LIVRE I
THEORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE II (ETAT 4)
THEORIE DES ENSEMBLES ABSTRAITS

Rédaction n° 063

Nombre de pages : 55

Nombre de feuilles : 55

Livre I Chapitre II. Etat 4

Th. des Ensembles abstraits

63

LIVRE I

THEORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE II (Etat 4)

THÉORIE DES ENSEMBLES ABSTRAITS

Sommaire

Conformément aux décisions du Congrès d'Avril 1948, les §§ 4 à 7 du chap.II n'ont pas été rédigés à nouveau en Etat 4 .

CHAPITRE II (Etat 4)

THÉORIE DES ENSEMBLES ABSTRAITS.

§ 1. La relation d'égalité et les symboles fonctionnels.

La théorie des ensembles utilise trois sortes de relations primitives, les relations d'<u>égalité</u>, de <u>couplage</u> et d'<u>appartenance</u> ; ses axiomes et schémas d'axiomes (chap.I, § 3, n°3) se répartissent en trois groupements, chacun de ces groupements se rapportant plus particulièrement à une des trois sortes de relations primitives. Nous développerons d'abord la théorie (antécédente) où on n'introduit que le premier groupement d'axiomes et schémas d'axiomes, celui qui se rapporte aux relations d'<u>égalité</u> (§ 1) ; puis la théorie plus riche obtenue en leur ajoutant le groupement d'axiomes relatif aux relations de <u>couplage</u> (§ 2); enfin, aux § § 3 et 5 seront introduits les derniers axiomes et schémas d'axiomes de la théorie des ensembles et démontrées les principales propositions correspondantes.

<u>1. Les relations d'égalité.</u>

<u>Règle</u> f_4 : <u>L'assemblage de signes obtenu en écrivant deux arguments quelconques</u> (<u>distincts ou non</u>) <u>l'un à gauche et l'autre à droite du signe</u> = (qui se lit "égale"), <u>est une relation primitive, dite relation d'égalité</u>. <u>Les arguments qui figurent dans cette relation sont libres</u>.

Nous introduirons un nouveau signe abréviateur le signe $\neq$ (qui se lit "différent de") : tout assemblage obtenu en écrivant deux arguments, l'un à gauche, l'autre à droite de ce signe est une relation : la règle de définition de ce signe consiste à remplacer, dans tous les cadres d'ordre zéro d'un schéma où elles figurent, chaque relation telle que $x \neq y$ par non$(x=y)$, qui lui est donc synonyme.

La <u>théorie de l'égalité</u> est une théorie qui comporte un axiome :

(E_I) : $(\forall x)(x=x)$

et un schéma d'axiome

(S_I) : $(\forall \ldots)((x=y) \Rightarrow (\underline{R}\{x,y,x\} \Rightarrow \underline{R}\{x,y,y\}))$

D'après les règles v_{21} et d_{18}, on peut donc dire aussi que, <u>dans la théorie de l'égalité</u>, la relation $x=x$ est <u>vraie</u>, et le schéma

$$(x=y) \Rightarrow (\underline{R}\{x,y,x\} \Rightarrow \underline{R}\{x,y,y\})$$

est un <u>schéma de relation vraie</u>. Dans ce qui suit, conformément aux conventions du chap.I, §3, les mots "vraie", "entraîne", "équivalente" seront toujours employés dans le sens de "vraie (resp. entraîne, équivalente) dans la théorie de l'égalité". On peut donc dire que $x=y$ entraîne $(\underline{R}\{x,y,x\} \Rightarrow \underline{R}\{x,y,y\})$.

PROPOSITION 1.- <u>La relation</u> $x=y$ <u>est équivalente à</u> $y=x$.

Substituons successivement x et y à z dans $z=x$; d'après (S_I), $x=y$ entraîne ($x \neq x$ ou $y=x$) ; comme $x=x$ est vraie, ($x \neq x$ ou $y=x$) est équivalente à $y=x$ (règle d_{12}) ; donc (règle d_{18}) $x=y$ entraîne $y=x$. On montre de même que $y=x$ entraîne $x=y$.

Il résulte aussitôt de la prop.1 et du schéma (S_I) que, dans la théorie de l'égalité, la relation $x=y$, équivalente à $y=x$, entraîne $(\underline{R}\{x,y,y\} \Rightarrow \underline{R}\{x,y,x\})$; on en déduit (règle v_{13}) que <u>la relation</u> $x=y$ <u>entraîne</u> $(\underline{R}\{x,y,x\} \Leftrightarrow \underline{R}\{x,y,y\})$.

PROPOSITION 2.- <u>La relation</u> ($x=y$ et $y=z$) <u>entraîne</u> $x=z$.

Substituons successivement x et y à u dans la relation $u=z$; d'après (S_I), la relation $(x=y) \Rightarrow (x=z$ ou $y \neq z)$ est vraie ; mais elle est synonyme de ($x \neq y$ ou $y \neq z$ ou $x=z$), donc aussi de $(x=y$ et $y=z) \Rightarrow (x=z)$.

Des "schémas de démonstration" semblables à ceux que nous avons utilisés au chap.I, permettent de "déduire" du schéma (S_I) de nombreux autres schémas de relations vraies qu'on a très souvent à utiliser par la suite ; nous allons les énumérer dans ce n° et les suivants, sous forme de nouvelles règles.

<u>Règle</u> e_1 : <u>La relation</u> $(\underline{R}\{x,y,x\}$ et $x=y)$ <u>entraîne</u> $\underline{R}\{x,y,y\}$.

En effet, le schéma $((\underline{R}\{x,y,x\} \text{ et } x=y) \Rightarrow \underline{R}\{x,y,y\})$ est synonyme de $((x=y) \Rightarrow (\underline{R}\{x,y,x\} \Rightarrow \underline{R}\{x,y,y\}))$ comme on le vérifie aussitôt.

2. Relations fonctionnelles.

Nous dirons qu'une relation $\underline{R}\{x\}$ est <u>fonctionnelle par rapport à l'argument x</u> si x est <u>libre</u> dans cette relation, et si les deux relations

$$(\exists x)\ \underline{R}\{x\}$$

$$(\underline{R}\{x\} \text{ et } \underline{R}\{y\}) \Rightarrow (x=y)$$

sont vraies, lorsque y est un argument <u>distinct de tous les arguments</u> de $\underline{R}\{x\}$.

On énonce souvent la relation

$$(\exists x)\ \underline{R}\{x\} \text{ et } ((\underline{R}\{x\} \text{ et } \underline{R}\{y\}) \Rightarrow (x=y))$$

sous la forme : <u>il existe un x et un seul tel que</u> $\underline{R}\{x\}$. Cet énoncé fixe en même temps l'interprétation "naïve" de cette relation.

D'après cette définition, si $\underline{R}\{x\}$ est une relation fonctionnelle par rapport à x, $\underline{R}\{z\}$ est fonctionnelle par rapport à z si z est distinct de tous les arguments de $\underline{R}\{x\}$ (règles s_{13} et d_{20}).

De même, si la relation $\underline{R}\{x,y,z\}$ est fonctionnelle par rapport à x il en est de même de $\underline{R}\{x,z,z\}$.

Si $\underline{S}\{x\}$ est une relation <u>équivalente</u> à une relation $\underline{R}\{x\}$ fonctionnelle par rapport à x et si x est libre dans $\underline{S}\{x\}$, $\underline{S}\{x\}$ est fonctionnelle par rapport à x, car en vertu de la règle d_{22}, $\underline{S}\{y\}$ est équivalente à $\underline{R}\{y\}$ lorsque y est distinct des arguments figurant dans l'une au moins des relations $\underline{R}\{x\}$, $\underline{S}\{x\}$.

<u>Règle</u> e_2 : <u>Si</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>est une relation fonctionnelle par rapport à</u> x, y <u>un argument ne figurant pas dans</u> $\underline{R}\{x\}$, <u>la relation</u> $(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{R}\{y\})$ <u>est équivalente à</u> $(\underline{R}\{x\}$ et $x=y)$.

En effet, ($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{R}\{y\}$) entraîne x=y par définition des relations fonctionnelles. D'autre part, d'après e_1 ,($\underline{R}\{x\}$ et x=y) entraîne $\underline{R}\{y\}$, donc ($\underline{R}\{x\}$ et x=y) entraîne ($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{R}\{y\}$).

L'utilité des relations fonctionnelles repose sur la <u>règle fondamentale</u> suivante :

<u>Règle</u> e_3 : <u>Si</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>est une relation fonctionnelle par rapport à</u> x $\underline{S}\{x\}$ <u>une relation quelconque</u> (où x n'est pas lié), <u>la relation</u> ($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) <u>est équivalente à</u> ($\forall$ x)(non $\underline{R}\{x\}$ ou $\underline{S}\{x\}$).

Du point de vue "naïf" , cela signifie que si l'<u>unique</u> "valeur" a de x pour laquelle $\underline{R}\{x\}$ est vraie, est telle que $\underline{S}\{x\}$ soit aussi vraie pour cette même valeur de x , alors, pour <u>toute</u> valeur de x , ou bien x≠a et alors $\underline{R}\{x\}$ est fausse, ou bien x=a et alors $\underline{S}\{x\}$ est vraie.

<u>Démonstration</u>.- La relation (non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$) est équivalente à ((non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$) et (non $\underline{R}$ ou $\underline{R}$)), puisque (non $\underline{R}$ ou $\underline{R}$) est vraie (règle d_{11}) ; elle est donc aussi équivalente à (non $\underline{R}$ ou ($\underline{R}$ et $\underline{S}$)), et par suite (règle d_{15}), la relation ($\forall$ x) (non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$) est équivalente à ($\forall$ x)(non $\underline{R}$ ou ($\underline{R}$ et $\underline{S}$)) ; mais d'après la règle v_{23}, ($\forall$ x)(non $\underline{R}$ ou ($\underline{R}$ et $\underline{S}$)) entraîne (($\forall$ x)(non $\underline{R}$) ou ($\exists$ x)($\underline{R}$ et $\underline{S}$)), et cette dernière relation est équivalente à ($\exists$ x)($\underline{R}$ et $\underline{S}$) puisque par hypothèse ($\forall$ x) (non $\underline{R}$) est fausse (règle d_{12}). Donc ($\forall$ x)(non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$) entraîne ($\exists$ x)($\underline{R}$ et $\underline{S}$).

Inversement, si y est distinct des arguments figurant dans l'une au moins des relations $\underline{R}\{x\}$, $\underline{S}\{x\}$, ($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) est équivalente à

(($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) et (non $\underline{R}\{x\}$ ou non $\underline{R}\{y\}$ ou x=y) puisque par hypothèse (non $\underline{R}\{x\}$ ou non $\underline{R}\{y\}$ ou $x=y$) est vraie (règle d_{11}). Elle est donc équivalente à ($\underline{R}\{x\}$ et non $\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) ou ($\underline{R}\{x\}$ et non $\underline{R}\{y\}$ et $\underline{S}\{x\}$)

ou ($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$ et $x=y$) .

Mais comme ($\underline{R}\{x\}$ et non $\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) est fausse,

($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) est encore équivalente à

($\underline{R}\{x\}$ et non $\underline{R}\{y\}$ et $\underline{S}\{x\}$) ou ($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$ et $x=y$)

Mais ($\underline{R}\{x\}$ et non $\underline{R}\{y\}$ et $\underline{S}\{x\}$) entraîne non $\underline{R}\{y\}$; de même ($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$ et $x=y$) entraîne ($\underline{S}\{x\}$ et $x=y$) , donc, d'après la règle e_1 , elle entraîne aussi $\underline{S}\{y\}$. Nous voyons ainsi que ($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) entraîne (non $\underline{R}\{y\}$ ou $\underline{S}\{y\}$) ; il en résulte (règles d_{15} et d_{16}) que ($\forall$ y)($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) entraîne ($\forall$ y)($\exists$ x)(non $\underline{R}\{y\}$ ou $\underline{S}\{y\}$). Mais, comme y ne figure pas dans ($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$), ($\forall$ y)($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) est équivalente à ($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) (règle v_9) ; de même, comme x ne figure pas dans (non $\underline{R}\{y\}$ ou $\underline{S}\{y\}$), ($\forall$ y)($\exists$ x)(non $\underline{R}\{y\}$ ou $\underline{S}\{y\}$) est équivalente à ($\forall$ y)(non $\underline{R}\{y\}$ ou $\underline{S}\{y\}$) (règles v_{10} et d_{15}). Enfin (règle s_{13}) cette dernière relation est synonyme de ($\forall$ x) (non $\underline{R}\{x\}$ ou $\underline{S}\{x\}$), ce qui achève de prouver que ($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) entraîne ($\forall$ x)(non $\underline{R}\{x\}$ ou $\underline{S}\{x\}$).

De la règle e_3 on déduit les suivantes, où on suppose une fois pour toutes que $\underline{R}\{x\}$ est une relation <u>fonctionnelle par rapport à x</u> :

<u>Règle</u> e_4 : <u>La relation</u> non (($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$)) <u>est équivalente à</u> ($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et non $\underline{S}\{x\}$).

<u>Règle</u> e_5 : <u>La relation</u> ($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et ($\underline{S}\{x\}$ et $\underline{T}\{x\}$)) <u>est équivalente à</u> (($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) et ($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{T}\{x\}$)).

Règle e_6 : La relation $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $(\underline{S}\{x\}$ ou $\underline{T}\{x\}))$ est équivalente à $((\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\})$ ou $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{T}\{x\}))$.

Règle e_7 : La relation $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $(\forall y)\underline{S}\{x,y\})$ est équivalente à $(\forall y)(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x,y\})$ pourvu que y ne figure pas dans $\underline{R}\{x\}$.

Règle e_8 : La relation $(\exists x)\ \underline{R}\{x\}$ et $(\exists y)\underline{S}\{x,y\}$ est équivalente à $(\exists y)(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x,y\})$ pourvu que y ne figure pas dans $\underline{R}\{x\}$.

Règle e_9 : Si x ne figure pas dans $\underline{S}$, la relation $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S})$ est équivalente à $\underline{S}$.

En effet, non $((\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}))$ est synonyme de $(\forall x)($non $\underline{R}\{x\}$ ou non $\underline{S}\{x\})$, et la règle e_4 se déduit donc de e_3 par synonymie. La règle e_6 est une conséquence immédiate de v_{12}, et la règle e_8 de s_{11b}. Pour établir e_5, remarquons que, d'après e_3, $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $(\underline{S}\{x\}$ et $\underline{T}\{x\}))$ est équivalente à $(\forall x)($non $\underline{R}\{x\}$ ou $(\underline{S}\{x\}$ et $\underline{T}\{x\}))$; il suffit alors d'utiliser la règle v_{11} et de nouveau e_3. De même d'après e_3, $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $(\forall y)\underline{S}\{x,y\})$ est équivalente à $(\forall x)($non $\underline{R}\{x\}$ ou $(\forall y)\underline{S}\{x,y\})$; il suffit alors d'appliquer s_{11a} et de nouveau e_3. Enfin, si x ne figure pas dans $\underline{S}$, $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S})$ est synonyme de $((\exists x)\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S})$, et comme $(\exists x)\underline{R}\{x\}$ est vraie, elle est équivalente à $\underline{S}$.

3. Les symboles fonctionnels.

Les règles e_4 à e_8 font apparaître que, lorsque $\underline{R}\{x\}$ est fonctionnelle par rapport à x, l'"opération logique" qui consiste à passer d'une relation $\underline{S}\{x\}$ à la relation $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\})$ est permutable (à l'équivalence près) aux cinq "opérations" fondamentales du chap.I, §1 : de façon précise, la règle e_6, par exemple, montre que si, à partir de deux relations $\underline{S}\{x\}$, $\underline{T}\{x\}$, on forme d'abord leur disjonction ($\underline{S}$ ou $\underline{T}$) puis qu'on substitue cette relation à $\underline{U}$ dans le schéma $(\exists x)(\underline{R}$ et $\underline{U})$, on obtient une relation équivalente à celle qu'on obtiendrait en formant d'abord les deux relations $(\exists x)(\underline{R}$ et $\underline{S})$, $(\exists x)(\underline{R}$ et $\underline{T})$ et en formant ensuite leur disjonction. De plus, la règle e_9 montre que si on applique l'"opération logique" considérée à une relation $\underline{S}$ où x ne figure pas, on obtient une relation équivalente à $\underline{S}$. Ce sont là des propriétés tout à fait analogues à celles dont jouit l'"opération" qui consiste à <u>remplacer un argument par un autre</u> dans une relation (chap.I, § 1,n°3). C'est ce qui permet d'utiliser, pour abréger l'écriture, la notation fondamentale des <u>symboles fonctionnels</u>, que nous allons maintenant introduire.

> Du point de vue naïf, "affirmer" la relation $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\})$, c'est dire que $\underline{S}\{x\}$ est vraie pour l'unique "valeur" a de x pour laquelle $\underline{R}\{x\}$ est vraie ; autrement dit, il y a lieu, de ce point de vue, d'assimiler la relation $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ ou $\underline{S}\{x\})$ à la relation $\underline{R}\{x\}$, où on a "<u>substitué l'objet déterminé a à la variable x</u>" ; l'analogie que nous venons de signaler est donc tout à fait naturelle. Bien entendu, en Mathématique formalisée, on ne peut donner aucun sens à la phrase que nous venons de souligner ; l'introduction des symboles fonctionnels a précisément pour but de donner l'équivalent "formaliste" de la "substitution d'un objet à une variable" dans la conception "naïve".

Lorsqu'une relation $\underline{R}\{x\}$ est fonctionnelle par rapport à x , on associe à cette relation un ou plusieurs signes abréviateurs, qu'on appelle <u>symboles fonctionnels</u> attachés à la relation $\underline{R}\{x\}$; lorsqu'on associe à une même relation plusieurs symboles fonctionnels, on dit que ces symboles sont <u>équivalents</u>. Les symboles fonctionnels (ou plutôt les signes analogues, dits <u>symboles fonctionnels typiques</u>, qui seront définis au n° 6) constituent la quasi-totalité des signes abréviateurs en Mathématique ; tout nouveau développement d'une théorie conduit à introduire de nouveaux symboles fonctionnels, et toute tentative pour imposer de façon rigide une méthode uniforme de formation des symboles fonctionnels n'aboutirait sans doute qu'à paralyser la Mathématique par une écriture illisible : il convient donc de laisser en ce domaine le champ à peu près libre à la fantaisie des mathématiciens et attendre que les tâtonnements de la pratique indiquent la combinaison de signes la mieux adaptée à l'usage quon en veut faire.

Les symboles fonctionnels suivants, exclusivement empruntés à ce Livre ;

$$(x,y)\ ,\ pr_1(z)\ ,\ \mathfrak{P}(X)\ ,\ \emptyset_E\ ,\ X\cap Y\ ,\ Y^X\ ,\ \prod_{\iota\in I} X_\iota\ ,\ x.y\ ,\ \sum_{\iota\in I} x_i\ ,\ n!$$

peuvent donner une idée de l'extrême variété des combinaisons de signes imaginées à cette fin.

Nous signalerons toutefois les trois principes suivants, généralement respectés (tant que n'intervient aucun abus de langage) dans la formation des symboles fonctionnels : 1° un symbole fonctionnel associé à une relation $\underline{R}\{x\}$ fonctionnelle par rapport à x <u>ne doit pas contenir x</u> ; 2° il doit contenir <u>tous les arguments libres dans</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>et autres que x</u> ; 3° il ne doit contenir <u>aucun argument ne figurant pas dans</u> $\underline{R}\{x\}$. Dans de nombreux cas, un symbole fonctionnel associé à $\underline{R}\{x\}$ contient aussi des arguments qui sont <u>liés</u> dans $\underline{R}\{x\}$; dans ce cas, il faut préciser que les arguments libres dans $\underline{R}\{x\}$ et distincts de x sont ce qu'on appellera les <u>arguments libres du symbole fonctionnel</u>, les autres arguments figurant dans le symbole étant dits <u>arguments liés</u> du symbole.

Par exemple, dans les symboles fonctionnels

$$\bigcup_{i \in I} X_i \quad , \quad \sum_{pq=n} u_p v_q \quad , \quad \int_a^b f(t)dt$$

les arguments i dans le premier symbole, p et q dans le second, t dans le troisième, sont <u>liés</u>, alors que X et I dans le premier, u,v,n dans le second, a,b,f dans le troisième, sont <u>libres</u>.

La <u>règle de formation</u> (chap.I, §1,n°5) associée à un symbole fonctionnel, est la suivante : une combinaison de signes où figure un certain symbole fonctionnel associé à une relation fonctionnelle $\underline{R}\{x\}$ est une relation si, en remplaçant (partout où il figure) ce symbole fonctionnel par l'argument x , supposé distinct de tous les arguments figurant dans la combinaison envisagée, on obtient une relation $\underline{S}\{x\}$, où <u>aucun argument libre dans</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>n'est lié</u> ; en d'autres termes, la relation envisagée doit provenir du <u>remplacement</u> de x par le symbole fonctionnel considéré, dans la relation $\underline{S}\{x\}$. La <u>règle de définition</u> du même symbole est alors la suivante : la relation initiale a mêmes arguments libres que la relation $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\})$ et elle lui est <u>synonyme</u>. En tenant compte des conventions faites ci-dessus, on peut encore dire que les arguments libres de la relation initiale sont ceux qui, ou bien sont libres dans $\underline{S}\{x\}$ et distincts de x , ou bien libres dans le symbole fonctionnel substitué à x .

Cette règle est jusitifée par les règles e_4 à e_2 : elles montrent par exemple que les deux opérations qui consistent d'une part à substituer à x un symbole fonctionnel dans la relation ($\underline{S}\{x\}$ ou $\underline{T}\{x\}$) , d'autre part à faire séparément la même substitution dans $\underline{S}\{x\}$ et dans $\underline{T}\{x\}$, puis former la conjonction des deux relations obtenues, donneront deux relations équivalentes, et de même pour tous les schémas de relation fondamentaux.

2

<u>Remarques</u>.- 1) La restriction concernant les arguments de $\underline{S}$ est indispensable si on veut éviter les contradictions. Par exemple, considérons la relation $x+y=z$, fonctionnelle par rapport à x , le symbole fonctionnel correspondant $z-y$, et la relation $(\exists y)(z-y=t)$; si on appliquait brutalement à cette relation les règles précédentes, on obtiendrait la combinaison $(\exists x)(x+y=z$ et $(\exists y)(x=t))$ qui est incorrecte, puisque y est libre dans $x+y=z$, et lié dans $(\exists y)(x=t)$; si on rendait la relation correcte en remplaçant y par y' dans $(\exists y)(x=t)$ (chap.I, §1,n°4), alors la relation obtenue serait équivalente à $(\exists x)(x+y=z$ et $x=t)$, donc à $(\exists x)(t+y=z)$, et finalement à $t+y=z$, ou encore à $z-y=t$, ce qui conduit à des conclusions absurdes. (cf. chap.I, § 2, n° 2, remarque 1).

On peut élargir la règle de formation donnée ci-dessus au cas où les arguments libres dans $\underline{R}\{x\}$ (et autres que x) sont liés dans $\underline{S}\{x\}$: il faut qu'on ait mis en évidence la formation de $\underline{S}\{x\}$ par application d'un schéma de relation complexe (chap.I, §1,n°2) tel que, dans les cadres d'ordre zéro du schéma n'apparaissent que des relations où aucun argument libre de $\underline{R}\{x\}$ n'est lié ; alors, il faut remplacer chacune des relations qui figurent dans ces cadres et qui contiennent le symbole fonctionnel associé à $\underline{R}\{x\}$, par la relation synonyme ne contenant plus ce symbole et formée suivant la règle énoncée ci-dessus. Dans l'exemple donné ci-dessus, on obtient ainsi la relation $(\exists y)(\exists x)(x=t$ et $x+y=z)$. Si dans $\underline{S}\{x\}$, certains arguments libres de $\underline{R}\{x\}$ étaient liés, non par quantification, mais en tant qu'arguments liés dans un <u>autre</u> symbole fonctionnel figurant dans $\underline{S}$, il faudrait commencer par "éliminer" cet autre symbole comme il vient d'être dit. Considérons par exemple la même relation fonctionnelle $x+y=z$ (par rapport à x) et la relation

$$z = \int_a^b f(z-y)\, g(y)dy$$

où y est lié : il faut commencer par l'écrire (*)

$$(\exists u)(z=u(b,z) \text{ et } u(a,z)=0 \text{ et } (\forall y)(\frac{\partial u}{\partial y} = f(z-y)g(y)))$$

avant d'éliminer le symbole z-y .

2) Lorsque, dans une relation, figurent <u>plusieurs</u> symboles fonctionnels distincts, il est possible en général, de les "éliminer" de la relation de <u>plusieurs</u> manières différentes, suivant l'ordre dans lequel on les élimine (on a vu dans la remarque précédente un exemple où cet ordre était au contraire imposé) ; nos règles posent que toutes les relations ainsi obtenues sont <u>synonymes</u>. Comme nous l'avons déjà signalé (chap.I, § 3,n°4), on ne peut jamais être certain, lorsqu'on introduit un nouveau symbole fonctionnel, que les règles de synonymie qui découlent ainsi de son emploi, concurremment aux règles générales du chap.I, n'entraîneront pas contradiction ; une telle éventualité est même toujours à craindre, et l'usage seul permet de se convaincre qu'elle est peu probable. En tout cas, il ne faudrait pas croire que les quelques principes énumérés ci-dessus immunisent de façon certaine les symboles fonctionnels qui y obéissent de tout risque de contradiction. On peut seulement dire que ces risques

(*) Nous employons ici pour simplifier des quantificateurs $\forall$, $\exists$ là où il faudrait bien entendu des quantificateurs typiques (cf. n°6) : dans la relation envisagée, x,y,z,a,b sont des arguments du type des nombres réels, f,g des arguments du type "fonction numérique continue d'une variable réelle" , u un argument du type "fonction numérique continûment différentiable de deux variables réelles" .

seraient beaucoup plus probables si on ne se conformait pas aux dits principes.

2 3) On aura soin de ne pas confondre la notion de <u>symbole fonctionnel</u> avec celle de <u>fonction</u>, qui est toute différente et sera définie plus loin (§ 4).

<u>Exemple de relation fonctionnelle : la relation d'égalité</u>. Une relation d'égalité $x=y$ est <u>fonctionnelle par rapport à x</u> . En effet, comme $y=y$ est vraie, il résulte de la règle v_{18} que $(\exists x)(x=y)$ est vraie ; d'autre part, d'après les prop.1 et 2 , la relation ($x=y$ et $x'=y$) entraîne $x=x'$. D'après ce que nous venons de dire, il faudrait associer à la relation $x=y$ un symbole fonctionnel particulier ; nous allons voir qu'on peut s'en dispenser en vertu de la règle suivante :

<u>Règle</u> $e_{9\ \mathrm{bis}}$: <u>Si</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>ne contient pas</u> y , <u>la relation</u> $(\exists x)(x=y$ et $\underline{R}\{x\})$ <u>est équivalente à</u> $\underline{R}\{y\}$.

En effet, d'après e_1, ($x=y$ et $\underline{R}\{x\}$) entraîne $\underline{R}\{y\}$, donc $(\exists x)(x=y$ et $\underline{R}\{x\})$ entraîne $(\exists x)\,\underline{R}\{y\}$, et comme $\underline{R}\{y\}$ ne contient pas x , $(\exists x)\,\underline{R}\{y\}$ est équivalente à $\underline{R}\{y\}$. Inversement, d'après e_1 , (non $\underline{R}\{x\}$ et $x=y$) entraîne (non $\underline{R}\{y\}$), donc $\underline{R}\{y\}$ entraîne ($\underline{R}\{x\}$ ou $x\neq y$) ; par suite $(\forall x)\,\underline{R}\{y\}$ entraîne $(\forall x)(x\neq y$ ou $\underline{R}\{x\})$ qui, d'après e_3 est équivalente à $(\exists x)(x=y$ et $\underline{R}\{x\})$.

On peut encore dire, par abus de langage, que <u>y</u> est un <u>symbole fonctionnel</u> pour la relation d'égalité $x=y$ (fonctionnelle par rapport à x).

<u>4. Règles d'emploi des symboles fonctionnels.</u>

Dans ce qui suit, nous allons introduire, pour faciliter les énoncés, de nouveaux signes de remplacement ; si dans une règle figure une relation telle que $\underline{S}\{x,y,z\}$, et une relation telle que $\underline{R}\{x,y,\mathbf{u}\}$, fonctionnelle par rapport à x , le signe $\underline{S}\{f_{\underline{R}}, y, z\}$, ou $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\{y,u\}, y,z\}$ signifie, dans la règle considérée, la relation $\underline{S}\{x,y,z\}$ dans laquelle on a remplacé x par un symbole fonctionnel associé à la relation $\underline{R}\{x,y,t\}$. Il est toujours sous-entendu que l'on <u>peut</u> substituer $f_{\underline{R}}$ à x dans $\underline{S}$, c'est-à-dire qu'aucun argument libre dans $\underline{R}$ n'est lié dans $\underline{S}$.

Dans tout ce n°, il sera sous-entendu que $\underline{R}\{x\}$, ou $\underline{R}\{x,z\}$, ou $\underline{R}\{x,z,t\}$ désigne une relation <u>fonctionnelle par rapport à</u> x .

<u>Règle</u> e_{10} : <u>Si la relation</u> $\underline{S}\{x\}$ <u>est vraie, la relation</u> $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\}$ <u>est vraie</u>.

En effet, ($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) est alors équivalente à $\underline{R}\{x\}$ (règle d_{11}), donc ($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) est équivalente à ($\exists$ x) $\underline{R}\{x\}$ qui est vraie par hypothèse.

On déduit aussitôt de cette règle que, <u>si</u> $\underline{S}\{x\}$ <u>entraîne</u> (resp. <u>est équivalente à</u>) $\underline{T}\{x\}$, $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\}$ <u>entraîne</u> (resp. <u>est équivalente à</u> $\underline{T}\{f_{\underline{R}}\}$.

Si y est un argument distinct des arguments de $\underline{S}\{x\}$, nous avons vu ci-dessus que la relation $\underline{R}\{y\}$ est fonctionnelle par rapport à y ; en outre, si y <u>ne figure pas</u> non plus dans $\underline{S}\{x\}$, la relation ($\exists$ y)($\underline{R}\{y\}$ et $\underline{S}\{y\}$) est synonyme de ($\exists$ x)($\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\}$) ; ceci montre que $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\}$ est synonyme de la relation $\underline{S}\{y\}$ dans laquelle on substituerait un symbole fonctionnel attaché à la relation $\underline{R}\{y\}$; en d'autres termes, on peut encore considérer (dans le cas envisagé) $f_{\underline{R}}$ comme un symbole fonctionnel associé à la relation $\underline{R}\{y\}$.

Soit maintenant $\underline{R}\{x,z,t\}$ une relation fonctionnelle par rapport à x ; nous avons vu que $\underline{R}\{x,t,t\}$ est encore fonctionnelle par rapport à x . Soit alors $\underline{S}\{x,t\}$ une relation dans laquelle <u>ne figure pas z</u> ;

16

la relation $(\exists x)(\underline{R}\{x,t,t\}$ et $\underline{S}\{x,t\})$ n'est autre que la relation $(\exists x)(\underline{R}\{x,z,t\}$ et $\underline{S}\{x,t\})$ où on a remplacé z par t . On peut donc convenir (dans le cas envisagé) de considèrer comme symbole fonctionnel associé à la relation $\underline{R}\{x,t,t\}$ tout symbole associé à la relation $\underline{R}\{x,z,t\}$ <u>dans lequel on a remplacé z par t</u> . Si, dans les signes de remplacement introduits plus haut figurait le signe $f_{\underline{R}}\{z,t\}$ correspondant à la relation fonctionnelle $\underline{R}\{x,z,t\}$, le signe $f_{\underline{R}}\{t,t\}$ correspondra par définition à la relation fonctionnelle $\underline{R}\{x,t,t\}$.

<u>Règle</u> e_{11} : <u>La relation</u> $x=f_{\underline{R}}$ <u>est équivalente à</u> $\underline{R}\{x\}$.

Soit y un argument distinct des arguments de $\underline{R}\{x\}$; $\underline{R}\{y\}$ est fonctionnelle par rapport à y , et $x=f_{\underline{R}}$ est équivalente à $(\exists y)(x=y$ et $\underline{R}\{y\})$; mais d'après la règle e_2 , $(x=y$ et $\underline{R}\{y\})$ est équivalente à $(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{R}\{y\})$, donc $(\exists y)(x=y$ et $\underline{R}\{y\})$ est équivalente à $(\exists y)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{R}\{y\})$, et par suite aussi à $(\underline{R}\{x\}$ et $(\exists y)\underline{R}\{y\})$; mais $(\exists y)\underline{R}\{y\}$ est vraie, d'où la règle par application de d_{11} .

<u>Règle</u> e_{12} : <u>La relation</u> $\underline{R}\{f_{\underline{R}}\}$ <u>est vraie</u>.

En effet, $\underline{R}\{f_{\underline{R}}\}$ est équivalente à $(\exists x)(\underline{R}$ et $\underline{R})$ donc (règle v_4) à $(\exists x)\underline{R}$, qui est vraie par hypothèse.

<u>Règle</u> e_{13} : <u>La relation</u> $(\forall x)\,\underline{S}\{x\}$ <u>entraîne</u> $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\}$.

<u>Règle</u> e_{14} : <u>La relation</u> $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\}$ <u>entraîne</u> $(\exists x)\,\underline{S}\{x\}$.

En effet, comme $\underline{S}$ entraîne (non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$) (règle v_{17}), $(\forall x)\underline{S}$ entraîne $(\forall x)$(non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$) et cette dernière est équivalente à $(\exists x)(\underline{R}$ et $\underline{S})$ d'après e_3 ; raisonnement encore plus simple pour e_{14} .

<u>Règle</u> e_{15} : <u>La relation</u> $(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{x\})$ <u>est équivalente à</u> $(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\})$.

En effet, $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\}$ est synonyme de $(\exists x)(\underline{R}$ et $\underline{S})$, et $(\underline{R}$ et $\underline{S})$ entraîne $(\exists x)(\underline{R}$ et $\underline{S})$; comme $(\underline{R}$ et $\underline{S})$ entraîne $\underline{R}$ (règle v_{16}), $(\underline{R}$ et $\underline{S})$ entraîne $(\underline{R}$ et $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\})$ (règle v_{13}).

Inversement, $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\}$ est équivalente à $(\forall x)$ (non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$), donc entraîne (non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$) ; par suite $(\underline{R}$ et $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\})$ entraîne $(\underline{R}$ et (non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$)), qui est synonyme de (($\underline{R}$ et non $\underline{R}$) ou ($\underline{R}$ et $\underline{S}$)) ; mais cette dernière relation est équivalente à $(\underline{R}$ et $\underline{S})$, puisque ($\underline{R}$ et non $\underline{R}$) est fausse (règle d_{12}).

<u>Règle</u> e_{16} : <u>Si</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>et</u> $\underline{S}\{x\}$ <u>sont toutes deux des relations fonctionnelles par rapport à</u> x <u>la relation</u> $f_{\underline{R}} = f_{\underline{S}}$ <u>est équivalente à</u> $(\forall x)(\underline{R}\{x\} \Leftrightarrow \underline{S}\{x\})$.

<u>Règle</u> e_{17} : <u>Si</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>et</u> $\underline{S}\{x\}$ <u>sont toutes deux des relations fonctionnelles par rapport à</u> x <u>, la relation</u> $f_{\underline{R}} = f_{\underline{S}}$ <u>entraîne la relation</u> $(\underline{T}\{f_{\underline{R}}\} \Leftrightarrow \underline{T}\{f_{\underline{S}}\})$.

En effet, comme $x=f_{\underline{S}}$ est équivalente à $\underline{S}\{x\}$ d'après e_{11}, $f_{\underline{R}} = f_{\underline{S}}$ est équivalente à $\underline{S}\{f_{\underline{R}}\}$, donc à $(\forall x)$(non $\underline{R}$ ou $\underline{S}$), elle-même synonyme de $(\forall x)(\underline{R} \Rightarrow \underline{S})$; comme $f_{\underline{R}} = f_{\underline{S}}$ est équivalente à $f_{\underline{S}} = f_{\underline{R}}$, elle est aussi équivalente à $(\forall x)(\underline{S} \Rightarrow \underline{R})$, donc aussi à $(\forall x)(\underline{R} \Leftrightarrow \underline{S})$. D'autre part, si y est distinct des arguments de $\underline{R}\{x\}$, $\underline{S}\{x\}$ et $\underline{T}\{x\}$, la relation $x=y$ entraîne $(\underline{T}\{x\} \Leftrightarrow \underline{T}\{y\})$ d'après le schéma (S_I) ; par suite $x=f_{\underline{S}}$ entraîne $(\underline{T}\{x\} \Leftrightarrow \underline{T}\{f_{\underline{S}}\})$, et finalement $f_{\underline{R}} = f_{\underline{S}}$ entraîne $(\underline{T}\{f_{\underline{R}}\} \Leftrightarrow \underline{T}\{f_{\underline{S}}\})$.

Il résulte de e_{16} que si $\underline{R}$ et $\underline{S}$ sont deux relations fonctionnelles <u>équivalentes</u>, la relation $f_{\underline{R}} = f_{\underline{S}}$ est <u>vraie</u>, et par suite, d'après e_{17}, les relations $\underline{T}\{f_{\underline{R}}\}$ et $\underline{T}\{f_{\underline{S}}\}$ sont <u>équivalentes</u> pour une relation quelconque $\underline{T}$; ceci permet, par abus de langage, d'associer le *même* symbole fonctionnel à deux relations fonctionnelles *équivalentes*. La règle e_{16} montre aussi que si $f_{\underline{R}}$ et $g_{\underline{R}}$ sont deux symboles fonctionnels distincts associés à la *même* relation fonctionnelle $\underline{R}$, la relation $f_{\underline{R}} = g_{\underline{R}}$ est *vraie*.

Règle e_{18} : *La relation* $t=u$ *entraîne* $f_{\underline{R}}\{t,t,u\} = f_{\underline{R}}\{u,t,u\}$.

D'après e_{16}, tout revient à montrer que $t=u$ entraîne $(\forall x)(\underline{R}\{x,t,t,u\} \Leftrightarrow \underline{R}\{x,u,t,u\})$, ce qui résulte aussitôt de ce que, d'après (S_I), $t=u$ entraîne $(\underline{R}\{x,t,t,u\} \Leftrightarrow \underline{R}\{x,u,t,u\})$.

Une relation de la forme $f_{\underline{R}} = f_{\underline{S}}$ est appelée une *équation*, dont $f_{\underline{R}}$ (resp. $f_{\underline{S}}$) est le *premier membre* (resp. *second membre*) ; nous définirons plus loin (§ 3, n°2) ce qu'il faut entendre par "solution" d'une équation.

5. Relations fonctionnelles composées.

Règle e_{19} : *Si* $\underline{R}\{x\}$ *est une relation fonctionnelle par rapport à* x, $\underline{S}\{x,y\}$ *une relation fonctionnelle par rapport à* y, *et si* y *ne figure pas dans* $\underline{R}\{x\}$, *la relation* $\underline{S}\{f_{\underline{R}},y\}$ *est fonctionnelle par rapport à* y.

En effet, la relation $(\exists y)\, \underline{S}\{f_{\underline{R}},y\}$ est vraie, puisque $(\exists y)\, \underline{S}\{x,y\}$ est vraie (règle e_{10}). De même, si z est un argument distinct de ceux de $\underline{R}\{x\}$ et de $\underline{S}\{x,y\}$, la relation $((\underline{S}\{x,y\}$ et $\underline{S}\{x,z\}) \Rightarrow (y=z))$ est vraie par hypothèse ; il en est de même (règle e_{10}) de la relation obtenue en substituant dans la précédente $f_{\underline{R}}$ à x, ce qui montre que la relation $((\underline{S}\{f_{\underline{R}},y\}$ et $\underline{S}\{f_{\underline{R}},z\}) \Rightarrow (y=z))$ est vraie.

Règle e_{20} : *Si les conditions de la règle* e_{19} *sont remplies, et si en outre* x *n'est pas un argument de* $\underline{T}\{y\}$, *la relation* $\underline{T}\{f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}}\}\}$ *est équivalente à la relation* $\underline{T}\{f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}},y\}\}$.

(Dans l'énoncé de cette règle on suppose implicitement que le symbole fonctionnel associé à $\underline{S}\{x,y\}$ est noté $f_{\underline{S}}\{x\}$; $\underline{T}\{f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}}\}\}$ signifie alors la relation $\underline{T}\{f_{\underline{S}}\{x\}\}$ où on substitue $f_{\underline{R}}$ à x).

En effet, la relation $\underline{T}\{f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}},y\}\}$ est par définition équivalente à $(\exists y)(\underline{S}\{f_{\underline{R}},y\}$ et $\underline{T}\{y\})$, c'est-à-dire, puisque $\underline{T}$ ne contient pas x , à la relation $(\exists y)(\underline{S}\{x,y\}$ et $\underline{T}\{y\})$ où on remplace x par $f_{\underline{R}}$; mais $(\exists y)(\underline{S}\{x,y\}$ et $\underline{T}\{y\})$ est par définition équivalente à $\underline{T}\{f_{\underline{S}}\{x\}\}$; d'où la règle.

En d'autres termes, on obtient deux relations équivalentes, d'une part en substituant à y dans $\underline{T}$ un symbole fonctionnel associé à la relation $\underline{S}\{f_{\underline{R}},y\}$ (fonctionnelle par rapport à y), d'autre part, en substituant à y dans $\underline{T}$ un symbole fonctionnel associé à $\underline{S}\{x,y\}$ (fonctionnelle par rapport à y), puis, dans la combinaison de signes obtenue, en substituant à x un symbole fonctionnel associé à $\underline{R}\{x\}$; mais, comme x ne figure pas dans $\underline{T}\{y\}$, cette relation $\underline{T}\{f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}}\}\}$ s'obtient aussi en remplaçant y dans $\underline{T}\{y\}$ par la combinaison de signes obtenue en remplaçant, <u>dans le symbole fonctionnel</u> associé à $\underline{S}$, x par le symbole fonctionnel associé à $\underline{R}$. La règle e_{20} montre donc qu'on peut considérer cette combinaison de signes comme un <u>symbole fonctionnel</u> attaché à la relation $\underline{S}\{f_{\underline{R}},y\}$; cette dernière est dite "relation fonctionnelle composée", et le symbole fonctionnel associé "symbole fonctionnel composé" ; le signe de remplacement $f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}}\}$ notera un tel symbole.

L'exemple du symbole fonctionnel "composé" x^{y^z} , déjà signalé au chap.I, § 3, montre que la règle précédente pourrait conduire à des contradictions : car x^{y^z} peut a priori aussi bien provenir de la substitution de y^z à u dans x^u , que de la substitution de x^y à u dans u^z . De même, sin x^2 peut a priori aussi bien provenir de la substitution de x^2 à y dans sin y , que de celle de sin x à y dans y^2 ; on évite ces confusions en <u>insérant le symbole fonctionnel</u> $f_{\underline{R}}$ <u>dans des parenthèses</u> quand on le substitue à x dans $f_{\underline{S}}$ (dans les exemples précédents, où il y a deux interprétations possibles du symbole sans parenthèses, on convient de conserver ce symbole avec une de ces deux interprétations ; les parenthèses étant utilisées pour l'autre, savoir, dans les exemples considérés, $(x^y)^z$ et $(\sin x)^2$, ce dernier étant aussi écrit $\sin^2 x$ par abus de langage, pour éviter l'emploi des parenthèses).

<u>Règle</u> e_{21} : <u>Soient</u> $\underline{R}\{x\}$, $\underline{R}'\{x\}$ <u>deux relations fonctionnelles par rapport à x , et ne contenant pas</u> y ; <u>soit</u> $\underline{S}\{x,y\}$ <u>une relation fonctionnelle par rapport à</u> y . <u>La relation</u> $f_{\underline{R}} = f_{\underline{R}'}$ <u>entraîne</u> $f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}}\} = f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}'}\}$.

En effet, $f_{\underline{R}} = f_{\underline{R}'}$ entraîne ($\underline{S}\{f_{\underline{R}},y\} \Leftrightarrow \underline{S}\{f_{\underline{R}'},y\}$) (règle e_{17}), donc $(\forall y)(f_{\underline{R}} = f_{\underline{R}'})$, qui est équivalente à $f_{\underline{R}} = f_{\underline{R}'}$, puisque $\underline{R}\{x\}$ et $\underline{R}'\{x\}$ ne contiennent pas y , entraîne la relation $(\forall y)(\underline{S}\{f_{\underline{R}},y\} \Leftrightarrow \underline{S}\{f_{\underline{R}'},y\})$; mais, d'après e_{16}, cette relation est équivalente à $f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}}\} = f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}'}\}$.

Soient $\underline{S}\{x,y\}$, $\underline{S}'\{x,y\}$ deux relations fonctionnelles par rapport à y , $\underline{R}\{x\}$ une relation fonctionnelle par rapport à x , ne contenant pas y . D'après la règle e_{15} , la relation ($\underline{R}\{x\}$ et $f_{\underline{S}}\{x\} = f_{\underline{S}'}\{x\}$) est équivalente à ($\underline{R}\{x\}$ et $f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}}\} = f_{\underline{S}'}\{f_{\underline{R}}\}$) ; cette règle est à l'origine de la méthode de "résolution" des équations connue sous le nom de "méthode de substitution" .

Soit maintenant $\underline{S}\{x,x',y\}$ une relation fonctionnelle par rapport à y , et soient $\underline{R}\{x\}$ (resp. $\underline{R}'\{x'\}$) une relation fonctionnelle par rapport à x (resp. x') ne contenant ni x' , ni y (resp. ni x , ni y);

21

alors $f_{\underline{R}}$ ne contient pas x' et $f_{\underline{R}'}$ ne contient pas x ; par suite, on obtient le même résultat en remplaçant x' par $f_{\underline{R}'}$ dans $\underline{S}\{f_{\underline{R}},x',y\}$ et x par $f_{\underline{R}}$ dans $\underline{S}\{x,f_{\underline{R}'},y\}$; on peut donc désigner sans ambiguité par $\underline{S}\{f_{\underline{R}},f_{\underline{R}'},y\}$ la relation ainsi obtenue : c'est une relation fonctionnelle en y (par double application de e_{19}), et on peut désigner par $f_{\underline{S}}\{f_{\underline{R}},f_{\underline{R}'}\}$ un symbole fonctionnel qui lui est associé.

5. <u>Les relations fonctionnelles biunivoques</u>.

On dit qu'une relation $\underline{B}\{x,y\}$ est une <u>relation fonctionnelle biunivoque</u> par rapport à x et à y, si elle est <u>à la fois</u> fonctionnelle par rapport à x et fonctionnelle par rapport à y. Désignons par $f_{\underline{B}}\{y\}$ un signe de remplacement pour un symbole fonctionnel attaché à $\underline{B}\{x,y\}$, considérée comme fonctionnelle <u>par rapport à x</u>.

<u>Règle</u> e_{22} : <u>Si</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>est une relation dans laquelle</u> y <u>ne figure pas la relation</u> $(\exists x)\underline{R}\{x\}$ <u>est équivalente à</u> $(\exists y)\underline{R}\{f_{\underline{B}}\{y\}\}$, <u>et la relation</u> $(\forall x)\underline{R}\{x\}$ <u>est équivalente à</u> $(\forall y)\underline{R}\{f_{\underline{B}}\{y\}\}$.

Démontrons par exemple la première règle. Par définition, $(\exists y)\underline{R}\{f_{\underline{B}}\{y\}\}$ est synonyme de $(\exists y)(\exists x)(\underline{B}\{x,y\}$ et $\underline{R}\{x\})$ et comme y ne figure pas dans $\underline{R}\{x\}$, elle est aussi synonyme de $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $(\exists y)\underline{B}\{x,y\})$. Mais comme par hypothèse la relation $(\exists y)\underline{B}\{x,y\}$ est <u>vraie</u>, $(\underline{R}\{x\}$ et $(\exists y)\underline{B}\{x,y\})$ est équivalente à $\underline{R}\{x\}$, d'où la règle.

<u>Règle</u> e_{23} : <u>Si</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>est une relation fonctionnelle par rapport à</u> x, <u>et ne contient pas</u> y, <u>la relation</u> $\underline{R}\{f_{\underline{B}}\{y\}\}$ <u>est fonctionnelle par rapport à</u> y.

En effet, cette relation est synonyme de $(\exists x)(\underline{R}\{x\}$ et $\underline{B}\{x,y\})$, donc de $\underline{B}\{f_{\underline{R}},y\}$, et cette dernière relation est fonctionnelle par rapport à y d'après la règle e_{19}.

22

Un exemple de relation fonctionnelle biunivoque est fournie par la relation d'égalité, en vertu de la prop.1 .

6. Relations fonctionnelles typiques.

Considérons une théorie $\mathcal{C}$ subordonnée à la théorie de l'égalité. Si, dans une démonstration Δ de cette théorie, x est un argument de type Θ , $\underline{R}\{x\}$ une relation dans laquelle x est libre, nous dirons, par extension, que $\underline{R}\{x\}$ est une relation fonctionnelle typique par rapport à x dans la théorie $\mathcal{C}$, si les relations

$$(\exists_{\Theta} x)\,\underline{R}\{x\}$$

$$(\underline{R}\{x\} \text{ et } \underline{R}\{y\}) \Rightarrow (x=y)$$

sont Δ -vraies, y étant un argument de même type que x dans Δ (autrement dit, dans la démonstration Δ , $\Theta\{x\}$ et $\Theta\{y\}$ figurent parmi les hypothèses, en sus des axiomes de $\mathcal{C}$ et éventuellement d'autres relations introduisant des arguments typiques).

On constate alors aisément (d'après les règles établies au chap.I § 3,n°2) que toute les règles relatives aux relations fonctionnelles (absolues) établies ci-dessus sont encore valables pour les relations fonctionnelles typiques, à condition que, dans ces règles : 1° les mots "vraie", "entraîne" , "équivalente" soient remplacés par " $\mathcal{C}$ -vraie" "entraîne dans la théorie $\mathcal{C}$ ", "équivalente dans la théorie $\mathcal{C}$ " ; 2° les quantificateurs $\forall$, $\exists$ portant sur l'argument typique x par rapport auquel est fontionnelle une relation, soient partout remplacés par $\forall_{\Theta}$, $\exists_{\Theta}$ respectivement ; 3° quand on remplace un argument typique par un autre dans une relation, cet argument doit être de même type que celui qu'il remplace. Si on a prouvé que $\underline{R}\{x\}$ est fonctionnelle dans une démonstration de $\mathcal{C}$ où certains des arguments libres de $\underline{R}\{x\}$ sont d'un type déterminé, il faudra préciser, chaque fois qu'on introduira un symbole fonctionnel correspondant à cette relation, que les arguments libres en question (qui doivent, comme on sait, figurer dans le symbole fonctionnel) sont des arguments d'un type déterminé ; on dira en outre que le symbole fonctionnel lui-même est du type Θ (ou <u>du même type que</u> x) . Les restrictions précédentes montrent alors qu'on ne pourra, au cours d'une démonstration, substituer un symbole fonctionnel typique à un argument dans une relation ou dans un symbole fonctionnel que s'il est du <u>même type</u> que l'argument qu'il remplace.

Il faut noter qu'une même relation peut être fonctionnelle par rapport à un argument donné lorsque cet argument est d'un certain type Θ, et ne plus l'être lorsque ce même argument est d'un autre type Θ' : cela résulte de ce que la relation $(\exists x)$ $(\Theta\{x\}$ et $\underline{R}\{x\})$ peut être vraie, sans que la relation $(\exists x)(\Theta'\{x\}$ et $\underline{R}\{x\})$ le soit. Par exemple, il résulte des axiomes de la théorie des ensembles (cf. § 3) que la relation $(\forall Z)((Z\subset X)\Leftrightarrow(Z\in Y))$ est fonctionnelle par rapport à Y lorsque Y est un argument "du type des ensembles" ; mais nous montrerons au chap.III que la même relation n'est plus fonctionnelle par rapport à Y lorsque Y est un argument "du type des parties de X" .

Notons à ce propos que la relation d'égalité $x=y$ est une relation fonctionnelle typique par rapport à x dans une théorie quelconque $\mathcal{C}$, pourvu que y soit <u>de même type</u> que x . En effet, la relation $((x=y)$ et $(x'=y))\Rightarrow(x=x')$ est vraie dans la théorie de l'égalité, donc dans $\mathcal{C}$; d'autre part, la relation $(\exists_{\Theta} x)(x=y)$, synonyme de $(\exists x)(\Theta\{x\}$ et $x=y)$, est équivalente (dans la théorie de l'égalité, donc aussi dans $\mathcal{C}$) à $\Theta\{y\}$, comme on l'a vu ci-dessus, et par hypothèse cette relation est vraie dans la théorie $\mathcal{C}$, puisque y est de même type que x .

Parmi les relations fonctionnelles typiques, il faut signaler particulièrement les relations $\underline{R}\{x\}$ fonctionnelles typiques par rapport à un argument x de type Θ, dans une théorie $\mathcal{C}$, et dans lesquelles, en dehors de x, les seuls arguments libres (éventuels) sont les <u>arguments de base</u> de la théorie $\mathcal{C}$ (chap.I, § 3,n°3). On dit qu'un symbole fonctionnel attaché à une telle relation est un <u>élément explicite du type</u> Θ.

Ce sont ces symboles qui, en Mathématique formalisée, jouent le rôle des "objets bien déterminés par une certaine propriété" du langage naïf. Par exemple, dans la théorie des "ensembles infinis", nous définirons au chap.III les éléments explicites 0,1,2,etc. (notés plus correctement $0_E, 1_E, 2_E$,etc.) du type des "puissances des parties de E" (E étant un argument du type "ensemble infini").

La règle e_{10}, appliquée à des éléments explicites, a une importance particulière : si en effet on remplace, dans les axiomes d'une théorie $\mathcal{C}$, les <u>arguments de base</u> par des éléments explicites (de même type) provenant d'une autre théorie $\mathcal{C}'$, on obtient des relations qui, d'après e_{10}, <u>entraînent, dans toute théorie subordonnée à</u> $\mathcal{C}$ <u>et</u> $\mathcal{C}'$, toutes les relations qu'on obtient en faisant les <u>mêmes</u> substitutions dans toutes les relations <u>vraies dans la théorie</u> $\mathcal{C}$. C'est ce qu'on appelle "appliquer la théorie $\mathcal{C}$ à la théorie $\mathcal{C}'$" (cf. § 7,n° 3).

Signalons enfin que nous rencontrerons parfois des relations $\underline{R}\{x\}$ telles que, <u>dans une théorie</u> $\mathcal{C}$, les relations $(\exists x)\ \underline{R}\{x\}$ et $((\underline{R}\{x\}$ et $\underline{R}\{y\}) \Rightarrow (x=y))$ soient vraies ; on dira que $\underline{R}\{x\}$ est une <u>relation fonctionnelle non typique</u> (par rapport à x) <u>dans la théorie</u> $\mathcal{C}$. Ici encore, toutes les règles relatives aux relations fonctionnelles absolues s'étendent avec les mêmes restrictions que ci-dessus pour les relations fonctionnelles typiques, sauf qu'ici en en général un symbole fonctionnel $f_{\underline{R}}$ associé à une telle relation ne peut être substitué qu'à un argument <u>non typique</u> dans une relation ou un symbole fonctionnel. Toutefois si, dans la théorie $\mathcal{C}$, on démontre que la relation $\Theta \{ f_{\underline{R}} \}$ est vraie, $f_{\underline{R}}$ pourra être substitué à un argument quelconque <u>de type</u> Θ ; on dira encore dans ce cas que $f_{\underline{R}}$ est un symbole fonctionnel <u>de type</u> Θ .

Par exemple, dans la théorie du couplage (§ 2), nous allons définir des symboles fonctionnels (x,y), $pr_1(z)$, $pr_2(z)$ associés à des relations fonctionnelles <u>non typiques</u>. Dans ces symboles, x et y sont des arguments non typiques, mais z un argument du type des <u>couples</u> ; on montrera d'autre part que le symbole (x,y) est lui aussi du type des couples.

<u>Exercice</u> .- Soit $\underline{U}\{x,y\}$ une relation dans laquelle x et y sont libres, telle que, dans la théorie de l'égalité, la relation $(\forall x)\, \underline{U}\{x,x\}$ soit vraie, et que la relation $\underline{U}\{x,y\}$ entraîne $(\underline{R}\{x,y,x\} \Rightarrow \underline{R}\{x,y,y\})$. Montrer que, dans la théorie de l'égalité, la relation $\underline{U}\{x,y\}$ est <u>équivalente</u> à $x=y$.

§ 2. La relation de couplage.

<u>1. Les relations de couplage.</u>

<u>Règle f_5</u> : <u>L'assemblage de signes</u> $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \middle| z\right)$, <u>ainsi que tout assemblage de signes obtenu en remplaçant dans l'assemblage précédent</u> x,y,z <u>par trois arguments quelconques, est une relation primitive, dite relation de couplage. Tout argument figurant dans une telle relation est libre.</u>

La <u>théorie du couplage</u> est une théorie sans argument de base, subordonnée à la théorie de l'égalité, et définie par trois nouveaux axiomes. Les deux premiers sont :

(E_{II}) : $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\middle|\, z\right)$

(E_{III}) : $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall z')((\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\middle|\, z\right) \text{ et } \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\middle|\, z'\right)) \Rightarrow (z=z'))$.

Ces deux axiomes s'interprètent aussitôt de la manière suivante : ils expriment que, dans la théorie du couplage, la relation "<u>il existe un z et un seul tel que</u> $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\middle|\, z\right)$" (§ 1, n°2) est vraie, et par suite que, dans la théorie du couplage, la relation est <u>fonctionnelle par rapport à z</u>. Nous prendrons pour symbole fonctionnel associé à cette relation la combinaison de signes (x,y), qu'on appelle <u>couple formé de x et de y</u>, où les arguments x et y sont donc libres ; d'après la règle e_{11}, la relation $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\middle|\, z\right)$ est <u>équivalente</u> (dans la théorie du couplage) à $z=(x,y)$, ce qui nous dispensera désormais d'écrire la relation $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\middle|\, z\right)$.

Le troisième axiome de la théorie du couplage est

(E_{IV}) : $(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')(((x,y)=(x',y')) \Rightarrow (x=x' \text{ et } y=y'))$.

Comme la relation $(x=x' \text{ et } y=y')$ entraîne $(x,y)=(x',y')$ (double application du schéma (S_I) à partir de la relation $(u,v)=(u,v)$ qui est vraie d'après (E_I) et e_{13}), on voit que, dans la théorie du couplage, la relation $(x,y)=(x',y')$ est <u>équivalente</u> à $(x=x' \text{ et } y=y')$. Dans ce qui suit, conformément aux conventions du chap.I, § 3, après les mots "vraie", "entraîne", "équivalente" il sera sous-entendus "dans la théorie du couplage".

2. Coordonnées d'un couple.

Dans les démonstrations de la théorie du couplage, nous dirons qu'un argument z est <u>du type des couples</u>, ou, plus brièvement, que l'argument z <u>est un couple</u>, s'il est introduit par la relation $(\exists u)(\exists v)(z=(u,v))$.

Cette définition prouve aussitôt que le symbole fonctionnel (x,y) est du <u>type des couples</u>, car la relation $(x,y)=(x,y)$ est vraie, donc aussi (règle d_5), $(\exists u)(\exists v)((x,y)=(u,v))$.

De façon générale, d'ailleurs, un symbole fonctionnel associé à une relation $R\{x,u,v\}$ fonctionnelle par rapport à x , est évidemment du type introduit par la relation $R\{x,u,v\}$ ou $(\exists u) R\{x,u,v\}$, ou $(\exists u)(\exists v) R\{x,u,v\}$, etc. (règle e_{12}).

PROPOSITION 1.- <u>Si z est un couple, la relation</u> $(\exists y)(z=(x,y))$ <u>est fonctionnelle par rapport à</u> x .

En effet, tout d'abord la relation $(\exists x)(\exists y)(z=(x,y))$ est vraie puisque z est un couple. D'autre part, la relation

(1) $\quad (\exists y)(z=(x,y))$ et $(\exists y)(z=(x',y))$

est équivalente à

$$(\exists y)(z=(x,y)) \text{ et } (\exists y')(z=(x',y'))$$

donc aussi à

$$(\exists y)(\exists y')(z=(x,y) \text{ et } z=(x',y'))$$

Comme $(z=(x,y)$ et $z=(x',y'))$ entraîne $(x,y)=(x',y')$ (§ 1,prop.2 et règle e_{13}), et que d'autre part $(x,y)=(x',y')$ entraîne $(x=x'$ et $y=y')$, on voit que la relation (1) entraîne

$$(\exists y)(\exists y')(x=x' \text{ et } y=y')$$

Elle entraîne donc aussi $(\exists y)(\exists y')(x=x')$, qui est équivalente à $x=x'$.

On démontre de la même manière que si z est un couple, la relation $(\exists x)(z=(x,y))$ est <u>fonctionnelle par rapport à</u> y . On prend comme symboles fonctionnels respectifs de ces deux relations les combinaisons de signes $pr_1(z)$, $pr_2(z)$, où z est un argument libre du type des couples; on les appelle respectivement <u>première coordonnée</u> et <u>seconde coordonnée du couple</u> z . La relation $(\exists y)(z=(x,y))$ est donc équivalente à $x=pr_1(z)$, et la relation $(\exists x)(z=(x,y))$ à $y=pr_2(z)$ (§ 1,règle e_{11}). Il en résulte que les relations $x=pr_1((x,y))$ et $y=pr_2((x,y))$ sont vraies (règles e_{10} et axiome (E_I)) .

28

PROPOSITION 2.- Si z est un couple, la relation $z=(x,y)$ est équivalente à $(x=pr_1(z)$ et $y=pr_2(z))$.

En effet, $z=(x,y)$ entraîne séparément chacune des relations $(\exists x)(z=(x,y))$, $(\exists y)(z=(x,y))$ (règle v_{20}), donc elle entraîne leur conjonction, c'est-à-dire $(x=pr_1(z)$ et $y=pr_2(z))$. Inversement, la relation $(x=pr_1(z)$ et $y=pr_2(z))$ est équivalente à

$$(\exists y')(z=(x,y')) \text{ et } (\exists x')(z=(x',y))$$

donc à

$$(\exists x')(\exists y')(z=(x',y) \text{ et } z=(x,y')) \tag{2}$$

Or, d'après (E_{IV}), $(z=(x',y)$ et $z=(x,y'))$ entraîne $x=x'$, donc $(z=(x',y)$ et $z=(x,y'))$ entraîne $z=(x,y)$ d'après (S_I), donc (2) entraîne $z=(x,y)$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- La relation $z=(pr_1(z),pr_2(z))$ est vraie.

Des axiomes de la théorie du couplage découlent plusieurs schémas de relations vraies, qui permettent, à volonté, de réduire ou d'augmenter le nombre des arguments libres d'une relation ; nous les énoncerons encore comme règles. Il y figure les quantificateurs typiques correspondant au type des couples, que nous noterons $\forall_{cp}$ et $\exists_{cp}$ respectivement.

Règle e_{24} : Si l'argument z est un couple et ne figure pas dans $\underline{R}\{x,y\}$, la relation $(\exists x)(\exists y)\underline{R}\{x,y\}$ est équivalente à $(\exists_{cp}z)\underline{R}\{pr_1(z), pr_2(z)\}$; la relation $(\forall x)(\forall y)\underline{R}\{x,y\}$ est équivalente à $(\forall_{cp}z)\underline{R}\{pr_1(z),pr_2(z)\}$.

En effet, la relation $\underline{R}\{pr_1(z),pr_2(z)\}$ est par définition équivalente à $(\exists x)(\exists y)(x=pr_1(z)$ et $y=pr_2(z)$ et $\underline{R}\{x,y\})$, donc (prop.2) à $(\exists x)(\exists y)(z=(x,y)$ et $\underline{R}\{x,y\})$. Comme z ne figure pas dans $\underline{R}\{x,y\}$, la relation $(\exists_{cp}z)\underline{R}\{pr_1(z), pr_2(z)\}$ est donc équivalente à

$(\exists x)(\exists y)(\underline{R}\{x,y\}$ et $(\exists_{cp} z)(z=(x,y)))$.

Mais nous avons vu que la relation $(\exists_{cp} z)(z=(x,y))$ est vraie puisque (x,y) est un symbole fonctionnel du type des couples d'où la première règle ; la seconde s'en déduit en appliquant la première à (non $\underline{R}$).

On déduit aussitôt de cette règle que si $\underline{R}\{x,y\}$ __entraîne__ (resp. est __équivalente à__) $\underline{S}\{x,y\}$, et si z ne figure dans aucune de ces deux relations, $\underline{R}\{pr_1(z),pr_2(z)\}$ __entraîne__ (resp. __est équivalente à__) $\underline{S}\{pr_1(z),pr_2(z)\}$, l'argument z étant un couple.

On peut ainsi __traduire__ en quelque sorte une relation vraie contenant deux arguments libres x,y, mais ne contenant pas z , en une nouvelle relation vraie ne contenant plus x ni y , mais contenant un nouvel argument libre z (du type des couples) : autrement dit, on peut __réduire__ ainsi successivement le nombre des arguments libres d'une relation vraie, jusqu'à l'amener, si on le désire, à être égal à __un__ .

Inversement, on a la règle suivante :

__Règle e_{25} : Si l'argument z est un couple et si les arguments x,y ne figurent pas dans__ $\underline{R}\{z\}$, __la relation__ $(\exists_{cp} z)\ \underline{R}\{z\}$ __est équivalente à__ $(\exists x)(\exists y)\ \underline{R}\{(x,y)\}$; __la relation__ $(\forall_{cp} z)\underline{R}\{z\}$ __est équivalente à__ $(\forall x)(\forall y)\ \underline{R}\{(x,y)\}$.

En effet, $\underline{R}\{(x,y)\}$ est par définition équivalente à $(\exists z)(z=(x,y)$ et $\underline{R}\{z\})$; donc $(\exists x)(\exists y)\ \underline{R}\{(x,y)\}$ est équivalente à

(3) $(\exists z)(\underline{R}\{z\}$ et $(\exists x)(\exists y)(z=(x,y)))$

puisque x et y ne figurent pas dans $\underline{R}\{z\}$; or, la relation (3) est par définition équivalente à $(\exists_{cp} z)\ \underline{R}\{z\}$.

On en déduit que si $\underline{R}\{z\}$ <u>entraîne</u> (resp. est <u>équivalente</u> à) $\underline{S}\{z\}$, (z étant un couple), et si x et y ne figurent pas dans ces deux relations, $\underline{R}\{(x,y)\}$ <u>entraîne</u> (resp. est <u>équivalente</u> à) $\underline{S}\{(x,y)\}$.

Notons enfin que, si z ne figure pas dans $\underline{R}\{x,y\}$ et est un couple, la relation $\underline{R}\{pr_1((x,y)), pr_2((x,y))\}$ est équivalente à $\underline{R}\{x,y\}$, et que, si x,y ne figurent pas dans $\underline{S}\{z\}$, z étant un couple, la relation $\underline{S}\{(pr_1(z),pr_2(z))\}$ est équivalente à $\underline{S}\{z\}$ (cor. de la prop. 2).

§ 3. La relation d'appartenance.

<u>1. Les relations d'appartenance</u>.

<u>Règle</u> f_6 : <u>L'assemblage de signes obtenu en écrivant deux arguments quelconques, l'un à gauche, l'autre à droite du signe</u> $\in$, (qui se lit "appartient à") <u>est une relation primitive, dite relation d'appartenance. Les arguments qui figurent dans cette relation sont libres</u>.

Nous introduirons un nouveau signe abréviateur, le signe $\notin$ (qui se lit "n'appartient pas à") : tout assemblage de signes obtenu en écrivant deux arguments, l'un à gauche, l'autre à droite de ce signe, est une relation : la règle de définition de ce signe consiste à remplacer, dans tous les cadres d'ordre zéro d'uns schéma où elles figurent, chaque relation telle que $x \notin y$ par non $(x \in y)$, qui lui est donc synonyme (ceci suppose implicitement que dans la relation d'où on est parti ne figuraient pas de symboles fonctionnels ; dans le cas contraire, on commence par éliminer ces derniers (cf § 1)).

La <u>théorie des ensembles</u> est subordonnée à la théorie de l'égalité et à celle du couplage, et comporte en outre <u>quatre</u> nouveaux axiomes et <u>un</u> nouveau schéma d'axiome. Il est commode, avant d'énoncer chacun de ces axiomes, d'énumérer un certain nombre de propositions où n'intervient que ceux qui le précèdent (et qui font donc partie d'une théorie <u>antécédente</u> à la théorie des ensembles proprement dite).

Avant d'énoncer le premier axiome, nous introduirons d'abord un nouveau signe abréviateur, le signe d'<u>inclusion</u> $\subset$ (qui se lit "contenu dans") : tout assemblage obtenu en écrivant deux arguments, l'un à gauche, l'autre à droite de ce signe, est une relation : la règle de définition consiste à remplacer, dans tous les cadres d'ordre zéro ~~et~~ d'un schéma où elles figurent, chaque relation telle que $x \subset y$ par

(1) $$(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in y)$$

où z est un argument ne figurant pas dans la relation considérée ; (en supposant que les symboles fonctionnels aient été d'abord éliminés de cette dernière) ; la relation (1) est donc <u>synonyme</u> de $x \subset y$, ce qui montre en particulier que les arguments x et y sont <u>libres</u> dans $x \subset y$. On introduit encore le signe abréviateur $\not\subset$ (qui se lit "n'est pas contenu dans"), la relation $x \not\subset y$ étant synonyme de non$(x \subset y)$ (nous laissons au lecteur le soin d'énoncer correctement les règles de formation et de définition de ce signe). Si la relation $x \subset y$ est <u>vraie</u> (dans une théorie $\mathcal{C}$), la relation $z \in x$ <u>entraîne</u> la relation $z \in y$ (dans la théorie $\mathcal{C}$) <u>et réciproquement</u> si z ne figure pas comme argument libre dans les axiomes de $\mathcal{C}$.

Au lieu de $x \subset y$ (resp. $x \not\subset y$), on écrit parfois $y \supset x$ (resp. $y \not\supset x$), le signe $\supset$ (resp. $\not\supset$) se lisant "contient" (resp. "ne contient pas").

PROPOSITION 1.- <u>La relation</u> $x \subset x$ <u>est vraie</u> (<u>au sens absolu</u>).

En effet, elle est synonyme de $(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in x)$, et $z \in x \Rightarrow z \in x$ est vraie (règles v_1 et d_6).

PROPOSITION 2.- <u>La relation</u> ($x \subset y$ et $y \subset z$) <u>entraîne</u> $x \subset z$ (<u>au sens absolu</u>).

En effet ($x \subset y$ et $y \subset z$) est synonyme de

$$(\forall t)(t \in x \Rightarrow t \in y) \text{ et } (\forall t)(t \in y \Rightarrow t \in z)$$

donc équivalente à

$$(\forall t)((t\in x \Rightarrow t\in y) \text{ et } (t\in y \Rightarrow t\in z))$$

Mais (chap.I, § 2, exerc.2), $((t\in x \Rightarrow t\in y)$ et $(t\in y \Rightarrow t\in z))$ entraîne $(t\in x \Rightarrow t\in z)$, d'où la proposition.

Le premier axiome que nous introduirons est le suivant :

(E_V) $\quad (\forall x)(\forall y)((x\subset y \text{ et } y\subset x) \Rightarrow (x=y))$.

En d'autres termes, cet axiome exprime que, dans la théorie des ensembles, la relation $(x\subset y$ et $y\subset x)$ <u>entraîne</u> $x=y$; ces deux relations sont d'ailleurs <u>équivalentes</u>, car $x=y$ entraîne, d'après (S_I), la relation $(x\subset x \Rightarrow x\subset y)$, et comme $x\subset x$ est vraie (prop.1), $x=y$ entraîne $x\subset y$; on voit de même que $x=y$ entraîne $y\subset x$ (§ 1, prop.1).

2. Eléments et parties d'un ensemble.

Dans les démonstrations de la théorie des ensembles interviennent de nombreux <u>arguments typiques</u>. En premier lieu, on dit qu'un argument X est un argument <u>du type des ensembles</u>, ou plus brièvement <u>est un ensemble</u> s'il est introduit par la relation $(\exists u)(u\in X)$. Si E est un ensemble, un argument x est dit <u>du type des éléments de</u> E (ou plus brièvement <u>un élément de</u> E) s'il est introduit par la relation $x\in E$; de même un argument X est dit <u>une partie de</u> E s'il est introduit par la relation $X\subset E$. Les quantificateurs typiques universels pour ces trois types d'arguments se noteront respectivement $\forall_{ens} X$, $(\forall x|x\in E)$, $(\forall X|X\subset E)$, et les quantificateurs typiques existentiels $\exists_{ens} X$, $(\exists x|x\in E)$, $(\exists X|X\subset E)$.

PROPOSITION 3.- <u>Si</u> E <u>est un ensemble</u>, X, Y <u>deux parties de</u> E, <u>la relation</u> $X\subset Y$ <u>est équivalente à</u> $(\forall x|x\in E)(x\in X \Rightarrow x\in Y)$.

En effet, la relation $X\subset Y$, synonyme de $(\forall x)(x\notin X$ ou $x\in Y)$ est équivalente à $(\forall x)(x\notin X$ ou $x\in Y$ ou $(x\notin E$ et $x\in E))$, puisque ($x \notin E$ et $x \in E$) est fausse (règles d_{12} et d_{17}) ; elle est donc encore équivalente à

(2) $(\forall x)(x \notin E$ ou $x \notin X$ ou $x \in Y)$ et $(\forall x)(x \in E$ ou $x \notin X$ ou $x \in Y)$

Mais la relation $X \subset E$ est vraie par hypothèse ; elle est synonyme de $(\forall x)(x \notin X$ ou $x \in E)$, donc elle entraîne $(\forall x)(x \in E$ ou $x \notin X$ ou $x \in Y)$ qui par suite est vraie ; par suite (règle d_{11}) la relation (2) est équivalente à $(\forall x)(x \notin E$ ou $x \notin X$ ou $x \notin Y)$, qui est par définition synonyme de $(\forall x | x \in E)(x \in X \Rightarrow x \in Y)$.

<u>Règle</u> e_{26} : <u>Si</u> E <u>est un ensemble</u>, x <u>un élément de</u> E , X, X' <u>deux parties de</u> E , <u>la relation</u> $(\forall x | x \in E)((\underline{R} \Leftrightarrow x \in X)$ et $(\underline{R} \Leftrightarrow x \in X'))$ <u>entraîne</u> $X = X'$.

En effet, la relation $(\forall x | x \in E)((\underline{R} \Leftrightarrow x \in X)$ et $(\underline{R} \Leftrightarrow x \in X'))$ entraîne (chap.I, § 2, exerc.2), la relation $(\forall x | x \in E)(x \in X \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in X')$, c'est-à-dire (prop.3) ($X \subset X'$ et $X' \subset X$) et finalement $X = X'$ d'après l'axiome (E_V) .

Nous pouvons maintenant énoncer le second schéma d'axiome de la théorie des ensembles :

(S_{II}) : $(\forall \ldots)(\forall_{ens} E)(\exists X)(X \subset E$ et $(\forall x)(x \notin E$ ou $(\underline{R} \Leftrightarrow (x \in X))))$

X étant un argument <u>ne figurant pas</u> dans $\underline{R}$.

D'après les règles v_{21} et d_{18}, on peur encore exprimer le schéma (S_{II}) en disant que si E est un ensemble, x un élément de E , X une partie de E , la relation

$$(\exists X | X \subset E)(\forall x | x \in E)(\underline{R} \Leftrightarrow x \in X)$$

est <u>vraie</u> lorsque X ne figure pas dans $\underline{R}$; tenant compte de la règle e_{26}, on voit donc que dans la théorie des ensembles, si E est un ensemble, x un élément de E , X une partie de E , la relation "<u>il existe un</u> X <u>et seul tel que</u> $X \subset E$ <u>et que</u> $(\forall x | x \in E)(\underline{R} \Leftrightarrow x \in X)$" <u>est vraie</u>.

En d'autres termes, la relation $(\forall x|x\in E)(\underline{R}\Leftrightarrow x\in X)$ est une <u>relation fonctionnelle typique par rapport à</u> X dans la théorie des ensembles. Nous dirons que cette relation fonctionnelle s'obtient à partir de la relation $\underline{R}$ en <u>passant au type des parties de</u> E pour l'argument x (élément de E) ; pour une relation $\underline{R}$ quelconque nous prendrons comme symbole fonctionnel (du type des parties de E) associé à la relation fonctionnelle $(\forall x|x\in E)(\underline{R}\Leftrightarrow x\in X)$ l'assemblage de signes $\mathcal{E}[x\in E|\underline{R}]$ (où bien entendu il faut remplacer la lettre $\underline{R}$, dans chaque cas explicité, par la relation à laquelle on applique le passage au type des parties de E) ; cet assemblage est aussi appelé "<u>la partie de</u> E <u>formée des</u> $x\in E$ <u>tels que la relation</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>ait lieu</u>" (ou, par abus de langage, <u>l'ensemble des</u> $x\in E$ <u>pour lesquels la relation</u> $\underline{R}\{x\}$ <u>est vraie</u>).

Les arguments <u>libres</u> dans ce symbole sont donc E et tous les arguments <u>libres dans</u> $\underline{R}$ et autres que x ; x est un argument <u>lié</u> dans le symbole.

En particulier, si $\underline{R}$ et $\underline{S}$ sont deux relations fonctionnelles typiques par rapport à un même argument, le symbole fonctionnel $\mathcal{E}[x\in E|f_{\underline{R}}=f_{\underline{S}}]$ est appelé (par abus de langage) <u>l'ensemble des éléments de</u> E <u>solutions de l'équation</u> $f_{\underline{R}}=f_{\underline{S}}$; un argument introduit par la relation $u\in\mathcal{E}[x\in E|f_{\underline{R}}=f_{\underline{S}}]$ est appelé une <u>solution</u> de l'équation $f_{\underline{R}}=f_{\underline{S}}$ <u>dans</u> E.

<u>Règle</u> e_{27} : <u>La relation</u> $\underline{R}$ <u>est équivalente à</u> $x\in\mathcal{E}[x\in E|\underline{R}]$.

En effet (règle e_{12}), la relation

$$(\forall x|x\in E)(\underline{R}\Leftrightarrow x\in\mathcal{E}[x\in E|\underline{R}])$$

est vraie.

<u>Règle</u> e_{28} : <u>La relation</u> $(\forall x|x\in E)(\underline{R}\Rightarrow\underline{S})$ <u>est équivalente à</u> $\mathcal{E}[x\in E|\underline{R}]\subset\mathcal{E}[x\in E|\underline{S}]$; <u>la relation</u> $(\forall x|x\in E)(\underline{R}\Leftrightarrow\underline{S})$ est <u>équivalente à</u> $\mathcal{E}[x\in E|\underline{R}]=\mathcal{E}[x\in E|\underline{S}]$.

En effet, d'après la règle e_{27}, la relation $(\forall x|x\in E)(\underline{R}\Rightarrow\underline{S})$ est équivalente à

$$(\forall x|x\in E)((x\in\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}])\Rightarrow(x\in\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{S}]))$$

d'où la règle, en vertu de la prop.3 et de l'axiome (E_V) .

En particulier, si $\underline{R}$ <u>entraîne</u> $\underline{S}$, la relation $\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}]\subset\subset\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{S}]$ est <u>vraie</u> ; si $\underline{R}$ <u>est équivalente à</u> $\underline{S}$, la relation $\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}]=\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{S}]$ est <u>vraie</u>. Plus particulièrement, si $\underline{R}$ et $\underline{S}$ sont <u>toutes deux vraies</u> ou <u>toutes deux fausses</u>, elles sont équivalentes (règle d_{10}), donc $\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}]=\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{S}]$ est <u>vraie</u>.

<u>Règle</u> e_{29} : <u>Si</u> $\underline{R}$ <u>est une relation vraie</u>, $\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}]=E$ <u>est vraie</u>.

En effet, comme $x\in E$ est vraie, $x\in E$ est équivalente à $\underline{R}$, donc aussi à $x\in\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}]$; donc (règle δ_5) $(\forall x|x\in E)((x\in E)\Leftrightarrow(x\in\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}]))$ est vraie, d'où la règle, d'après la prop.3 et l'axiome (E_V) .

Soit $\underline{S}\{X\}$ une relation quelconque, X étant une partie de E ; la relation X=E entraîne ($\underline{S}\{X\}\Leftrightarrow\underline{S}\{E\}$) ; par suite (règle e_{10}) , la relation $\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}]=E$ entraîne ($\underline{S}\{\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}]\}\Leftrightarrow\underline{S}\{E\}$) ; on déduit donc de la règle e_{29} que si $\underline{R}$ est une relation vraie, la relation $\underline{S}\{\mathcal{E}[x\in E\mid\underline{R}]\}$ est <u>équivalente</u> à $\underline{S}\{E\}$; par abus de langage, on peut encore dire que E est un <u>symbole fonctionnel</u> pour toute relation déduite d'une relation <u>vraie</u> $\underline{R}\{x\}$ en passant au type des parties pour x .

Si x est un élément de E , la relation $x\notin E$ est <u>fausse</u> ; nous prendrons comme symbole fonctionnel équivalent à $\mathcal{E}[x\in E/x\notin E]$ l'assemblage de signes $\emptyset_E$ (ou par abus de langage $\emptyset$ lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter (cf. § 4, exerc.)) ; c'est un <u>élément explicite</u> du type des parties de E , qu'on appelle la <u>partie vide</u> de E .

Si $\underline{R}$ est une relation fausse, on a donc $\mathcal{E}\left[x \in E \mid \underline{R}\right] = \emptyset_E$.

Si x est un élément de E , la relation $x \in \emptyset_E$ est fausse, puisqu'elle est équivalente à $x \notin E$ (règle e_{27}) ; donc la relation $x \notin \emptyset_E$ est vraie.

Remarque.- Lorsque la relation $\mathcal{E}\left[x \in E \mid f_{\underline{R}} = f_{\underline{S}}\right] = \emptyset_E$ est vraie, on dit que l'équation $f_{\underline{R}} = f_{\underline{S}}$ n'a pas de solutions dans E .

PROPOSITION 4.- Si X est une partie de E , la relation $E \subset X$ est équivalente à $X=E$.

En effet, $X \subset E$ est vraie par hypothèse, donc $E \subset X$ est équivalente à $(E \subset X$ et $X \subset E)$ c'est-à-dire à $X=E$ d'après (E_V) .

PROPOSITION 5.- Si X est une partie de E , la relation $(\forall x \mid x \in E)(x \in X)$ est équivalente à $X=E$.

En effet, elle est par définition synonyme de $(\forall x)(x \notin E$ ou $x \in X)$ c'est-à-dire de $E \subset X$.

PROPOSITION 6.- Si X est une partie de E , la relation $\emptyset_E \subset X$ est vraie.

En effet, si x est un élément de E , la relation $x \notin \emptyset_E$ est vraie, donc il en est de même de $(x \notin \emptyset_E$ ou $x \in X)$ et aussi de $(\forall x \mid x \in E)(x \in \emptyset_E \Rightarrow x \in X)$ (règle δ_5), d'où la proposition, en vertu de la prop. 3 .

COROLLAIRE.- Si X est une partie de E , la relation $X \subset \emptyset_E$ est équivalente à $X=\emptyset_E$.

PROPOSITION 7.- Si X est une partie de E , x un élément de E , la relation $(\forall x \mid x \in E)(x \notin X)$ est équivalente à $X=\emptyset_E$.

En effet, x étant un élément de E , la relation $(\forall x \mid x \in E)(x \notin X)$ est équivalente à $(\forall x \mid x \in E)(x \notin X$ ou $x \in \emptyset_E)$, puisque $x \in \emptyset_E$ est fausse ; donc (prop.3) $(\forall x \mid x \in E)(x \notin X)$ est équivalente à $X \subset \emptyset_E$, donc (cor. de la prop.6) à $X=\emptyset_E$.

37

COROLLAIRE 1.- <u>Si</u> X <u>est une partie de</u> E , <u>la relation</u> $X \neq \emptyset_E$ <u>est équivalente à</u> $(\exists u)(u \in X)$.

En d'autres termes, si X est une partie de E et $X \neq \emptyset_E$, X est <u>un ensemble</u>, et réciproquement. De façon imagée, on peut dire que la partie vide de E est la seule partie de E qui <u>ne soit pas un ensemble</u>.

En effet (cor.de la prop.6) la relation $X \neq \emptyset_E$ est équivalente à $X \not\subset \emptyset_E$, donc à $(\exists u)(u \in X$ et $u \notin \emptyset_E)$, et par suite entraîne $(\exists u)(u \in X)$. Inversement, comme $X \subset E$ est vraie, $u \in X$ entraîne $u \in E$, donc $(\exists u)(u \in X)$ entraîne $(\exists u)(u \in E$ et $u \in X)$, c'est-à-dire $(\exists u | u \in E)(u \in X)$. Mais si x est un élément de E la relation $(\forall x | x \in E)(x \notin X)$ est équivalente à $X \subset \emptyset_E$ (prop.7), d'où résulte que $(\exists u | u \in E)(u \in X)$ est équivalente à $X \neq \emptyset_E$.

COROLLAIRE 2.- <u>La relation</u> $E \neq \emptyset_E$ <u>est vraie</u>.

En effet, E est un ensemble par hypothèse.

Ce corollaire a la conséquence suivante : soit $\mathcal{C}$ une théorie, f_R un symbole fonctionnel <u>du type des ensembles</u> dans la théorie $\mathcal{C}$; cette théorie est <u>contradictoire</u>.

Par abus de langage, on dit parfois "l'ensemble vide" en parlant de $\emptyset_E$, et aussi qu'une partie X de E est un "ensemble vide" (ce qui est absurde), ou un "ensemble non vide" (ce qui est un pléonasme). Dans ces expressions vicieuses (mais consacrées par l'usage) le mot "ensemble" remplace naturellement, par abus de langage, le mot "partie de E" .

<u>3. Partie réduite à un élément, complémentaire d'une partie, réunion et intersection de deux parties.</u>

Soient x et y deux éléments de E ; passons au type des parties pour y dans la relation y=x , et prenons comme symbole fonctionnel équivalent à $\mathcal{C}[y \in E | y=x]$ l'assemblage de signes $\{x\}$, qu'on appelle encore <u>la partie réduite au seul élément</u> x (par abus de langage ce symbole fonctionnel ne contient pas l'argument libre E). La relation $y=x$ est équivalente à $y \in \{x\}$ (règle e_{27}).

PROPOSITION 8.- <u>Si</u> x <u>est un élément de</u> E , X <u>une partie de</u> E , <u>la relation</u> $x \in X$ <u>est équivalente à</u> $\{x\} \subset X$.

En effet $\{x\} \subset X$ est équivalente à $(\forall y|y \in E)(y \notin \{x\}$ ou $y \in X)$, donc à $(\forall y|y \in E)(y \neq x$ ou $y \in X)$; mais comme $y=x$ est une relation fonctionnelle typique par rapport à y , la relation $(\forall y|y \in E)$ $(y \neq x$ ou $y \in X)$ est équivalente à $x \in X$ (§ 1, n°3).

PROPOSITION 9.- <u>Si</u> x <u>est un élément de</u> E , X <u>une partie de</u> E , <u>la relation</u> $X \subset \{x\}$ <u>est équivalente à</u> $(X=\emptyset_E$ ou $X=\{x\})$.

En effet, comme $\emptyset_E \subset \{x\}$ est vraie (prop.6), la relation $X=\emptyset_E$ est équivalente à $(X=\emptyset_E$ et $\emptyset_E \subset \{x\})$, donc entraîne $X \subset \{x\}$; comme $X=\{x\}$ entraîne $X \subset \{x\}$, $(X=\emptyset_E$ ou $X=\{x\})$ entraîne $X \subset \{x\}$.

Inversement, la relation $X \subset \{x\}$ est équivalente à

$$(\forall y|y \in E)(y \notin X \text{ ou } y=x)$$

donc aussi à $(\forall y|y \in E)(y \notin X$ ou $(y \in X$ et $y=x))$; elle entraîne donc (règle v_{23}) la relation

$$(\forall y|y \in E)(y \notin X) \text{ ou } (\exists y|y \in E)(y \in X \text{ et } y=x)$$

Or, la relation $(\forall y|y \in E)(y \notin X)$ est équivalente à $X=\emptyset_E$, et, d'autre part, $(\exists y|y \in E)(y \in X$ et $y=x)$ entraîne $(\exists y|y \in E)(x \in X)$ (règle e_1), c'est-à-dire $x \in X$, elle-même équivalente à $\{x\} \subset X$ (prop.8). La relation $X \subset \{x\}$ entraîne donc $(X=\emptyset_E$ ou $\{x\} \subset X)$; mais elle entraîne aussi $(X=\emptyset_E$ ou $X \subset \{x\})$, donc elle entraîne $(X=\emptyset_E$ ou $(\{x\} \subset X$ et $X \subset \{x\}))$, c'est-à-dire $(X=\emptyset_E$ ou $X=\{x\})$ d'après (E_V) .

Soient X une partie de E , x un élément de E ; passons au type des parties pour x dans la relation $x \notin X$, et prenons comme symbole fonctionnel équivalent à $\mathcal{E}[x \in E|x \notin X]$ l'assemblage de signes $\complement_E X$

(ou par abus de langage $\complement X$, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) qu'on appelle <u>le complémentaire de X</u> ; la relation $x \notin X$ est donc équivalente à $x \in \complement_E X$ (règle e_{27}) .

<u>Règle</u> e_{30} : <u>La relation</u> $\mathcal{E}[x \in E | \text{non } \underline{R}] = \complement_E(\mathcal{E}[x \in E | \underline{R}])$ <u>est vraie.</u>

En effet, si x est un élément de E , $x \in \mathcal{E}[x \in E | \underline{R}]$ est équivalente à $\underline{R}$, donc $x \notin \mathcal{E}[x \in E | \underline{R}]$ est équivalente à (non $\underline{R}$), et par suite à $x \in \mathcal{E}[x \in E | \text{non } \underline{R}]$.

PROPOSITION 10.- <u>Les relations</u>

(2) $$\complement_E E = \emptyset_E \quad , \quad \complement_E \emptyset_E = E$$

<u>sont vraies</u>.

PROPOSITION 11.- <u>Si</u> X <u>est une partie de</u> E , <u>la relation</u> $\complement(\complement X) = X$ <u>est vraie</u>.

Nous laissons les démonstrations au lecteur.

Soient X et Y deux parties de E , x un élément de E ; passons au type des parties pour x dans la relation ($x \in X$ ou $x \in Y$) (resp. ($x \in X$ et $x \in Y$)), et prenons comme symbole fonctionnel équivalent à $\mathcal{E}[x \in E | x \in X \text{ ou } x \in Y]$ (resp. $\mathcal{E}[x \in E | x \in X \text{ et } x \in Y]$) l'assemblage $X \cup Y$ (resp. $X \cap Y$), qu'on appelle <u>la réunion de</u> X <u>et</u> Y (resp. <u>l'intersection de</u> X <u>et</u> Y) (nous faisons ici un abus de langage, puisque ces symboles fonctionnels ne contiennent pas l'argument libre E) . La relation ($x \in X$ ou $x \in Y$) (resp. $x \in X$ et $x \in Y$)) est donc équivalente à $x \in X \cup Y$ (resp. $x \in X \cap Y$).

<u>Règle</u> e_{31} : <u>Les relations</u>

(3) $$\mathcal{E}[x \in E | \underline{R} \text{ ou } \underline{S}] = \mathcal{E}[x \in E | \underline{R}] \cup \mathcal{E}[x \in E | \underline{S}]$$

(4) $$\mathcal{E}[x \in E | \underline{R} \text{ et } \underline{S}] = \mathcal{E}[x \in E | \underline{R}] \cap \mathcal{E}[x \in E | \underline{S}]$$

<u>sont vraies</u>.

En effet, la relation $x \in \mathcal{E}\left[x \in E \mid \underline{R} \text{ ou } \underline{S}\right]$ est équivalente à ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$), et la relation $x \in \mathcal{E}\left[x \in E \mid \underline{R}\right]$ (resp. $x \in \mathcal{E}\left[x \in E \mid \underline{S}\right]$) est équivalente à $\underline{R}$ (resp. $\underline{S}$) ; donc la relation $x \in \mathcal{E}\left[x \in E \mid \underline{R}\right] \cup \mathcal{E}\left[x \in E \mid \underline{S}\right]$ est équivalente à ($\underline{R}$ ou $\underline{S}$), ce qui établit la relation (3) ; démonstration analogue pour (4).

PROPOSITION 12.- <u>Les relations suivantes sont vraies</u> :

(5) $X \cup X = X \quad , \quad X \cap X = X$

(6) $X \cup (\complement X) = E \quad , \quad X \cap (\complement X) = \emptyset$

(7) $X \cup \emptyset = X \quad , \quad X \cap E = X$

(8) $X \cup E = E \quad , \quad X \cap \emptyset = \emptyset$

(9) $X \cup Y = Y \cup X \quad , \quad X \cap Y = Y \cap X$

(10) $X \subset X \cup Y \quad , \quad X \cap Y \subset X$

(11) $\complement(X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y) \quad , \quad \complement(X \cap Y) = (\complement X) \cup (\complement Y)$.

PROPOSITION 13.- <u>Les relations</u>

$$X \subset Y \quad , \quad \complement Y \subset \complement X \quad , \quad X \cup Y = Y \quad , \quad X \cap Y = X$$

<u>sont équivalentes</u>.

PROPOSITION 14.- <u>Les relations</u>

$$X \cap Y = \emptyset \quad , \quad X \subset \complement Y \quad , \quad Y \subset \complement X$$

<u>sont équivalentes</u>.

Par définition, on dit que X et Y se <u>rencontrent</u> lorsque $X \cap Y \neq \emptyset$ est vraie.

PROPOSITION 15.- <u>Les relations</u>

$$X \cup Y = E \quad , \quad \complement X \subset Y \quad , \quad \complement Y \subset X$$

<u>sont équivalentes</u>.

PROPOSITION 16.- <u>Les relations suivantes sont vraies</u> :

(12) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z \quad , \quad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

(13) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \quad , \quad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

PROPOSITION 17.- <u>La relation</u> $X \subset Y$ <u>entraîne les relations</u> $X \cup Z \subset Y \cup Z$ <u>et</u> $X \cap Z \subset Y \cap Z$.

PROPOSITION 18.- <u>La relation</u> ($Z \subset X$ et $Z \subset Y$) <u>est équivalente à</u> $Z \subset X \cap Y$; <u>la relation</u> ($X \subset Z$ et $Y \subset Z$) <u>est équivalente à</u> $X \cup Y \subset Z$.

PROPOSITION 19.- <u>La relation</u> $Z = X \cap \complement Y$ <u>est équivalente à</u> ($Z \cap Y = \emptyset$ et $Z \cup Y = X \cup Y$) .

Donnons quelques-unes de ces démonstrations à titre d'exemple, laissant au lecteur le soin de développer de même les autres. Montrons d'abord que la relation $X \subset Y$ est équivalente à $X \cup Y = Y$ (prop.13) ; en effet $X \cup Y = Y$ est équivalente à ($X \cup Y \subset Y$ et $Y \subset X \cup Y$) d'après (E_V), donc à $X \cup Y \subset Y$, puisque $Y \subset X \cup Y$ est vraie (prop. 12). Or, la relation $X \cup Y \subset Y$ est synonyme de

$$(\forall x | x \in E)((x \notin X \text{ et } x \notin Y) \text{ ou } x \in Y)$$

donc équivalente à $(\forall x | x \in E)(x \notin X \text{ ou } x \in Y)$.

En second lieu, démontrons que $X \cap Y = \emptyset$ est équivalente à $X \subset \complement Y$ (prop.14) ; en effet, la relation $X \cap Y = \emptyset$ est équivalente à $(\forall x | x \in E)(x \notin X \text{ ou } x \notin Y)$ (prop.7), donc à $(\forall x | x \in E)(x \notin X \text{ ou } x \in \complement Y)$, c'est-à-dire à $X \subset \complement Y$ (prop.3).

Démontrons ensuite que $X \subset Y$ entraîne $X \cup Z \subset Y \cup Z$ (prop.17) ; en effet $(x \in X) \Rightarrow (x \in Y)$ entraîne $(x \in X \text{ ou } x \in Z) \Rightarrow (x \in Y \text{ ou } x \in Z)$ (chap.I, § 2,exerc.2), donc (règle d_{15}) $(\forall x | x \in E)((x \in X) \Rightarrow (x \in Y))$ entraîne $(\forall x | x \in E)((x \in X \text{ ou } x \in Z) \Rightarrow (x \in Y \text{ ou } x \in Z))$, ce qui démontre la proposition.

Démontrons enfin la prop.19 . La relation $Z = X \cap \complement Y$ entraîne $Z \cap Y = X \cap (Y \cap \complement Y) = X \cap \emptyset = \emptyset$, et $Z \cup Y = (X \cup Y) \cap (Y \cup \complement Y) = (X \cup Y) \cap E = X \cup Y$. Inversement $Z \cap Y = \emptyset$ entraîne $Z \subset \complement Y$, donc $(Z \cup Y) \cap \complement Y = (Z \cap \complement Y) \cup (Y \cup \complement Y) = (Z \cap \complement Y) \cup \emptyset = Z \cap \complement Y = Z$; de la même manière, on a $(X \cup Y) \cap \complement Y = X \cap \complement Y$; donc la relation ($Z \cap Y = \emptyset$ et $Z \cup Y = X \cup Y$) entraîne $Z = X \cap \complement Y$.

On introduit les symboles fonctionnels $X \cup Y \cup Z$, $X \cup Y \cup Z \cup T$, etc. (resp. $X \cap Y \cap Z$, $X \cap Y \cap Z \cap T$, etc.) comme équivalents aux symboles fonctionnels composés $X \cup (Y \cup Z)$, $X \cup (Y \cup Z \cup T)$, etc. (resp. $X \cap (Y \cap Z)$, $X \cap (Y \cap Z \cap T)$, etc.) ; $X \cup Y \cup Z$ (resp. $X \cap Y \cap Z$) est appelé la <u>réunion</u> (resp. l'<u>intersection</u>) de X, Y et Z, et de même pour les autres.

De même, si x, y sont deux éléments de E, on introduit le symbole fonctionnel $\{x, y\}$ équivalent au symbole fonctionnel composé $\{x\} \cup \{y\}$; si x, y, z sont trois éléments de E, on introduit le symbole fonctionnel $\{x, y, z\}$ comme équivalent à $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$, et ainsi de suite. D'après (5), on a $\{x, x\} = \{x\}$, d'après (9), $\{y, x\} = \{x, y\}$ et d'après (12) $\{x, y, z\} = \{y, z, x\} = \{z, x, y\} = \{x, z, y\} = \{z, y, x\} = \{y, x, z\}$. On dit que $\{x, y\}$ est <u>la partie de E formée des deux éléments</u> x, y, et de même pour $\{x, y, z\}$ et les symboles fonctionnels analogues contenant plus de trois éléments de E.

<u>Remarque</u>.- Considérons un symbole fonctionnel, que nous désignerons pour la commodité de l'exposé par Φ, obtenu en "composant" un certain nombre de fois les symboles $\complement$, $\cup$, $\cap$ dans un ordre déterminé, à partir d'arguments $X, Y, Z, \ldots$, du type des parties de E (par exemple $X \cap \complement(Y \cup (Z \cap \complement X))$ est un tel symbole). Considérons le symbole fonctionnel $\complement\Phi$ obtenu en composant $\complement$ avec Φ ; on peut vérifier (dans chaque cas particulier) de proche en proche, en vertu des relations (11), que $\complement\Phi$ est <u>égal</u> au symbole fonctionnel Φ' obtenu en remplaçant, dans la succession des symboles fonctionnels dont la "composition" donne Φ, chaque signe $\cup$ par $\cap$ et vice-versa, puis en remplaçant $X, Y, Z, \ldots$ par $\complement X$, $\complement Y$, $\complement Z, \ldots$ respectivement dans le symbole ainsi obtenu. Le symbole Φ' est dit le <u>dual</u> de Φ (c'est ainsi que le dual de l'exemple choisi est $(\complement X) \cup \complement((\complement Y) \cap ((\complement Z) \cup (\complement(\complement X))))$.
On peut en outre, grâce aux relations (11) et à la prop.11, remplacer

toujours un symbole ϕ par un symbole <u>égal</u> dans lequel les signes $\complement$ <u>ne portent que sur les arguments</u> (dans l'exemple choisi, ce sera $X \cap ((\complement Y) \cap ((\complement Z) \cup X)))$; si on prend le dual de ce nouveau symbole, puisqu'on y remplace partout $\complement(\complement X), \complement(\complement Y), ..$ par $X, Y, ..$ respectivement, on obtiendra de nouveau un symbole <u>égal</u> au dual de ϕ, dans lequel les signes $\complement$ ne portent que sur des arguments dans l'exemple choisi, ce sera $(\complement X) \cup (Y \cup (Z \cap (\complement X)))$.

Soient maintenant deux symboles fonctionnels ϕ, ψ, de l'espèce précédente, où les signes $\complement$ ne portent que sur des arguments, et tels que la relation $\phi = \psi$ (resp. $\phi \subset \psi$) soit vraie (lorsque $X, Y, Z, ..$ sont des parties de E) ; alors la relation $\complement \phi = \complement \psi$ (resp. $\complement \psi \subset \complement \phi$) est vraie (prop.13) ; il en résulte que $\phi' = \psi'$ (resp. $\psi' \subset \phi'$) est vraie ; si, dans cette relation, on remplace $X, Y, Z, ..$ par $\complement X$, $\complement Y$, $\complement Z, ...$ et vice-versa, on obtient encore une relation vraie, dite <u>duale</u> de la relation $\phi = \psi$ (resp. $\psi \subset \phi$).
Le lecteur vérifiera sans peine que toutes les relations affectées ci-dessus d'un même numéro sont <u>duales</u> l'une de l'autre.

4. Eléments et parties d'un sous-ensemble.

Soit E un ensemble. On dit qu'un argument A est <u>du type des sous-ensembles</u> de E (ou <u>est un sous-ensemble</u> de E) s'il est introduit par la relation ($A \subset E$ et $(\exists u)(u \in A)$), ou, ce qui revient au même (cor.1 de la prop.7), par la relation équivalente ($A \subset E$ et $A \neq \emptyset_E$) . On introduit alors comme arguments typiques les <u>éléments</u> de A et les <u>parties</u> de A , définis ci-dessus. Si A est un sous-ensemble de E et x un élément de A , x est aussi un élément de E , puisque $x \in A$ entraîne $x \in E$, la relation $A \subset E$ étant vraie par hypothèse ; de même si X est une partie de A , X est aussi une partie de E .

Règle e_{32} : Si A est un sous-ensemble de E , x un élément de A , y un élément de E ne figurant pas dans $\underline{R}\{x\}$, la relation $(\forall x | x \in A)\ \underline{R}\{x\}$ (resp. $(\exists x | x \in A)\ \underline{R}\{x\}$) est équivalente à $(\forall y | y \in E)(y \in A \Rightarrow \underline{R}\{y\})$ (resp. $(\exists y | y \in E)(y \in A$ et $\underline{R}\{y\})$).

En effet la relation $(\forall x | x \in A)\ \underline{R}\{x\}$ est synonyme de $(\forall x)(x \in A \Rightarrow \underline{R}\{x\})$, et comme $x \in E$ est vraie, elle est équivalente à $(\forall x)(x \notin E$ ou $x \notin A$ ou $\underline{R}\{x\})$; cette dernière relation est synonyme de $(\forall y)(y \notin E$ ou $y \notin A$ ou $\underline{R}\{y\})$ (règle s_{13}), qui par définition est synonyme de $(\forall y | y \in E)(y \in A \Rightarrow \underline{R}\{y\})$. Démonstration analogue pour $(\exists x | x \in A)\ \underline{R}\{x\}$.

On déduit de cette règle que, si x est un élément de A , $\underline{R}\{x\}$ une relation vraie, et y un élément de E , la relation $(y \in A) \Rightarrow \underline{R}\{y\}$ est vraie, et réciproquement.

Règle e_{33} : Si A est un sous-ensemble de E , x un élément de A , y un élément de E ne figurant ni dans $\underline{R}\{x\}$ ni dans $\underline{S}\{x\}$, si $\underline{R}\{x\}$ entraîne $\underline{S}\{x\}$, $(y \in A$ et $\underline{R}\{y\})$ entraîne $(y \in A$ et $\underline{S}\{y\})$.

En effet, $(y \in A$ et $\underline{R}\{y\}) \Rightarrow (y \in A$ et $\underline{S}\{y\})$ est équivalente à $(y \notin A$ ou (non $\underline{R}\{y\})$ ou $\underline{S}\{y\})$, ou encore à

$$(y \in A) \Rightarrow (\underline{R}\{y\} \Rightarrow \underline{S}\{y\})$$

Donc cette relation est vraie, puisque $\underline{R}\{x\} \Rightarrow \underline{S}\{x\}$ est vraie.

Règle e_{34} : Si A est un sous-ensemble de E , X une partie de A , Y une partie de E ne figurant pas dans $\underline{R}\{X\}$, $(\forall X | X \subset A)\ \underline{R}\{X\}$ (resp. $(\exists X | X \subset A)\ \underline{R}\{X\}$) est équivalente à $(\forall Y | Y \subset E)(Y \subset A \Rightarrow \underline{R}\{Y\})$ (resp. $(\exists Y | Y \subset E)(Y \subset A$ et $\underline{R}\{Y\})$.

Règle e_{35} : Si A est un sous-ensemble de E , X une partie de A , Y une partie de E ne figurant ni dans $\underline{R}\{X\}$ ni dans $\underline{S}\{X\}$, si $\underline{R}\{X\}$ entraîne $\underline{S}\{X\}$, $(Y \subset A$ et $\underline{R}\{Y\})$ entraîne $(Y \subset A$ et $\underline{S}\{Y\})$.

Ces règles s'établissent comme e_{32} et e_{33}.

On peut donc s'abstenir d introduire des arguments du type "élément de A" ou du type "partie de A", si on le désire ; toutefois, cette introduction est souvent commode, notamment lorsqu'on substitue à A un *symbole fonctionnel* (du type des sous-ensembles de E) dans une théorie subordonnée à la théorie des ensembles.

PROPOSITION 20.- *Si* X *est une partie de* A, *la relation* $\complement_A X = (\complement_E X) \cap A$ *est vraie*.

En effet, si x est un élément de A, $x \in \complement_A X$ est équivalente à $x \notin X$; donc, si y est un élément de E (règle e_{33}), ($y \in A$ et $y \notin X$) est équivalente à ($y \in A$ et $y \in \complement_A X$) ; mais comme $\complement_A X \subset A$, $y \in \complement_A X$ entraîne $y \in A$, donc ($y \in A$ et $y \in \complement_A X$) est équivalente à $y \in \complement_A X$; on voit donc que ($y \in A$ et $y \notin X$) est équivalente à $y \in \complement_A X$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE.- *On a* $\emptyset_A = \emptyset_E$.

En effet, en remplaçant X par A dans la prop.20, on a $\complement_A A = \emptyset_A$ et $(\complement_E A) \cap A = \emptyset_E$ (prop.12).

Si Y est une partie de E, $Y \cap A$ est souvent appelée la *trace* de Y sur A ; on a évidemment pour deux parties Y,Z de E

$$(Y \cap A) \cup (Z \cap A) = (Y \cup Z) \cap A$$

$$(Y \cap A) \cap (Z \cap A) = (Y \cap Z) \cap A$$

d'après les prop.12 et 16 : on peut dire que la trace de la *réunion* (resp. *l'intersection*) de deux parties de E est la réunion (resp. l'intersection) des traces de ces parties.

5. Ensembles des parties d'un ensemble.

Soit X un ensemble. Nous introduirons maintenant un nouvel axiome :

$$(E_{VI}) \quad (\forall_{ens} X)(\exists Y)(\forall Z)((Z \subset X) \Leftrightarrow (Z \in Y)).$$

Autrement dit, cet axiome exprime (du point de vue naïf) que pour tout ensemble X , il existe un ensemble Y dont les <u>parties de</u> X sont les <u>éléments</u>.

Des axiomes (E_V) et (E_{VI}), on déduit que dans la théorie des ensembles, si X est un ensemble, la relation $(\forall Z)((Z \subset X) \Leftrightarrow (Z \in Y))$ est <u>fonctionnelle</u> (non typique) <u>par rapport à</u> Y . En effet, il suffit de montrer que la relation

(14) $(\forall Z)((Z \subset X) \Leftrightarrow (Z \in Y))$ et $(\forall Z)((Z \subset X) \Leftrightarrow (Z \in Y'))$

entraîne $Y=Y'$. Or la relation

$$((Z \subset X) \Leftrightarrow (Z \in Y)) \text{ et } ((Z \subset X) \Leftrightarrow (Z \in Y'))$$

entraîne $(Z \in Y) \Leftrightarrow (Z \in Y')$ (chap. I, § 2, exerc. 2) ; donc la relation (14) entraîne $(\forall Z)((Z \in Y) \Leftrightarrow (Z \in Y'))$ qui est synonyme de ($Y \subset Y'$ et $Y' \subset Y$) et par suite, d'après (E_V), entraîne $Y=Y'$.

Nous prendrons comme symbole fonctionnel associé à la relation $(\forall Z)((Z \subset X) \Leftrightarrow (Z \in Y))$ l'assemblage de signes $\mathfrak{P}(X)$, où X est le seul argument libre, et qu'on appelle l'<u>ensemble des parties de</u> X . La relation $Z \subset X$ est donc équivalente à $Z \in \mathfrak{P}(X)$, puisque la relation $(\forall Z)((Z \subset X) \Leftrightarrow (Z \in \mathfrak{P}(X)))$ est vraie (règle e_{12}) . On en déduit que la relation $X \in \mathfrak{P}(X)$ est <u>vraie</u> (prop. 1), et par suite (règle d_5) que la relation $(\exists Z)(Z \in \mathfrak{P}(X))$ est vraie, ce qui signifie que $\mathfrak{P}(X)$ est un symbole fonctionnel du <u>type des ensembles</u> (ce qui justifie son nom).

PROPOSITION 21.- <u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont deux ensembles, la relation</u> $X \subset Y$ <u>entraîne</u> $\mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(Y)$.

En effet la relation $X \subset Y$ entraîne $(Z \subset X) \Rightarrow (Z \subset X$ et $X \subset Y)$, donc aussi (prop. 2), $(Z \subset X) \Rightarrow (Z \subset Y)$, qui est synonyme de $(Z \in \mathfrak{P}(X)) \Rightarrow (Z \in \mathfrak{P}(Y))$; donc (règle d_{15}) $X \subset Y$ entraîne aussi $(\forall Z)((Z \in \mathfrak{P}(X)) \Rightarrow (Z \in \mathfrak{P}(Y)))$, c'est-à-dire $\mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(Y)$.

Soit E un ensemble ; les relations $X \subset E$ et $X \in \mathfrak{P}(E)$ étant équivalentes, une <u>partie de</u> E est aussi un <u>élément de</u> $\mathfrak{P}(E)$, et réciproquement. Si A est un <u>sous-ensemble</u> de E (n°3), X une partie de E, $\mathfrak{P}(A)$ est une partie de $\mathfrak{P}(E)$ (prop.21), et la relation $X \subset A$ est équivalente à $X \in \mathfrak{P}(A)$; il en résulte que $\mathfrak{P}(A)$ est égal à un symbole fonctionnel associé à la relation $(\forall X | X \in \mathfrak{P}(E))((X \subset A) \Longleftrightarrow (X \in Y))$ obtenue en passant au type des parties pour X dans la relation $X \subset A$. Considérons maintenant la relation $X \subset \emptyset_E$; comme elle est équivalente à $X = \emptyset_E$, en passant au type des parties pour X dans cette relation, on obtient une relation fonctionnelle par rapport à une partie de $\mathfrak{P}(E)$, dont $\{\emptyset_E\}$ est un symbole fonctionnel associé; par abus de langage, on prend encore $\mathfrak{P}(\emptyset_E)$ comme symbole fonctionnel équivalent.

<u>6. Produit de deux ensembles.</u>

Soient X et Y deux ensembles. Le septième axiome de la théorie des ensembles est le suivant :

$$(E_{VII}) \quad (\forall_{ens} X)(\forall_{ens} Y)(\exists W)(\forall z)((\exists x)(\exists y)(x \in X \text{ et } y \in Y \text{ et } z=(x,y)) \Longleftrightarrow (z \in W)).$$

Du point de vue naïf, cet axiome exprime que, si X et Y sont deux ensembles quelconques, il existe un ensemble dont les éléments sont les <u>couples</u> (x,y) tels que $x \in X$ et $y \in Y$.

Des axiomes (E_V) et (E_{VII}), on déduit que, dans la théorie des ensembles, la relation $(\forall z)((\exists x)(\exists y)(x \in X \text{ et } y \in Y \text{ et } z=(x,y)) \Longleftrightarrow (z \in W))$ est <u>fonctionnelle</u> (non typique) <u>par rapport à</u> W. En désignant pour abréger par Θ la relation

$$(\exists x)(\exists y)(x \in X \text{ et } y \in Y \text{ et } z=(x,y))$$

il suffit de prouver que la relation

(15) $(\forall z)(\Theta \Leftrightarrow (z \in W))$ et $(\forall z)(\Theta \Leftrightarrow (z \in W'))$

entraîne $W=W'$. Or, la relation $(\Theta \Leftrightarrow (z \in W))$ et $(\Theta \Leftrightarrow (z \in W'))$ entraîne $(z \in W) \Leftrightarrow (z \in W')$, donc la relation (15) entraîne $(\forall z)((z \in W) \Leftrightarrow (z \in W'))$, c'est-à-dire $W=W'$ d'après (E_V).

Nous prendrons pour symbole fonctionnel associé à la relation $(\forall z)((\exists x)(\exists y)(x \in X$ et $y \in Y$ et $z=(x,y)) \Leftrightarrow (z \in W))$ l'assemblage de signes $X \times Y$, où X et Y sont les arguments libres, et qu'on appelle l'<u>ensemble produit de</u> X <u>et de</u> Y. La relation $z \in X \times Y$ est donc <u>équivalente</u> à $(\exists x)(\exists y)(x \in X$ et $y \in Y$ et $z=(x,y))$ (règle e_{12}). Elle entraîne donc la relation $(\exists x)(\exists y)(z=(x,y))$, autrement dit, $z \in X \times Y$ entraîne que z est un <u>couple</u> ; en outre, $X \times Y$ est un <u>ensemble</u>, autrement dit, la relation $(\exists z)(z \in X \times Y)$ est <u>vraie</u> ; en effet, elle est équivalente à

(16) $(\exists x)(\exists y)(x \in X$ et $y \in Y$ et $(\exists z)(z=(x,y)))$

et $(\exists z)(z=(x,y))$ est vraie ; donc (16) est équivalente à $((\exists x)(x \in X)$ et $(\exists y)(y \in Y))$ qui est vraie par hypothèse (cela justifie le nom du symbole fonctionnel $X \times Y$).

PROPOSITION 22.- <u>La relation</u> $(x,y) \in X \times Y$ <u>est équivalente à</u> $(x \in X$ et $y \in Y)$.

En effet, la relation $(x,y) \in X \times Y$ est équivalente par définition à $(\exists x')(\exists y')(x' \in X$ et $y' \in Y$ et $(x,y)=(x',y'))$; d'après (E_{IV}), elle est donc équivalente à

$(\exists x')(x' \in X$ et $x=x')$ et $(\exists y')(y'$ Y et $y=y')$

et par suite (règle e_{9bis}) à $(x \in X$ et $y \in Y)$.

PROPOSITION 23.- <u>Si</u> X,Y,X',Y' <u>sont des ensembles, la relation</u> $(X \subset X'$ et $Y \subset Y')$ <u>est équivalente à</u> $X \times Y \subset X' \times Y'$.

Montrons d'abord que $X \times Y \subset X' \times Y'$ est équivalente à $(\forall_{cp} z)$ $(z \notin X \times Y$ ou $z \in X' \times Y')$. Désignons pour abréger par $\Gamma\{z\}$ la relation $(\exists u)(\exists v)(z=(u,v))$ ("z est un couple"). Par définition, $X \times Y \subset X' \times Y'$ est équivalente à $(\forall z)(z \notin X \times Y$ ou $z \in X' \times Y')$; elle est donc aussi équivalente à

$$(\forall z)((z \notin X \times Y \text{ ou } z \in X' \times Y' \text{ ou } \Gamma\{z\}) \text{ et } (z \notin X \times Y \text{ ou } z \in X' \times Y' \text{ ou } (\text{non } \Gamma\{z\}))$$

Mais $(z \in X \times Y) \Rightarrow \Gamma\{z\}$ est vraie, donc $X \times Y \subset X' \times Y'$ est équivalente à $(\forall z)(\text{non } \Gamma\{z\}$ ou $z \notin X \times Y$ ou $z \in X' \times Y')$, ce qui établit notre assertion. Cela étant, la règle e_{25} montre que $X \times Y \subset X' \times Y'$ est équivalente à $(\forall x)(\forall y)((x,y) \notin X \times Y$ ou $(x,y) \in X' \times Y')$, c'est-à-dire (prop.22) à

$$(\forall x)(\forall y)((x \notin X \text{ ou } y \notin Y \text{ ou } x \in X') \text{ et } (x \notin X \text{ ou } y \notin Y \text{ ou } y \in Y'))$$

ou encore à

$$(\forall x)(x \notin X \text{ ou } x \in X' \text{ ou } (\forall y)(y \notin Y))$$
$$\text{et } (\forall y)(y \notin Y \text{ ou } y \in Y' \text{ ou } (\forall x)(x \notin X))$$

et comme X et Y sont des ensembles par hypothèses, la proposition est démontrée, puisque $(\forall x)(x \notin X)$ et $(\forall y)(y \notin Y)$ sont fausses.

7. Parties d'un produit.

Soient E et F deux ensembles. Nous introduirons dans ce n° des arguments des types suivants : éléments de E , éléments de F , éléments de $E \times F$, parties de E , parties de F , parties de $E \times F$.

Si x est un élément de E , y un élément de F , (x,y) est un symbole fonctionnel du type "élément de $E \times F$" (prop.22) ; si z est un élément de $E \times F$, z est un couple, et la relation $(pr_1(z) \in E$ et $pr_2(z) \in F)$ est vraie, puisqu'elle est équivalente à $z \in E \times F$ (prop.22) ; donc $pr_1(z)$ est du type "élément de E" et $pr_2(z)$ du type "élément de F" .

<u>Règle</u> e_{36} : <u>Si</u> x,y,z <u>sont des éléments de</u> $E,F,E\times F$ <u>respectivement tels que</u> z <u>ne figure pas dans</u> $\underline{R}\{x,y\}$, <u>la relation</u> $(\exists x|x\in E)(\exists y|y\in F)\underline{R}\{x,y\}$ <u>est équivalente à</u> $(\exists z|z\in E\times F)\underline{R}\{pr_1(z),pr_2(z)\}$; <u>la relation</u> $(\forall x|x\in E)(\forall y|y\in F)\underline{R}\{x,y\}$ <u>est équivalente à</u> $(\forall z|z\in E\times F)\underline{R}\{pr_1(z),pr_2(z)\}$.

Il suffit de répéter le raisonnement fait pour la règle e_{24} en tenant compte de ce que $pr_1(z)$ et $pr_2(z)$ sont des symboles fonctionnels de types élément de E et élément de F respectivement, en utilisant des quantificateurs typiques pour x,y et z , et remarquant que la relation $(\exists z|z\in E\times F)(z=(x,y))$ est vraie si x et y sont des éléments de E et F respectivement, puisqu'elle est équivalente à $(x,y)\in E\times F$, donc à ($x\in E$ et $y\in F$).

<u>Règle</u> e_{37} : <u>Si</u> x,y,z <u>sont des éléments de</u> $E,F,E\times F$ <u>respectivement tels que</u> x <u>et</u> y <u>ne figurent pas dans</u> $\underline{R}\{z\}$, <u>la relation</u> $(\exists z|z\in E\times F)\underline{R}\{z\}$ <u>est équivalente à</u> $(\exists x|x\in E)(\exists y|y\in F)\underline{R}\{(x,y)\}$, <u>et la relation</u> $(\forall z|z\in E\times F)\underline{R}\{z\}$ <u>est équivalente à</u> $(\forall x|x\in E)(\forall y|y\in F)\underline{R}\{(x,y)\}$.

Démonstration analogue à celle de la règle e_{25} , en tenant compte de ce que (x,y) est un symbole fonctionnel de type élément de $E\times F$, et de ce que la relation $(\exists x|x\in E)(\exists y|y\in F)$ $(z=(x,y))$ est équivalente à $z\in E\times F$.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les conséquences de ces règles analogues à celles des règles e_{24} et e_{25} .

Soit $\underline{R}\{x,y\}$ une relation quelconque (x élément de E , y élément de F) ; considérons la partie de $E\times F$ formée des $z\in E\times F$ tels que la relation $\underline{R}\{pr_1(z),pr_2(z)\}$ ait lieu, c'est-à-dire le symbole fonctionnel $\mathcal{E}\left[z\in E\times F|\underline{R}\{pr_1(z),pr_2(z)\}\right]$; par abus de langage, on le désigne encore par la notation $\mathcal{E}\left[x\in E,y\in F|\underline{R}\{x,y\}\right]$;

la relation $\mathcal{R}\{x,y\}$ est équivalente à $(x,y)\in \mathcal{E}[x\in E, y\in F \mid \mathcal{R}\{x,y\}]$.

Si A et B sont des sous-ensembles de E et F respectivement, A B est un sous-ensemble de $E\times F$ (prop.23) ; si x et y sont des éléments de E et F respectivement, la relation ($x\in A$ et $y\in B$) est donc équivalente à $(x,y)\in A\times B$; il en résulte que $A\times B$ est égal à un symbole fonctionnel associé à la relation $(\forall z|z\in E\times F)((pr_1(z)\in A$ et $pr_2(z)\in B)\Leftrightarrow(z\in Z))$ obtenue en passant au type des parties pour z dans la relation ($pr_1(z)\in A$ et $pr_2(z)\in B$). Or, on peut passer au type des parties pour cette relation lorsque A et B sont des <u>parties</u> quelconques (vides ou non) de E et F respectivement ; nous désignerons encore par $A\times B$ le symbole fonctionnel associé à la relation fonctionnelle (en Z) correspondante ; la relation $z\in A\times B$ est donc équivalente à ($pr_1(z)\in A$ et $pr_2(z)\in B$) la relation $(x,y)\in A\times B$ à ($x\in A$ et $y\in B$) (règle e_{37}) .

PROPOSITION 24.- <u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont deux parties de</u> E <u>et</u> F <u>respectivement, la relation</u> $X\times Y=\emptyset_{E\times F}$ <u>est équivalente à</u> ($X=\emptyset_E$ ou $Y=\emptyset_F$) .

En effet, $X\times Y=\emptyset_{E\times F}$ est équivalente à $(\forall z|z\in E\times F)(z\notin X\times Y)$, donc (règle e_{37}) à $(\forall x|x\in E)(\forall y|y\in F)((x,y)\notin X\times Y)$, et par suite à $(\forall x|x\in E)(\forall y|y\in F)(x\notin X$ ou $y\notin Y)$, d'où la proposition.

PROPOSITION 25.- <u>Si</u> X <u>et</u> X' <u>sont deux parties de</u> E , Y <u>et</u> Y' <u>deux parties de</u> F , <u>la relation</u> $X\times Y\subset X'\times Y'$ <u>est équivalente à</u> ($X\times Y=\emptyset_{E\times F}$ ou ($X\subset X'$ et $Y\subset Y'$)).

En effet, la relation $X\times Y\subset X'\times Y'$ est équivalente à

$$(\forall z|z\in E\times F)(z\notin X\times Y \text{ ou } z\in X'\times Y')$$

donc à $(\forall x|x\in E)(\forall y|y\in F)((x,y)\notin X\times Y$ ou $(x,y)\in X'\times Y')$

et par suite à

$$(\forall x|x\in E)(x\notin X \text{ ou } x\in X' \text{ ou } (\forall y|y\in F)(y\notin Y))$$
$$\text{et } (\forall y|y\in F)(y\notin Y \text{ ou } y\times Y') \text{ ou } (\forall x|x\in E)(x\notin X))$$

c'est-à-dire à ($X \subset X'$ ou $Y=\emptyset_F$) et ($Y \subset Y'$ ou $X=\emptyset_E$) ; comme $X=\emptyset_E$ entraîne $X \subset X'$, et $Y=\emptyset_F$ entraîne $Y \subset Y'$, on obtient la proposition en tenant compte de la prop.24 .

PROPOSITION 26.- Si X, X' sont des parties de E , Y, Y' des parties de F , les relations suivantes sont vraies :

$$(17) \qquad (X \times Y) \cup (X' \times Y) = (X \cup X') \times Y$$

$$(18) \qquad (X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y')$$

En effet, la relation $(x,y) \in (X \times Y) \cup (X' \times Y)$ est équivalente à $((x,y) \in X \times Y$ ou $(x,y) \in X' \times Y)$, donc à

$$((x \in X \text{ et } y \in Y) \text{ ou } (x \in X' \text{ et } y \in Y))$$

c'est-à-dire à $((x \in X$ ou $x \in X')$ et $y \in Y)$, donc aussi à $(x \in X \cup X'$ et $y \in Y)$, et finalement à $(x,y) \in (X \cup X') \times Y$. Démonstration analogue pour la formule (18) .

8. Projections d'un ensemble.

Soient x un élément de E , y un élément de F , Z une partie de $E \times F$; considérons la relation $(\exists y | y \in F)((x,y) \in Z)$ et passons au type des parties de E pour x dans cette relation ; nous obtenons une relation fonctionnelle (par rapport à une partie X de E), et nous prendrons comme symbole fonctionnel associé à cette relation l'assemblage de signes $Pr_1(Z)$, appelé première projection de Z ; la relation $x \in Pr_1(Z)$ est donc équivalente à $(\exists y | y \in F)((x,y) \in Z)$. On prendra de même $Pr_2(Z)$ (seconde projection de Z) comme symbole fonctionnel associé à la relation obtenue en passant au type des parties de F pour y dans la relation $(\exists x | x \in E)((x,y) \in Z)$; la relation $y \in Pr_2(Z)$ est donc équivalente à $(\exists x | x \in E)((x,y) \in Z)$.

PROPOSITION 27.- La relation $Z \subset Pr_1(Z) \times Pr_2(Z)$ est vraie.

En effet $(x,y)\in Z$ entraîne $(\exists y|y\in F)((x,y)\in Z)$, donc $x\in Pr_1(Z)$; elle entraîne de même $y\in Pr_2(Z)$, donc $(x\in Pr_1(Z)$ et $y\in Pr_2(Z))$ c'est-à-dire $(x,y)\in Pr_1(Z)\times Pr_2(Z)$.

PROPOSITION 28.- <u>Si</u> X <u>est une partie de</u> E , Y <u>une partie de</u> F , <u>la relation</u> $(X=\emptyset_E$ ou $Y\neq\emptyset_F)$ <u>est équivalente à</u> $Pr_1(X\times Y)=X$.

Notons d'abord que si x est un élément de E , y un élément de F , la relation $x\in Pr_1(X\times Y)$ est équivalente à $(\exists y|y\in F)(x\in X$ et $y\in Y)$, donc à $(x\in X$ et $(\exists y|y\in F)(y\in Y))$ elle entraîne donc $x\in X$, autrement dit, la relation ~~px~~ $Pr_1(X\times Y)\subset X$ est <u>vraie</u>. D'autre part, d'après la prop.27, la relation $X\times Y\subset Pr_1(X\times Y)\times Pr_2(X\times Y)$ est vraie, et (prop.25) elle est équivalente à $(X=\emptyset_E$ ou $Y=\emptyset_F$ ou $(X\subset Pr_1(X\times Y)$ et $Y\subset Pr_1(X\times Y))$; par suite la relation $(X=\emptyset_E$ ou $Y=\emptyset_F$ ou $X\subset Pr_1(X\times Y))$ est vraie ; donc $Y\neq\emptyset_F$ entraîne $X\subset Pr_1(X\times Y)$; comme $X=\emptyset_E$ entraîne $X\subset Pr_1(X\times Y)$, $(X=\emptyset_E$ ou $Y\neq\emptyset_F)$ entraîne $X\subset Pr_1(X\times Y)$. D'autre part, la relation $(X=\emptyset_E$ ou $Y=\emptyset_F$ ou $X\subset Pr_1(X\times Y))$ et $(X\neq\emptyset_E$ et $(Y=\emptyset_F$ ou $X\subset Pr_1(X\times Y)))$ est fausse, et comme $(X=\emptyset_E$ ou $Y=\emptyset_F$ ou $X\subset Pr_1(X\times Y))$ est vraie, $(X=\emptyset_E$ ou $(Y\neq\emptyset_F$ et $X\not\subset Pr_1(X\times Y)))$ est vraie, d'où on déduit aussitôt que $X\subset Pr_1(X\times Y)$ entraîne $(X=\emptyset_E$ ou $Y\neq\emptyset_F$)).

PROPOSITION 29.- <u>Si</u> X <u>est une partie de</u> E , Z <u>une partie de</u> $E\times F$, <u>la relation</u> $Pr_1(Z\cap(X\times F))=(Pr_1(Z))\cap X$ <u>est vraie</u>.

En effet, la relation $x\in Pr_1(Z\cap(X\times F))$ est équivalente à $(\exists y|y\in F)((x,y)\in Z$ et $(x,y)\in X\times F)$, donc à $(\exists y|y\in F)((x,y)\in Z$ et $x\in X$ et $y\in F)$, et par suite à $(\exists y|y\in F)((x,y)\in Z$ et $x\in X)$ et finalement à

$$(x\in X) \text{ et } (\exists y|y\in F)((x,y)\in Z)$$

c'est-à-dire à $(x\in X)$ et $(x\in Pr_1(Z))$.

<u>**Exercices**</u>.- 1) Si x et y sont deux éléments d'un ensemble E , montrer que la relation $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset_E$ est équivalente à $x \neq y$.

2) Si x et y sont deux éléments d'un ensemble E , X une partie de E , montrer que la relation $(\forall X | X \subset E)(x \in X \Rightarrow y \in X)$ est équivalente à $x = y$.

3) Montrer que le schéma

$$X \subset Y \text{ et } (\forall x)(x \notin Y \text{ ou } (\underline{R} \Leftrightarrow (x \in X)))$$

est équivalent au sens absolu à

$$(\forall x)((x \in Y \text{ et } \underline{R}) \Leftrightarrow (x \in X))$$

En déduire que, si Y est un ensemble, la relation

$$(\forall x)((x \in Y \text{ et } \underline{R}) \Leftrightarrow (x \in X))$$

est fonctionnelle (non typique) par rapport à X (dans la théorie des ensembles). Un symbole fonctionnel associé à cette relation est du type des parties de Y . En particulier, si Z est un ensemble et si on prend pour $\underline{R}$ la relation $x \in Z$, on désigne encore par $Y \cap Z$ un symbole fonctionnel associé à la relation correspondante ; si on prend pour $\underline{R}$ la relation $x \notin Y$, on désigne encore par $\emptyset_Y$ le symbole fonctionnel associé à la relation correspondante ; si on prend pour $\underline{R}$ la relation $x \notin Z$, on désigne par $\complement_Y Z$ le symbole fonctionnel correspondant. Démontrer les relations

$$\emptyset_Y = \emptyset_Z \quad , \quad \complement_Y(\complement_Y Z) = Y \cap Z \quad , \quad \complement_Y Y = \emptyset_Y \quad , \quad \complement_Y \emptyset_Y = Y$$

$$Y \cap Y = Y \quad , \quad Y \cap \emptyset_Y = \emptyset_Y \quad , \quad Z \cap \complement_Y Z = \emptyset_Y$$

$$Y \cap Z = Z \cap Y \quad , \quad Y \cap (Z \cap T) = (Y \cap Z) \cap T$$

Montrer que la relation $Z \subset Y$ est équivalente à $Y \cap Z = Z$ et entraîne $Z \cap T \subset Y \cap T$, et que la relation $(T \subset Y \text{ et } T \subset Z)$ est équivalente à $T \subset Y \cap Z$.

4) On considère la théorie subordonnée à la théorie de l'égalité, et définie par la donnée de l'axiome (E_V) et du schéma d'axiome

$$(S_{II}) \qquad (\forall \ldots)(\exists Y)(\forall x)(\underline{R} \Leftrightarrow x \in Y))$$

où Y est un argument ne figurant pas dans $\underline{R}$. Dans cette théorie, la relation $(\forall x)(\underline{R} \Leftrightarrow (x \in Y))$ est une relation fonctionnelle par rapport à Y , si Y ne figure pas dans $\underline{R}$. En particulier, soit Ω le symbole fonctionnel associé à la relation fonctionnelle $(\forall x)(x \notin x \Leftrightarrow x \in Y)$. Montrer que la relation $\Omega \notin \Omega$ est équivalente à $\Omega \in \Omega$ dans la théorie considérée, et par suite que cette dernière est <u>contradictoire</u> ("paradoxe de Russell").

5) Si X et X' sont deux parties de E , Y et Y' deux parties de F , montrer que la relation $X \times Y = X' \times Y'$ est équivalente à $(X \times Y = \emptyset_{E \times F}$ ou $(X = X'$ et $Y = Y'))$.

6) Montrer que la relation

$$\complement(X \times Y) = ((\complement X) \times F) \cup (E \times (\complement Y)) = ((\complement X) \times F) \cup (X \times (\complement Y)) .$$

est vraie.
