LIVRE I
THEORIE DES ENSEMBLES
CHAPITRE IV (ETAT 3)
ENSEMBLES ORDONNES

Rédaction n° 061

Nombre de pages : 63

Nombre de feuilles : 63

Livre I Th. des Ensembles
Chap IV. [Etat 4]
Ensembles ordonnés

M. Salvador

A 61 2

LIVRE I

THÉORIE des ENSEMBLES

CHAPITRE IV (Etat 4)

ENSEMBLES ORDONNÉS.

Sommaire.

CHAPITRE IV (Etat 3)

ENSEMBLES ORDONNÉS

§ 1. Structures d'ordre.

1. Relations d'ordre. Soit E un ensemble, R une relation normale, contenant (entre autres) deux éléments arbitraires u,v de E , qui sont des arguments libres dans R . Nous dirons que dans une théorie $\mathcal{C}$, R est une relation d'ordre entre u et v (ou relation d'ordre dans E) si elle satisfait aux trois conditions suivantes :

a) la relation $(x|u)(x|v)R$ est vraie ;

b) la relation "$(x|u)(y|v)R$ et $(y|u)(x|v)R$" entraîne $x=y$;

c) la relation "$(x|u)(y|v)R$ et $(y|u)(z|v)R$" entraîne $(x|u)(z|v)R$.

Avec la terminologie introduite à propos des relations d'équivalence (chap.II, § 6, n°1) les conditions a) et c) signifient respectivement que R est une relation réflexive et transitive ; on exprime encore parfois b) en disant que R est asymétrique.

Exemples.- 1) Dans l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E , la relation d'inclusion $X \subset Y$ est une relation d'ordre entre X et y (chap.II, § 2, n°1).

2) Dans l'ensemble $\overline{\omega}(E)$ des puissances d'un ensemble E , la relation $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ est une relation d'ordre entre $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ (chap.III, § 1, n°3).

3) Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, la relation "m est un diviseur de n" entre m et n est une relation d'ordre. En effet, elle est équivalente à "il existe p tel que $n=mp$" ; on en déduit aussitôt qu'elle est réflexive et transitive ; d'autre part, si $n=mp$ et $m=nq$, on a $m=pqm$; si $m=0$, on a $n=0$, et si $m>0$, on a $pq=1$, d'où $p=q=1$ et on voit que $m=n$ dans tous les cas, autrement dit que la relation "m est un diviseur de n" est asymétrique.

4) Dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ des ensembles de parties d'un ensemble E , soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des <u>partitions</u> ϖ de E (chap. II, § 5, n°3) . Par définition, la relation "ϖ est moins fine que ϖ'" est équivalente à la relation suivante : "quel que soit $Y \in \varpi'$, il existe $X \in \varpi$ tel que $Y \subset X$" . On vérifie aussitôt que cette relation est réflexive et transitive ; elle est aussi asymétrique, car si $Y \in \varpi'$, $X \in \varpi$ et $Z \in \varpi'$ sont tels que $Y \subset X \subset Z$, on a $Y \subset Z$ d'où $Y=Z$ puisque ϖ' est une partition ; on en déduit $Y=X=Z$, et par suite tout ensemble de ϖ' est un ensemble de ϖ et vice-versa, c'est-à-dire $\varpi' = \varpi$. La relation "ϖ est moins fine que ϖ'" est donc une relation d'ordre dans l'ensemble $\mathscr{P}$.

5) Dans l'ensemble $\mathbf{N}^E$ des applications d'un ensemble E dans $\mathbf{N}$, la relation "quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$" est une relation d'ordre entre f et g , comme on le vérifie immédiatement ; on la note généralement $f \leqslant g$.

<u>Remarques</u>.- 1) On peut remplacer, dans la définition des relations d'ordre, les conditions a) et b) par la condition unique suivante :
d) la relation "$(x|u)(y|v)R$ et $(y|u)(x|v)R$" est équivalente à $x = y$.

2) Soit C une partie de $E \times E$; les conditions a),b),c) pour que la relation $(u,v) \in C$ soit une relation d'ordre entre u et v sont équivalentes aux suivantes (où Δ désigne la diagonale de $E \times E$) : a') $\Delta \subset C$; b') $C \cap \overset{-1}{C} \subset \Delta$; c') $C \circ C \subset C$ (cf. chap. II, § 6, n°1) ; les relations a') et b') équivalent à : d') $C \cap \overset{-1}{C} = \Delta$. On notera que la relation $\Delta \subset C$ entraîne $\Delta \circ C \subset C \circ C$, ou $C \subset C \circ C$; on a donc $C \circ C = C$.

La relation $u=v$ est évidemment une relation d'ordre, qui correspond à la diagonale Δ dans $E \times E$.

Par définition, une <u>structure d'ordre</u> (ou simplement un <u>ordre</u>) sur un ensemble E est une partie C de $E \times E$ (élément de $\mathfrak{P}(E \times E)$) telle que $(u,v) \in C$ soit une relation d'ordre dans E (condition que l'on peut exprimer comme il vient d'être dit dans la remarque 2 ci-dessus) ; conformément aux définitions générales (chap.II, § 7, n°2) l'ensemble $\mathcal{O}$ des parties C de $E \times E$ satisfaisant à ces conditions (ou un ensemble dédoublé si nécessaire) est l'<u>ensemble des structures d'ordre</u> sur E ; la théorie définie par la donnée de l'ensemble de base E , de l'argument de base C et de l'axiome $C \in \mathcal{O}$ est la <u>théorie des structures d'ordre</u>. Dans cette théorie on dit que E est <u>ordonné</u> par l'ordre C (ou par la relation d'ordre $(u,v) \in C$) .

Une relation d'ordre entre u et v dans une théorie $\mathcal{C}$ se note d'ordinaire en écrivant u et v dans un ordre déterminé et en les séparant par un signe (ou groupe de signes) caractéristique de la relation d'ordre donnée (voir les exemples ci-dessus). Par abus de langage, lorsqu'une relation d'ordre entre x et y est notée $x(\sigma)y$ (où nous représentons par (σ) un signe ou groupe de signes caractéristique de la relation envisagée), on dit souvent "la relation (σ)" au lieu de "la relation $x(\sigma)y$" , lorsqu'aucune confusion n'en peut résulter. Dans ce chapitre, pour exposer les principes généraux de la théorie des ensembles ordonnés (et par analogie avec la notation de la relation d'ordre entre puissances des parties d'un ensemble), nous écrirons $x \leqslant y$ ou $y \geqslant x$ la relation d'ordre $(x,y) \in C$ (si aucune confusion n'en peut résulter) ; ces relations se lisent respectivement : "x est <u>inférieur</u> à y" et "y est <u>supérieur</u> à x" . Avec cette notation, les axiomes de la théorie des structures d'ordre s'écrivent :

(EO_I) <u>Quel que soit</u> $x \in E$, $x \leqslant x$.

(EO_{II}) <u>La relation</u> "$x \leqslant y$ <u>et</u> $y \leqslant x$" <u>entraîne</u> $x=y$.

(EO_{III}) <u>La relation</u> "$x \leqslant y$ <u>et</u> $y \leqslant z$" <u>entraîne</u> $x \leqslant z$.

Nous écrirons $x < y$ (ou $y > x$) la relation "$x \leqslant y$ et $x \neq y$" ; ces relations se lisent respectivement : "x est <u>strictement inférieur</u> à y" et "y est <u>strictement supérieur</u> à x".

Nous laisserons en général au lecteur le soin de traduire dans la notation propre à chaque relation d'ordre particulière, les notions générales que nous allons définir ci-dessous en employant la notation et la terminologie précédentes.

PROPOSITION 1.- <u>La relation</u> $x \leqslant y$ <u>est équivalente</u> à "$x < y$ <u>ou</u> $x=y$".

En effet ($x < y$ ou $x=y$) est équivalente à (($x \leqslant y$ ou $x=y$) et ($x \neq y$ ou $x=y$)), et comme ($x \neq y$ ou $x=y$) est vraie, elle est aussi équivalente à ($x \leqslant y$ ou $x=y$) ; mais comme $x=y$ entraîne $x \leqslant y$ d'après (EO_I), ($x \leqslant y$ ou $x=y$) est équivalente à $x \leqslant y$.

PROPOSITION 2.- <u>Chacune des relations</u> "$x \leqslant y$ <u>et</u> $y < z$", $x < y$ <u>et</u> $y \leqslant z$" <u>entraîne</u> $x < z$.

En effet ($x \leqslant y$ et $y < z$) est équivalente à (($x \leqslant y$ et $y \leqslant z$) et $y \neq z$) elle entraîne donc $x \leqslant z$; d'autre part ($x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ et $x=z$) entraîne d'après (EO_{II}) $x=y=z$; donc (($x \leqslant y$ et $y \leqslant z$) et $y \neq z$) entraîne $x \neq z$. Démonstration analogue pour la seconde relation.

On dit que deux éléments x,y de E sont <u>comparables</u> si l'une au moins des deux relations $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ est vraie ; dans le cas contraire, on dit que x et y sont <u>incomparables</u> (l'exemple 1 ci-dessus permet aussitôt de donner des exemples de couples d'éléments incomparables).

On note parfois $x \not\leqslant y$ (ou $y \not\geqslant x$) la négation de $x \leqslant y$, $x \not< y$ (ou $y \not> x$) la négation de $x < y$; on aura soin d'observer qu'en général (comme le montre par exemple l'exemple 1 ci-dessus) la négation de $x \leqslant y$ <u>n'est pas équivalente</u> à $y < x$ (cf. n°   ).

Etant donnée une structure d'ordre quelconque C , la partie $\overset{-1}{C}$ de $E \times E$ est aussi une structure d'ordre ; autrement dit, la relation $(v,u) \in C$ est une relation d'ordre <u>entre u et v</u> , comme on le vérifie immédiatement; la structure d'ordre $\overset{-1}{C}$ (resp. la relation d'ordre $(v,u) \in C$) est dite <u>opposée</u> à la structure d'ordre C (resp. à la relation d'ordre $(u,v) \in C$). Avec les notations introduites ci-dessus, la relation d'ordre opposée à $x \leqslant y$ est donc $x \geqslant y$.

Il est immédiat qu'une structure d'ordre C ne peut être identique à son ~~xxx~~ opposée que si $C = \Delta$.

2. <u>Ensembles préordonnés</u>. Soit R une relation normale contenant comme arguments libres deux éléments arbitraires u,v de E . Si R est <u>réflexive</u> et <u>transitive</u>, elle n'est pas nécessairement asymétrique (n°1) ; mais dans ce cas, la relation "$(x|u)(y|v)R$ et $(y|u)(x|v)R$ " entre x et y , que nous noterons S , est une <u>relation d'équivalence</u> (dite <u>associée</u> à R) car elle est évidemment symétrique, et on vérifie aussitôt qu'elle est réflexive et transitive. En outre, la relation $(x|u)(y|v)R$ est <u>compatible</u> avec la relation S pour l'argument x , car "$(x|u)(y|v)R$ et $(x|u)(x'|v)R$ et $(x'|u)(x|v)R$" entraîne, par la transitivité de R , la relation $(x'|u)(y|v)R$; de même on voit que R est compatible avec S pour l'argument y . On peut donc <u>passer au quotient</u> dans R pour chacun des arguments u,v ; on obtient ainsi une relation entre deux éléments arbitraires $\overline{u}$, $\overline{v}$ de l'ensemble quotient E/S , relation que nous noterons R' ; elle est équivalente à chacune des relations $(\exists u \in \overline{u})(\exists v \in \overline{v})R$ et $(\forall u \in \overline{u})(\forall v \in \overline{v})R$; de ce fait et des hypothèses sur R , on déduit aussitôt que R' est <u>réflexive</u> (parce que R entraîne R') et <u>transitive</u> (parce que la relation "$(\overline{x}|\overline{u})(\overline{y}|\overline{v})R'$ et $(\overline{y}|\overline{u})(\overline{z}|\overline{v})R'$ " est équivalente à $(\forall x \in \overline{x})(\forall y \in \overline{y})(\forall z \in \overline{z})((x|u)(y|v)R$ et $(y|u)(z|v)R)$) ;

enfin R' est <u>asymétrique</u>, car la relation $((\bar{x}|\bar{u})(\bar{y}|\bar{v})R'$ et $(\bar{y}|\bar{u})(\bar{x}|\bar{v})R')$ est équivalente à $(\forall x\in\bar{x})(\forall y\in\bar{y})\ ((x|u)(y|v)R$ et $(y|u)(x|v)R)$, c'est-à-dire à $(\forall x\in\bar{x})(\forall y\in\bar{y})S$ donc à $\bar{x}=\bar{y}$.
Nous dirons qu'une relation R réflexive et transitive est une relation de <u>préordre</u> (entre u et v) sur E , et que la relation d'ordre R' sur E/S est la <u>relation d'ordre associée à</u> R .

Si C est une partie de $E\times E$, les conditions pour que $(u,v)\in C$ soit une relation de préordre sont : $\Delta\subset C$ et $C\circ C\subset C$; la relation d'équivalence associée est $(u,v)\in C\cap \overset{-1}{C}$; la relation d'ordre associée est $(\bar{u},\bar{v})\in C'$ où C' est la partie de $(E/S)\times(E/S)$ qui correspond à l'image de C par l'application canonique de $E\times E$ sur $(E\times E)/(S\times S)$.

<u>Exemple</u>.- Soit $\mathfrak{G}$ une partie de $\mathfrak{P}(E)$ telle que la réunion de deux parties de E appartenant à $\mathfrak{G}$ soit encore un élément de $\mathfrak{G}$. Dans l'ensemble $\mathbb{R}^E$ des applications de E dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, la relation "il existe $A\in\mathfrak{G}$ tel que, pour tout $x\in\complement A$, $f(x)\leqslant g(x)$ est une relation de préordre entre f et g , comme on le vérifie aussitôt. La relation d'équivalence associée est équivalente à la relation "il existe $A\in\mathfrak{G}$ tel que pour tout $x\in\complement A$, $f(x)=g(x)$" ; autrement dit une classe d'équivalence se compose des fonctions dont deux quelconques sont égales dans le complémentaire d'une partie de $\mathfrak{G}$. *L'exemple le plus important de ce type de relation est fourni par la théorie de l'Intégration (cf. Livre VI), où $\mathfrak{G}$ est l'ensemble des "ensembles de mesure nulle" . *

3. Sous-ensembles ordonnés. Produit d'ensembles ordonnés. Soit E un ensemble ordonné par une structure d'ordre $C \subset E \times E$; si A est une partie non vide quelconque de E , l'ensemble $C \cap (A \times A)$ définit une structure d'ordre sur A , comme on le vérifie aussitôt ; on note généralement la relation d'ordre ainsi définie sur A par la même notation que la relation d'ordre dans E ; la structure d'ordre qu'elle définit sur A est dite induite par celle de E (qui est encore appelée un prolongement de la structure qu'elle induit sur A) ; la relation d'ordre $(x,y) \in C \cap (A \times A)$ elle-même est dite induite par $(x,y) \in C$ sur A . Quand on considère A comme un ensemble ordonné, il s'agit toujours, sauf mention expresse du contraire, de la structure d'ordre sur A induite par celle de E .

Exemples.- Les relations induites par la relation d'inclusion sur des sous-ensembles d'ensembles de parties ont une importance considérable dans toutes les parties des mathématiques ; nous en donnerons trois exemples.

1) Soient E et F deux ensembles, $\Phi(E,F)$ l'ensemble des applications d'une partie de E dans F (chap.II, § 4,n°2) ; $\Phi(E,F)$ est une partie de l'ensemble $\mathfrak{P}(E \times F)$, et la relation "u est une restriction de v" (équivalente par définition à "v est un prolongement de u ") entre u et v n'est autre que la relation induite sur $\Phi(E,F)$ par la relation d'inclusion $u \subset v$ dans $\mathfrak{P}(E \times F)$.

2) L'ensemble des structures d'ordre sur un ensemble E est une partie $\mathcal{O}$ de l'ensemble $\mathfrak{P}(E \times E)$; la relation d'ordre $C \subset D$ induite sur $\mathcal{O}$ par la relation d'inclsuion dans $\mathfrak{P}(E \times E)$ s'exprime encore sous l'une des formes suivantes : "C est moins fine que D" ou "D est plus fine que C" .

3) De même, l'ensemble $\mathcal{R}$ des parties C de $E \times E$ telles que $(x,y) \in C$ soit une relation d'équivalence est une partie de $\mathfrak{P}(E \times E)$, et on sait qu'il existe une application biunivoque canonique de $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des <u>partitions</u> de E . Si on transporte par cette application la structure d'ordre induite sur $\mathcal{R}$ par la structure d'inclusion sur $\mathfrak{P}(E \times E)$ on obtient la structure opposée, comme on le vérifie aussitôt, à celle définie dans l'exemple 4 du n°1 . Par abus de langage, on dit parfois que $\mathcal{R}$ est l'<u>ensemble des relations d'équivalence</u> dans E .

Soit maintenant $(E_\iota)_{\iota \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E , et soit C_ι une structure d'ordre sur E_ι pour chaque $\iota \in I$; nous noterons $x_\iota \leqslant y_\iota$ la relation d'ordre $(x_\iota, y_\iota) \in C_\iota$ dans E_ι . Dans l'ensemble produit $F = \prod_{\iota \in I} E_\iota$, la relation "quel que soit $\iota \in I$, $x_\iota \leqslant y_\iota$" est une relation d'ordre entre $x=(x_\iota)$ et $y=(y_\iota)$, comme on le vérifie trivialement. Cette relation (resp. la structure d'ordre C qu'elle définit) est appelée (par abus de langage) le <u>produit</u> des relations d'ordre $x_\iota \leqslant y_\iota$ (resp. des structures d'ordre C) ; on la note $x \leqslant y$, et on dit que l'ensemble F , ordonné par cette relation, est le <u>produit des ensembles ordonnés</u> E_ι .

Il est immédiat que C correspond, par l'application canonique de $\prod_{\iota \in I}(E_\iota \times E_\iota)$ sur $F \times F$, à l'ensemble produit $\prod_{\iota \in I} C_\iota$.

Un exemple important de produit d'ensembles ordonnés est l'ensemble F^E des applications d'un ensemble E dans un ensemble ordonné F : la relation d'ordre produit entre deux applications f et g de E dans F est alors "quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$" . L'exemple 5 du n°1 est un cas particulier d'une telle relation.

Il faut avoir soin de noter que, dans l'ensemble ordonné F^E, la relation $f < g$ signifie "quel que soit $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$, et il existe $y \in E$ tel que $f(y) < g(y)$", et non "quel que soit $x \in E$, $f(x) < g(x)$".

2

4\. Fonctions monotones. Définition 1. Etant donnés deux ensembles ordonnés E, F, on dit qu'une application f de E dans F est croissante (resp. décroissante) si la relation $x \leqslant y$ entraîne $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Une application de E dans F est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Une application croissante de E dans F devient une application décroissante (et vice-versa) quand on remplace l'une des deux structures d'ordre sur E et F par son opposée ($n^o 1$) ; elle reste croissante si on remplace chacune de ces deux structures par son opposée. Toute fonction constante est à la fois croissante et décroissante ; la réciproque n'est pas vraie en général (cf. prop.3 et exerc.   ).

Définition 2. On dit qu'une application f de E dans F est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si la relation $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$). Une application de E dans F est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemples.- 1) L'application $n \to n+1$ de $\mathbb{N}$ dans lui-même est strictement croissante.

2) L'application $X \to \complement X$ de $\mathfrak{P}(E)$ (ordonné par inclusion) sur lui-même, est strictement décroissante.

Une application monotone et biunivoque de E dans F est nécessairement strictement monotone ; la réciproque n'est pas vraie en général, car si x et y sont incomparables, on peut avoir $f(x)=f(y)$ pour une fonction strictement monotone.

La définition générale d'un isomorphisme d'un ensemble ordonné E sur un ensemble ordonné E' montre qu'une telle application f peut encore être définie ainsi : c'est une application biunivoque de E sur E' qui est croissante, ainsi que l'application réciproque.

Lorsque I est un ensemble d'indices ordonné, on dit qu'une famille $(X_\iota)_{\iota \in I}$ de parties d'un ensemble E , ayant I pour ensemble d'indices, est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) si $\iota \longrightarrow X_\iota$ est une application croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) de I dans $\mathfrak{P}(E)$ ordonné par inclusion ; en particulier, lorsqu'on parle d'une suite croissante (par exemple) de parties de E , on suppose toujours que l'ensemble d'indices est ordonné par la relation $m \leqslant n$ dans N , sauf mention expresse du contraire.

5. Ensembles totalement ordonnés. Intervalles. Définition 3. On dit qu'une partie X d'un ensemble ordonné E est totalement ordonnée si deux éléments quelconques de X sont comparables.

Autrement dit, si x et y sont deux éléments quelconques de X , une et une seule des trois relations $x=y$, $x<y$, $x>y$ est vraie. On en déduit que la négation de la relation $x \leqslant y$ est alors $x > y$.

Pour que la relation d'ordre $(x,y) \in C$ soit telle que E soit totalement ordonné par cette relation, il faut et il suffit que l'on ait $C \cup \overset{-1}{C} = E \times E$ (en outre des relations $C \cap \overset{-1}{C} = \Delta$ et $C \circ C = C$).

Exemples.- 1) La partie vide d'un ensemble ordonné quelconque est toujours totalement ordonnée. Il en est de même de toute partie réduite à un élément, et de toute partie $\{x,y\}$ formée de deux éléments comparables.

2) L'ensemble $\mathcal{N}$ des entiers naturels est totalement ordonné par la relation $m \leqslant n$ définie au chap. III. Il en est de même de l'ensemble $\mathcal{R}$ des nombres réels.

3) Soient E et F deux ensembles totalement ordonnés. Sur l'ensemble produit $G=E\times F$, considérons la relation suivante entre (x,y) et (x',y') : "$x < x'$ ou ($x=x'$ et $y \leqslant y'$)". On vérifie immédiatement que c'est une relation d'ordre dans G ; en outre, si $z = (x,y)$ et $z'=(x',y')$ sont deux éléments quelconques de G, on a, ou bien $x<x'$ et dans ce cas $z<z'$, ou bien $x>x'$ et dans ce cas $z>z'$, ou bien $x=x'$; dans ce dernier cas, si $y<y'$, on a $z<z'$, si $y>y'$ on a $z>z'$, et enfin si $y=y'$ on a $z=z'$; donc G est bien totalement ordonné. L'ordre ainsi défini sur G est appelé <u>ordre lexicographique</u> ; il faut se garder de le confondre avec l'ordre <u>produit</u> des ordres sur E et F, défini au n° 3 ; pour ce dernier, G n'est pas totalement ordonné si E et F ont chacun au moins deux éléments.

Toute partie totalement ordonnée X d'un ensemble ordonné E est aussi totalement ordonnée pour l'ordre <u>opposé</u> ; en outre, toute partie de X est totalement ordonnée.

Soit E un ensemble totalement ordonné ; si a et b sont deux éléments de E tels que $a \leqslant b$, on appelle <u>intervalle fermé d'origine a et d'extrémité b</u>, et on note $[a,b]$ la partie de E formée des éléments x tels que $a\leqslant x\leqslant b$; on appelle <u>intervalle semi-ouvert à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>) d'origine a et d'extrémité b, et on note $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) l'ensemble des $x\in E$ tels que $a\leqslant x< b$ (resp. $a<x\leqslant b$) ; on appelle <u>intervalle ouvert</u> d'origine a et d'extrémité b, et on note $]a,b[$, l'ensemble des $x\in E$ tels que $a<x<b$. Les intervalles $[a,a[$, $]a,a]$ et $]a,a[$ sont vides.

Lorsque $a=b$, l'intervalle fermé $[a,b]$ est l'ensemble réduit à l'élément a . Dans l'ensemble $\mathbb{N}$, pour $0<m\leqslant n$, l'intervalle fermé $[m,n]$ est identique à l'intervalle ouvert $]m-1,n+1[$ et aux intervalles semi-ouverts $[m,n+1[$ et $]m-1,n]$; on notera que l'intervalle ouvert $]n,n+1[$ est vide.

L'ensemble des $x\in A$ tels que $x\leqslant a$ (resp. $x<a$) s'appelle <u>intervalle fermé</u> (resp. <u>ouvert</u>) <u>illimité à gauche</u> et d'extrémité a , et se note $]\leftarrow,a]$ (resp. $]\leftarrow,a[$) ; de même, l'ensemble des $x\in E$ tels que $x\geqslant a$ (resp. $x>a$) se nomme <u>intervalle fermé</u> (resp. <u>ouvert</u>) <u>illimité à droite</u> et d'origine a , et se note $[a,\rightarrow[$ (resp. $]a,\rightarrow[$). Enfin, E lui-même est dit <u>intervalle ouvert illimité dans les deux sens</u>, et noté $]\leftarrow,\rightarrow[$.

<u>Proposition 1</u>. <u>Si E est totalement ordonné, toute application strictement monotone de E dans un ensemble ordonné F est biunivoque</u>.

En effet, $x\neq y$ entraîne $x<y$ ou $y<x$, donc $f(x)<f(y)$ ou $f(y)<f(x)$, et par suite $f(x)\neq f(y)$.

Il en résulte aussitôt qu'une application strictement monotone f d'un ensemble totalement ordonné E dans un ensemble ordonné F (totalement ou non) est un <u>isomorphisme</u> de E <u>sur</u> $f(E)$ (ordonné par l'ordre induit par celui de F) .

<u>Corollaire</u>. <u>L'application $x\rightarrow\,]\leftarrow,x[$ d'un ensemble totalement ordonné E dans $\mathfrak{P}(E)$ est un isomorphisme de E sur l'ensemble des intervalles $]\leftarrow,x[$, ordonné par inclusion</u>.

En effet, si $x<y$, on a $]\leftarrow,x[\,\subset\,]\leftarrow,y[$, et ces deux intervalles ne peuvent être égaux, puisque $x\in\,]\leftarrow,y[$ et $x\notin\,]\leftarrow,x[$.

6. Plus petit élément ; plus grand élément. Définition 4. On dit qu'une partie non vide X d'un ensemble ordonné E admet un plus petit élément (resp. un plus grand élément) s'il existe un élément $a \in X$ tel que, pour tout $x \in X$, on ait $a \leqslant x$ (resp. $a \geqslant x$) ; on dit alors que a est le plus petit élément (resp. le plus grand élément) de X .

La seconde partie de cette définition se justifie en remarquant qu'il existe au plus un plus petit élément (resp. plus grand élément) de X , car si $a \in X$ et $b \in X$ sont tels que $a \leqslant x$ et $b \leqslant x$ pour tout $x \in X$, on a en particulier $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$, d'où $a=b$.

Si X admet un plus petit élément a , a est le plus grand élément de X pour l'ordre opposé, et vice-versa.

Exemples.- 1) Nous avons vu au chap.III que dans l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels, toute partie non vide admet un plus petit élément ; pour qu'une partie de $\mathbf{N}$ admette un plus grand élément, il faut et il suffit qu'elle soit finie.

Au contraire, l'ensemble $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels >0 n'admet pas de plus petit élément.

2) Soit $\mathfrak{G}$ une partie non vide de l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E . Si $\mathfrak{G}$ admet un plus petit élément A , on a $A \subset X$ pour tout $X \in \mathfrak{G}$, donc $A \subset \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X$, et comme $A \in \mathfrak{G}$ par hypothèse, A n'est autre que l'intersection de tous les ensembles $X \in \mathfrak{G}$; inversement, si l'intersection de tous les ensembles de $\mathfrak{G}$ appartient à $\mathfrak{G}$, c'est évidemment le plus petit élément de $\mathfrak{G}$. On voit de même que, pour que $\mathfrak{G}$ possède un plus grand élément, il faut et il suffit que la réunion des ensembles de $\mathfrak{G}$ appartienne à $\mathfrak{G}$, dont elle est alors le plus grand élément.

3) Comme cas particulier de l'exemple précédent, on voit que $\emptyset$ est le plus petit élément et E le plus grand élément de $\mathfrak{P}(E)$ ordonné par inclusion. Dans l'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de E dans F , ordonné par la relation "u ést une restriction de v" l'application vide est de même le plus petit élément. Enfin, la relation $(x,y)\in\Delta$, où Δ est la diagonale de $E\times E$, est le plus petit élément de l'ensemble $\mathcal{R}$ des relations d'équivalence sur E .

4) Dans l'ensemble des entiers naturels $n\geqslant 1$, ordonné par la relation "m divise n" , 1 est le plus petit élément.

7. Eléments minimaux, et éléments maximaux. Définition 5. On dit qu'un élément a d'une partie non vide X d'un ensemble ordonné E est un élément minimal (resp. maximal) de E si la relation "$x\in X$ et $x\leqslant a$" (resp. "$x\in X$ et $x\geqslant a$") entraîne $x=a$.

Tout élément minimal de X est un élément maximal pour l'ordre opposé, et vice-versa (ce qui permet de ne considèrer que les propriétés des éléments minimaux). L'ensemble des éléments minimaux de X peut être vide; il peut aussi être infini. Si X admet un plus petit élément a , a est l'unique élément minimal de X , puisque pour tout $x\in X$ tel que $x\neq a$, on a $a<x$. Lorsque X est totalement ordonnée, s'il existe un élément minimal a de X , a est aussi plus petit élément de X , puisque pour tout $x\in X$ on ne peut avoir $x<a$, ce qui entraîne alors $x\geqslant a$.

Exemples.- 1) Dans la partie de $\mathfrak{P}(E)$ (ordonné par inclusion) formée desparties non vides de E , toute partie réduite à un élément est un élément minimal.

2) Dans l'ensemble des entiers naturels >1 , ordonné par la relation "m divise n" , les éléments minimaux sont les nombres premiers

3) Dans l'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties de E dans F, ordonné par la relation "u est une restriction de v", toute application <u>définie dans</u> E est un élément <u>maximal</u>.

4) Dans l'ensemble $\mathcal{O}$ des structures d'ordre sur E, ordonné par inclusion (n°3, exemple 2) une structure T d'ensemble <u>totalement ordonné</u> est un élément <u>maximal</u> ; en effet, si C est une structure d'ordre plus fine que T, pour tout $(x,y)\in E\times E$, on a $(x,y)\in T$ ou $(y,x)\in T$; si $(x,y)\notin T$ on ne peut avoir $(x,y)\in C$, car on aurait aussi $(y,x)\in T\subset C$ donc $x=y$ contrairement à l'hypothèse. Donc $C=T$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Toute partie finie X d'un ensemble ordonné E admet au moins un élément maximal et au moins un élément minimal</u>.

Raisonnons par récurrence sur le nombre n d'éléments de X, la proposition étant évidente pour $n=1$. Soit a un élément de X, et $Y=X\cap\complement\{a\}$; Y ayant $n-1$ éléments, admet un élément minimal b d'après l'hypothèse de récurrence ; si $a\leqslant b$, a est élément minimal de X ; dans le cas contraire, b est élément minimal de X.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Toute partie finie X d'un ensemble totalement ordonné E admet un plus grand et un plus petit élément</u>.

Etant donnée une suite finie $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un ensemble totalement ordonné E, on désignera par $M(x_i)_{i\in I}$ le plus grand élément, par $\mathrm{Min}(x_i)_{i\in I}$ le plus petit élément de l'ensemble des x_i ; ces éléments sont encore appelés respectivement le <u>maximum</u> et le <u>minimum</u> des x_i ; le maximum (resp. minimum) de deux éléments x, y de E se notera aussi $\mathrm{Max}(x,y)$ (resp. $\mathrm{Min}(x,y)$) ; on utilise des notations analogues pour le maximum et le minimum de plusieurs éléments.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Si</u> E <u>est un ensemble totalement ordonné fini de n éléments, il existe un isomorphisme et un seul de</u> E <u>sur l'intervalle</u> $[1,n]$ <u>de</u> $\mathbb{N}$.

Il suffit de raisonner par récurrence sur n . La proposition est évidente pour n=1 . Pour n quelconque, E admet un plus grand élément b , et s'il existe un isomorphisme φ de E sur $[1,n]$ il doit appliquer b sur n ; si E' est le complémentaire de $\{b\}$ dans E , la restriction de φ à E' doit être un isomorphisme de E' sur $[1,n-1]$, ce qui établit l'unicité de φ d'après l'hypothèse de récurrence ; par ailleurs cette hypothèse montre qu'il existe un isomorphisme ψ de E' sur $[1,n-1]$; en prenant $\varphi(x)=\psi(x)$ dans E' et $\varphi(b)=n$, φ est évidemment l'isomorphisme cherché.

Si $i \rightarrow a_i$ est l'unique isomorphisme de $[1,n]$ sur E , on dit que $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est <u>la suite obtenue en rangeant les éléments de E dans l'ordre croissant</u>.

8. <u>Majorants, minorants. Ensembles filtrants</u>. <u>Définition 6</u>. <u>Etant donnée une partie d'un ensemble ordonné</u> E , <u>on appelle majorant</u> (resp. <u>minorant</u>) <u>de</u> X <u>tout élément</u> $x\in E$ <u>tel que, pour tout</u> $y\in X$, <u>on ait</u> $y\leqslant x$ (resp. $y\geqslant x$).

Si x est un majorant (resp. minorant) de X , on dit aussi que x <u>majore</u> (resp. <u>minore</u>) X . Il est clair que si x est un majorant (resp. minorant) de X , tout élément $z\geqslant x$ (resp. $z\leqslant x$) est aussi un majorant (resp. minorant) de X . Un majorant (resp. minorant) de X est aussi majorant (resp. minorant) de toute partie de X . Pour que X admette un plus grand (resp. plus petit) élément, il faut et il suffit qu'il existe un amjorant (resp. minorant) de X appartenant à X . Tout majorant de X est un minorant de X pour l'ordre opposé, et vice-versa.

L'ensemble des majorants d'une partie X de E peut être vide : c'est le cas lorsque X=E et que E n'a pas de plus grand élément.

Une partie X de E dont l'ensemble des majorants (resp. minorants) n'est pas vide est dite *majorée* (resp. *minorée*) ; une partie à la fois majorée et minorée est dite *bornée*.

La partie vide de E est bornée, car tout élément de E en est à la fois un amjorant et un minorant. Une partie de E réduite à un seul élément est bornée ; mais une partie de deux éléments de E n'est pas nécessairement majorée ni minorée.

Définition 7. *On dit qu'un ensemble E est filtrant à droite* (resp. *filtrant à gauche*) *si toute partie finie de E est majorée* (resp. *minorée*).

On voit aussitôt qu'il suffit que toute partie de E à *deux* éléments soit majorée (resp. minorée) pour qu'il en soit de même de toute partie finie de E (par récurrence sur le nombre d'éléments de cette partie) ; dire qu'un ensemble E est filtrant à droite revient donc à dire que, *quels que soient* x *et* y *dans* E , *il existe* $z \in E$ *tel que* $x \leqslant z$ *et* $y \leqslant z$. Si un ensemble ordonné E est filtrant à droite, l'ensemble ordonné par l'ordre opposé est filtrant à gauche et vice-versa.

La déf.7 suppose implicitement que la relation d'ordre entre x et y dans E est notée $x \leqslant y$; lorsqu'elle est notée $x(\sigma)y$, où nous désignons par (σ) un signe ou groupe de signes caractéristique de la relation envisagée, au lieu de dire que E est filtrant à droite, on dit que E est *filtrant pour la relation* (σ) : cela signifie donc que, quels que soient x et y dans E , il existe $z \in E$ tel que $x(\sigma)z$ et $y(\sigma)z$. Par exemple, si $\mathfrak{F}$ est un ensemble de parties d'un ensemble E , ordonné par inclusion, dire que $\mathfrak{F}$ est *filtrant pour la relation* $\subset$ signifie que, quels que soient $X \in \mathfrak{F}$ et $Y \in \mathfrak{F}$, il existe $Z \in \mathfrak{F}$ tel que $X \subset Z$ et $Y \subset Z$; dire que $\mathfrak{F}$ est *filtrant pour la relation* $\supset$ signifie que, quels que soient $X \in \mathfrak{F}$ et $Y \in \mathfrak{F}$, il existe $Z \in \mathfrak{F}$ tel que $X \supset Z$ et $Y \supset Z$.

Exemples.- 1) Tout ensemble totalement ordonné est filtrant à gauche et à droite.

2) Tout ensemble ordonné qui admet un plus grand (resp. plus petit) élément, est filtrant à droite (resp. à gauche).

3) L'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties de E dans F est filtrant à gauche, puisqu'il admet un plus petit élément, l'application vide ; mais il n'est pas filtrant à droite si E et F ont plus d'un élément, car si A est une partie de E distincte de E , deux applications distinctes de A dans F n'ont aucun prolongement commun.

4) De même, l'ensemble σ des structures d'ordre sur E est filtrant à gauche, puisqu'il admet un plus petit élément (savoir la diagonale de E E) ; mais il n'est pas filtrant à droite, car pour une structure d'ordre C et la structure opposée $\overset{-1}{C}$, il n'existe aucune structure d'ordre plus fine que C et $\overset{-1}{C}$ à la fois en vertu de l'axiome (EO_{II}).

Il résulte aussitôt des définitions que tout produit d'ensembles filtrants à droite est filtrant à droite. Par contre, une partie d'un ensemble filtrant à droite n'est pas nécessairement filtrante à droite.

Proposition 3. Soit E un ensemble filtrant à droite, F un ensemble ordonné quelconque. Si f est une application de E dans F qui est à la fois croissante et décroissante, f est constante.

En effet, si x et y sont deux éléments quelconques de E , il existe $z \in E$ tel que $x \leqslant z$ et $y \leqslant z$; on a donc $f(x) \leqslant f(z)$ et $f(x) \geqslant f(z)$, d'où $f(x)=f(z)$; on voit de même que $f(y)=f(z)$, d'où $f(x)=f(y)$.

9\. Borne supérieure, borne inférieure. Définition 8. On dit qu'une partie majorée (resp. minorée) X d'un ensemble ordonné E admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure) dans E si l'ensemble de ses majorants (resp. minorants) dans E admet un plus petit (resp. plus grand) élément ; cet élément est alors appelé la borne supérieure (resp. borne inférieure) de X dans E .

Il est clair que si une partie X d'un ensemble ordonné E admet une borne supérieure a , a est borne inférieure de X pour l'ordre opposé, ce qui nous permettra dans ce qui suit de ne considèrer le plus souvent que les propriétés des bornes supérieures.

<u>Exemples</u>.- 1) Dans un ensemble <u>totalement ordonné</u> E , la borne supérieure b d'une partie X de E (lorsqu'elle existe) peut être caractérisée par les propriétés suivantes : 1° b est un majorant de X ; 2° pour tout $c \in E$ tel que $c < b$, il existe $x \in X$ tel que $c < x \leqslant b$. En effet, si b est borne supérieure de X et s'il existait $c < b$ tel que l'intervalle $]c,b]$ ne contienne aucun élément de X , pour tout élément x de X on aurait nécessairement $x \leqslant c$ ou $x > b$, et la seconde hypothèse étant exclue, c serait un majorant de X contrairement à la définition de b . Réciproquement, si b satisfait aux conditions 1° et 2°, pour tout majorant c de X , on a nécessairement $c \geqslant b$, puisque dans le cas contraire, il existerait $x \in X$ tel que $c < x \leqslant b$, contrairement à l'hypothèse.

2) Dans l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E , ordonné par inclusion, tout majorant d'une partie $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{P}(E)$ est une partie B de E telle que $X \subset B$ pour tout $X \in \mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}$ admet donc une borne supérieure dans $\mathfrak{P}(E)$, savoir l'<u>intersection</u> des parties B de E qui contiennent toutes les parties appartenant à $\mathfrak{F}$; on voit de même que $\mathfrak{F}$ admet une borne inférieure, qui est la <u>réunion</u> des parties de E contenues dans toutes les parties $X \in \mathfrak{F}$.

3) Cherchons à quelle condition une partie Θ de l'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties de E dans F , admet une borne supérieure dans $\Phi(E,F)$, ordonné par la relation "u est une restriction de v" . Pour tout $w \in \Phi(E,F)$ désignons par D(w) la partie de E où w est définie ; si u est un majorant de Θ , c'est-à-dire un

un prolongement de tous les éléments $w \in \Theta$, on a $D(u) \supset D(w)$ pour tout $w \in \Theta$, et $u(x)=w(x)$ pour tout $x \in D(w)$; ceci montre que, si Θ est majorée dans $\Phi(E,F)$, pour deux éléments quelconques w,w' de Θ, on doit avoir $w(x)=w'(x)$ pour tout $x \in D(w) \cap D(w')$. Inversement, supposons cette condition vérifiée, et montrons que Θ admet alors une borne supérieure ; pour cela, soit A la réunion des $D(w)$, lorsque w parcourt Θ ; pour tout $x \in A$, $w(x)$ a la même valeur pour tous les $w \in \Theta$ tels que $x \in D(w)$ d'après l'hypothèse ; si on désigne cette valeur par $u_o(x)$, u_o est une application de A dans F, qui est évidemment un majorant de Θ ; inversement, si u est un majorant de Θ, on a $D(u) \supset D(w)$ pour tout $w \in \Theta$, donc $D(u) \supset A = D(u_o)$, et pour tout $x \in A$, il existe au moins un $w \in \Theta$ tel que $x \in D(w)$, donc $u(x)=w(x)=u_o(x)$, ce qui prouve que u_o est la <u>borne supérieure</u> de Θ.

<u>Remarque</u>.- Lorsque E admet un plus petit élément α, la partie vide $\emptyset$ de E admet α pour borne supérieure, puisque E est l'ensemble des majorants de $\emptyset$; de même si E admet un plus grand élément, c'est la borne inférieure de $\emptyset$.

<u>Proposition 4</u>. <u>Pour qu'une partie non vide</u> X <u>d'un ensemble ordonné</u> E <u>admette un plus grand élément, il faut et il suffit que</u> X <u>admette dans</u> E <u>une borne supérieure et que cette borne supérieure appartienne à</u> X.

La proposition est évidente à partir des définitions.

On notera sup X (resp. inf X) la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie X de E dans E, lorsque cette borne existe.

Etant donnée une <u>famille</u> $(x_\iota)_{\iota \in I}$ d'éléments d'un ensemble ordonné E (ou, ce qui revient au même, une application $\iota \longrightarrow x_\iota$ de I dans E) on dit que cette famille admet une borne supérieure (resp. inférieure) lorsque l'ensemble des ses éléments admet une borne supérieure (resp. inférieure) ; cette borne est alors appelée borne supérieure (resp. inférieure) de la famille (x_ι), et notée $\sup_{\iota \in I} x_\iota$ (resp. $\inf_{\iota \in I} x_\iota$).

En particulier, si une partie A de E admet une borne supérieure, cette borne est la borne supérieure de l'application canonique $x \to x$ de A dans E, et peut donc s'écrire $\sup_{x \in A} x$.

Proposition 5. Si A est une partie non vide de E admettant à la fois une borne supérieure et une borne inférieure dans E, on a $\inf A \leqslant \sup A$.

Proposition 6. Si A et B sont deux parties de E admettant toutes deux une borne supérieure (resp. inférieure) dans E, et si on a $A \subset B$, on a $\sup A \leqslant \sup B$ (resp. $\inf A \geqslant \inf B$).

Ces propositions sont immédiates à partir des définitions.

Corollaire. Si la famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$ d'éléments de E admet une borne supérieure dans E, pour toute famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$ admettant une borne supérieure dans E, on a $\sup_{\iota \in J} x_\iota \leqslant \sup_{\iota \in I} x_\iota$.

Proposition 7. Soient $(x_\iota)_{\iota \in I}$, $(y_\iota)_{\iota \in I}$ deux familles d'éléments de E, ayant même ensemble d'indices, et ayant chacune une borne supérieure dans E. Si $x_\iota \leqslant y_\iota$ pour tout $\iota \in I$, on a $\sup_{\iota \in I} x_\iota \leqslant \sup_{\iota \in I} y_\iota$.

En effet, si $a = \sup_{\iota \in I} y_\iota$, on a $a \geqslant y_\iota \geqslant x_\iota$ pour tout $\iota \in I$, donc $\sup_{\iota \in I} x_\iota \leqslant a$.

Proposition 8.- Soit $(x_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'éléments de E, $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ un recouvrement quelconque de I. Si chacune des sous-familles $(x_\iota)_{\iota \in J_\lambda}$ admet une borne supérieure dans E, pour que la famille $(x_\iota)_{\iota \in I}$ admette une borne supérieure dans E, il faut et il suffit que la famille $(\sup_{\iota \in J_\lambda} x_\iota)_{\lambda \in L}$ admette une borne supérieure dans E ; et on a alors

(1) $$\sup_{\iota\in I} x_\iota = \sup_{\lambda\in L}(\sup_{\iota\in J_\lambda} x_\iota) .$$

En effet, supposons que $a=\sup_{\iota\in I} x_\iota$ soit définie ; on a alors $a \geqslant \sup_{\iota\in J_\lambda} x_\iota$ pour tout λ ; inversement, si $b \geqslant \sup_{\iota\in J_\lambda} x_\iota$ pour tout $\lambda\in L$ on a $b \geqslant x_\iota$ pour tout $\iota\in \bigcup_{\lambda\in L} J_\lambda = I$, donc $b \geqslant a$, a est bien borne supérieure de la famille $(\sup_{\iota\in J_\lambda} x_\iota)_{\lambda\in L}$. Inversement, si cette famille admet une borne supérieure a , on a $a \geqslant x_\iota$ pour tout $\iota\in I$; et si $b \geqslant x_\iota$ pour tout ι , on a $b \geqslant \sup_{\iota\in J_\lambda} x_\iota$ pour tout $\lambda\in L$, donc $b \geqslant a$, a est borne supérieure de $(x_\iota)_{\iota\in I}$.

Corollaire 1. Soit $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille de parties de E , admettant chacune une borne supérieure dans E ; pour que $A = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ admette une borne supérieure dans E , il faut et il suffit que la famille $(\sup A_\lambda)_{\lambda\in L}$ admette une borne supérieure dans E , et on a alors

(2) $$\sup A = \sup_{\lambda\in L}(\sup A_\lambda) .$$

Corollaire 2. Soit $(x_{\lambda\mu})_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$ une famille "double" d'éléments de E , telle que pour tout $\mu\in M$, la famille $(x_{\lambda\mu})_{\lambda\in L}$ admette une borne supérieure dans E . Pour que la famille $(x_{\lambda\mu})_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$ admette une borne supérieure dans E , il faut et il suffit que la famille $(\sup_{\lambda\in L} x_{\lambda\mu})_{\mu\in M}$ admette une borne supérieure dans E , et on a alors

(3) $$\sup_{(\lambda,\mu)\in L\times M} x_{\lambda\mu} = \sup_{\mu\in M}(\sup_{\lambda\in L} x_{\lambda\mu}) .$$

PROPOSITION 9.- Soit $(E_\iota)_{\iota\in I}$ une famille d'ensembles ordonnés, si, pour chaque $\iota\in I$, A_ι est une partie de E_ι admettant une borne supérieure, $A = \prod_{\iota\in I} A_\iota$ admet dans $E = \prod_{\iota\in I} E_\iota$ une borne supérieure égale à $(\sup A_\iota)_{\iota\in I}$.

La proposition est immédiate à partir des définitions.

Remarque.- Soit A une partie d'un ensemble ordonnée E, B une partie de A . On aura soin de noter que B peut admettre une borne supérieure dans E sans admettre de borne supérieure dans A ;

2

inversement, B peut admettre une borne supérieure dans A sans admettre de borne supérieure dans E ; enfin, B peut admettre une borne supérieure dans E et une borne supérieure dans A, les deux bornes étant distinctes.

On a un exemple du premier cas en prenant pour E l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, pour A l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, pour B l'ensemble des nombres rationnels $<\sqrt{2}$; comme exemple du second, on prendra pour E l'ensemble $\mathbf{Q}$, pour A l'ensemble des nombres rationnels $<\sqrt{2}$ et du nombre 2, B étant toujours l'ensemble des nombres rationnels $<\sqrt{2}$; enfin, si on prend $E = \mathbf{R}$, A et B étant les mêmes que dans l'exemple précédent, on aura un exemple du troisième cas.

10. Ensembles réticulés. Définition 9. On dit qu'un ensemble ordonné E est réticulé (ou que E est un réseau ordonné, ou encore un lattis) si toute partie finie non vide de E admet dans E une borne supérieure et une borne inférieure.

D'après la prop.8, pour qu'un ensemble ordonné E soit réticulé, il faut et il suffit que tout couple x,y d'éléments de E admette dans E une borne supérieure et une borne inférieure (qu'on notera respectivement $\sup(x,y)$ et $\inf(x,y)$).

Exemples.- 1) Un ensemble totalement ordonné E est réticulé, puisque toute partie finie de E admet alors un plus grand et un plus petit élément.

2) L'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, ordonné par l'inclusion, est réticulé ; il en est de même du sous-ensemble ordonné $\mathfrak{F}(E)$ de $\mathfrak{P}(E)$, formé des parties finies de E.

*3) Dans l'ensemble N^* des entiers > 0 , ordonné par la relation "m est un diviseur de n" , deux éléments quelconques ont une borne supérieure, leur p.p.c.m., et une borne inférieure, leur p.g.c.d. *

*4) Soit E l'espace numérique à trois dimensions, G la partie de $\mathfrak{P}$(E) formée de $\{0\}$, de E , des droites passant par O et des plans passant par O . On voit aisément que G , ordonné par inclusion, est réticulé : en effet, l'intersection de deux éléments quelconques de G appartient à G ; d'autre part, si par exemple D,D' sont deux droites distinctes passant par O , le plan contenant D et D' est la borne supérieure de D et D' dans G ; on élucide de même les autres cas. On notera que la borne supérieure <u>dans</u> G de deux éléments de G n'est pas nécessairement égale à leur borne supérieure <u>dans</u> $\mathfrak{P}$(E) (par contre, les bornes inférieures sont identiques). *

5) Il peut se faire que dans un ensemble ordonné, deux éléments quelconques admettent une borne inférieure, mais non une borne supérieure. Un exemple est fourni par l'ensemble Φ(E,F) des applications de parties dans F , où deux éléments quelconques u,v admettent toujours une borne inférieure, savoir leur restriction à l'ensemble (éventuellement vide) des x E tels que u(x) et v(x) soient définis tous deux et égaux.

6) Un ensemble réticulé est évidemment filtrant à la fois à gauche et à droite ; mais inversement, un ensemble ordonné peut être à la fois filtrant à gauche et à droite sans être réticulé ; * on en a un exemple en prenant l'ensemble E des disques ouverts contenant O dans le plan numérique, E étant ordonné par inclusion . *

<u>Définition 10</u>. <u>On dit qu'un ensemble réticulé</u> E <u>est achevé si toute partie non vide de</u> E <u>admet dans</u> E <u>une borne supérieure et une borne inférieure</u>.

En appliquant la définition à la partie E , on voit qu'un ensemble réticulé achevé a nécessairement un plus petit et un plus grand élément.

Proposition 10. Soit E un ensemble ordonné ayant un plus petit élément et tel que toute partie non vide de E admette une borne supérieure dans E ; alors toute partie non vide de E admet aussi une borne inférieure (autrement dit, E est réticulé achevé).

En effet, si A est une partie non vide quelconque de E , l'ensemble B des minorants de A n'est pas vide par hypothèse, donc admet une borne supérieure b ; comme A est contenu dans l'ensemble des majorants de B , b est un minorant de A , donc contenu dans B ; par suite (prop.4), b est le plus grand élément de B , autrement dit la borne inférieure de A .

Exemples.- 1) Tout ensemble fini totalement ordonné est réticulé achevé ; mais il n'en est pas nécessairement de même d'un ensemble totalement ordonné infini ; par exemple l'ensemble $\mathcal{N}$ des entiers naturels n'est pas achevé, car il n'admet pas de plus grand élément.

2) L'ensemble $\mathfrak{P}$ (E) des parties d'un ensemble E , ordonné par inclusion, est réticulé achevé ; par contre si E est infini, l'ensemble $\mathfrak{F}$ (E) des parties finies de E n'est pas réticulé achevé, car il n'a pas de plus grand élément.

3) L'ensemble $\mathcal{P}$ des partitions d'un ensemble E , ordonné par la relation " $\overline{\omega}$ est moins fine que $\overline{\omega}$ " est un ensemble réticulé achévé. Il est clair en effet que $\mathcal{P}$ admet un plus petit élément, la partition $\overline{\omega}_o$ formée du seul ensemble E ; d'autre part, toute famille $(\overline{\omega}_\alpha)$ de partitions admet une borne supérieure, car si C_α est la partie de $E \times E$ correspondant canoniquement à la partition $\overline{\omega}_\alpha$ on vérifie aussitôt que $C = \bigcap_\alpha C_\alpha$ correspond à une partition. La prop.10 montre donc que $\mathcal{P}$ est réticulé achevé.

Il résulte aussitôt de la prop 9 que tout produit d'ensembles réticulés (resp. d'ensembles réticulés achevés) est un ensemble réticulé (resp. réticulé achevé).

Exercices.- 1) Soit E un ensemble ordonné par une relation $x \leqslant y$. On désigne par I l'ensemble des parties X de E telles que deux éléments distincts quelconques de X soient incomparables (pour la relation $x \leqslant y$). Montrer que, dans I, la relation "quel que soit $x \in X$, il existe $y \in Y$ tel que $y \leqslant x$" est une relation d'ordre entre X et Y.

2) Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble ordonné F ; montrer que, dans E, la relation $f(x) \leqslant f(y)$ est une relation de préordre, et que l'ensemble ordonné associé est isomorphe au sous-ensemble ordonné $f(E)$ de F.

3) Soit E un ensemble ordonné. On dit que deux éléments x, y de E sont joints par une chaîne supérieure s'il existe une suite d'un nombre impair d'éléments $z_i \in E$ $(1 \leqslant i \leqslant 2n+1)$ distincts ou non, tels que $x = z_1$, $y = z_{2n+1}$, et $z_{2k-1} \leqslant z_{2k}$, $z_{2k} \geqslant z_{2k+1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$; on dit que x et y sont joints par une chaîne inférieure s'ils sont joints par une chaîne supérieure pour l'ordre opposé sur E.

Montrer que si x et y sont joints par une chaîne inférieure, ils sont aussi joints par une chaîne supérieure, et vice-versa ; on dira donc simplement dans ce cas que "x et y sont joints par une chaîne". Montrer que cette relation R est une relation d'équivalence dans E ; si x et y appartiennent à deux classes d'équivalence distinctes suivant cette relation, ils sont incomparables. En outre, si $(A_\iota)_{\iota \in I}$ est une partition de E telle que deux éléments appartenant à deux A_ι d'indices distincts soient toujours incomparables, tout A_ι est réunion de classes d'équivalence suivant R. Les classes d'équivalence suivant R sont appelés les <u>constituants cardinaux</u> de E ;

E est dit irréductible s'il n'a qu'un seul constituant cardinal.

4) Soit E un ensemble ordonné irréductible (exerc.3). Pour tout $x \in E$, soit $\mathfrak{F}_x$ la famille des parties A de E telles que $x \in A$ et que tout couple d'éléments (y,z) tels que $y \in A$ et $z \notin A$ soit comparable. Montrer que l'intersection K_x de tous les ensembles de $\mathfrak{F}_x$ appartient à $\mathfrak{F}_x$, et que pour deux éléments quelconques x,y de E, on a $K_x=K_y$ ou $K_x \cap K_y = \emptyset$ (remarquer que si $K_x \neq K_y$, on ne peut avoir simultanément $x \in K_y$ et $y \in K_x$, et que si par exemple $x \notin K_y$, l'ensemble $K_x \cap \complement K_y$ appartient à $\mathfrak{F}_x$). Les ensembles K_x distincts forment donc une partition de E, et sont appelés les constituants ordinaux de E ; lorsque E est totalement ordonné, $K_x = \{x\}$ pour tout $x \in E$; lorsque E n'a qu'un seul constituant ordinal, on dit qu'il est indécomposable. Si E et F sont deux ensembles totalement ordonnés n'ayant ni plus grand ni plus petit élément, montrer que le produit $E \times F$ est irréductible et indécomposable.

5) Soient E et F deux ensembles ordonnés ; on désigne par $C(E,F)$ le sous-ensemble de l'ensemble ordonné produit F^E formé des applications croissantes de E dans F.

a) Montrer que l'ensemble ordonné $C(E,F \times G)$ est isomorphe à $C(E,F) \times C(E,G)$.

b) Montrer que l'ensemble ordonné $C(E,C(F,G))$ est isomorphe à l'ensemble ordonné $C(E \times F,G)$.

6) Montrer que, pour qu'un ensemble E soit fini, il faut et il suffit que toute partie non vide de $\mathfrak{P}(E)$ possède un élément maximal pour la relation d'inclusion (pour voir que la condition est suffisante, appliquer la condition à l'ensemble $\mathfrak{F}(E)$ des parties finies de E).

7) Soit Φ un ensemble d'applications d'un ensemble E dans lui-même. Soit $\mathfrak{F}$ la partie de $\mathfrak{P}(E)$ formée des ensembles $X \subset E$ tels que $f(X) \subset X$ pour tout $f \in \Phi$; montrer que $\mathfrak{F}$ est un ensemble réticulé achevé (pour la relation induite sur $\mathfrak{F}$ par la relation d'inclusion).

8) Soit E un ensemble ordonné ; on dit qu'une application f de E dans lui-même est une <u>fermeture</u> si elle satisfait aux conditions suivantes : 1) f est croissante ; 2) pour tout $x \in E$, on a $f(x) \geqslant x$; 3) pour tout $x \in E$, on a $f(f(x)) = f(x)$. Soit F l'ensemble des éléments de x invariants par f.

a) Montrer que, pour tout $x \in E$, l'ensemble F_x des éléments $y \in F$ tels que $x \leqslant y$ n'est pas vide et admet un plus petit élément $f(x)$. Inversement, si F est une partie de E satisfaisant à cette condition, f est une fermeture, et F est identique à l'ensemble des éléments invariants par f.

b) On suppose que E est un ensemble réticulé achevé ; montrer que la borne inférieure dans E d'une partie non vide quelconque de F appartient à F.

9) Soient E et F deux ensembles, R une partie quelconque de $E \times F$. Pour toute partie $X \subset E$ (resp. toute partie $Y \subset F$), on désigne par $\rho(X)$ (resp. $\sigma(Y)$) l'ensemble des $y \in F$ (resp. $x \in E$) tels que $(x,y) \in R$ pour tout $x \in X$ (resp. $(x,y) \in R$ pour tout $y \in Y$).

a) Montrer que ρ et σ sont décroissantes, et qu'on a $X \subset \sigma(\rho(X))$ et $Y \subset \rho(\sigma(Y))$ pour tout $X \subset E$ et tout $Y \subset F$; en déduire que $\rho(\sigma(\rho(X))) = \rho(X)$ et $\sigma(\rho(\sigma(Y))) = \sigma(Y)$.

b) L'application $X \to \sigma(\rho(X))$ (resp. $Y \to \rho(\sigma(Y))$) est une fermeture (exerc. 8) dans $\mathfrak{P}(E)$ (resp. $\mathfrak{P}(F)$) ; en outre l'application $X \to \rho(X)$ est un isomorphisme de l'ensemble réticulé des ensembles fermés dans E , sur l'opposé de l'ensemble réticulé des ensembles fermés dans F , et $Y \to \sigma(Y)$ est l'isomorphisme réciproque.

10) Etat donné un ensemble ordonné quelconque E , pour toute partie X de E , on désigne par $\rho(X)$ l'ensemble des majorants de X , par $\sigma(X)$ l'ensemble des minorants de X .

Montrer que, dans $\mathfrak{P}(E)$, l'ensemble $\tilde{E}$ des X tels que $X=\sigma(\rho(X))$ est un ensemble réticulé achevé (cf.exerc.9), et que l'application $x \to \sigma(\{x\})$ est un isomorphisme de E sur un sous-ensemble ordonné E' de $\tilde{E}$, tel que si une famille (x_ι) d'éléments de E a une borne supérieure (resp. inférieure) dans E , l'image de cette borne supérieure est la borne supérieure dans $\tilde{E}$ de la famille des images des x_ι.

11) On dit qu'un ensemble réticulé E est <u>distributif</u> s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

(D') $\sup(x,\inf(y,z)) = \inf(\sup(x,y),\sup(x,z))$

(D") $\inf(x,\sup(y,z)) = \sup(\inf(x,y),\inf(x,z))$.

a) Montrer que chacune des conditions (D'), (D") entraîne à elle seule la condition

(D) $\sup(\inf(x,y),\inf(y,z),\inf(z,x))=\inf(\sup(x,y),\sup(y,z),\sup(z,x))$

(écrire le premier membre sous la forme $\sup(u,\inf(x,y))$, ou le second sous la forme $\inf(v,\sup(x,y)))$.

b) Montrer que la condition (D) entraîne la condition

(M) si $x \geqslant z$, $\sup(z,\inf(x,y)) = \inf(x,\sup(y,z))$.

En déduire que (D) entraîne chacune des deux conditions (D') et (D") et par suite que les trois axiomes (D), (D') et (D") sont <u>équivalents</u> (pour montrer par exemple que (D) entraîne (D'), prendre la borne supérieure de x et de chacun des deux membres de (D), et utiliser (M)).

12) Soit E un ensemble ayant au moins 3 éléments, $\mathfrak{P}$ l'ensemble réticulé achevé des partitions de E .

a) Montrer que $\mathfrak{P}$ n'est pas distributif (exerc.11).

b) Montrer que pour toute partition $\overline{\omega}$, il existe une partition $\overline{\omega}'$, telle que la borne supérieure (resp. inférieure) de $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega}'$ soit le plus grand élément (resp. le plus petit élément) de $\mathfrak{P}$.

§ 2. Le théorème de Zorn et ses applications à la théorie des puissances.

1. Le théorème de Hessenberg. Soit E un ensemble ordonné, f une application de E dans lui-même telle que pour tout $x \in E$, on ait $f(x) \geqslant x$ (on ne suppose pas que f soit croissante). Etant donné un élément $a \in E$, on peut définir par récurrence (chap.III, § 2) une suite infinie (a_n) d'éléments de E par la condition $a_0 = a$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; cette définition montre que la suite (a_n) est croissante. Si maintenant l'ensemble des a_n admet dans E une borne supérieure a_ω (§ 1, n°9), on peut de nouveau définir par récurrence une suite infinie, qu'on peut noter $a_{\omega+n}$, par la condition $a_{\omega+0} = a_\omega$ et $a_{\omega+(n+1)} = f(a_{\omega+n})$. On conçoit ainsi la possibilité de l'existence d'une partie A de E qui aurait les propriétés suivantes : 1° $a \in A$ et pour tout $x \in A$, $f(x) \in A$; 2° si une partie de A admet une borne supérieure dans E, cette borne supérieure appartient à A ; 3° pour tout couple (x,y) d'éléments de A, on a $y \leqslant x$ ou $y \geqslant f(x)$ (ce qui implique entre autres que A est totalement ordonné). Nous allons montrer effectivement qu'il existe une telle partie de A, et cela sans utiliser la théorie des ensembles infinis ni l'axiome de choix. De façon précise :

THÉORÈME 1 (Hessenberg).- Soient E un ensemble ordonné, f une application de E dans E telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant x$. Soit a un élément de E, $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties X de E ayant les propriétés suivantes :

1° a <u>est le plus petit élément de</u> X <u>et pour tout</u> $x \in X$, $f(x) \in X$;

2° <u>si une partie non vide</u> Y <u>de</u> X <u>admet une borne supérieure dans</u> E, <u>cette borne supérieure appartient à</u> X.

<u>Dans ces conditions,</u> $\mathfrak{F}$ <u>n'est pas vide, l'intersection</u> A <u>des ensembles</u> $X \in \mathfrak{F}$ <u>appartient à</u> $\mathfrak{F}$, <u>et pour tout couple</u> (x,y) <u>d'éléments de</u> A, <u>on a</u> $y \leqslant x$ <u>ou</u> $y \geqslant f(x)$ (et par suite A est <u>totalement ordonné</u>).

L'ensemble $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, car l'ensemble des éléments de E qui sont $\geqslant a$ appartient évidemment à $\mathfrak{F}$; on vérifie aussitôt que A appartient à $\mathfrak{F}$. Désignons par B la partie de A formée des éléments $x \in A$ qui possèdent la propriété suivante :

(P) les relations $y \in A$ et $y \leqslant x$ entraînent $y=x$ ou $f(y) \leqslant x$.

L'ensemble B n'est pas vide, car on a évidemment $a \in B$. Nous allons démontrer que si $x \in B$ et $y \in A$, on a la propriété suivante :

(Q) $y \leqslant x$ ou $y \geqslant f(x)$.

En effet, soit x un élément quelconque de B, C la partie de A formée des éléments y pour lesquels (Q) est vraie ; nous allons montrer que l'on a $C \in \mathfrak{F}$; comme $C \subset A$, il résultera de la définition de A que $C=A$. Or, comme $a \leqslant x$, on a $a \in C$ et comme $C \subset A$, a est le plus petit élément de C. Si $y \in C$ et $y \geqslant f(x)$, on a $f(y) \geqslant y \geqslant f(x)$, donc $f(y) \in C$ par définition ; dans le cas contraire, on a $y \leqslant x$; d'après (P), on en déduit que $y=x$ ou $f(y) \leqslant x$; comme dans le premier cas $f(y)=f(x)$, on voit que dans tous les cas $f(y) \in C$. Enfin, soit Y une partie de C ayant une borne supérieure b dans E ; on a $b \in A$ par définition de A ; si pour tout $y \in Y$, on a $y \leqslant x$, on en déduit $b \leqslant x$; au contraire, s'il existe un $y \in Y$ tel que $y \geqslant f(x)$, on a $b \geqslant f(x)$. Nous avons ainsi vérifié que $C \in \mathfrak{F}$ et par suite que $C=A$.

Nous allons maintenant établir que $B=A$, d'où résultera le théorème. Pour cela, il nous suffira encore de montrer que $B \in \mathfrak{F}$. Or, nous avons déjà vu que $a \in B$, et par suite que a est le plus petit élément de B. Si $x \in B$, montrons qu'on a aussi $f(x) \in B$; en effet, si $y \in A$ est tel que $y < f(x)$, on a $y \leq x$ d'après la propriété (Q) ; on ne peut avoir $y=x$ puisqu'on en déduirait $f(y)=f(x)$, donc il résulte de (P) que $f(y) \leqslant x$ et a fortiori $f(y) \leqslant f(x)$, ce qui prouve que $f(x) \in B$. Enfin, soit Y une partie de B ayant une borne supérieure b dans E, qui appartient nécessairement à A ; soit $y \in A$ tel que $y < b$; on ne peut avoir $y \geqslant x$, ni a fortiori $y \geqslant f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in Y$, car on en déduirait $y \geqslant b$ contrairement à l'hypothèse ; d'après (Q), il existe donc un $x \in Y$ tel que $y < x$, et il résulte alors de (P) que $f(y) \leqslant x \leqslant b$; on a donc bien $b \in B$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE.- <u>Si</u> A <u>admet une borne supérieure</u> b <u>dans</u> E, <u>on a</u> $b \in A$ <u>et</u> $f(b)=b$; <u>réciproquement, s'il existe un élément</u> $b \in A$ <u>tel que</u> $f(b)=b$, b <u>est le plus grand élément de</u> A.

En effet, si b est borne supérieure de A dans E, $b \in A$ d'après la définition de $\mathfrak{F}$; b est donc le plus grand élément de A ; comme $f(b) \in A$ et $f(b) \geqslant b$, on a nécessairement $f(b)=b$. Inversement, si $b \in A$ est tel que $f(b)=b$, soit X la partie de A formée des éléments $x \leqslant b$; nous allons voir que $X \in \mathfrak{F}$, d'où résultera que $X=A$ et par suite que b est le plus grand élément de A. On a évidemment $a \in X$, donc a est le plus petit élément de X ; si $x \in X$, on a $x \leqslant b$; si $x=b$, il est clair que $f(x)=f(b)=b$ appartient à X ; si au contraire $x < b$, on a $f(x) \leqslant b$ donc dans tous les cas $f(x) \in X$; enfin, il est clair que si Y est une partie de X admettant une borne supérieure c (qui appartient nécessairement à A), on a $c \leqslant b$, ce qui achève la démonstration.

Nous dirons que l'ensemble A est la <u>chaîne d'origine a</u> , relativement à l'application f ; pour tout $x \in A$, il est clair que la chaîne d'origine x est contenue dans A .

<u>2. Ensembles inductifs</u>. <u>Définition 1</u>. <u>On dit qu'un ensemble ordonné non vide E est inductif si toute partie totalement ordonnée de E possède une borne supérieure dans E</u> .

Cette définition suppose implicitement que la relation d'ordre dans E est notée $x \leqslant y$; si elle est notée $x(\sigma)y$, on dira que E est <u>inductif pour la relation</u> (σ) si on veut éviter toute confusion

<u>Exemples</u>.- 1) Tout ensemble réticulé achevé (§ 1,n°10) est inductif (pour chacune des relations $\leqslant$ et $\geqslant$) ; il en est ainsi en particulier de l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties d'un ensemble quelconque (ordonné par inclusion).

2) Soit E un ensemble quelconque, $\mathfrak{F}$ une partie de $\mathfrak{P}(E)$; on dit que $\mathfrak{F}$ est un ensemble de parties <u>de caractère fini</u> si la propriété $X \in \mathfrak{F}$ est <u>équivalente</u> à la propriété "toute partie <u>finie</u> de X appartient à $\mathfrak{F}$ " ; l'ensemble $\mathfrak{F}$ est alors <u>inductif</u> (pour la relation $\subset$). En effet, soit $\mathfrak{G}$ une partie totalement ordonnée (par inclusion) de $\mathfrak{F}$; soit A la borne supérieure de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{P}(E)$, c'est-à-dire la <u>réunion</u> des ensembles $X \in \mathfrak{G}$. Montrons que $A \in \mathfrak{F}$. Pour cela, soit Y une partie finie quelconque de A ; pour tout $y \in Y$, il existe un ensemble $B_y \in \mathfrak{G}$ tel que $y \in B_y$; l'ensemble des B_y étant fini et totalement ordonné, admet un plus grand élément ; autrement dit, il existe $B \in \mathfrak{G}$ tel que $Y \subset B$. Comme $B \in \mathfrak{F}$, on a par hypothèse $Y \in \mathfrak{F}$, ce qui montre, en vertu ~~fr~~ de la définition de $\mathfrak{F}$, que $A \in \mathfrak{F}$.

3) L'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties de E dans F est <u>inductif</u>. Nous avons en effet donné au §1, n°9 une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie Θ de $\Phi(E,F)$ admette une borne supérieure dans $\Phi(E,F)$; or cette condition est trivialement vérifiée lorsque Θ est <u>totalement ordonnée</u> (pour la relation "u est une restriction de v"). De même, l'ensemble $\Psi(E,F)$ des applications <u>biunivoques</u> de parties de E dans F est <u>inductif</u>. En effet, il n'est pas vide, car il contient l'application vide ; d'autre part si Θ est une partie totalement ordonnée de $\Psi(E,F)$, Θ admet dans $\Phi(E,F)$ une borne supérieure u_0 définie dans la réunion $D(u_0)$ des parties $D(u)$ où les $u \in \Theta$ sont définies, et telle que pour tout $u \in \Theta$ et tout $x \in D(u)$, on ait $u_0(x)=u(x)$; montrons que $u_0 \in \Psi(E,F)$. Si x et y sont deux éléments distincts de $D(u_0)$, il existe deux applications u, v appartenant à Θ et telles que $x \in D(u)$, $y \in D(v)$; comme Θ est totalement ordonnée, l'une des deux applications u, v est restriction de l'autre ; supposons par exemple que u soit restriction de v ; alors on a $x \in D(v)$ et $u_0(x)=v(x)$, $u_0(y)=v(y)$; comme par hypothèse v est biunivoque, on a $v(x)\neq v(y)$, d'où la proposition.

4) Un ensemble totalement ordonné qui n'a pas de plus grand élément n'est pas inductif ; il en est ainsi par exemple de l'ensemble N des entiers naturels.

Il résulte aussitôt de la déf. 1 que, si E est un ensemble inductif (pour la relation $\leqslant$), a un élément quelconque de E, l'ensemble des $x \leqslant a$, et l'ensemble des $x \geqslant a$ (ordonnés par l'ordre induit) sont inductifs (pour la relation $\leqslant$).

On notera qu'un ensemble inductif a nécessairement un plus petit élément (borne supérieure de la partie vide de E, qui est totalement ordonnée).

Proposition 1. Soit E un ensemble ordonné inductif, f une application de E dans E telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant x$. Dans ces conditions, il existe au moins un élément $b \in E$ tel que $f(b) = b$.

En effet, soit A la chaîne relative à f, ayant pour origine un élément $a \in E$; comme A est totalement ordonnée, A admet une borne supérieure b dans E, donc (cor. du th. 1) $f(b)=b$.

Théorème 2 (Zorn). Tout ensemble ordonné inductif possède au moins un élément maximal.

En effet, soit E un ensemble inductif. En vertu de l'axiome de choix, il existe une application f de E dans E telle que $f(x)=x$ si x est ~~maximal, f(x) x si x n'est pas maximal (puisque dans~~ maximal, $f(x) > x$ si x n'est pas maximal (puisque dans ce dernier cas, l'ensemble des $y > x$ n'est pas vide) ; comme la relation $f(x)=x$ équivaut au fait que x est maximal, le théorème est une conséquence de la prop. 1.

Corollaire 1. Soit E un ensemble inductif ; pour tout $a \in E$, il existe dans E un élément maximal $\geqslant a$.

En effet, l'ensemble des $x \geqslant a$ est inductif.

Corollaire 2. Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble de parties d'un ensemble E, tel que pour tout sous-ensemble $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$, totalement ordonné par la relation d'inclusion, la réunion des ensembles de $\mathfrak{G}$ appartienne à $\mathfrak{F}$ (ce qui est en particulier le cas lorsque $\mathfrak{F}$ est un ensemble de parties de caractère fini). Alors $\mathfrak{F}$ possède au moins un élément maximal c'est-à-dire une partie de E appartenant à $\mathfrak{F}$ et qui n'est contenue dans aucune autre partie de E appartenant à $\mathfrak{F}$).

5. Applications : I. Comparaison des puissances.- Théorème 3. (théorème de trichotomie). Soient E et F deux ensembles, X une partie quelconque de E , Y une partie quelconque de F ; il existe une application biunivoque de X dans Y , ou une application biunivoque de Y dans X .

En effet, l'ensemble $\Psi(X,Y)$ des applications biunivoque de parties de X dans Y est un ensemble inductif (n^o2, exemple 3) ; il admet donc un élément maximal u_o , qui est une application biunivoque d'une partie A de X dans Y . Nous allons voir qu'on a nécessairement $A=X$ ou $u_o(A)=Y$, ce qui démontrera le théorème. En effet, dans le cas contraire, il existerait un couple (x,y) tel que $x\in X\cap \complement A$, $y\in Y\cap \complement u_o(A)$; on définit alors une application biunivoque u de $A\cup\{x\}$ dans Y , en posant $u(z)=u_o(z)$ dans A , et $u(x)=y$; u_o ne serait donc pas un élément maximal de $\Psi(X,Y)$, contrairement à sa définition.

Corollaire. L'ensemble $\varpi(E)$ des puissances d'un ensemble E est totalement ordonné (pour la relation $\leqslant$).

Corollaire 2. Tout ensemble infini a une puissance supérieure à celle de $\mathcal{N}$.

En effet, soit E un ensemble infini ; si $\mathcal{N}$ n'était pas équipotent à une partie de E , E serait équipotent à une partie de $\mathcal{N}$ d'après le th.3, et comme cette partie est infinie, E serait équipotent à $\mathcal{N}$ (chap. III, §3,th.1), contrairement à l'hypothèse.

On peut encore exprimer le cor.2 en disant que, dans l'ensemble des puissances des parties d'un ensemble infini E , la puissance des parties dénombrables infinies est le plus petit élément de l'ensemble des puissances infinies.

4. Applications : II. Sommes de puissances infinies. Proposition 2. *Pour tout ensemble infini E, il existe une partition de E formée d'ensembles dénombrables infinis.*

En effet, il existe des parties dénombrables infinies de E (cor.2 du th.3). Soit $\mathfrak{D}$ la partie de $\mathfrak{P}(E)$ formée des parties dénombrables infinies de E. Considérons l'ensemble Φ des parties Δ de $\mathfrak{D}$ telles que deux éléments distincts quelconques D, D' de soient des parties de E ne se rencontrant pas ; il est immédiat que Φ est une partie de $\mathfrak{P}(\mathfrak{D})$ de caractère fini ; donc (th.2) Φ admet un élément maximal Δ_0. Soit A la réunion des parties de E appartenant à Δ_0 ; $B = \complement A$ est un ensemble fini, car dans le cas contraire, il contiendrait un ensemble dénombrable infini D (cor.2 du th.3), et $\Delta = \Delta_0 \cup \{D\}$ appartiendrait encore à Φ, contrairement à la définition de Δ_0. Soit alors D_0 un élément de Δ_0 ; $D_1 = D_0 \cup B$ est encore un ensemble dénombrable infini (chap.III, § 3, cor.2 du th.2) ; il est clair que l'ensemble formé de D_1 et des parties $\neq D_0$ appartenant à Δ_0 est une partition de E en ensembles dénombrables infinis.

Proposition 3. *Si E est un ensemble infini, $E \times N$ est équipotent à N.*

En effet, il existe une partition $(D_\iota)_{\iota \in I}$ de E en ensembles dénombrables infinis ; les ensembles $D_\iota \times N$ forment donc une partition de $E \times N$; comme chacun d'eux est équipotent à N (chap.II, § 3, th.2), $D_\iota \times N$ est équipotent à D_ι pour tout $\iota \in I$; par suite (chap.III, § 1, prop.14), $E \times N$ est équipotent à E.

Corollaire. *Soit (X_n) une famille dénombrable de parties d'un ensemble E, qui sont toutes équipotentes à un même ensemble infini A ; alors la réunion des X_n est équipotente à A.*

En effet, $\bigcup_n X_n$ a une puissance supérieure à celle de A ; d'autre part, sa puissance est inférieure à celle d'un ensemble somme de la famille (X_n) (chap.III, § 1,prop.13), et a fortiori inférieure à celle de $A \times \mathcal{N}$; comme ce dernier ensemble est équipotent à A (prop.3), le corollaire résulte du th.1 du chap.III, § 1 . La prop.3 et son corollaire donnent la proposition suivante pour le calcul des puissances

Proposition 4. Soit $(\mathfrak{a}_n)$ une suite finie ou infinie d'éléments de l'ensemble $\overline{\omega}(E)$ des puissances des parties d'un ensemble infini E . La somme $\sum_n \mathfrak{a}_n$ est toujours définie, et si $\mathfrak{b}$ est une puissance infinie telle que $\mathfrak{a}_n \leqslant \mathfrak{b}$ pour tout n , on a aussi $\sum_n \mathfrak{a}_n \leqslant \mathfrak{b}$; en outre, si $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}$ pour un n au moins, on a $\sum_n \mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}$.

En effet, comme $E \times \mathcal{N}$ est équipotent à E , il existe toujours une suite (X_n) de parties de E deux à deux sans élément commun et telle que $p(X_n) = \mathfrak{a}_n$ pour tout n .

Corollaire 1. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux éléments quelconques de $\overline{\omega}(E)$ dont l'un au moins est une puissance infinie, on a

(1) $$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Corollaire 2. Si E est un ensemble infini, A une partie de E dont la puissance est strictement inférieure à celle de E , $\complement A$ est équipotent à E .

C'est une conséquence immédiate de (1).

5. Applications : III. Produits de puissances infinies. Proposition 5. Pour tout ensemble infini E , $E \times E$ est équipotent à E .

Soit A_0 une partie infinie dénombrable de E (cor.2 du th.3), f_0 une application biunivoque de A_0 sur $A_0 \times A_0$ (chap.III, § 3,th.2) . Dans l'ensemble $\Psi(E, E \times E)$ des applications biunivoques de parties de E dans $E \times E$, considérons la partie Θ formée des applications biunivoques f définies sur une partie $A \supset A_0$ de E , prolongeant f_0 , et telles que $f(A)=A\times A$. L'ensemble ordonné Θ n'est donc pas vide et a un plus petit élément f_0 ; montrons qu'il est <u>inductif</u>. En effet, si $\mathfrak{H}$ est une partie totalement ordonnée de Θ , on a vu que $\mathfrak{H}$ admet une borne supérieure g dans $\Psi(E,E\times E)$, définie sur la réunion A_1 des ensembles $A=D(f)$ où sont définies les applications $f\in\mathfrak{H}$; on a $g(A_1)=\bigcup g(D(f)) = \bigcup f(D(f))= \bigcup (D(f)\times D(f))= A_1\times A_1$ (puisque si $(x,y)\in A_1\times A_1$, il existe f' et f'' dans $\mathfrak{H}$ tels que $x\in D(f')$ et $y\in D(f'')$, et si par exemple $D(f')\subset D(f'')$, $(x,y)\in D(f'')\times D(f''))$; donc g appartient bien à Θ .

Cela étant, soit h un élément maximal de Θ (th.2), défini sur une partie B de E ; on a donc $h(B)=B\times B$; nous allons montrer que B est <u>équipotent à</u> E , d'où résultera la proposition. Or, dans le cas contraire, la puissance de B serait strictement inférieure à celle de E , donc (cor.2 de la prop.4), $C=\complement B$ serait équipotent à E ; il existerait donc dans C trois ensembles B_1,B_2,B_3 équipotents à B et deux à deux sans élément commun (prop.4) ; l'ensemble $B'=B_1\cup B_2\cup B_3$ est lui aussi équipotent à B (cor. de la prop.3) . Posons $D=B\cup B'$; nous allons définir dans D une application biunivoque f de D sur $D\times D$, qui <u>prolonge</u> h , d'où résultera une contradiction, en vertu de la définition de h . Or, les quatre ensembles $B\times B$, $B\times B'$, $B'\times B$, $B'\times B'$ forment une partition de $D\times D$ (fig.) ; chacun d'eux est équipotent à $B\times B$, donc à B ; définissons f comme égale à h dans B , à une application biunivoque de B_1 (resp. B_2,B_3) sur $B\times B'$ (resp. $B'\times B$, $B'\times B'$) dans B_1 (resp. B_2,B_3) ; f répond bien à la question, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> E <u>est un ensemble infini</u>, E^n <u>est équipotent à</u> E <u>pour tout entier</u> n .

Il suffit d'appliquer par récurrence la prop.5, en observant que E^n est équipotent à $E\times E^{n-1}$.

Proposition 6. Si $(\mathfrak{a}_i)$ *est une suite finie de puissances de parties d'un ensemble infini* E , *le produit* $\prod_i \mathfrak{a}_i$ *est toujours défini ; si* $\mathfrak{b}$ *est une puissance infinie telle que* $\mathfrak{a}_i \leqslant \mathfrak{b}$ *pour tout indice* i , *on a* $\prod_i \mathfrak{a}_i \leqslant \mathfrak{b}$; *en outre, si aucun des* $\mathfrak{a}_i$ *n'est nul et si* $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}$ *pour un indice* i *au moins, on a* $\prod_i \mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}$.

En effet, si $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une suite finie de parties de E , $\prod_i X_i$ est équipotent à un sous-ensemble de E^n , et ce dernier est équipotent à E ; le reste de la proposition est une conséquence immédiate du cor. de la prop.5 et de la relation $\prod_i \mathfrak{a}_i \geqslant \mathfrak{a}_j$ pour tout indice j , puisque les $\mathfrak{a}_i$ sont tous $\neq 0$.

Corollaire 1. Si $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont deux éléments* $\neq 0$ *de* $\varpi(E)$, *dont l'un au moins est une puissance infinie, on a*

(2) $$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \max(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) .$$

Corollaire 2. Si E *est un ensemble infini,* E^E *est équipotent à* $\mathfrak{P}(E)$.

En effet, en raisonnant dans l'ensemble des puissances des parties de $\mathfrak{P}(E)$, et désignant par $\mathfrak{a}$ la puissance de E , on a $2 < \mathfrak{a}$, d'où $2^{\mathfrak{a}} \leqslant \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$ et d'autre part $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$, d'où $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} \leqslant (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}}$; on a donc $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$.

Proposition 7. Si E *est un ensemble infini, l'ensemble des parties finies de* E *est équipotent à* E .

En effet, l'ensemble $\mathfrak{F}$ des parties finies de E est réunion des ensembles $\mathfrak{F}_n$, où $\mathfrak{F}_n$ est l'ensemble des parties de E ayant n éléments ; comme $\mathfrak{F}_1$ est équipotent à E , et $\mathfrak{F}_n$ équipotent à l'ensemble quotient de E^n par la relation d'équivalence "$(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ ne diffèrent que par l'ordre des termes" , $\mathfrak{F}_n$ a une puissance inférieure à celle de E^n , donc à celle de E ; la proposition est donc une conséquence de la prop.4 .

Exercices.- 1) Si E est un ensemble infini, l'ensemble des parties infinies de E est équipotent à $\mathfrak{P}(E)$.

2) Si E est un ensemble infini, l'ensemble des partitions de E est équipotent à $\mathfrak{P}(E)$ (remarquer que les partitions de E correspondent biunivoquement à un ensemble de parties de $E \times E$).

3) Si E est un ensemble infini, montrer que l'ensemble des permutations de E est équipotent à $\mathfrak{P}(E)$ (utiliser la prop.2 pour montrer que pour toute partie A de E , il existe une permutation de E telle que A soit identique à l'ensemble des éléments de E invariants par cette permutation).

4) Soient E et F deux ensembles infinis, tels que F ait une puissance inférieure à E . Montrer que l'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties de E dans F , l'ensemble F^E des applications de E dans F , et l'ensemble $S(E,F)$ des applications de E sur F , sont équipotents à $\mathfrak{P}(E)$.

5) Si E est un ensemble infini, montrer que l'ensemble des parties de E équipotentes à E est équipotent à $\mathfrak{P}(E)$ (utiliser la prop.2) .

6) Soient E et F deux ensembles infinis, tels que F ait une puissance strictement supérieure à celle de E . Montrer que l'ensemble des parties de F équipotentes à E , et l'ensemble $B(E,F)$ des applications biunivoques de E dans F , sont tous deux équipotents à l'ensemble F^E de toutes les applications de E dans F (considérer les graphes des applications de E dans F) .

7) Montrer, à l'aide du th. de Zorn, que pour toute structure d'ordre sur un ensemble E , il existe une structure d'ordre plus fine pour laquelle E est totalement ordonné. En déduire que si E est infini l'ensemble des structures d'ensemble totalement ordonné sur E , et a forticri l'ensemble de toutes les structures d'ordre sur E , est équipotent à $\mathfrak{P}(E)$ (cf. exerc. 3).

8) Dans un ensemble réticulé E , une partie non vide F est appelée un <u>préfiltre</u> si elle satisfait aux conditions suivantes :

1° quel que soit $x \in F$, tout $y \in E$ tel que $y \geqslant x$ appartient à F ; 2° si $x \in F$ et $y \in F$, $\inf(x,y) \in F$; 3° $F \neq E$. On dit qu'un préfiltre F est <u>premier</u> si la relation $\sup(x,y) \in F$ entraîne $x \in F$ ou $y \in F$.

a) Montrer que si F est un préfiltre premier, $\complement F$ est un préfiltre premier pour la relation d'ordre opposée sur E (<u>copréfiltre</u> premier), et réciproquement.

b) Dans ce qui suit, on suppose que E admet un plus petit élément noté 0 ; montrer que tout préfiltre est contenu dans un préfiltre maximal (utiliser le th. de Zorn, en remarquant que 0 n'est contenu dans aucun préfiltre).

c) Montrer que si F est un préfiltre dans E , a un élément de E n'appartenant pas à F , pour qu'il existe un préfiltre contenant F et a, il faut et il suffit que $\inf(a,x) \neq 0$ pour tout $x \in F$; le plus petit préfiltre contenant F et a est alors formé des $y \in E$ tels que $y \geqslant \inf(a,x)$ pour un $x \in F$ au moins.

d) Soit a un élément $\neq 0$ de E , U un élément maximal dans l'ensemble des préfiltres qui ne contiennent pas a (ensemble supposé non vide, ce qui entraîne l'existence d'un tel préfiltre U) ; montrer que, ou bien U est un préfiltre maximal, ou bien il existe un préfiltre contenant U et a .

9) a) Montrer que, dans un ensemble réticulé <u>distributif</u> (§ 1, exerc. 11) et ayant un plus petit élément 0 , tout préfiltre maximal est premier (utiliser l'exerc. 8c)) .

b) Dans un ensemble réticulé distributif E , ayant un plus petit élément 0 , montrer que tout préfiltre F est l'intersection des préfiltres premiers qui le contiennent (si $a \notin F$, montrer qu'un élément maximal U dans l'ensemble des préfiltres contenant F et ne contenant pas a , est premier : si b et c sont deux éléments tels que $\sup(b,c) \in U$, $b \notin U$ et $c \notin U$, on aboutira à une contradiction en considérant successivement tous les cas possibles en ce qui concerne l'existence d'un préfiltre contenant U et l'un des éléments b,c , et on utilisera l'exerc. 8c)) .

c) Soit E un ensemble réticulé distributif ayant un plus petit élément 0 , Ω l'ensemble des préfiltres premiers dans E ; à tout élément $x \in E$ on fait correspondre la partie A_x de Ω formée des filtres premiers U tels que $x \in U$. Montrer que l'application $x \to A_x$ de E dans $\mathfrak{P}(\Omega)$ est biunivoque, et qu'on a $A_{\inf(x,y)} = A_x \cap A_y$ et $A_{\sup(x,y)} = A_x \cup A_y$.

d) Déduire de c) que si E est un ensemble réticulé ayant un plus petit élément 0 et tel que tout préfiltre dans E soit l'intersection des préfiltres premiers qui le contiennent, E est distributif (remarquer que l'hypothèse entraîne que l'application $x \to A_x$ définie dans c) possède toutes les propriétés énoncées dans c)).

10) On dit qu'un ensemble réticulé E est un <u>réseau booléien</u> s'il est distributif, admet un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1 , et si, pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $\inf(x,x')=0$ et $\sup(x,x')=1$; un tel élément est appelé un <u>complément</u> de x .

a) Soit $x \to A_x$ l'application biunivoque de E dans $\mathfrak{P}(\Omega)$ définie dans l'exerc. 9c) ; montrer que si x' est un complément de x dans E , on a $A_{x'} = \complement A_x$ dans Ω ; en déduire qu'un élément $x \in E$ n'a qu'un seul complément x' que le complément de $\inf(x,y)$ (resp. $\sup(x,y)$) est $\sup(x',y')$ (resp. $\inf(x',y')$) et que le complément de x' est x ; donner des démonstrations directes de ces propriétés.

46

b) Montrer que dans un réseau booléien E , tout préfiltre premier est maximal (remarquer qu'un préfiltre premier contient nécessairement un élément quelconque x de E ou son complément).

c) Inversement, soit E un ensemble réticulé distributif admettant un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1 , et tel que tout préfiltre premier dans E soit maximal ; montrer que E est un réseau booléien (pour un $x \in E$, considérer le copréfiltre C des $y \in E$ tels que $\inf(x,y)=0$; si x n'a pas de complément, il existe un copréfiltre maximal M contenant x et C ; en remarquant que le complémentaire U de M dans E est un préfiltre premier (exerc. 8a) et 9a)) , donc un préfiltre maximal par hypothèse, obtenir une contradiction).

11) Soit E un ensemble réticulé achevé, ayant un plus petit et un plus grand élément ; on suppose en outre que E est un réseau booléien (exerc. 10) .

a) On suppose que pour tout élément $x > 0$ de E , il existe un élément $y \leqslant x$ qui est élément minimal de l'ensemble P des éléments $\neq 0$ de E . Montrer que tout élément $x > 0$ de E est borne supérieure des éléments minimaux de P qui sont $\leqslant x$. En déduire que, si à tout $x > 0$ dans E on fait correspondre la partie B_x de l'ensemble M des éléments minimaux de P , formée des $y \in M$ qui sont $\leqslant x$, on définit une application biunivoque $x \to B_x$ de P <u>sur</u> l'ensemble des parties non vides de M ; on prolonge cette application en une application biunivoque de E sur $\mathfrak{P}(M)$ en posant $B_0=\emptyset$; dans ces conditions, l'application $x \to B_x$ est telle que si $x = \inf_\alpha x_\alpha$, $B_x = \bigcap_\alpha B_{x_\alpha}$, et si $x = \sup_\alpha x_\alpha$, $B_x = \bigcup_\alpha B_{x_\alpha}$.

b) On suppose que pour tout couple de familles (u_α), (v_α) d'éléments de E , ayant même ensemble d'indices A , on a $\inf_{\alpha \in A}(\sup(u_\alpha,v_\alpha)) = \sup_{H \in \mathfrak{P}(A)} w_H$, où $w_H = \inf(\inf_{\alpha \in H} u_\alpha, \inf_{\alpha \notin H} v_\alpha)$. Montrer que pour tout

tout élément $x > 0$ de E il existe un élément $y \leqslant x$ qui est élément minimal de P (remarquer qu'on peut écrire $1 = \inf_{x \in E} (\sup(x,x'))$).

12) Soit E un ensemble infini. Dans l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$, on désigne par R la relation suivante entre A et B : "$A \cap \complement B$ et $B \cap \complement A$ sont finis" ; montrer que R est une relation d'équivalence dans $\mathfrak{P}(E)$. Soit F l'ensemble quotient $\mathfrak{P}(E)/R$; si on définit entre deux éléments α, β de F la relation $\alpha \leqslant \beta$ comme équivalente à : "il existe $A \in \alpha$ et $B \in \beta$ tels que $A \subset B$", montrer que cette relation est une relation d'ordre dans F, et que, muni de cette relation, F est un réseau booléien, dans lequel l'ensemble P des éléments > 0 n'admet pas d'élément minimal.

13) Soit E un ensemble ordonné, F l'ensemble des <u>fermetures</u> (§ 1, exerc. 8) dans E. On ordonne F en posant $u \leqslant v$ lorsque, pour tout $x \in E$, $u(x) \leqslant v(x)$; F admet un plus petit élément e, l'application identique de E dans E.

a) Montrer que, pour que $u \leqslant v$ dans F, il faut et il suffit que $I(v) \subset I(u)$, où $I(u)$ (resp. $I(v)$) désigne l'ensemble des éléments de E invariants par u (resp. v).

b) Montrer que si deux éléments quelconques de E admettent une borne inférieure, deux éléments quelconques de F admettent une borne inférieure. De même, si E est un ensemble réticulé achevé, il en est de même de F.

c) Montrer que, si E est inductif (pour la relation $\leqslant$), deux éléments quelconques u, v de F admettent une borne supérieure (montrer que si on pose $f(x) = v(u(x))$, le plus grand élément $w(x)$ de la chaîne d'origine x, relative à f, définit une fermeture w, qui est borne supérieure de u et v).

14) Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sont quatre éléments de l'ensemble $\varpi(E)$ des puissances des parties d'un ensemble E, tels que $\mathfrak{b}+\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ soient définis, montrer que les relations $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}<\mathfrak{d}$ entraînent que $\mathfrak{a}+\mathfrak{c}<\mathfrak{b}+\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{c}<\mathfrak{b}\mathfrak{d}$.

§ 3. Ensembles bien ordonnés.

1. Définition des ensembles bien ordonnés.

DÉFINITION 1.- On dit qu'une partie X d'un ensemble ordonné E (par une relation notée $x \leqslant y$) est bien ordonné (ou bien ordonné pour la relation $\geqslant$, si on veut éviter toute confusion) si toute partie non vide de X possède un plus petit élément.

Un ensemble bien ordonné E est nécessairement totalement ordonné, puisque toute partie $\{x,y\}$ de E formée de deux éléments admet un plus petit élément, ce qui entraîne $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$; la réciproque est inexacte. Toute partie d'un ensemble ordonné est un ensemble bien ordonné.

Exemples.- 1) L'ensemble N des entiers naturels est bien ordonné pour la relation $\leqslant$ (chap.III, § 2,th.3) ; par contre, il n'est pas bien ordonné pour la relation $\geqslant$ puisqu'il n'admet pas de plus petit élément pour cette relation.

2) Tout ensemble totalement ordonné et fini est bien ordonné, puisqu'il est isomorphe à une partie de N (§ 1,cor.2 de la prop.2)

3) Soit E un ensemble ordonné quelconque, f une application de E dans E telle que, pour tout $x \in E$, on ait $f(x) \geqslant x$. Alors, la chaîne d'origine (relative à f) (§ 2,n°1) est une partie bien ordonnée de E, pour tout $a \in E$. En effet, soit A cette chaîne, B une partie non vide quelconque de A, C l'ensemble des minorants de B dans A ; il suffit de montrer que C rencontre B.

Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $x \in C$ et tout $y \in B$, on ait $x < y$. On a évidemment $a \in C$; il résulte du th.1 du § 2 que si $x \in C$ et $y \in B$, on a $f(x) \leq y$, autrement dit $f(x)$ est un minorant de B, ce qui signifie que $f(x) \in C$; enfin, si X est une partie de C qui admet dans E une borne supérieure b, on a $b \in A$ et il est clair que b est un minorant de B, donc $b \in C$. Le th.1 du § 2 montre alors qu'on aurait $C \supset A$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse que C ne rencontre pas B.

Dans un ensemble totalement ordonné, toute partie <u>majorée</u> X admet une borne supérieure, puisque l'ensemble des majorants de X n'est pas vide et admet par suite un plus petit élément.

On notera qu'il existe des ensembles totalement ordonnés <u>achevés</u> (§ 1, n°9) qui ne sont pas bien ordonnés ; *un exemple est fourni par l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$.*

Pour tout élément x d'un ensemble bien ordonné E, qui n'est pas le plus grand élément de E, l'ensemble $]x, \rightarrow[$ des éléments $> x$ admet un plus petit élément, qu'on désigne par x^+, et qu'on nomme le <u>conséquent</u> de x dans E ; la relation $x \leq y \leq x^+$ entraîne $y=x$ ou $y=x^+$; on dit encore que x et x^+ sont <u>consécutifs</u> dans E, et que x est l'<u>antécédent</u> de x^+. Un élément d'un ensemble bien ordonné n'a pas nécessairement d'antécédent, même s'il est distinct du plus petit élément.

*Par exemple, la partie A de l'ensemble $\mathcal{R}$ des nombres réels formée des nombres $1-\frac{1}{n}$ et $2-\frac{1}{n}$, où n est un entier arbitraire ≥ 1, est un ensemble bien ordonné (pour la relation $\leq$) : en effet, si $B \subset A$ n'est pas vide, et si 1 est un minorant de B, le plus petit p des entiers n tels que $2-\frac{1}{n} \in B$ est tel que $2-\frac{1}{p}$ soit le plus petit élément de B. Si au contraire 1 n'est pas un minorant de B, il existe un entier n tel que $1-\frac{1}{n} \in B$, et on montre alors de la même manière que pour le plus petit p des ces entiers, $1-\frac{1}{p}$ est le plus petit élément de B . Cela étant, il est clair que l'élément 1 de B n'a pas d'antécédent. *

2. Le principe d'induction transfinie.

Le principe d'induction totale dans $\mathcal{N}$ sous sa seconde forme (chap.III §2,n°3, th.2) se généralise comme suit à un ensemble bien ordonné quelconque.

Théorème 1 ("principe d'induction transfinie"). Soit E un ensemble bien ordonné, a le plus petit élément de E . Si H est une partie de E telle que la relation $[a,x[\subset H$ entraîne $x\in H$, on a $H=E$.

En effet, supposons que $\complement H$ ne soit pas vide ; il admettrait alors un plus petit élément x , et on aurait donc $y\in H$ pour tout $y<x$, autrement dit $[a,x[\subset H$; mais par hypothèse, cela entraîne $x\in H$, ce qui contredit la définition de x .

On applique encore le plus souvent le principe d'induction transfinie de la manière suivante (cf.chap III, §2,n°3) : soit R une relation contenant comme argument libre un élément arbitraire x de E ; si, dans une théorie $\mathcal{C}$, la relation $(\forall y\in E)(y<x \longrightarrow (y|x)R)$ entraîne R , la relation R est vraie dans la théorie $\mathcal{C}$, car si H est l'ensemble des $x\in E$ où R a lieu, H satisfait aux conditions du th.1 .

Au principe d'induction transfinie correspond aussi une méthode de définition d'une application par "récurrence transfinie" :

Proposition 1. Soit E un ensemble bien ordonné a son plus petit élément. Pour tout $x\in E$, soit G_x un ensemble non vide d'application de $[a,x[$ dans F , ces ensembles ayant la propriété suivante : quelque soit $x>a^+$, pour qu'une application u de $[a,x[$ dans F appartienne à G_x , il faut et il suffit que, pour tout $y<x$, la restriction de u à $[a,y[$ appartienne à G_y . Soit G la réunion des G_x (dans $\Phi(E,F)$) , et soit φ

une application de G *dans* F *ayant la propriété suivante : pour tout* $x\in E$ *ayant un conséquent, et tout* $u\in G_x$ *, l'application* v *de* $[\alpha,x^+[$ *dans* F *, égale à* u *dans* $[\alpha,x[$ *et telle que* $v(x)=\varphi(u)$ *, appartient à* G_{x^+} *. Alors, pour tout élément* $a\in F$ *tel que* $\alpha\to a$ *appartienne à* G_{α^+} *, il existe une application et une seule* f *de* E *dans* F *telle que :* 1° $f(\alpha)=a$; 2° *pour tout* $x\in E$ *, la restriction* $f^{(x)}$ *de* f *à* $[\alpha,x[$ *appartient à* G_x ; 3° *pour tout* $x\in E$, $f(x)=\varphi(f^{(x)})$.

En effet, soit H la partie de E formée de α et des $x>\alpha$ ayant la propriété suivante : il existe une application et une seule g_x de $[\alpha,x[$ dans F telle que : 1° $g_x(\alpha)=a$; 2° pour tout $y<x$, la restriction $g_x^{(y)}$ de g_x à $[\alpha,y[$ appartient à G_y ; 3° pour tout y x , $g_x(y)=(g_x^{(y)})$. Nous allons appliquer le principe d'induction transfinie pour prouver que $H=E$. Soit donc $x>\alpha$ un élément de E tel que $[\alpha,x[\subset H$. Remarquons d'abord que, si $y<z<x$, la restriction de g_z à $[\alpha,y[$ est nécessairement identique à g_y , d'après la définition de H ; si x n'a pas d'antécédent, il existe donc une application et une seule g_x de $[\alpha,x[$ dans F dont la restriction à $[\alpha,y[$ soit identique à g_y pour tout $y<x$; comme tout $y<x$ admet un conséquent $<x$, il est immédiat que g_x satisfait bien aux trois conditions ci-dessus, et que c'est la seule application ayant cette propriété, autrement dit $x\in H$. Si au contraire, x admet un antécédent y , l'application g_x de $[\alpha,x[$ dans F dont la restriction à $[\alpha,y[$ est identique à g_y et qui est telle que $g_x(y)=\varphi(g_y)$ satisfait encore aux trois conditions ci-dessus, et c'est évidemment la seule application qui y satisfasse, donc on a encore $x\in H$. Le th.1 montre donc que $H=E$. Alors, pour tout couple d'éléments x,y de E tels que $x<y$, g_x est la restriction de g_y à $[\alpha,x[$; si E n'a pas de plus grand élément, il existe donc une application f et une seule de E dans F dont la restriction à $[\alpha,x[$

soit identique à g_x pour tout $x \in E$; cette application possède donc bien les trois propriétés de l'énoncé, et il est immédiat que c'est la seule, d'après la définition des g_x. Si au contraire, E admet un plus grand élément ω, il existe de même une application g et une seule de $[\alpha,\omega[$ dans F dont la restriction à $[\alpha,x[$ soit identique à g_x pour tout x E ; l'application f de E dans F dont la restriction à $[\alpha,\omega[$ est identique à g et qui est telle que $f(\omega)=\varphi(g)$, est bien encore alors l'unique application satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

<u>3. Applications strictement croissantes d'un ensemble bien ordonné dans un ensemble bien ordonné.</u>

<u>Proposition 2</u>. <u>Soit</u> E <u>un ensemble bien ordonné</u>, f <u>une application strictement croissante de</u> E <u>dans lui-même</u> ; <u>pour tout</u> $x \in E$, <u>on a</u> $f(x) \geqslant x$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble H des $x \in E$ tels que $f(x) < x$ ne soit pas vide ; il aurait alors un plus petit élément a ; si $b=f(a)$, on a donc $b < a$. Par définition de a, pour tout $x < a$, on a $f(x) \geqslant x$, et comme f est strictement croissante, on a $f(a) > f(x)$, donc $f(a) > x$; mais comme $b < a$, on aurait en particulier $b=f(a) > b$, ce qui est absurde,.

Pour abréger, étant donné un ensemble bien ordonné E, dont α est le plus petit élément, nous appellerons <u>segments</u> de E, les intervalles $[\alpha,x[$ (pour $x > \alpha$) et $[\alpha,\rightarrow[= E$.

Toute <u>réunion</u> d'une famille (S_λ) de segments est encore un segment : la proposition est évidente si $\bigcup_\lambda S_\lambda = E$; dans le cas contraire, soit a le plus petit élément de E qui n'appartient à aucun des S ; pour tout $x < a$, il existe λ tel que $x \in S_\lambda$; réciproquement, si $x \in S_\lambda$ pour un λ, on ne peut avoir $x \geqslant a$, car on en déduirait $a \in S_\lambda$ contrairement à l'hypothèse ; on a donc $\bigcup_\lambda S_\lambda = [\alpha,a[$.

Proposition 3. Si f est une application strictement croissante de E sur un segment de E, f est l'application identique de E sur lui-même.

Montrons d'abord que $f(E)=E$; dans le cas contraire, on aurait $f(E)=\,]\alpha,x[$ pour un $x\in E$, donc $f(y)<x$ pour tout $y\in E$, et en particulier $f(x)<x$, ce qui est absurde d'après la prop.2 . L'application f est donc un automorphisme de E ; soit g l'automorphisme réciproque ; montrons que f est l'application identique. En effet, dans le cas contraire, il existerait $x\in E$ tel que $f(x)\neq x$; si $f(x)<x$, cela contredit la prop.2 ; si $f(x)>x$, en posant $y=f(x)$, on aurait $g(y)<y$, ce qui contredit aussi la prop.2 ; la prop.3 est donc démontrée.

Corollaire. Soient E,F deux ensembles bien ordonnés ; si f et g sont deux applications strictement croissantes de E sur des segments de F, on a $f=g$.

En effet, posons $S=f(E)$, $T=g(E)$; comme S et T sont deux segments de F par hypothèse, on a $S\subset T$ ou $T\subset S$. Supposons par exemple que $S\subset T$, et soit h l'application réciproque de g ; alors $f\,h$ est une application strictement croissante de T sur un segment S de T, ce qui implique d'après la prop.3 que $S=T$ et que $f\,h$ est l'application identique de T sur lui-même, donc $f=g$.

Théorème 2. Si E et F sont deux ensembles bien ordonnés, il existe une application strictement croissante et une seule de E sur un segment de F, ou une application strictement croissante et une seule de F sur un segment de E.

Considérons, dans l'ensemble $\Phi(E,F)$ des applications de parties de E dans F, l'ensemble Γ des applications strictement croissantes d'un segment de E sur un segment de F ; cet ensemble n'est pas vide, car si α et β sont les plus petits éléments de E et de F , l'application (unique) de $\{\alpha\}$ sur $\{\beta\}$ appartient à Γ . Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des segments S et E tels qu'il existe une application strictement croissante de S sur un segment de F , cette application est *unique* d'après le cor. de la prop.3 ; désignons-la par u_S . Si S et S' appartiennent à $\mathfrak{F}$, on a $S \subset S'$ ou $S' \subset S$; si par exemple $S \subset S'$, la restriction de $u_{S'}$ à S est identique à u_S : en effet, $u_{S'}$ est un isomorphisme de S' sur un segment de F , donc applique S sur un segment de F , et sa restriction à S est par suite identique à u_S . Soit alors S_0 la réunion des $S \in \mathfrak{F}$; S_0 est un segment de E , et il existe une application et une seule u_0 de S_0 dans F qui coïncide avec u_S sur chaque $S \in \mathfrak{F}$; $u_0(S_0)$ est la réunion des segments $u_S(S)$ de F , donc est un segment de F ; enfin, u_0 est strictement croissante, car si x et y sont deux éléments de S_0 tels que $x < y$, x et y appartiennent chacun à un segment de l'ensemble $\mathfrak{F}$, donc l'un de ces deux segments contient l'autre, autrement dit, x et y appartiennent à un même segment $S \in \mathfrak{F}$ et alors $u_0(x)=u_S(x) < u_S(y)=u_0(y)$. On voit donc que S_0 est le plus grand élément de $\mathfrak{F}$, et $u_{S_0}=u_0$ le *plus grand élément* de Γ (ordonné par prolongement). Cela étant, nous allons voir que l'on a $S_0=E$ ou $u_0(S_0)=F$, ce qui achèvera la démonstration. En effet, dans le cas contraire, on aurait $S_0=[\alpha,a[$ et $u_0(S_0)=[\beta,b[$; alors $S_1=[\alpha,a]$ est égal à $[\alpha,a^+[$ si a n'est pas le plus grand élément de E , à E dans le cas contraire, donc est un segment de E contenant S_0 ; de même $S'_1=[\beta,b]$ est un segment de F contenant $u_0(S_0)$; on prolonge alors u_0 en une application strictement croissante u_1 de S_1 sur S'_1 en posant $u_1(a)=b$; mais u_0 ne serait pas alors le plus grand élément de ce qui est absurde.

<u>Corollaire</u>. <u>Tout sous-ensemble</u> A <u>d'un ensemble bien ordonné</u> E <u>est isomorphe à un segment de</u> E .

En effet, il suffit, d'après le th.2, de prouver qu'il n'existe pas d'application strictement croissante f de E sur un segment de A de la forme $]\alpha, a[$ (avec $a \in A$) ; cela entraînerait en effet que $f(a) < a$ dans E , ce qui contredit la prop.2 .

<u>4. Le théorème de Zermelo</u>.

<u>Théorème 3</u> (Zermelo).- <u>Pour tout ensemble</u> E <u>non vide, il existe une structure d'ordre sur</u> E <u>pour laquelle</u> E <u>est bien ordonné</u>.

En effet, en vertu de l'axiome de choix, il existe une application f de l'ensemble des parties de E distinctes de E , dans l'ensemble E , telle que, pour tout $X \subset E$ telle que $X \neq E$, on ait $f(X) \in \complement X$. Définissons une application g de $\mathfrak{P}(E)$ dans lui-même par la condition suivante : si $X \neq E$, $g(X) = X \cup \{f(X)\}$; si $X = E$, $g(X) = E$. On a $g(X) \supset X$ pour tout $X \subset E$, et la relation $g(X) = X$ équivaut à $X = E$. Considérons alors dans $\mathfrak{P}(E)$ la <u>chaîne</u> Γ , relative à l'application g , d'origine $\emptyset$ (§ 2, n°1) ; c'est une partie de $\mathfrak{P}(E)$, bien ordonnée pour la relation d'inclusion, et comme elle admet une borne supérieure dans $\mathfrak{P}(E)$, cette borne supérieure X est le plus grand élément de Γ tel que $g(X) = X$, donc $X = E$. Cela étant, montrons que l'application $X \to f(X)$ de l'ensemble Γ^* des éléments de Γ distincts de E , dans l'ensemble E , est une application <u>biunivoque</u> de Γ^* <u>sur</u> E ; comme Γ^* est bien ordonné, en transportant la structure d'ordre de Γ^* sur E par l'application f , le théorème sera démontré. Or, soient X et Y deux éléments de Γ^* tels que $X \neq Y$, et supposons par exemple que $X \subset Y$; alors, on a aussi $g(X) \subset Y$, autrement dit $f(X) \in Y$ et par suite $f(X) \neq f(Y)$. D'autre part, si x est un élément quelconque de E , la réunion des $X \in \Gamma^*$ tels que $x \notin X$ est un élément X_0 de Γ et on a évidemment $x \notin X_0$ d'où $X_0 \neq E$; comme $g(X_0)$ contient X_0 et en est distinct, on a $x \in g(X_0)$, ce qui entraîne $x = f(X_0)$, et achève la démonstration.

Théorème 4. *L'ensemble $\overline{\omega}(E)$ des puissances des parties d'un ensemble E est bien ordonné pour la relation $\leqslant$.*

En effet, soit $x \leqslant y$ une relation d'ordre sur E pour laquelle E soit *bien ordonné* (th.3) ; toute partie de E est alors isomorphe, et a fortiori équipotente à un *segment* de E , et par suite l'ensemble $\overline{\omega}(E)$ est identique à l'ensemble des puissances $p(S)$, où S parcourt l'ensemble des segments de E . Pour toute puissance $\mathfrak{a} \in \overline{\omega}(E)$, soit alors $\sigma(\mathfrak{a})$ le *plus petit* des segments S tels que $p(S) = \mathfrak{a}$ (ce qui a un sens, puisque l'ensemble des segments de E est bien ordonné par inclusion) ; l'application $\mathfrak{a} \to \sigma(\mathfrak{a})$ est une application *strictement croissante* de $\overline{\omega}(E)$ dans l'ensemble des segments de E , car si $S = \sigma(\mathfrak{a})$, $S' = \sigma(\mathfrak{a}')$ et $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}'$, on ne peut avoir $S' \subset S$, puisque la puissance $\mathfrak{a}'$ de S' serait alors inférieure à la puissance $\mathfrak{a}$ de S . Comme l'ensemble des segments de E est bien ordonné, il en est de même de l'image de $\overline{\omega}(E)$ par σ , ce qui démontre le théorème.

Dans l'ensemble des puissances des parties de $\mathfrak{P}(E)$, qui est bien ordonné d'après le th.4, on a $p(E) < p(\mathfrak{P}(E))$ (chap.III, § 1,th.2) ; lorsque E est infini, *on ignore* si $p(E)$ est l'*antécédent* de $p(\mathfrak{P}(E))$; cette proposition (pour tout ensemble E infini) est connue sous le nom d'*hypothèse du continu généralisée* ; restreinte au cas où $E = \mathbb{N}$, elle est dite *hypothèse du continu*.

Exercices.- 1) Soit E un ensemble ordonné, X et Y deux parties bien ordonnées de E (pour l'ordre induit) telles que les relations $x \in X$, $y \in Y$ entraînent $x \leqslant y$. Montrer que $X \cup Y$ est bien ordonné.

57

2) Soient E et F deux ensembles bien ordonnés ; montrer que si on munit l'ensemble produit $G=E\times F$ de l'ordre lexicographique (§ 1, n°5), G est bien ordonné.

3) a) Soit E un ensemble ordonné, $\mathfrak{B}$ l'ensemble des parties de E qui sont bien ordonnées (pour la relation $\leqslant$). Montrer que, dans $\mathfrak{B}$, la relation "X est un segment de Y" est une relation d'ordre, et que pour cette relation, $\mathfrak{B}$ est un ensemble <u>inductif</u>.

b) Soit g une application de $\mathfrak{B}$ dans E telle que, pour tout $X\in\mathfrak{B}$, g(X) soit un majorant de X ; montrer qu'il existe une partie bien ordonnée X_0 de E telle que $g(X_0)\in X_0$ (et par suite, que $g(X_0)$ soit le plus grand élément de X_0) .

c) Soit E un ensemble ordonné dans lequel toute partie bien ordonnée est majorée ; alors E possède un élément maximal (faire correspondre à tout $x\in E$ un élément f(x) tel que $f(x)>x$ si x n'est pas maximal, $f(x)=x$ si x est maximal ; d'autre part, si pour toute partie bien ordonnée X de E , h(X) est un majorant de X, faire correspondre à tout $X\in\mathfrak{B}$ l'élément f(h(X)), et appliquer b)) .

4) Soit E un ensemble quelconque, $\mathfrak{S}$ l'ensemble des structures d'ensemble bien ordonné sur les parties de E . La relation "s et s' sont isomorphes" entre deux éléments de $\mathfrak{S}$ est une relation d'équivalence R ; dans l'ensemble $\mathfrak{S}_0=\mathfrak{S}/R$, la relation entre classes $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ appartenant à $\mathfrak{S}_0$: "il existe $s\in\bar{s}$ et $s'\in\bar{s}'$ tels que s soit isomorphe à la structure induite sur un segment de l'ensemble où est défini s' " est une relation d'ordre. Montrer que, pour cette relation $\mathfrak{S}_0$ est <u>bien ordonné</u>.

Pour toute structure d'ensemble bien ordonné $s \in \mathfrak{S}$, définie sur une partie F de E, montrer que s est isomorphe à l'ensemble bien ordonné des éléments $\bar{t}$ de $\mathfrak{S}_0$ qui sont $< \bar{s}$ (segement de $\mathfrak{S}_0$). En déduire (sans utiliser l'axiome du choix ni le théorème de trichotomie) que la puissance de $\mathfrak{S}_0$ ne peut être inférieure à celle de E. Conclure de ce résultat que le théorème de trichotomie entraîne le théorème de Zermelo.

Montrer d'autre part que le théorème de Zermelo entraîne l'axiome de choix (pour montrer que pour tout ensemble de parties $(X_\iota)_{\iota \in I}$ d'un ensemble E, il existe une application f de I dans E telle que $f(\iota) \in X_\iota$, considérer une structure d'ordre sur E pour laquelle E est bien ordonné, et définir f à l'aide de cette structure). En déduire que l'axiome de choix, le théorème de Zorn, le théorème de Zermelo et le théorème de trichotomie sont équivalents.

En utilisant l'axiome de choix, montrer que dans l'ensemble des puissances des parties de $\mathfrak{S}_0$, la puissance de E est l'<u>antécédent</u> de la puissance de $\mathfrak{S}_0$ (*).

5) Démontrer que l'hypothèse du continu généralisée entraîne la propriété suivante : si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux puissances de parties de E telles que $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ et que $2^{\mathfrak{a}}$ et $2^{\mathfrak{b}}$ soient définies, on a $2^{\mathfrak{a}} < 2^{\mathfrak{b}}$.

6) Soit E un ensemble non dénombrable ayant la propriété suivante : pour toute puissance infinie $\mathfrak{a} \in \overline{\omega}(E)$ strictement inférieure à p(E), $2^{\mathfrak{a}}$ est définie. Pour une telle puissance $\mathfrak{a}$, on peut alors définir

---

(*) Ce résultat est encore valable sans l'axiome de choix, lorsqu'il existe sur E une structure d'ordre <u>explicitée</u> pour laquelle E est bien ordonné, par exemple lorsque $E = \mathbb{N}$; on peut alors, sans l'axiome de choix, définir par le procédé de l'exerc.4 un nombre (énuméré) quelconque d'ensembles bien ordonnés de puissances distinctes.

par récurrence la puissance $\mathfrak{a}_n = 2^{\mathfrak{a}_{n-1}}$ pour tout $n > 0$; montrer que la somme $\mathfrak{b}$ des puissances $\mathfrak{a}_n$ est définie, égale à la borne supérieure de la suite $(\mathfrak{a}_n)$ dans $\overline{\omega}(E)$, et qu'on a $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$ (prouver que l'on a $2^{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$). En déduire que $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}} = (2^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{b}}$, bien que $\mathfrak{b} < 2^{\mathfrak{b}}$ et $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$.

7) Soit E un ensemble infini bien ordonné, tel que tout segment de E distinct de E ait une puissance strictement inférieure à celle de E , et que p(E) ait un antécédent dans $\overline{\omega}(E)$.

a) Montrer que toute partie de E de puissance strictement inférieure à celle de E est contenue dans un segment de E distinct de E .

b) Soit F un ensemble de puissance strictement inférieure à celle de E , G une partie de E dont la puissance est l'antécédent de celle de E dans $\overline{\omega}(E)$; montrer que E^F est équipotent à $E \times G^F$ (utiliser a)

En déduire que si E est tel qu'il n'y ait qu'un nombre fini de puissances infinies distinctes dans $\overline{\omega}(E)$, E^F est équipotent à $E \times \mathfrak{P}(F)$ pour tout ensemble F de puissance strictement inférieure à celle de E.

c) Donner un exemple d'un couple d'ensembles infinis E,F tels que F ait une puissance strictement inférieure à celle de E , et E^F une puissance strictement supérieure à celle de $E \times \mathfrak{P}(F)$ (cf.exerc.6).

8) Montrer que si une structure d'ordre sur un ensemble E est telle que, pour cette structure d'ordre et pour la structure opposée, E soit bien ordonné, l'ensemble E est fini (considérer le plus grand élément x de E tel que le segment d'extrémité x soit fini).

9) Soit E un ensemble bien ordonné n'ayant pas de plus grand élément.

a) Montrer que si l'ensemble R des éléments de E sans antécédent n'est pas fini, il est équipotent à E (à chaque élément x de E sans antécédent, faire correspondre le plus petit élément x' ∈ E sans antécédent et $> x$, lorsqu'il existe de tels éléments, et prouver que l'intervalle $\left]x,x'\right[$ est dénombrable ; s'il n'existe pas d'élément $> x$ et sans antécédent, montrer que $\left]x, \rightarrow\right[$ est dénombrable).

b) Pour toute partie non vide H de R, on définit un ensemble totalement ordonné F_H de la manière suivante : F est somme de E et d'un ensemble S équipotent à H, dont les éléments sont notés $z(x,n)$, où $x \in H$ et $n \in \mathbb{N}$; la relation d'ordre entre les éléments de E est la relation donnée ; on pose en outre $z(x,n) > y$ pour tout $y \in E$ tel que $y \leqslant x$ et tout n, $z(x,n) < y$ pour tout $y > x$ et tout n, $z(x,n) < z(x',m)$ pour $x < x'$, x et x' dans H, m et n entiers quelconques, et enfin, $z(x,n) < z(x,m)$ pour $x \in H$ quelconque et $m < n$. Montrer que si H et K sont deux parties distinctes de R, F_H et F_K ne sont pas isomorphes (remarquer qu'une application strictement croissante de F_H sur F_K soit nécessairement transformer R en lui-même, et par suite (prop.3) laisse invariant tout élément de R). En déduire que l'ensemble des classes de structures d'ordre isomorphes sur un ensemble infini E est équipotent à $\mathfrak{P}(E)$.

10) a) Soit $\mathfrak{F}$ un ensemble de parties d'un ensemble E, tel que toute partie $A \in \mathfrak{F}$ soit équipotente à $\mathfrak{F}$. Montrer qu'il existe dans E une partie P équipotente à $\mathfrak{F}$ et telle qu'aucun ensemble de $\mathfrak{F}$ ne soit contenu dans P (considérer sur $\mathfrak{F}$ une structure d'ensemble bien ordonné, telle que tout segment distinct de $\mathfrak{F}$ ait une puissance strictement inférieure à celle de $\mathfrak{F}$, et définir par induction transfinie un ensemble P et un ensemble Q sans éléments communs dans E, tels que P et Q rencontrent chacun des ensembles de $\mathfrak{F}$).

b) On suppose en outre que pour toute partie $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$, de puissance strictement inférieure à celle de $\mathfrak{F}$, le complémentaire dans E de la réunion des ensembles $A \in \mathfrak{G}$ ait une puissance supérieure à à celle de $\mathfrak{F}$; montrer alors qu'il existe dans E une partie P équipotente à $\mathfrak{F}$, et telle que pour tout $A \in \mathfrak{F}$, $P \cap A$ ait une puissance strictement inférieure à celle de $\mathfrak{F}$ (méthode analogue).

11) a) Soit $\mathfrak{F}$ un recouvrement d'un ensemble E ; on appelle <u>degré de disjonction</u> de $\mathfrak{F}$, la plus petite des puissances (dans l'ensemble des puissances des parties de $\mathfrak{P}(E)$) qui soit <u>strictement supérieure</u> à la puissance de l'intersection de deux ensembles distincts quelconques appartenant à $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{a}$ est la puissance de E, $\mathfrak{b}$ celle de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{c}$ le degré de disjonction de $\mathfrak{F}$, montrer qu'on a $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$ (en faisant correspondre à tout $A \in \mathfrak{F}$ l'ensemble A lui-même si sa puissance est $< \mathfrak{c}$, une partie de A de puissance $\mathfrak{c}$ si la puissance de A est $\geqslant \mathfrak{c}$, montrer qu'on définit une application biunivoque de $\mathfrak{F}$ sur une partie de l'ensemble des parties de E de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$).

b) Soit F un ensemble bien ordonné, sans plus grand élément tel que tout segment de F distinct de F ait une puissance strictement inférieure à la puissance $\mathfrak{c}$ de F. Soit G un ensemble de puissance $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$, et soit E l'ensemble des applications des segments de F distincts de F dans G. Pour toute application φ de F dans G, on désigne par K_φ la partie de E formée des restrictions de φ aux segments de F distincts de F. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{F}$ des K_φ est un recouvrement de E, de puissance $\mathfrak{d}^{\mathfrak{c}}$ (cf. § 2, exerc. 4), ayant un degré de disjonction égal à $\mathfrak{c}$, et que la puissance $\mathfrak{a}$ de E est $\leqslant \mathfrak{d}^{\mathfrak{c}}$.

c) Soit E un ensemble infini de puissance $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{d}$ deux éléments de l'ensemble des puissances des parties de E tels que pour tout $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}$, on ait $\mathfrak{d}^{\mathfrak{m}} \leqslant \mathfrak{a}$. Déduire de b) qu'il existe un recouvrement $\mathfrak{F}$ de E de puissance $\mathfrak{d}^{\mathfrak{c}}$, formé d'ensembles de puissance $\mathfrak{c}$, et ayant un degré de disjonction égal à $\mathfrak{c}$.

En particulier, si E est dénombrable, il existe un recouvrement $\mathfrak{F}$ de E équipotent à $\mathfrak{P}(E)$, et tel que l'intersection de deux ensembles distincts de $\mathfrak{F}$ soit <u>finie</u>.

12) Soit $\mathfrak{F}$ un recouvrement d'un ensemble infini E , $\mathfrak{b}$ sa puissance (dans l'ensemble des puissances des parties de $\mathfrak{P}(E)$) , $\mathfrak{c}$ son degré de disjonction (exerc.11). Soit $(\mathfrak{F}_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de la partie $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{P}(E)$; montrer qu'il existe une partition $(E_\iota)_{\iota \in I}$ de E telle que, pour tout $\iota \in I$ et tout ensemble $M \in \mathfrak{F}_\iota$, la puissance de $M \cap F_\iota$ soit strictement inférieure à $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$. (Considérer sur $\mathfrak{F}$ une structure d'ensemble bien ordonné dont tout segment distinct de $\mathfrak{F}$ ait une puissance strictement inférieure à celle de $\mathfrak{F}$; considérer d'autre part sur E une structure d'ensemble bien ordonné ; en désignant par $\lambda(M)$ l'indice $\iota \in I$ tel que $M \in \mathfrak{F}_\iota$, définir par récurrence transfinie les ensembles $M \cap F_{\lambda(M)}$ et $M \cap F_\iota$ pour $\iota \neq \lambda(M)$, de sorte que les conditions de l'énoncé soient remplies).

13) Soit E un ensemble infini non dénombrable, Γ un groupe de permutations de E , équipotent à E .

a) Soit A un ensemble bien ordonné équipotent à E , tel que tout segment de A distinct de A ait une puissance strictement inférieure à celle de A ; soit $\alpha \to x_\alpha$ et $\alpha \to u_\alpha$ des applications biunivoques de A sur E et Γ respectivement. Montrer qu'il existe une partition $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ de E telle que tout M_α ait une puissance strictement inférieure à celle de E et que, pour tout $\beta < \alpha$, on ait $u_\beta(M_\alpha) \subset M_\alpha$ (définir les M_α par induction transfinie, en considérant le sous-groupe de Γ engendré par les u_β d'indice $\beta < \alpha$) .

b) Déduire de a qu'il existe une partition de E en deux ensembles H,K , telle que H et K soient équipotents à E et que pour tout $u \in \Gamma$, $u(H) \cap \complement H$ et $u(K) \cap \complement K$ aient une puissance strictement inférieure à celle de E (prendre pour H et K des réunions d'ensembles M_α) .

c) Déduire de a) qu'il existe une partie F de E , équipotente à E , telle que pour toute partition de F en deux ensembles H,K et tout couple (u,v) de permutations distinctes de Γ , $u(H) \cap v(K)$ ait une puissance strictement inférieure à celle de E (prendre F de sorte que $F \cap M_\alpha$ soit réduit à un seul élément pour tout α) .
