu'une valeur de commodité, en signalant des procédés opératoires d'une application générale, mais qu'on pourrait se borner à appliquer effectivement dans chaque cas concret, sans les ériger en principes.

A partir de maintenant, nous ferons le plus souvent l'abus de langage suivant, afin d'abréger l'exposé : nous parlerons partout de "la relation $\underline{R}$ " au lieu de dire "la relation qu'on substitue à $\underline{R}$ " ; le lecteur n'aura aucune peine à rétablir le langage correct s'il le désire, et l'emploi de caractères spéciaux pour les lettres de remplacement permet d'éviter toute confusion.

D'autre part, l'usage constant des cadres étant proscrit par les contingences typographiques, nous les remplacerons le plus souvent par des parenthèses : sauf dans des relations très compliquées, il sera toujours facile au lecteur de rétablir les cadres dont elles tiennent lieu ; au besoin, nous numéroterons d'un même chiffre la parenthèse initiale et la parenthèse finale qui correspondent à un même cadre.

3. Substitution d'un argument à un autre.

Comme nous l'avons déjà dit, chacun des arguments qui figure dans une relation peut s'y trouver en plusieurs endroits. Remplacer un argument par un autre dans une relation, c'est substituer le second au premier à tous les endroits où ce dernier se trouve dans la relation donnée.

Par exemple, quand on remplace y par x dans la relation

$$(\exists y)(x \neq y)$$

on obtient la relation

$$(\exists x)(x \neq x)$$

L'interprétation "naïve" de ces deux relations montre aussitôt que le remplacement d'un argument par un autre peut changer considérablement la "signification" d'une relation ; c'est ce qui justifie la règle suivante :

On ne peut remplacer dans une relation un argument lié par un argument figurant déjà dans la relation, et un argument libre par un argument déjà lié dans la relation. ~~Par contre, il est toujours possible de remplacer dans une relation un argument libre par un autre argument figurant~~

Par contre, il est toujours possible de remplacer dans une relation un argument libre par un autre argument figurant déjà dans la relation donnée, mais libre dans cette relation.

On constate alors, dans chaque cas concret, en vertu de la restriction ainsi imposée, et de la définition des arguments libres et liés dans une relation, que : 1° après remplacement d'un argument par un autre dans une relation, l'argument que l'on a remplacé (dans la relation initiale) et l'argument qui le remplace (dans la relation finale) sont de même nature, c'est-à-dire tous deux libres ou tous deux liés ;

2° un argument libre (resp. lié) dans la relation initiale, et distinct de l'argument que l'on remplace, reste libre (resp. lié) dans la relation finale.

Cela étant, pour remplacer un argument par un autre dans une relation formée suivant l'un des trois schémas fondamentaux (7), (8), (9), il revient au même de faire cette substitution dans chacune des relations <u>R</u> , <u>S</u> , puis d'appliquer le même schéma aux relations obtenues ; il en est de même pour une relation formée suivant l'un des schémas (10),(11), pourvu que l'argument que l'on remplace ne soit pas x . On vérifie en effet qu'après la substitution faite dans celles des relations <u>R</u>, <u>S</u> où figure l'argument que l'on remplace, les conditions requises pour pouvoir appliquer aux nouvelles relations les schémas fondamentaux sont toujours remplies.

Par exemple, si y est libre dans (<u>R</u> et <u>S</u>), il ne peut être lié dans <u>R</u> ni dans <u>S</u> ; si on le remplace par z , z ne pouvant être lié dans (<u>R</u> et <u>S</u>) n'est lié ni dans <u>R</u> ni dans <u>S</u> ; on peut donc remplacer y par z dans celles des relations <u>R</u>, où figure y ; z n'est lié dans aucune des deux relations obtenues et aucun autre argument libre dans une de ces relations n'est lié dans l'autre ; on peut donc appliquer à ces relations le schéma (8). Les vérifications se font de même dans tous les autres cas.

De façon imagée, on dit que le remplacement d'un argument par un autre est <u>permutable</u> avec les cinq schémas fondamentaux (7) à (11) (sauf lorsque l'argument que l'on remplace est x , pour les schémas (10) et (11)).

Le lecteur observera que nous avons encore affaire dans ce raisonnement à des "démonstrations métamathématiques", et que la remarque que nous avons "démontrée" de cette manière n'est en aucune façon indispensable pour la suite ; elle n'a qu'une valeur heuristique pour l'introduction des "symboles fonctionnels" (cf. chap. II, § 1).

Pour abréger le langage, on conviendra par la suite que, si une relation <u>ne contient pas</u> un argument, la relation obtenue en remplaçant cet argument par un autre, est <u>identique</u> à la relation donnée.

<u>4. Relations synonymes</u>.

Certaines relations sont dites <u>synonymes</u> d'autres relations en raison de leur formation ; nous allons énumérer des règles qui permettent de dire qu'une relation est synonyme d'une autre (*) . En premier lieu :

<u>Règle</u> s_1 : <u>Si une relation est synonyme d'une autre, cette dernière est synonyme de la première</u>.

Cette règle permet de parler de <u>deux relations synonymes</u>, sans préciser l'ordre dans lequel on les considère.

<u>Règle</u> s_2 : <u>Si deux relations sont synonymes d'une même troisième, elles sont synonymes</u>.

<u>Règle</u> s_3 : <u>Si, dans un schéma de relation fondamental, on remplace successivement la lettre</u> $\underline{R}$ <u>par deux relations synonymes</u> (la lettre $\underline{S}$ (dans les schémas (8) et (9)) étant chaque fois remplacée par la même relation), <u>on obtient deux relations synonymes</u>.

Cette règle suppose naturellement que dans les deux cas la substitution peut se faire, ce qui doit être vérifié dans chaque cas, car, étant donné deux relations synonymes, les arguments de l'une ne figurent pas nécessairement dans l'autre (cf. règle s_{13}).

(*) Comme nous l'avons expliqué dans l'Introduction, la distinction entre "relations synonymes" et "relations équivalentes" (cf. § 2, n°1) est de pure commodité pour l'exposé : il ne faut pas y attacher de sens intrinsèque.

Les règles suivantes expriment qu'une relation formée suivant un certain schéma qui contient des lettres de remplacement est synonyme d'une relation formée suivant un autre schéma contenant ces mêmes lettres, lorsque la substitution de relations à ces lettres de remplacement satisfait éventuellement à certaines conditions ; lorsqu'il n'y a aucune condition, (autre que celles qui résultent des règles f_2 et f_3), nous exprimerons simplement la règle en disant que les deux schémas sont synonymes.

Règle s_4 : Le schéma non (non $\underline{R}$) est synonyme de $\underline{R}$ ("règle de la double négation").

Règle s_{5a} : Le schéma non ($\underline{R}$ et $\underline{S}$) est synonyme de ((non $\underline{R}$) ou (non $\underline{S}$)).

Règle s_{5b} : Le schéma non ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) est synonyme de ((non $\underline{R}$) et (non $\underline{S}$)).

Règle s_{6a} : Le schéma non (($\forall$ x) $\underline{R}$) est synonyme de ($\exists$ x)(non $\underline{R}$).

Règle s_{6b} : Le schéma non (($\exists$ x) $\underline{R}$) est synonyme de ($\forall$ x)(non $\underline{R}$).

Règle s_{7a} : Le schéma ($\underline{R}$ et $\underline{S}$) est synonyme de ($\underline{S}$ et $\underline{R}$).

Règle s_{7b} : Le schéma ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) est synonyme de ($\underline{S}$ ou $\underline{R}$).

Règle s_{8a} : Le schéma ($\forall$ x)(($\forall$ y) $\underline{R}$) est synonyme de ($\forall$ y)(($\forall$ x) $\underline{R}$)

Règle s_{8b} : Le schéma ($\exists$ x)(($\exists$ y) $\underline{R}$) est synonyme de ($\exists$ y)(($\exists$ x) $\underline{R}$)

Règle s_{9a} : Le schéma ($\underline{R}$ et ($\underline{S}$ et $\underline{T}$)) est synonyme de (($\underline{R}$ et $\underline{S}$) et $\underline{T}$).

Règle s_{9b} : Le schéma ($\underline{R}$ ou ($\underline{S}$ ou $\underline{T}$)) est synonyme de (($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) ou $\underline{T}$).

Règle s_{10a} : Le schéma ($\underline{R}$ ou ($\underline{S}$ et $\underline{T}$)) est synonyme de (($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) et ($\underline{R}$ ou $\underline{T}$)).

Règle s_{10b} : Le schéma ($\underline{R}$ et ($\underline{S}$ ou $\underline{T}$)) est synonyme de (($\underline{R}$ et $\underline{S}$) ou ($\underline{R}$ et $\underline{T}$)).

Règle s_{11a} : La relation formée suivant le schéma $(\forall x)(\underline{R} \text{ ou } \underline{S})$ est synonyme de la relation formée suivant le schéma $(\underline{R} \text{ ou } (\forall x)\underline{S})$ lorsque x ne figure pas dans $\underline{R}$.

Règle s_{11b} : La relation formée suivant le schéma $(\exists x)(\underline{R} \text{ et } \underline{S})$ est synonyme de la relation formée suivant le schéma $(\underline{R} \text{ et } (\forall x)\underline{S})$ lorsque x ne figure pas dans $\underline{R}$.

Règle s_{12a} : La relation formée suivant le schéma $(\overset{\forall}{\cancel{\exists}} x)(\underline{R} \text{ et } \underline{S})$ est synonyme de la relation formée suivant le schéma $(\underline{R} \text{ et } (\overset{\forall}{\cancel{\exists}} x)\underline{S})$ lorsque x ne figure pas dans $\underline{R}$.

Règle s_{12b} : La relation formée suivant le schéma $(\exists x)(\underline{R} \text{ ou } \underline{S})$ est synonyme de la relation formée suivant le schéma $(\underline{R} \text{ ou } (\exists x)\underline{S})$ lorsque x ne figure pas dans $\underline{R}$.

Le lecteur observera que chacune des règles précédentes affectées de l'indice a (resp. b) peut s'obtenir par application successive de règles affectées de l'indice b (resp. a) et des règles s_1 à s_4.

Par exemple, établissons ainsi s_{6b} : $(\forall x)(\text{non } \underline{R})$ est, d'après s_4, synonyme de non (non$(\forall x)(\text{non } \underline{R})$)), donc, par application successive de s_{6a}, s_3 et s_2, elle est aussi synonyme de ~~non~~ non(($\exists x$)(non(non $\underline{R}$))) ; mais par application de s_4 et s_3, cette dernière est synonyme de non(($\exists x$) $\underline{R}$) d'où la règle s_{6b} par une dernière application de s_2.

Ce type de raisonnement n'est pas à proprement parler une démonstration mathématique (§ 3), puisque dans une telle démonstration il ne doit figurer que des relations *explicitées*, ce qui n'est pas le cas ici. On peut dire que c'est un *schéma de démonstration*, qui *devient* une démonstration si on applique exactement de la même manière les règles qui y interviennent à une *relation* au lieu d'une *lettre de remplacement*.

Comme nous l'avons déjà dit, on pourrait entièrement se passer de tels raisonnements, et cela de deux manières : soit en se bornant à énoncer toutes les règles sans chercher à en déduire certaines des autres ; soit au contraire en n'énonçant que les règles indispensables et en faisant dans chaque cas concret où l'on devrait appliquer une des autres règles, la démonstration (cette fois, il s'agirait bien d'une démonstration mathématique) suivant le schéma qui conduit à cette règle. Nous avons pris un moyen terme entre ces deux partis : le second allongerait énormément les démonstrations, et nous avons pensé d'autre part qu'il n'était pas absolument sans intérêt (philosophique ou esthétique) de savoir qu'on peut ramener la Mathématique à un assez petit nombre de règles vraiment essentielles.

La dernière règle générale de synonymie est la suivante :

<u>Règle</u> s_{13} : <u>Si, dans une relation, on remplace un argument lié par un autre argument</u> (nécessairement distinct des autres arguments de la relation) <u>la relation obtenue est synonyme de la première</u>.

Cette règle permet de pallier aux restrictions apportées à la formation des relations par les règles f_2 et f_3 . Par exemple, lorsqu'on a deux relations telles que certains arguments soient libres dans l'une et liés dans l'autre, on remplacera chacun de ces arguments par un autre dans la relation où il est lié, les nouveaux arguments ainsi introduits étant distincts deux à deux et distincts de tous les arguments figurant dans l'une ou l'autre des relations initiales. On obtient ainsi deux relations, respectivement synonymes des relations initiales, et que l'on peut alors substituer à $\underline{R}$ et à $\underline{S}$ respectivement dans les schémas ($\underline{R}$ et $\underline{S}$), ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$). De même, si l'argument x est lié dans une relation, on le remplacera par un autre argument (distinct des autres arguments de la relation) et on pourra alors quantifier x dans la relatio ainsi obtenue (synonyme de la première).

5. Introduction des signes abréviateurs.

De nouvelles règles de synonymie sont liées à l'introduction des abréviations dans les relations. De façon précise, à toute abréviation doivent être associées deux règles : l'une doit indiquer de quelle manière l'abréviation peut intervenir dans une relation (règle de formation d'une relation à l'aide de cette abréviation) ; l'autre doit donner un procédé permettant, à partir d'une relation contenant (en un ou plusieurs endroits) l'abréviation considérée (et éventuellement d'autres), d'écrire au moins une nouvelle relation où n'intervient plus cette abréviation (les autres abréviations pouvant continuer de figurer dans la nouvelle relation ; mais aucune nouvelle abréviation, ne figurant pas dans la relation initiale, ne doit figurer dans la relation finale). Cette seconde règle, dite règle de définition de l'abréviation en question, énonce en outre que les arguments libres de la relation donnée sont, par définition, ceux de la (ou les) relations obtenues par application du procédé indiqué, et que ces dernières relations sont synonymes de la relation donnée. On dit encore que la règle de définition permet d'éliminer l'abréviation considérée.

Autant qu'il se pourra, les règles de définition seront données de telle sorte qu'à partir d'une relation donnée elles ne fournissent jamais qu'une seule relation ne contenant pas l'abréviation correspondante. Ce n'est cependant pas possible dans tous les cas (nous allons en voir un exemple ci-dessous) : il faut alors vérifier que les diverses relations auxquelles peut conduire la règle de définition ont toutes les mêmes arguments libres et sont synonymes (par application de règles distinctes de la règle de définition. Sur les questions de "non contradiction" soulevées par l'emploi des signes abréviateurs, voir § 3, n° 4 .

Les premières abréviations que nous introduirons consistent en <u>suppressions de signes de séparation</u> (cadres ou parenthèses) dans certains cas ; on peut aussi les considérer comme des extensions des règles gouvernant l'emploi des signes logiques fondamentaux : à côté des relations formées suivant le schéma ($\underline{R}$ et $\underline{S}$) nous admettrons aussi des relations formées suivant les schémas

(12) $\underline{R}$ et $\underline{S}$ et $\underline{T}$

(13) $\underline{R}$ et $\underline{S}$ et $\underline{T}$ et $\underline{U}$

et ainsi de suite (avec un nombre quelconque de signes "et"), les relations substituées aux lettres de remplacement devant toujours satisfaire à la condition qu'aucun argument libre dans l'une ne soit lié dans une autre. De même, à côté des relations formées suivant le schéma $(\forall\ x)\underline{R}$, nous admettrons les relations formées suivant les schémas

(14) $(\forall\ x)(\forall\ y)\underline{R}$

(15) $(\forall\ x)(\forall\ y)(\forall\ z)\underline{R}$

et ainsi de suite (avec un nombre quelconque de signes $\forall$), la relation substituée à $\underline{R}$ devant être telle qu'aucun des arguments quantifiés n'y soit lié. On élargit de même l'emploi des signes "ou" et $\exists$, et on définit alors comme ci-dessus les schémas complexes et les cadres d'ordres successifs dans un tel schéma. Les règles de définitions des abréviations ainsi introduites font alors correspondre à une relation formée suivant un schéma complexe quelconque l'<u>unique</u> relation, formée à partir des seuls schémas fondamentaux, définie comme suit : dans chaque cadre d'ordre un du schéma initial, où figure un schéma (12) (resp. (13), etc.), on remplace ce schéma par

$\underline{R}$ et ($\underline{S}$ et $\underline{T}$)

(resp. $\underline{R}$ et ($\underline{S}$ et ($\underline{T}$ et $\underline{U}$)) , etc.) ;

23

dans chaque cadre d'ordre un où figure un schéma (14) (resp. (15), etc.) on remplace ce schéma par

$$(\forall x)((\forall y)\underline{R})$$

(resp. $(\forall x)((\forall y)((\forall z)\underline{R}))$ etc.)

et de même pour les schémas contenant les signes "ou" et $\exists$; on procède ensuite de même pour chaque cadre d'ordre deux, puis pour chaque cadre d'ordre trois et ainsi de suite.

Le lecteur accoutumé à l'Algèbre reconnaîtra dans ces abréviations les suppressions de parenthèses, classiques dans la manipulation des "lois de composition associatives" (cf. <u>Alg.</u>, chap. I, 1). A cet égard, on peut dire, de façon imagée, que les règles s_{7a}, s_{7b}, s_{8a}, s_{8b} expriment la "commutativité" des "opérations" dénotées par les signes "et", "ou", $\forall$ et $\exists$, s_{9a} et s_{9b} l'"associativité" de chacune des opérations "et", "ou", s_{10a} et s_{10b} la "distributivité" de chacune d'elles par rapport à l'autre (<u>Alg.</u>, chap. I, § 5). Il ne s'agit ici à vrai dire que d'analogies, car les "lois de composition" relient des <u>arguments</u>, alors qu'il s'agit ici de <u>lettres de remplacement</u>, qui sont d'une tout autre nature ; on n'obtiendra de véritables lois de composition correspondant aux signes "et", "ou" que dans la théorie des ensembles (chap. II, § 3). Ici, l'analogie que nous venons de signaler nous permettra, dans les schémas de démonstration, de ne pas insister sur l'application répétée des règles que nous avons rappelées ci-dessus, le lecteur étant supposé assez familiarisé avec les opérations algèbriques pour reconstituer aisément la succession des règles qu'il faut invoquer dans chaque cas.

A côté des abréviations précédentes, nous nous permettrons aussi, pour alléger l'écriture des schémas, de supprimer parfois des parenthèses par <u>abus de langage</u>, lorsque cela ne risque pas de causer de confusion : par exemple, au lieu de l'écriture correcte ((non $\underline{R}$)ou $\underline{S}$)

on écrira (non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$) sous-entendant ainsi que lorsque le signe "non" n'est pas suivi d'une parenthèse, il ne porte que sur la lettre qui le suit immédiatement ; de même, au lieu de $(((\forall x)\underline{R})$ et $((\exists y)\underline{S}))$, on écrira $((\forall x)\underline{R}$ et $(\exists y)\underline{S})$ (ce qui revient à sous-entendre pour chacun des signes $(\forall x)$, $(\exists y)$ la même convention que pour le signe "non").

La plupart des abréviations comportent l'introduction d'un nouveau signe, dit <u>signe abréviateur</u> ; nous en introduirons trois dans ce n°(*). En premier lieu, les deux signes " $\Rightarrow$ " , " $\Leftrightarrow$ " permettent de former des relations suivant les deux schémas

(16) $$\underline{R} \Rightarrow \underline{S}$$

(17) $$\underline{R} \Leftrightarrow \underline{S}$$

pourvu que les relations substituées à $\underline{R}$ et à $\underline{S}$ soient telles qu'aucun argument libre dans l'une ne soit lié dans l'autre. On peut alors, en ajoutant ces schémas à tous ceux que nous avons admis jusqu'ici, définir des schémas complexes et les cadres d'ordres successifs d'un tel schéma. Les règles de définition associées aux signes " $\Rightarrow$ " et " $\Leftrightarrow$ " font alors correspondre à une relation formée suivant un schéma complexe quelconque l'<u>unique</u> relation formée à partir des schémas autres que (16) et (17), définie comme suit : dans chaque cadre d'ordre un du schéma initial où figure un schéma (16), on remplace ce schéma par

(18) $$(\text{non } \underline{R}) \text{ ou } \underline{S}$$

(*) Notons ici qu'au lieu des quatre signes fondamentaux : "et", "ou", $\forall$, $\exists$, on pourrait n'en considérer au début que deux, par exemple les deux signes : "et", $\forall$, les deux autres étant introduits comme <u>signes abréviateurs</u>, par les "règles de définition" provenant de l'application de S_4, S_{5b} et S_{6b} .

et dans chaque cadre d'ordre un où figure un schéma (17), on remplace ce schéma par

(19) $\qquad ((\text{non } \underline{R}\ ) \text{ ou } \underline{S}\ ) \text{ et } ((\text{non } \underline{S}\ ) \text{ ou } \underline{R}\ )$

On procède ensuite de même pour les cadres d'ordre deux, puis pour ceux d'ordre trois, et ainsi de suite.

Notons qu'il résulte aussitôt de ces règles de définition, et des règles générales de synonymie, que le schéma $\underline{R} \Longrightarrow \underline{S}$ est synonyme de $(\text{non } \underline{S}\ ) \Longrightarrow (\text{non } \underline{R}\ )$, et que le schéma $\underline{R} \Longleftrightarrow \underline{S}$ est synonyme de $((\underline{R} \Rightarrow \underline{S}) \text{ et } (\underline{S} \Rightarrow \underline{R})$; le schéma $\underline{R} \Longleftrightarrow \underline{S}$ est donc aussi synonyme de chacun des schémas $S \Longleftrightarrow R$, $(\text{non } R\ ) \Longleftrightarrow (\text{non } S\ )$, $(\text{non } S\ ) \Longleftrightarrow (\text{non } R\ )$.

La "signification" naïve de ces deux signes ne s'éclaire qu'en liaison avec la notion de "relation vraie" (cf. au § 2, n°1, la définition des mots "entraîne" et "équivalente") .

On se gardera de tomber dans l'erreur grossière qui consiste à assimiler la négation de $(\underline{R} \Rightarrow \underline{S})$ à la relation $(\underline{S} \Rightarrow \underline{R})$.

Enfin, nous introduirons le signe (...), qui permet de former une relation suivant le schéma

(20) $\qquad (\forall \ldots)\, \underline{R}$

où $\underline{R}$ peut être remplacée par une relation quelconque. On utilise de nouveau ce schéma concurremment à tous les schémas antérieurs, ce qui permet toujours de définir de la même manière des schémas complexes et leurs cadres d'ordres successifs. La règle de définition associée fait alors correspondre à une relation formée suivant un tel schéma complexe une des relations définies comme suit : dans chaque cadre d'ordre un où figure une relation formée suivant le schéma (20), on remplace cette relation par la relation $\underline{R}$ où on <u>quantifie</u> (dans un ordre quelconque) <u>tous</u> les arguments libres de $\underline{R}$ par le signe $\forall$, s'il existe des

des arguments libres dans $\underline{R}$; dans le cas contraire, on remplace la relation formée suivant le schéma (20) par $\underline{R}$. On procède ensuite de même pour tous les cadres successifs. Ici, nous avons bien <u>plusieurs</u> relations ne contenant plus le signe ($\forall$ ...) qui sont fournies par la règle de définition, mais il est clair que ces relations ont toutes mêmes arguments libres (règle f_3) et sont toutes synonymes, en vertu de l'application répétée des règles s_{8a} , s_2 et s_3 .

On observera que cette règle impose aux schémas complexes qui contiennent le signe ($\forall$ ...) certaines conditions pour qu'on puisse former une relation suivant ce schéma ; par exemple, dans le schéma ($\exists$ x)(($\forall$ ...) $\underline{R}$), on ne peut remplacer $\underline{R}$ par une relation où x serait libre. En fait, nous n'utiliserons le signe ($\forall$ ...) que dans les schémas où ce signe n'est contenu dans <u>aucun cadre</u> ;sa présence n'impose alors aucune restriction aux relations qu'on peut substituer dans le schéma aux lettres de remplacement.

Toutes les abréviations introduites dans ce n° sont dites <u>abréviations logiques</u> ;nous en introduirons d'autres au § 3 .

§ 2. <u>Les relations vraies</u>.

<u>1. Les règles de déduction fondamentales</u>.

Comme nous l'avons déjà dit, certaines relations sont qualifiées de <u>vraies</u> (sur les rapports entre le sens "naïf" de ce mot et le sens qu'il a en Mathématique formalisée, cf. Introduction). Alors que nous avons donné au § 1 des règles (que nous complèterons par la suite) permettant toujours de reconnaître si un assemblage donné de signes mathématiques est ou non une relation, on ne connaît pas de règle permettant <u>toujours</u> de reconnaître si un tel assemblage est une relation vraie. Nous nous bornerons à donner certains schémas de relations dont nous poserons comme <u>règle</u> qu'ils deviennent des relations vraies chaque

chaque fois qu'on substitue aux lettres de remplacement qui y figurent, soit des relations *quelconques* (soumises aux seules restrictions vues au § 1, garantissant que le schéma devient effectivement une relation quand on y fait ces substitutions), soit des relations soumises à d'autres restrictions qu'on énonce en même temps que le schéma : ces schémas seront appelés *schémas de relations vraies*, et les règles correspondantes *règles de déduction*. Certaines de ces règles imposent la restriction que certaines des lettres de remplacement du schéma de relation correspondant doivent être remplacées par des relations *vraies* ; nous les distinguerons par la lettre d , les autres règles de déduction étant désignées par la lettre v (cf. n°2, remarque 2) .

Avant d'énoncer ces règles, nous adopterons quelques conventions de langage :

1° Nous dirons qu'une relation est *fausse* si sa négation est vraie.

> Pour autant qu'on puisse donner un sens à la phrase "telle relation n'est pas vraie" (cf. § 3, n°4), il faut noter que la phrase "la relation $\underline{R}$ est fausse" n'a pas du tout la même signification que la phrase "la relation $\underline{R}$ n'est pas vraie" ; voir à ce sujet la discussion qui suit la règle d_6 .

2° Etant données deux relations, nous dirons que la première *entraîne* la seconde si, en substituant la première à $\underline{R}$ et la seconde à $\underline{S}$ dans le schéma $\underline{R} \Rightarrow \underline{S}$, on obtient une relation vraie.

3° Etant données deux relations, nous dirons que la première est *équivalente* à la seconde si, en substituant la première à $\underline{R}$ et la seconde à $\underline{S}$ dans le schéma $\underline{R} \Leftrightarrow \underline{S}$, on obtient une relation vraie.

Par abus de langage, nous dirons qu'un schéma de relation en entraîne un autre (resp. est équivalent à un autre) si en substituant le premier schéma à $\underline{R}$ et le second à $\underline{S}$ dans le schéma $\underline{R} \Rightarrow \underline{S}$ (resp. $\underline{R} \Leftrightarrow \underline{S}$) on obtient un schéma de relation vraie.

On aura soin, dans ce qui suit, de distinguer soigneusement le schéma $\underline{R} \Rightarrow \underline{S}$ (resp. $\underline{R} \Leftrightarrow \underline{S}$) de la phrase " $\underline{R}$ entraîne $\underline{S}$ " (resp. " $\underline{R}$ est équivalente à $\underline{S}$ ") ; lorsqu'on écrit $\underline{R} \Rightarrow \underline{S}$ on n'entend nullement dire que cette relation soit vraie. La même observation est naturellement valable lorsqu'on remplace $\underline{R}$ et $\underline{S}$ par des schémas de relations quelconques.

Règle v_1 :((non $\underline{R}$) ou $\underline{R}$) est un schéma de relation vraie.

Règle d_1 : Une relation synonyme d'une relation vraie est vraie.

Règle d_2 : Si chacune des relations $\underline{R}$, $\underline{S}$ est vraie, la relation ($\underline{R}$ et $\underline{S}$) est vraie.

Règle d_3 : Si $\underline{R}$ est une relation vraie, $\underline{S}$ une relation quelconque, la relation ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) est vraie.

Règle d_4 (règle du syllogisme) : Si $\underline{R}$ est une relation vraie, et si $\underline{R}$ entraîne $\underline{S}$, $\underline{S}$ est une relation vraie.

Règle d_5 : Si une relation $\underline{R}$ est telle que l'argument x soit libre dans $\underline{R}$ ou n'y figure pas, et si en outre la relation obtenue en remplaçant x par y dans $\underline{R}$ est vraie (y étant nécessairement distinct des arguments liés dans $\underline{R}$) alors la relation ($\exists$ x)$\underline{R}$ est vraie.

Pour donner à cette règle un énoncé plus imagé, nous conviendrons d'introduire de nouveaux signes de remplacement tels que $\underline{R}\{x\}$, $\underline{R}\{x,y\}$, $\underline{R}\{x,y,z\}$, etc. , en convenant qu'un tel signe ne peut être remplacé que par une relation dans laquelle l'argument x (resp. les arguments x,y, les arguments x,y,z,etc.) n'est pas lié (ce qui signifie donc que x est libre dans la relation substituée, ou n'y figure pas) . En outre, en même temps que ces signes, nous introduirons des signes de remplacement tels que $\underline{R}\{y,y,z\}$, avec la convention que si $\underline{R}\{x,y,z\}$ a été remplacé par une certaine relation, $\underline{R}\{y,y,z\}$ doit être remplacé par la relation obtenue en substituant y à x dans cette relation.

Dans ces conditions, la règle d_5 peut s'énoncer ainsi :

<u>Si la relation</u> $\underline{R}\{y,y\}$ <u>est vraie, la relation</u> $(\exists x)\underline{R}\{x,y\}$ <u>est vraie</u>

Du point de vue "naïf", les six règles de déduction précédente n'ont pas besoin de justification, étant intuitivement "évidentes" quand on rend aux signes logiques fondamentaux leur "signification" usuelle (cf. Introduction).

<u>Règle</u> d_6 : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>est une relation vraie, la relation</u> $(\forall x)\underline{R}$ <u>est vraie</u>.

Du point de vue "naïf", cette règle n'a pas le même caractère que les autres : elle constitue en effet plutôt une définition du sens "naïf" des mots "relation vraie", qui ne sont pas communément employés. On sait en effet (cf. Introduction) qu'intuitivement, le mot "vrai" s'applique essentiellement à des "propositions", c'est-à-dire à des relations où on a donné des "valeurs déterminées" aux "variables" qui y figurent. La règle d_6 (jointe à la règle v_{21} que nous énoncerons plus loin) signifie intuitivement que l'on convient de dire qu'une relation est "vraie" lorsqu'en y donnant aux "variables" des "valeurs déterminées" "<u>de toutes les manières possibles</u>", on obtient toujours une "<u>proposition vraie</u>". Cette définition, fort commode en pratique, conduit toutefois à énoncer des résultats qui peuvent induire en erreur le lecteur habitué à ne penser qu'aux "propositions vraies" au sens naïf. Par exemple, en Arithmétique, la relation

n est pair ou n est impair est vraie, bien qu'<u>aucune</u> des relations

n est pair

n est impair

(dont chacune est la négation de l'autre) ne soit vraie (en admettant la non-contradiction de l'Arithmétique ; cf. § 3,n°4) : c'est que ces relations contiennent la variable libre n .

A ce propos, il convient de faire une remarque importante sur le "sens" qu'on peut attribuer au mot "ou" dans l'interprétation naïve de la Mathématique formalisée. Même lorsque les relations R , S ne contiennent aucun argument libre (autrement dit, sont des "propositions" au sens naïf), et que l'on a établi que (R ou S) est une relation vraie, aucune règle ne nous permet d'affirmer que, dans tous les cas, l'une au moins des relations R , S est vraie. En particulier, et malgré l'apparence suggérée par l'énoncé de la règle V_1 , aucune règle ne permet d'affirmer, en Mathématique formalisée, qu'une "proposition" (c'est-à-dire une relation sans argument libre) soit toujours vraie ou fausse : autrement dit, nous n'utilisons pas le principe logique connu sous le nom de "principe du tiers exclu" . En résumé, bien que les règles logiques qui gouvernent, en Mathématique formalisée, l'emploi du signe "ou" et du signe "non" dérivent manifestement d'une conception "naïve" où l'on admet le principe du tiers exclu, et où le sens de "(p ou q) est vraie" (p,q propositions) est que l'une au moins des propositions p,q est vraie (cf. Introduction), rien n'oblige à conserver cette conception lorsqu'on veut inversement donner une interprétation intuitive aux règles de la Mathématique formalisée.

On connaît d'ailleurs de nombreux exemples de propositions dont on ne sait pas démontrer, à l'heure actuelle, si elles sont vraies ou fausses (hypothèse de Riemann, hypothèse du continu, "grand théorème de Fermat" , etc.)(cf. § 3, n°4).

2. Les règles de déduction dérivées.

Les 7 règles de déduction que nous venons d'énoncer, jointes aux règles de synonymie, sont les seules règles que nous nous donnerons le droit d'utiliser pour écrire des relations vraies. Mais, au moyen de "schémas de démonstration" (cf. § 1, n°4) il est possible de "déduire" de ces règles fondamentales une foule d'autres règles de déduction : par exemple, quand on substitue dans le schéma ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) un schéma de relation vraie à $\underline{R}$ et un schéma de relation quelconque à $\underline{S}$, on obtient d'après la règle d_3 un schéma de relation vraie ; c'est ainsi, d'après v_1 que ((non $\underline{R}$) ou $\underline{R}$) ou $\underline{S}$ est un schéma de relation vraie. Au cours des démonstrations mathématiques, on rencontrera très souvent des schémas de cette nature ; il est commode de rassembler dans la liste suivante les plus importants d'entre eux pour éviter de recommencer chaque fois les mêmes raisonnements :

<u>Règle</u> d_7 : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>est une relation vraie, toute relation équivalente à</u> $\underline{R}$ <u>est vraie</u>.

<u>Règle</u> d_8 : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>est une relation quelconque</u>, $\underline{S}$ <u>une relation vraie</u>, $\underline{R}$ <u>entraîne</u> $\underline{S}$.

<u>Règle</u> d_9 : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>est une relation fausse</u>, $\underline{S}$ <u>une relation quelconque</u>, $\underline{R}$ <u>entraîne</u> $\underline{S}$.

<u>Règle</u> d_{10} : <u>Deux relations vraies sont équivalentes</u>.

<u>Règle</u> d_{11} : <u>Si</u> $\underline{S}$ <u>est une relation vraie</u>, ($\underline{R}$ et $\underline{S}$) <u>est équivalente à</u> $\underline{R}$.

<u>Règle</u> d_{12} : <u>Si</u> $\underline{S}$ <u>est une relation fausse</u>, ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) <u>est équivalente à</u> $\underline{R}$.

<u>Règle</u> d_{13} : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>entraîne</u> $\underline{S}$, ($\underline{R}$ et $\underline{T}$) <u>entraîne</u> ($\underline{S}$ et $\underline{T}$).

<u>Règle</u> d_{14} : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>entraîne</u> $\underline{S}$, ($\underline{R}$ ou $\underline{T}$) <u>entraîne</u> ($\underline{S}$ ou $\underline{T}$).

<u>Règle</u> d_{15} : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>entraîne</u> $\underline{S}$, $(\forall x)\underline{R}$ <u>entraîne</u> $(\forall x)\underline{S}$.

<u>Règle</u> d_{16} : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>entraîne</u> $\underline{S}$, $(\exists x)\underline{R}$ <u>entraîne</u> $(\exists x)\underline{S}$.

<u>Règle</u> d_{17} : <u>Si deux relations sont équivalentes, et si on les substitue successivement à la même lettre dans le même schéma</u> (chacune des autres lettres du schéma étant chaque fois remplacée par une <u>même</u> relation) <u>on obtient deux relations équivalentes</u>.

Règle d_{18} : Si R entraîne S et si S entraîne T, R entraîne T (règle de transitivité).

Règle d_{19} : Deux relations équivalentes à une même troisième sont équivalentes.

Règle d_{20} : Si $R\{x,y\}$ est vraie, $R\{x,x\}$ est vraie.

Règle d_{21} : Si $R\{x,y\}$ entraîne $S\{x,y\}$, $R\{x,x\}$ entraîne $S\{x,x\}$.

Règle d_{22} : Si $R\{x,y\}$ est équivalente à $S\{x,y\}$, $R\{x,x\}$ est équivalente à $S\{x,x\}$.

Règle v_2 : Deux relations synonymes sont équivalentes.

Règle v_3 : R est équivalente à R.

Règle v_4 : (R et R) est équivalente à R.

Règle v_5 : (R ou R) est équivalente à R.

Règle v_6 : (R et (R ou S)) est équivalente à R.

Règle v_7 : (R ou (R et S)) est équivalente à R.

Règle v_8 : ($R \Leftrightarrow S$) est équivalente à ((R et S) ou ((non R) et (non S))).

Règle v_9 : Si x ne figure pas dans R, $(\forall x) R$ est équivalente à R.

Règle v_{10} : Si x ne figure pas dans R, $(\exists x) R$ est équivalente à R.

Règle v_{11} : $(\forall x)(R$ et $S)$ est équivalente à $((\forall x) R$ et $(\forall x) S)$.

Règle v_{12} : $(\exists x)(R$ ou $S)$ est équivalente à $((\exists x) R$ ou $(\exists x) S)$.

Règle v_{13} : $((R \Rightarrow S)$ et $(R \Rightarrow T))$ est équivalente à $(R \Rightarrow (S$ et $T))$.

Règle v_{14} : $((R \Rightarrow T)$ et $(S \Rightarrow T))$ est équivalente à $((R$ ou $S) \Rightarrow T)$.

Règle v_{15} : (R ou (non R) ou) est un schéma de relation vraie.

Règle v_{16} : (R et S) entraîne R.

Règle v_{17} : R entraîne (R ou S).

Règle v_{18} : $R\{y,y\}$ entraîne $(\exists x) R\{x,y\}$.

Règle v_{19} : $(\forall x) R\{x,y\}$ entraîne $R\{y,y\}$.

Règle v_{20} : R entraîne $(\exists x) R$.

<u>Règle</u> v_{21} : $(\forall x)\underline{R}$ <u>entraîne</u> $\underline{R}$.

<u>Règle</u> v_{22} : $((\forall x)\underline{R}$ ou $(\forall x)\underline{S}))$ <u>entraîne</u> $(\forall x)(\underline{R}$ ou $\underline{S})$.

<u>Règle</u> v_{23} : $(\forall x)(\underline{R}$ ou $\underline{S})$ <u>entraîne</u> $((\forall x)\underline{R}$ ou $(\exists x)\underline{S})$.

<u>Règle</u> v_{24} : $((\exists x)\underline{R}$ et $(\forall x)\underline{S})$ <u>entraîne</u> $(\exists x)(\underline{R}$ et $\underline{S})$.

<u>Règle</u> v_{25} : $(\exists x)(\underline{R}$ et $\underline{S})$ <u>entraîne</u> $((\exists x)\underline{R}$ et $(\exists x)\underline{S})$.

<u>Règle</u> v_{26} : $(\exists x)((\forall y)\underline{R})$ <u>entraîne</u> $(\forall y)(\exists x)\underline{R})$.

<u>Règle</u> v_{27} : $(\forall y)\underline{R}\{y,y\}$ <u>entraîne</u> $(\forall y)((\exists x)\underline{R}\{x,y\})$.

Nous donnerons quelques-uns des "schémas de démonstrations" qui conduisent à ces règles, laissant au lecteur le soin de former de même les autres.

<u>Démonstration de</u> v_{17} <u>et</u> d_{12} .- La règle v_{17} signifie que ((non $\underline{R}$) ou ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$)) est vraie, ce qui résulte de la règle v_{13} , démontrée ci-dessus. Pour démontrer d_{12}, il suffit de prouver que ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) entraîne $\underline{R}$ lorsque $\underline{S}$ est fausse, puisque $\underline{R}$ entraîne ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) dans tous les cas. Or, la relation ((non ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$)) ou $\underline{R}$) est synonyme de (((non $\underline{R}$) et (non $\underline{S}$)) ou $\underline{R}$) d'après la règle s_{5b} ; elle est aussi synonyme de (((non $\underline{R}$) ou $\underline{R}$) et ((non $\underline{S}$) ou $\underline{R}$)) . Or, ((non $\underline{R}$) ou $\underline{R}$) est vraie d'après v_1 ; comme par hypothèse non $\underline{S}$ est vraie, ((non $\underline{S}$) ou $\underline{R}$) est vraie d'après d_3 ; la démonstration de d_{12} s'achève donc en utilisant les règles d_2 et d_1 . La règle d_{11} se déduit aussitôt de d_{12} par synonymie.

<u>Démonstration de</u> d_{18} <u>et</u> d_{19} .- D'après la définition de l'équivalence de deux relations et les règles d_2, v_{14} et d_4 , il suffit de démontrer d_{18} . Supposons donc que les relations ((non $\underline{R}$) ou $\underline{S}$) , ((non $\underline{S}$) ou $\underline{T}$) soient toutes deux vraies. Alors (règle d_2) il en est de même de leur conjonction, et par suite aussi (règle d_1) de la relation synonyme ((non $\underline{R}$) et (non $\underline{S}$)) ou ($\underline{S}$ et (non $\underline{S}$))

ou $(((\text{non } \underline{R}) \text{ ou } \underline{S}) \text{ et } \underline{T})$

Mais comme $(\underline{S} \text{ et } (\text{non } \underline{S}))$ est fausse, et $((\text{non } \underline{R}) \text{ ou } \underline{S})$ vraie, il résulte de d_{11} et d_{12} que la relation

$((\text{non } \underline{R}) \text{ et } (\text{non } \underline{S})) \text{ ou } \underline{T}$

est vraie ; elle est synonyme de

$((\text{non } \underline{R}) \text{ ou } \underline{T}) \text{ et } ((\text{non } \underline{S}) \text{ ou } \underline{T})$

et comme $((\text{non } \underline{S}) \text{ ou } \underline{T})$ est vraie, il en est de même de $((\text{non } \underline{R}) \text{ ou } \underline{T})$ d'après d_{11}, ce qui achève la démonstration.

<u>Démonstration de</u> v_{18}, v_{20}, d_{15} <u>et</u> v_{11}.- Considérons la relation $((\text{non } \underline{R}\{y,y\}) \text{ ou } \underline{R}\{x,y\})$; si on y substitue y à x, on obtient la relation $((\text{non } \underline{R}\{y,y\}) \text{ ou } \underline{R}\{y,y\})$ qui est vraie d'après v_1 ; d'après d_5, la relation

$(\exists x)((\text{non } \underline{R}\{y,y\}) \text{ ou } \underline{R}\{x,y\})$

est donc vraie ; mais d'après s_{12b}, cette dernière relation est synonyme de

$(\text{non } \underline{R}\{y,y\}) \text{ ou } ((\exists x) \underline{R}\{x,y\})$

qui est donc vraie, ce qui établit v_{18}.

Pour démontrer v_{20}, écrivons $\underline{R}\{x\}$ au lieu de $\underline{R}$, et soit y un argument ne figurant pas dans $\underline{R}$; d'après v_{18}, $\underline{R}\{x\}$ entraîne $(\exists y) \underline{R}\{y\}$; mais cette dernière relation est synonyme de $(\exists x) \underline{R}\{x\}$ d'après s_{13}.

Pour démontrer d_{15}, remarquons d'après v_{20} que $(\text{non } \underline{R}\{x\})$ entraîne $(\exists x)(\text{non } \underline{R}\{x\})$, et par suite aussi la relation synonyme $(\exists y)(\text{non } \underline{R}\{y\})$, où y est un argument ne figurant ni dans $\underline{R}$ ni dans $\underline{S}$. Par hypothèse, $((\text{non } \underline{R}) \text{ ou } \underline{S})$ est vraie ; il en est donc de même de $((\exists y)(\text{non } \underline{R}\{y\}) \text{ ou } \underline{S})$ d'après d_{14} ; la règle d_6 montre alors que $(\forall x)((\exists y)(\text{non } \underline{R}\{y\}) \text{ ou } \underline{S})$ est vraie ; mais cette relation est synonyme de

$(\exists y)(\text{non } \underline{R}\{y\}) \text{ ou } (\forall x) \underline{S}$

d'après s_{11a} ; enfin, d'après s_{13} et s_{6a} , cette dernière relation est synonyme de

$$(\text{non}((\forall x)\ \underline{R}\{x\}))\quad \text{ou}\quad (\forall x)\underline{S}$$

ce qui démontre d_{15} .

Enfin, pour établir v_{11}, il suffit de montrer successivement que $(\forall x)(\underline{R}$ et $\underline{S})$ entraîne $((\forall x)\underline{R}$ et $(\forall x)\underline{S})$ et que $((\forall x)\underline{R}$ et $(\forall x)\underline{S})$ entraîne $(\forall x)(\underline{R}$ et $\underline{S})$. Pour la première règle, il suffit, d'après la règle v_{16}, de prouver que $(\forall x)(\underline{R}$ et $\underline{S})$ entraîne chacune des relations $(\forall x)\underline{R}$, $(\forall x)\underline{S}$; mais comme $(\underline{R}$ et $\underline{S})$ entraîne chacune des relations $\underline{R}$, $\underline{S}$, cela résulte de la règle d_{15}. Pour la seconde règle, elle sera démontrée si nous montrons que la relation

$$((\forall x)(\underline{R}\ \text{et}\ \underline{S}))\ \text{ou}\ ((\exists x)(\text{non}\ \underline{R}))\ \text{ou}\ ((\exists x)(\text{non}\ \underline{S}))$$

est vraie. Or la relation

$$(\underline{R}\ \text{et}\ \underline{S})\ \text{ou}\ (\text{non}\ \underline{R})\ \text{ou}\ (\text{non}\ \underline{S})$$

synonyme de $((\underline{R}$ et $\underline{S})$ (non $(\underline{R}$ et $\underline{S})))$ est vraie d'après v_1. D'autre part, en écrivant $\underline{R}\{x\}$, $\underline{S}\{x\}$ au lieu de $\underline{R}$, $\underline{S}$, et désignant par y un argument ne figurant ni dans $\underline{R}$ ni dans $\underline{S}$, il résulte de v_{20} que (non $\underline{R}$) entraîne $(\exists y)(\text{non}\ \underline{R}\{y\})$, et que (non $\underline{S}$) entraîne $(\exists y)(\text{non}\ \underline{S}\{y\})$; d'après d_{14} et d_{18} , la relation $((\underline{R}$ et $\underline{S})$ ou (non $\underline{R}$) ou (non $\underline{S}$)) entraîne donc

$$(\underline{R}\ \text{et}\ \underline{S})\ \text{ou}\ ((\exists y)(\text{non}\ \underline{R}\{y\}))\ \text{ou}\ ((\exists y)(\text{non}\ \underline{S}\{y\}))$$

qui est par suite vraie ; d'après la règle d_6 , il en est de même de

$$(\forall x)((\underline{R}\ \text{et}\ \underline{S})\ \text{ou}\ ((\exists y)(\text{non}\ \underline{R}\{y\}))\ \text{ou}\ ((\exists y)(\text{non}\ \underline{S}\{y\})))$$

et cette dernière est synonyme de

$$((\forall x)(\underline{R}\ \text{et}\ \underline{S}))\ \text{ou}\ ((\exists x)(\text{non}\ \underline{R}\{x\}))\ \text{ou}\ ((\exists x)(\text{non}\ \underline{S}\{x\}))$$

d'après s_{11a} et s_{13} , ce qui achève la démonstration de v_{11} .

<u>Remarques</u>.- 1) Les règles v_{16} à v_{27} <u>n'ont pas de réciproque</u>, c'est-à-dire que les deux schémas qui figurent dans ces règles <u>ne sont pas équivalents</u> : de façon plus précise, si on ajoutait à notre système de règles une règle énonçant que deux de ces schémas sont équivalents, on obtiendrait une Mathématique où <u>toute relation serait vraie</u> (système "contradictoire" ; cf. § 3,n°4) .

Par exemple, supposons qu'on admette la règle : $(\exists\, x)\underline{R}$ entraîne $\underline{R}$; si on prend par exemple pour $\underline{R}$ la relation x=y il résulte des axiomes de l'égalité (chap.II, § 1) que la relation y=y est vraie, donc aussi la relation $(\exists\, x)(x=y)$ d'après la règle d_5 ; mais alors il résulterait de la règle d_4 que $\underline{R}$, c'est-à-dire x=y serait vraie, ce qui entraîne contradiction (tous les ensembles seraient réduits à un seul élément)(cf.exerc.1)

2) La plupart des règles notées par la lettre v énoncent que toute relation formée suivant un certain schéma A <u>entraîne</u> toute relation formée suivant un second schéma B (chaque lettre de remplacement étant, bien entendu, remplacée par la même relation dans les deux schémas). Lorsqu'il en est ainsi, il résulte de d_4 que si une relation formée suivant le schéma A est <u>vraie</u>,la relation formée suivant le schéma B (avec les mêmes substitutions) est vraie aussi ; mais ce dernier énoncé (qui est du type de toutes les règles notées par la lettre d) <u>n'a pas du tout la même signification</u> que la règle "A entraîne B" . De façon précise, si on remplaçait toutes les règles d , qui peuvent se mettre sous la forme "si A est vrai, B est vrai" par les règles "plus fortes" : "A entraîne B" qui leur correspondent, on aurait encore une Mathématique "contradictoire" ; c'est ce que montre l'exemple de la remarque 1 pour la règle d_6 , puisque si on admettait la règle : $\underline{R}$ entraîne $(\forall\, x)\underline{R}$, on en déduirait, en l'appliquant à la négation de $\underline{R}$, la règle :

$(\exists x)\mathbf{R}$ entraîne $\mathbf{R}$.

Il est remarquable toutefois que l'on puisse "renforcer" de cette façon certaines des règles notées par la lettre d : par exemple la règle v_2 "renforce" la règle d_1 , la règle v_{17} la règle d_3 et la règle v_{18} la règle d_5 ; on peut montrer de même qu'on peut "renforcer" ainsi les règles $d_4, d_7, d_8, d_9, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{18}$ et d_{19}, mais non $d_6, d_{15}, d_{16}, d_{20}, d_{21}$ et d_{22} (exerc. 2).

Exercices.- 1) Montrer que si on ajoute au système des règles de déduction une règle affirmant que deux des schémas qui figurent dans une quelconque des règles v_{16} à v_{27} sont équivalents, on obtient une Mathématique contradictoire.

2) Donner les schémas de démonstration des règles suivantes :

$$(\mathbf{R} \text{ et } (\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{S})) \Rightarrow \mathbf{S}$$

$$\mathbf{S} \Rightarrow (\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{S})$$

$$(\text{non } \mathbf{R}) \Rightarrow (\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{S})$$

$$\mathbf{S} \Rightarrow ((\mathbf{R} \text{ et } \mathbf{S}) \Leftrightarrow \mathbf{R})$$

$$(\text{non } \mathbf{S}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{S}) \Leftrightarrow \mathbf{R})$$

$$(\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{S}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \text{ et } \mathbf{T}) \Rightarrow (\mathbf{S} \text{ et } \mathbf{T}))$$

$$(\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{S}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{T}) \Rightarrow (\mathbf{S} \text{ ou } \mathbf{T}))$$

$$((\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{S}) \text{ et } (\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{T})) \Rightarrow (\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{T})$$

$$(\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{S}) \Rightarrow ((\mathbf{R} \text{ et } \mathbf{S}) \Leftrightarrow \mathbf{R}) .$$

Montrer qu'en "renforçant" l'une quelconque des règles $d_{15}, d_{16}, d_{20}, d_{21}, d_{22}$, on obtient une Mathématique contradictoire.

§ 3. Démonstrations et théories.

1. Les démonstrations mathématiques.

Comme nous l'avons dit au § 1, une démonstration mathématique est une succession de relations liées entre elles d'une certaine manière que nous allons décrire dans ce n° et le suivant ; dans l'exposé qui va suivre et qui s'applique à une démonstration quelconque, il nous sera commode de désigner par la lettre Δ une démonstration non spécifiée.

En principe, au début d'une démonstration Δ , on doit écrire tout d'abord :

1° un certain nombre de relations, pouvant contenir ou non des arguments libres

2° un certain nombre de schémas de relation, où les relations qu'on peut substituer aux lettres de remplacement doivent éventuellement satisfaire à certaines conditions explicitées en même temps que le schéma ; en outre, le schéma doit être tel que pour toute substitution (permise) de relations aux lettres de remplacement, la relation obtenue n'ait que des arguments <u>liés</u>.

On groupe ces relations et schémas de relations sous le nom <u>d'hypothèses</u> de la démonstration Δ .

En fait, comme nous le verrons au chap.II (§ § 1 et 3), il ne figure jamais que <u>deux</u> schémas de relations (qui seront énoncés explicitement au chap.II) dans les hypothèses d'une démonstration mathématiqu

Nous dirons qu'une relation est une <u>conjonction d'hypothèses</u> dans Δ si elle s'obtient en prenant la conjonction d'un certain nombre de relations qui sont, soit des relations figurant dans les hypothèses, soit des relations obtenues à partir des schémas de relations qui figurent dans ces hypothèses. Il est clair que, si $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont des conjonctions d'hypothèses, il en est de même de ($\underline{A}$ et $\underline{B}$) (à une synonymie près).

Ceci posé, nous dirons qu'une relation $\underline{R}$ est <u>vraie dans la démonstration</u> Δ , ou en abrégé, Δ <u>-vraie</u>, lorsqu'on a formé une conjonction d'hypothèses $\underline{A}$ telle que la relation $\underline{A} \Rightarrow \underline{R}$ soit <u>vraie</u> ; le plus souvent, tant qu'on reste dans une même démonstration on dira simplement, par abus de langage, que $\underline{R}$ est <u>vraie</u>, sans mentionner dans quelle démonstration, lorsqu'aucune confusion n'est possible.

On dira de même qu'une relation $\underline{R}$ est *fausse dans la démonstration* Δ, ou Δ*-fausse* (ou simplement *fausse*, par abus de langage) si la relation (non $\underline{R}$) est Δ-vraie. Toute conjonction d'hypothèses $\underline{A}$ est évidemment Δ-vraie d'après la règle v_1. Il en est de même de $(\exists x)\underline{A}$ d'après la règle v_{20}.

Pour éviter toute confusion, on dit parfois qu'une relation vraie (au sens du § 2) est une *identité logique*. Une identité logique est Δ-vraie dans toute démonstration Δ, d'après la règle d_3.

L'abus de langage précédent est justifié par le fait que la "déduction" de relations Δ-vraies les unes des autres se fait suivant des règles presque identiques aux "règles de déduction" des identités logiques, énoncées au § 2. On a en effet les 4 règles suivantes, qui sont respectivement les analogues des règles d_1. d_2, d_4 et d_6 :

Règle δ_1 : *Si* $\underline{R}$ *est* Δ*-vraie, et si* $\underline{S}$ *est synonyme de* $\underline{R}$, $\underline{S}$ *est* Δ*-vraie.*

Règle δ_2 : *Si chacune des relations* $\underline{R}$, $\underline{S}$ *est* Δ*-vraie*, ($\underline{R}$ et $\underline{S}$) *est* Δ*-vraie.*

Règle δ_3 : *Si* $\underline{R}$ *est* Δ*-vraie, et si* $\underline{R} \Rightarrow \underline{S}$ *est* Δ*-vraie,* $\underline{S}$ *est* Δ*-vraie.*

Règle δ_4 : *Si* $\underline{R}$ *est* Δ*-vraie, et si l'argument* x *ne figure pas dans les hypothèses de* Δ, $(\forall x)\underline{R}$ *est* Δ*-vraie.*

Donnons par exemple les schémas de démonstration de δ_3 et δ_4. Supposons que les deux relations $\underline{R}$, $\underline{R} \Rightarrow \underline{S}$ soient Δ-vraies ; cela signifie par définition qu'il existe deux conjonctions d'hypothèses $\underline{A}$, $\underline{B}$ telles que $\underline{A}$ entraîne $\underline{R}$ et que $\underline{B}$ entraîne ((non $\underline{R}$) ou $\underline{S}$) ; des règles

v_{16} et v_{13} on conclut que la conjonction d'hypothèses ($\underline{A}$ et $\underline{B}$) entraîne ($\underline{R}$ et ((non $\underline{R}$) ou $\underline{S}$) ; or, cette dernière relation est synonyme de (($\underline{R}$ et (non $\underline{R}$)) ou ($\underline{R}$ et $\underline{S}$)), et comme ($\underline{R}$ et (non $\underline{R}$)) est fausse, elle est équivalente à ($\underline{R}$ et $\underline{S}$) (règle d_{12}) ; on voit donc que ($\underline{A}$ et $\underline{B}$) entraîne ($\underline{R}$ et $\underline{S}$) et a fortiori (règles v_{16} et d_{18}) entraîne $\underline{S}$, qui est donc Δ -vraie.

De même, si $\underline{R}$ est Δ -vraie, il y a une conjonction d'hypothèses $\underline{A}$ telle que $\underline{A}$ entraîne $\underline{R}$; on en déduit (règle d_{15}) que $(\forall x)\underline{A}$ entraîne $(\forall x)\underline{R}$; mais comme x ne figure pas dans $\underline{A}$, $(\forall x)\underline{A}$ est équivalente à $\underline{A}$ (règle v_9), ce qui prouve que $\underline{A}$ entraîne $(\forall x)\underline{R}$, autrement dit que $(\forall x)\underline{R}$ est Δ -vraie.

On pourrait aussi énoncer les analogues des règles d_3 et d_5 , mais les règles v_{17} et v_{18} , jointes à ε_3 , en tiennent lieu. Convenons alors de dire que $\underline{R}$ *entraîne* $\underline{S}$ *dans la démonstration* Δ (resp. que $\underline{R}$ *est équivalente à* $\underline{S}$ *dans la démonstration* Δ) lorsque la relation $\underline{R} \Rightarrow \underline{S}$ (resp. $\underline{R} \Leftrightarrow \underline{S}$) est Δ -vraie. Alors, ce qui précède montre que *les règles* d_7 à d_{22} , v_2 *à* v_{27} *sont encore valables lorsqu'on remplace partout le mot "vraie" par "* Δ *-vraie", le mot "entraîne" par "entraîne dans la démonstration* Δ *", le mot "équivalente" par "équivalente dans la démonstration* Δ *", et que les arguments* x,y *ne figurent pas dans les hypothèses de* Δ .

Cela justifie l'abus de langage, analogue à celui qu'on a signalé plus haut, qui consiste à omettre la mention "dans la démonstration Δ" après l'emploi des mots "entraîne" et "est équivalente" ; nous ferons constamment cet abus de langage dans ce qui suit.

Pour éviter toute confusion, lorsque $\mathcal{R}$ entraîne $\mathcal{S}$ (resp. est équivalente à $\mathcal{S}$) au sens du § 2, on dira qu'elle entraîne $\mathcal{S}$ (resp. est équivalente à $\mathcal{S}$)" au sens absolu" . On notera que si $\mathcal{R}$ entraîne $\mathcal{S}$ au sens absolu, elle l'entraîne dans toute démonstration Δ , puisqu'une identité logique est toujours Δ -vraie.

2. Les quantificateurs typiques.

Nous n'avons pu étendre aux relations " Δ-vraies" les règles de déduction des identités logiques qu'avec une restriction qui concerne celles de ces règles où figurent des signes quantificateurs. Nous allons voir qu'on peut lever cette restriction, à condition de remplacer partout les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ par de nouveaux signes logiques que nous allons définir.

Supposons que l'argument x soit libre dans une relation faisant partie des hypothèses de Δ ; pour la commodité de l'exposé, nous désignerons dans ce qui suit cette relation par Θ ou $\Theta\{x\}$; on dit alors que dans la démonstration Δ , x est un argument du type déterminé par Θ si y est un autre argument, distinct des arguments de $\Theta\{x\}$, et tel que $\Theta\{y\}$ figure aussi dans les hypothèses de Δ , on dit que y est un argument du même type que x dans Δ ; on donne en général un même nom à tous les arguments d'un certain type figurant dans une démonstration (par exemple (chap.II, § 3) si Θ est la relation $x \in E$, les arguments de ce type seront dits "éléments de E") ; dans ce qui suit, nous dirons pour abréger que "x est de type Θ " et qu'il est introduit dans Δ par la relation $\Theta\{x\}$. Tous les arguments libres dans les hypothèses de Δ sont appelés les arguments typiques de Δ .

Supposons maintenant que dans Δ , l'argument x <u>ne figure dans aucune hypothèse distincte de</u> $\Theta\{x\}$. On <u>peut</u> alors introduire deux signes logiques abréviateurs, dits <u>quantificateurs typiques pour</u> x ; leur forme dépend de la relation Θ considérée ; dans ce qui suit, nous les désignerons par $\forall_{\Theta}$ et $\exists_{\Theta}$, étant entendu que toutes les règles énoncées pour ces signes s'appliqueront à tous les quantificateurs typiques explicitement introduits par la suite. En premier lieu, ils peuvent être utilisés, concurremment à tous les signes logiques introduits jusqu'ici, pour former des relations suivant les deux schémas

(1) $$(\forall_{\Theta}\, x)\underline{R}$$

(2) $$(\exists_{\Theta}\, x)\underline{R}$$

la relation substituée à $\underline{R}$ dans un tel schéma devant être telle que x n'y soit pas lié. On élargit de façon évidente, à l'aide de ces signes, les notions de schémas complexes, et de cadres d'ordres successifs, introduites au §1,n°2 . Les règles de définition associées aux deux signes précédents font alors correspondre à une relation formée suivant un schéma complexe quelconque, l'unique relation ne contenant plus ces signes, définie comme suit : dans chaque cadre d'ordre un du schéma initial où figure une relation formée suivant le schéma (1), resp. (2), on remplace ce schéma par

(3) $$(\forall x)(\text{non } \Theta \text{ ou } \underline{R})$$

resp.

(4) $$(\exists x)(\Theta \text{ et } \underline{R}) .$$

On procède ensuite de même pour les cadres d'ordre deux, puis pour ceux d'ordre trois, et ainsi de suite.

L'interprétation "naïve" de ces nouveaux signes logiques est claire : lorsqu'on quantifie l'argument x par un des signes $\forall$, $\exists$, on entend que l'"objet" que "représente" x reste totalement déterminé ;

au contraire, lorsqu'on le quantifie par un des signes $\forall_{\Theta}$, $\exists_{\Theta}$, on entend qu'il reste d'un "type" particulier, savoir, le "type d'objets" "caractérisé" par la relation Θ . On dira par exemple "quel que soit l'entier n" , "il existe un élément x de l'ensemble E" , "quelle que soit l'application u de E dans F" (cf.chap.II et III) ; dans chacune de ces phrases, il s'agit de "quantification typique". Ces exemples font voir en même temps que ce mode de "quantification" est beaucoup plus souvent employé que la quantification pure et simple.

Reprenons alors toutes les règles des §§ 1 et 2 où figurent des quantificateurs, et d'abord celles où un seul argument est quantifié. En premier lieu, aux règles de synonymie s_{6a}, s_{6b}, s_{11a}, s_{11b}, s_{12a}, s_{12b} , correspondent les suivantes :

Règle σ_{1a} : La relation non $((\forall_{\Theta}\ x)\underline{R})$ est synonyme de $(\exists_{\Theta}\ x)(\text{non}\ \underline{R})$.

Règle σ_{1b} : La relation non $((\exists_{\Theta}\ x)\underline{R})$ est synonyme de $(\forall_{\Theta}\ x)(\text{non}\ \underline{R})$.

Règle σ_{2a} : Si x ne figure pas dans $\underline{R}$, la relation $(\forall_{\Theta}\ x)(\underline{R}\ \text{ou}\ \underline{S})$ est équivalente à $(\underline{R}\ \text{ou}\ (\forall_{\Theta}\ x)\underline{S})$.

Règle σ_{2b} : Si x ne figure pas dans $\underline{R}$, la relation $(\exists_{\Theta}\ x)(\underline{R}\ \text{et}\ \underline{S})$ est équivalente à $(\underline{R}\ \text{et}\ (\exists_{\Theta}\ x)\underline{S})$.

Règle σ_{3a} : Si x ne figure pas dans $\underline{R}$, la relation $(\forall_{\Theta}\ x)(\underline{R}\ \text{et}\ \underline{S})$ est équivalente à $(\underline{R}\ \text{et}\ (\forall_{\Theta}\ x)\underline{S})$.

Règle σ_{3b} : Si x ne figure pas dans $\underline{R}$, la relation $(\exists_{\Theta}\ x)(\underline{R}\ \text{ou}\ \underline{S})$ est équivalente à $(\underline{R}\ \text{ou}\ (\exists_{\Theta}\ x)\underline{S})$.

Il est toujours sous-entendu que, dans ces règles, "équivalente" signifie "équivalente dans la démonstration Δ " .

Donnons par exemple le schéma de démonstration de σ_{3a} ; par définition $(\forall_{\Theta}\ x)(\underline{R}\ \text{et}\ \underline{S})$ est synonyme de

$$(\forall\ x)((\text{non}\ \Theta)\ \text{ou}\ (\underline{R}\ \text{et}\ \underline{S}))$$

et par suite de

$$(\forall x)(((\text{non } \Theta) \text{ ou } \underline{R}) \text{ et } ((\text{non } \Theta) \text{ ou } \underline{S})) ;$$

elle est donc (règle v_{11}) équivalente à

$$((\forall x)((\text{non } \Theta) \text{ ou } \underline{R})) \text{ et } ((\forall x)((\text{non } \Theta) \text{ ou } \underline{S})) ;$$

d'après l'hypothèse, la relation $(\forall x)((\text{non } \Theta) \text{ ou } \underline{R})$ est synonyme de $(\underline{R} \text{ ou } (\forall x)(\text{non } \Theta))$; d'autre part, la relation est vraie (dans Δ) puisque l'hypothèse Θ entraîne (au sens absolu) $(\exists x)\Theta$ (règle v_{20}) ; donc (règle d_{12}), $(\underline{R} \text{ ou } (\forall x)(\text{non } \Theta))$ est équivalente (dans Δ) à $\underline{R}$, ce qui achève le raisonnement.

D'autre part, la règle correspondant à d_6 est la suivante :

<u>Règle</u> δ_5 : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>est vraie</u>, $(\forall_\Theta x)\underline{R}$ <u>est vraie</u>.

Par hypothèse, il existe une conjonction d'hypothèses $\underline{A}$, <u>ne contenant pas x</u>, telle que $(\underline{A} \text{ et } \Theta)$ entraîne $\underline{R}$ (au sens absolu) ; autrement dit, $((\text{non } \underline{A}) \text{ ou } (\text{non } \Theta) \text{ ou } \underline{R})$ est une identité logique ; par suite (règle d_6)

$$(\forall x)((\text{non } \underline{A}) \text{ ou } (\text{non } \Theta) \text{ ou } \underline{R})$$

est une identité logique ; mais comme $\underline{A}$ ne contient pas l'argument x, cette relation est synonyme de

$$(\text{non } \underline{A}) \text{ ou } ((\forall x)((\text{non } \Theta) \text{ ou } \underline{R}))$$

et comme cette dernière est une identité logique, on voit que $\underline{A}$ entraîne (au sens absolu) $(\forall_\Theta x)\underline{R}$, ce qui signifie que cette dernière relation est Δ-vraie.

On constate alors que <u>les règles</u> $d_{15}, d_{16}, d_{17}, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}$ <u>sont encore valables quand on y remplace partout les signes</u> $\forall$, $\exists$ <u>par</u> $\forall_\Theta$, $\exists_\Theta$ <u>respectivement</u> (les mots "entraîne", "équivalente" signifiant toujours "entraîne dans Δ" et "équivalente dans Δ").

Montrons-le par exemple pour la règle v_{20} ; d'après cette règle, la relation (Θ et $\underline{R}$) entraîne (au sens absolu) $(\exists x)(\Theta \text{ et } \underline{R})$ mais comme Θ est Δ-vraie, (Θ et $\underline{R}$) est équivalente (dans Δ) à $\underline{R}$ (règle d_{11}); donc $\underline{R}$ entraîne (dans Δ) la relation $(\exists x)(\Theta \text{ et } \underline{R})$, c'est-à-dire $(\exists_{\Theta} x)\underline{R}$.

Notons aussi les deux règles suivantes :

<u>Règle</u> ω_1 : <u>la relation</u> $(\forall x)\underline{R}$ <u>entraîne</u> $(\forall_{\Theta} x)\underline{R}$.

<u>Règle</u> ω_2 : <u>La relation</u> $(\exists_{\Theta} x)\underline{R}$ <u>entraîne</u> $(\exists x)\underline{R}$.

En effet $\underline{R}$ entraîne (au sens absolu) ((non Θ) ou $\underline{R}$) (règle v_{17}), donc (règle d_{15}), $(\forall x)\underline{R}$ entraîne $(\forall x)((\text{non } \Theta) \text{ ou } \underline{R})$.

Passons à l'extension des règles où figurent <u>deux</u> quantifications d'arguments, et en premier lieu les règles de synonymie s_{8a} et s_{8b} . Nous supposerons que y est un <u>argument de type</u> Θ' dans Δ , ne figure dans <u>aucune</u> hypothèse de Δ autre que Θ' , et enfin que Θ est <u>distincte de</u> Θ' ; on a alors les deux règles :

<u>Règle</u> σ_{4a} : <u>La relation</u> $(\forall_{\Theta} x)((\forall_{\Theta'} y)\underline{R})$ <u>est synonyme de</u> $(\forall_{\Theta'} y)((\forall_{\Theta} x)\underline{R})$.

<u>Règle</u> σ_{4b} : <u>La relation</u> $(\exists_{\Theta} x)((\cancel{\forall}\,\exists_{\Theta'} y)\underline{R})$ <u>est synonyme de</u> $(\cancel{\forall}\,\exists_{\Theta'} y)((\cancel{\forall}\,\exists_{\Theta} x)\underline{R})$.

D'autre part, <u>dans les mêmes conditions</u>, la règle v_{26} est encore valable quand on remplace $(\exists x)$ par $(\exists_{\Theta} x)$ et $(\forall y)$ par $(\forall_{\Theta'} y)$.

En effet, $(\exists_{\Theta} x)((\forall_{\Theta'} y)\underline{R})$ est synonyme de

$$(\exists x)(\Theta \text{ et } ((\forall y)((\text{non } \Theta') \text{ ou } \underline{R})))$$

donc aussi de

$$(\exists x)(\forall y)(\Theta \text{ et } ((\text{non } \Theta') \text{ ou } \underline{R}))$$

puisque Θ , étant distincte de Θ' , ne contient pas y .

D'après v_{26}, cette relation entraîne (au sens absolu)

$$(\forall y)(\exists x)(\Theta \text{ et } ((\text{non } \Theta') \text{ ou } \underline{R}))$$

qui est synonyme de

$$(\forall y)(\exists x)((\Theta \text{ et } (\text{non } \Theta')) \text{ ou } (\Theta \text{ et } \underline{R}))\ ;$$

mais, d'après v_{12}, cette dernière relation est équivalente (au sens absolu) à

$$(\forall y)(((\exists x)(\Theta \text{ et } (\text{non } \Theta'))) \text{ ou } ((\exists x)(\Theta \text{ et } \underline{R})))\ ;$$

comme x ne figure pas dans Θ', la relation $(\exists x)(\Theta$ et $(\text{non } \Theta'))$, est synonyme de $((\text{non } \Theta')$ et $((\exists x)\,\Theta))$, et comme $(\exists x)\,\Theta$ est Δ-vraie, la relation $(\exists x)(\Theta$ et $(\text{non } \Theta'))$ est équivalente (dans Δ) à $(\text{non } \Theta)$; nous avons donc établi que $(\exists_{\Theta} x)((\forall_{\Theta'} y)\underline{R})$ entraîne (dans Δ)

$$(\forall y)((\text{non } \Theta') \text{ ou } ((\exists x)(\Theta \text{ et } \underline{R}))),$$

c'est-à-dire, par définition, $(\forall_{\Theta'} y)((\exists_{\Theta} x)\underline{R})$.

Reste enfin à donner les analogues des règles $d_{20}, d_{21}, d_{22}, v_{18}, v_{19}$ et v_{27}. Nous supposerons pour cela que y est *de même type que* x dans Δ, et ne figure dans *aucune* hypothèse de Δ autre que $\Theta\{y\}$; par abus de langage, nous noterons encore $\forall_{\Theta}$ et $\exists_{\Theta}$ les *quantificateurs typiques pour* y . Dans ces conditions, *les règles* $d_{20}, d_{21}, d_{22}, v_{18}, v_{19}$ *et* v_{27} *sont encore valables quand on y remplace partout les signes* $\forall$, $\exists$ *par* $\forall_{\Theta}$ *et* $\exists_{\Theta}$ *respectivement*.

Donnons par exemple le schéma de démonstration de l'analogue de v_{18} ; d'après v_{18}, la relation $(\Theta\{y\}$ et $\underline{R}\{y,y\})$ entraîne (au sens absolu) la relation

$$(\exists x)(\Theta\{x\} \text{ et } \underline{R}\{x,y\})$$

Mais comme $\Theta\{y\}$ est une hypothèse de Δ, $(\Theta\{y\}$ et $\underline{R}\{y,y\})$ est équivalente (dans Δ) à $\underline{R}\{y,y\}$, donc $\underline{R}\{y,y\}$ entraîne (dans Δ) la relation $(\exists_{\Theta} x)\underline{R}\{x,y\}$.

Nous pouvons maintenant achever de décrire une *démonstration*. Les hypothèses d'une démonstration Δ étant posées, on se propose de montrer qu'une certaine relation $\underline{R}$ est Δ-vraie. On doit pour cela (pour que la démonstration soit correcte) écrire successivement un certain nombre de relations Δ-vraies, chacune d'elles devant provenir des relations Δ-vraies écrites antérieurement, par application d'une des règles qui précèdent ; la dernière de ces relations doit être la relation $\underline{R}$ que l'on avait en vue, et qu'on appelle parfois la conclusion de la démonstration. Le plus souvent, on énonce la conclusion de la démonstration (soit avant, soit après celle-ci) en l'intitulant "théorème", ou "proposition" ou "corollaire", ou "lemme" etc. et en sous-entendant le plus souvent, dans un tel énoncé, que la relation est vraie. (cet emploi du mot "proposition" n'est naturellement plus conforme au sens d'où nous sommes partis dans l'Introduction).

3. Théories et axiomes.

Les démonstrations mathématiques se groupent en séries de démonstrations qui sont qualifiées de théories mathématiques. Dans chacune des démonstrations d'une même théorie, les hypothèses comprennent, d'une part un certain nombre de relations et schémas de relations qui sont les mêmes dans toutes les démonstrations de la théorie, et qu'on appelle respectivement les axiomes et schémas d'axiomes de la théorie ; d'autre part, un certain nombre de relations spéciales à la démonstration considérée, et dont chacune contient un nouvel argument libre ne figurant ni dans les axiomes ou schémas d'axiomes, ni dans les autres hypothèses de la démonstration. Ces dernières hypothèses se répartissent en un certain nombre de groupements, toutes celles d'un même groupement se déduisant d'une même relation $\Theta\{x\}$ en y remplaçant l'argument libre x par un certain nombre d'autres arguments (ne figurant dans aucune des autres hypothèses) ; conformément au langage introduit ci-dessus, on dit que ces arguments sont les arguments typiques d'un même type Θ qui interviendront dans la démonstration.

Par exemple, dans les démonstrations de la "théorie des nombres" (ou Arithmétique) on introduira des arguments "du type des entiers" (ou, comme on dira plus souvent, des "entiers arbitraires", "entiers génériques" ou "entiers quelconques" ou simplement des "entiers"), des arguments "du type des parties de l'ensemble des entiers" (ou simplement des "parties de l'ensemble des entiers"), "du type des applications de l'ensemble des entiers dans lui-même", "du type des nombres premiers", etc.

Remarques.- 1) Les arguments typiques d'une démonstration d'une théorie sur lesquels n'opèrent pas de quantificateurs typiques (par exemple ceux qui figurent dans plusieurs hypothèses à la fois) sont appelés arguments de base de la démonstration ; un argument qui est argument de base de toutes les démonstrations d'une théorie est dit argument de base de la théorie. La quantification (non typique) de tels arguments ne peut être utilisée qu'avec des précautions imposées par la restriction qui figure dans la règle δ_4, et qui empêche d'appliquer brutalement toutes les règles de déduction à des relations où interviennent de telles quantifications ; aussi s'abstient-on le plus souvent de quantifier ces arguments.

2) Le découpage d'une théorie en démonstrations est assez arbitraire et dépend des "théorèmes" sur lesquels on veut attirer l'attention : car rien n'empêche évidemment de fondre deux démonstrations d'une même théorie en une seule, à condition d'introduire suffisamment d'"arguments typiques" dans cette nouvelle démonstration. Si, dans plusieurs démonstrations d'une théorie, pour parvenir aux conclusions de ces démonstrations, il est commode, dans le déroulement des relations vraies intermédiaires, de passer constamment par une même relation R, il y aura avantage à isoler le raisonnement qui conduit à cette relation sous forme d'une démonstration ;

on ne le répètera plus alors dans les autres démonstrations où la relation $\underline{R}$ intervient (ce qui revient à ajouter $\underline{R}$ aux hypothèses de ces démonstrations).

3) Une théorie mathématique est toujours "en devenir" ; on ne peut la décrire complètement qu'<u>à un moment donné</u>, car rien ne permet de dire que de nouvelles démonstrations de la théorie ne seront pas formées par la suite : en d'autres termes on ne peut jamais dire qu'une théorie soit définitivement achevée.

On convient de dire que les relations vraies dans une démonstration d'une théorie $\mathcal{T}$ sont <u>vraies dans la théorie</u> $\mathcal{T}$ (ou, comme nous dirons aussi en abrégé, $\mathcal{T}$-<u>vraies</u>). Si, dans un "théorème" de la théorie figurent un certain nombre d'arguments qui sont de certains <u>types déterminés</u>, il faut avoir soin de le mentionner dans le commentaire ; on dira en général, avant d'énoncer la relation $\mathcal{T}$-vraie $\underline{R}$ qui constitue à proprement parler le "théorème" : "soit x un argument de type Θ ..." ou "si x est un argument de type Θ ..." et de même pour les autres arguments typiques.

Il ne s'agit là bien entendu que d'habitudes de langage, et on pourrait tout aussi bien supprimer $\Theta\{x\}$ des hypothèses de la démonstration, et énoncer au lieu de $\underline{R}$ la relation $(\Theta \Rightarrow \underline{R})$.

On dit qu'une théorie $\mathcal{T}'$ est <u>plus riche</u> qu'une théorie $\mathcal{T}$ si tous les axiomes (resp. schémas d'axiomes) de $\mathcal{T}$ sont aussi des axiomes (resp. schemas d'axiomes) de $\mathcal{T}'$; on dit encore dans ce cas que $\mathcal{T}'$ est une théorie <u>subordonnée</u> à $\mathcal{T}$, ou que $\mathcal{T}$ est une théorie <u>antécédente</u> à $\mathcal{T}'$. Il est clair que toute relation $\mathcal{T}$-vraie est aussi $\mathcal{T}'$-vraie. Dans ce Traité, toutes les théories seront subordonnées à la <u>théorie des ensembles</u> (cf.chap.II), ou à une théorie antécédente à la théorie des ensembles.

La distinction entre une théorie et des théories subordonnées est toujours aussi quelque peu arbitraire, car si une théorie $\mathcal{C}'$ subordonnée à $\mathcal{C}$ s'obtient par exemple en ajoutant aux axiomes de $\mathcal{C}$ un nouvel axiome $\underline{R}$, et si $\underline{S}$ est une relation vraie dans la théorie $\mathcal{C}'$, cela signifie qu'il y a une conjonction d'hypothèses $\underline{A}$ dans une démonstration de la théorie $\mathcal{C}$ telle que ($\underline{A}$ et $\underline{R}$) $\Rightarrow \underline{S}$ soit une identité logique . Comme cette relation est synonyme de $\underline{A} \Rightarrow (\underline{R} \Rightarrow \underline{S})$, il revient au même de dire que, <u>dans la théorie</u> $\mathcal{C}$, la relation $\underline{R}$ <u>entraîne</u> $\underline{S}$. En fait, l'une et l'autre interprétation sont utilisées ; le plus souvent on n'introduira la théorie subordonnée $\mathcal{C}'$ que lorsqu'il se trouvera que la relation $\underline{R}$ entraîne (dans la théorie $\mathcal{C}$) un assez grand nombre d'autres relations ; mais parfois il y aura avantage (du point de vue de l'interprétation intuitive) à introduire la théorie subordonnée $\mathcal{C}'$ même pour une seule démonstration. Un exemple bien connu est le "raisonnement par l'absurde" ; pour démontrer que $\underline{R}$ entraîne $\underline{S}$ dans $\mathcal{C}$, on remarque que $\underline{R} \Rightarrow \underline{S}$ est synonyme de (non $\underline{S}$) $\Rightarrow$ (non $\underline{R}$), on ajoute la relation (non $\underline{S}$) aux axiomes de $\mathcal{C}$, et on démontre que $\underline{R}$ est <u>fausse</u> dans la nouvelle théorie ainsi définie (cf. n°4).

4. Théories contradictoires.

Dans une théorie $\mathcal{C}$, si une relation $\underline{R}$ est <u>vraie et fausse à la fois</u>, toute autre relation $\underline{S}$ est $\mathcal{C}$-vraie (et par suite aussi $\mathcal{C}$-fausse) ; en effet ($\underline{R}$ et (non $\underline{R}$)) entraîne $\underline{S}$ au sens absolu, puisque ($\underline{R}$ et (non $\underline{R}$)) est fausse (au sens absolu) (règle d_9) ; la règle δ_3 montre alors que $\underline{S}$ est $\mathcal{C}$-vraie. On dit dans ce cas que la théorie $\mathcal{C}$ est <u>contradictoire</u>.

Le fait qu'une théorie $\mathcal{C}$ soit contradictoire peut encore s'interprèter de la façon suivante : comme ($\underline{R}$ et (non $\underline{R}$)) est $\mathcal{C}$-vraie, il y a une conjonction d'hypothèses $\underline{A}$ telle que $\underline{A} \Rightarrow$ ($\underline{R}$ et (non $\underline{R}$)) soit une identité logique ; comme cette relation est synonyme de ($\underline{R}$ ou (non $\underline{R}$)) $\Rightarrow$ (non $\underline{A}$), cette dernière est aussi une identité logique, et comme ($\underline{R}$ ou (non $\underline{R}$)) est une identité logique, la règle d_4 montre que (non $\underline{A}$) est une identité logique ; autrement dit, il y a une conjonction d'hypothèses dans la théorie $\mathcal{C}$ qui est <u>fausse</u> (au sens absolu). Si par exemple, il s'agit de la conjonction ($\underline{B}$ et $\underline{C}$ et $\underline{D}$), où $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ sont trois axiomes de $\mathcal{C}$, la relation (non $\underline{A}$) est synonyme de ($\underline{B}$ et $\underline{C}$) $\Rightarrow$ (non $\underline{D}$) ; on peut donc dire que si $\mathcal{C}_0$ est la théorie (moins riche que $\mathcal{C}$) obtenue en <u>supprimant</u> dans $\mathcal{C}$ l'axiome $\underline{D}$, la relation $\underline{D}$ est <u>fausse</u> dans la théorie $\mathcal{C}_0$. C'est cette interprétation que l'on suit dans le "raisonnement par l'absurde" décrit au n°3.

A un moment donné, il suffit de dresser la liste des relations qu'on a démontré être vraies dans une théorie, pour savoir si elle est ou non contradictoire. Toute différente est la question de savoir s'il est <u>possible</u> que, dans une théorie donnée, on démontre un jour qu'une relation est à la fois vraie ou fausse. Les réponses qu'on a tenté de donner jusqu'à présent à cette question relèvent d'un type d'argumentation distinct de la Mathématique formalisée, et auquel nous avons déjà fait allusion, le "raisonnement métamathématique" ; mais en dehors de quelques cas très simples (cf. exercice), l'application de ce mode de raisonnement nécessite d'importants développements qui sortent tout à fait de notre cadre ; aussi n'aborderons-nous pas ce sujet.

L'intérêt qu'on a longtemps porté à cette sorte de "démonstrations" est d'ordre plus philosophique que mathématique ; car l'interprétation donnée ci-dessus montre que, pour le mathématicien, il est plus intéressant de démontrer (mathématiquement) qu'une théorie est contradictoire, que de démontrer (métamathématiquement qu'elle ne l'est pas. De ce point de vue, le plus grand intérêt d'une "démonstration" de non-contradiction, est de rendre improbable le succès de toute tentative pour démontrer que la théorie est contradictoire, et par suite d'en détourner les mathématiciens Signalons en passant qu'à strictement parler, il se trouve assez fréquemment que certaines théories deviennent contradictoires, lorsqu'un choix défectueux de certains signes abréviateurs conduit, par application des règles relatives aux relations synonymes, à des relations à la fois vraies et fausses. Bien entendu, lorsqu'on s'aperçoit d'un fait de cette nature, on modifie le signe abréviateur responsable ou sa règle de définition; l'emploi de ces signes est aisni soumis à une révision constante, où seule la pratique peut servir de guide, car il est difficile de prévoir a priori, quand on introduit un nouveau signe, s'il entraînera ou non contradiction. C'est surtout dans le choix des "symboles fonctionnels" (chap.II, §1) que se présentent de tels dangers. Un exemple classique est la notation x^{y^z} qui, en principe, pourrait aussi bien désigner $x^{(y^z)}$ que $(x^y)^z$ d'après les règles des "symboles fonctionnels composés" (chap.II, §1). En fait, dans ce cas comme dans tout les cas analogues où le signe défectueux est cependant d'un emploi commode, on fixe son sens par une règle particulière et on se fie à la pratique des mathématiciens pour éviter les erreurs. A plus forte raison pourrait-on facilement tirer d'innombrables "contradictions" des "abus de langage" incessants dont font usage les mathématiciens pour rester lisibles (et dont nous signalerons les plus importants au fur et à mesure) si on prétendait oublier que ce ce sont précisément des abus, et leur appliquer brutalement les règles de la logique. Nous en verrons de nombreux exemples.

A la question de la "non-contradiction" de telle ou telle théorie se rattachent d'autres "problèmes" analogues. On rencontre souvent dans certaines théories, comme nous l'avons signalé (§ 2,n°1), des relations dont on n'arrive pas à prouver, ni qu'elles sont vraies, ni qu'elles sont fausses dans la théorie. On peut se demander si cet échec ne provient que d'un défaut d'ingéniosité de la part des mathématiciens qui se sont occupés de la question, et si un jour le doute pourra être levé par un savant plus perspicace (ce qui, en fait, s'est déjà maintes fois produit en pareil cas), ou si, au contraire, il se peut que dans une théorie $\mathcal{C}$, on soit dans l'impossibilité de prouver qu'une relation $\underline{R}$ soit vraie, et dans la même impossibilité de prouver qu'elle soit fausse. Cette question peut se poser d'une autre manière : dire que $\underline{R}$ est $\mathcal{C}$-vraie signifie, comme on l'a vue, que la théorie $\mathcal{C}'$ obtenue en ajoutant (non $\underline{R}$) aux axiomes de $\mathcal{C}$ est contradictoire. Pour affirmer qu'il est <u>impossible</u> de démontrer que $\underline{R}$ soit $\mathcal{C}$-vraie, et qu'il est également <u>impossible</u> de démontrer qu'elle soit $\mathcal{C}$-fausse, il faudrait prouver que les théories $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$, obtenues respectivement en ajoutant aux axiomes de $\mathcal{C}$ la relation (non $\underline{R}$) et la relation $\underline{R}$, sont <u>toutes deux non-contradictoires</u>.(*)

Du même ordre d'idées est la question suivante : quel sens doit-on attacher à la phrase "la relation $\underline{R}$ <u>n'est pas vraie</u> dans la théorie $\mathcal{C}$ " ? Au sens strict, elle peut seulement

---

(*) Pour une de ces propositions restées jusqu'à présent "douteuses", l'"hypothèse du continu généralisée" (cf.chap.IV, §), on a pu démontrer (métamathématiquement) qu'en l'ajoutant aux axiomes de la théorie des ensembles, on obtient une théorie non-contradictoire (cf.K.GODEL, Continuum hypothesis) ; on aurait donc prouvé qu'il est impossible de démontrer (en théorie des ensembles) qu'elle est vraie ni qu'elle est fausse, si on prouvait de même qu'en ajoutant sa négation aux axiomes de la théorie des ensembles, on obtient encore une théorie non contradictoire.

signifier qu'au moment où l'on parle, la relation R ne figure pas dans la liste des relations que l'on a démontré être $\mathcal{T}$-vraies. Mais en réalité, on lui attribue souvent un autre sens, savoir qu'on ne démontrera jamais que la relation R soit $\mathcal{T}$-vraie : cela équivaut naturellement à affirmer que la théorie $\mathcal{T}'$ obtenue en ajoutant (non R) aux axiomes de $\mathcal{T}$ est non contradictoire ; et si on a démontré que R est $\mathcal{T}$-fausse, l'affirmation qu'elle "n'est pas vraie" (au sens considéré) équivaut à dire que la théorie $\mathcal{T}$ elle-même est non contradictoire.

Signalons enfin qu'on rencontre des exemples de deux théories $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ telles que, si on admet que la théorie $\mathcal{T}$ n'est pas contradictoire, on peut être assuré que la théorie $\mathcal{T}'$ ne l'est pas non plus : c'est ce qui se passe lorsqu'on peut montrer que les axiomes de $\mathcal{T}'$ sont des relations $\mathcal{T}$-vraies ; en effet, si $\mathcal{T}'$ était contradictoire, un des axiomes R de $\mathcal{T}'$ serait tel que (non R) soit entraînée par les autres axiomes de $\mathcal{T}'$, et par suite (non R) serait $\mathcal{T}$-vraie ; mais comme R est aussi $\mathcal{T}$-vraie par hypothèse, $\mathcal{T}$ serait contradictoire.

Nous verrons de façon plus précise au chap. II, § 7 comment, par la notion de "structure", les axiomes d'une théorie peuvent être considérés comme des théorèmes d'une autre théorie : par exemple, les axiomes de la théorie des nombres réels peuvent être considérés comme des théorèmes de la théorie des nombres rationnels. Dans ce Traité, toutes les théories mathématiques que nous développerons seront ainsi "rattachées" à la Théorie des Ensembles ou à l'Arithmétique (qui lui est subordonnée) ; la "démonstration" de la non-contradiction de ces deux théories entraînerait donc la non-contradiction de toutes les autres.

<u>Exercice</u>.- On considère une "théorie" où on ne conserve, parmi les règles de formation, de synonymie et de déduction introduites dans ce chapitre, que celles où ne figure aucun quantificateur, et où on n'utilise aucun autre signe abréviateur, ni aucun remplacement d'argument si bien que toute relation de la théorie est formée à partir d'un certain nombre de relations données (parmi lesquelles figurent les axiomes), en les insérant dans les cadres d'ordre zéro d'un schéma où n'interviennent que les signes "non", "et", "ou". Montrer qu'une telle théorie n'est pas contradictoire. Pour cela, on associera à chacune des relations données l'un des signes +,- de sorte que le signe + soit associé à chacun des axiomes ; puis, à une relation formée suivant le schéma (non $\underline{R}$), on associera le signe + si à $\underline{R}$ est associé le signe - , et vice-versa ; à une relation formée suivant le schéma ($\underline{R}$ et $\underline{S}$) on associera le signe + si ce signe est associé à $\underline{R}$ et à $\underline{S}$, le signe - dans les autres cas ; enfin, à ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$) on associera le signe - si ce signe est associé à $\underline{R}$ et à $\underline{S}$, le signe + dans les autres cas. Prouver alors que la théorie n'est pas contradictoire en montrant qu'à une relation vraie est toujours associé le signe + .
