CONTRE REDACTIONS
DES CHAPITRES I ET II
DES ENSEMBLES

Rédaction n° 055

Nombre de pages : 101

Nombre de feuilles : 101

Etat 2 bis Delsarte de Possel A 55

CONTRE REDACTION DES CHAPITRES I ET II DES ENSEMBLES .

CHAPITRE ~~§XX~~ I . § 1 : comme la rédaction Weil , à quelques détails de forme près .

§ 2 . Les objets mathématiques et le calcul des relations.

Nous avons vu , au paragraphe précédent , comment s'articulent entre elles les propositions d'un texte mathématique . Mais nous ne possédons encore aucun critère permettant de reconnaître si une phrase donnée est une proposition mathématique simple , c'est-à-dire ne se déduisant pas d'autres propositions par les procédés que nous avons étudiés . En somme , nous connaissons la forme superficielle de la mathématique , mais nous sommes fort loin de connaître sa constitution interne .

Dans ce qui suit , nous abandonnerons l'exemple qui nous avait servi de fil conducteur ; pour des raisons que nous verrons plus loin, il risquerait à présent d'obscurcir certaines idées essentielles . C'est également pour des raisons de clarté que nous rejetons à un paragraphe ultérieur (ch.II,§ 5) l'exposé des considérations qui nous ont conduits à adopter le système logique que nous allons développer ; nous y renvoyons le lecteur , déjà mathématicien , que ce système dérouterait de ses habitudes de pensée, ou celui que choquerait le caractère dogmatique de ce qui va suivre , et qui serait tenté de croire purement arbitraires les règles que nous poserons .

Les objets mathématiques . Il est à peine besoin de dire que les objets que considère le mathématicien n'ont aucun caractère sensible . On dit souvent que ce sont des abstractions , en impliquant par là qu'ils résultent de l'action , sur les données de l'expérience , d'un certain processus mental . Au point de vue du mathématicien pur , auquel nous nous plaçons , c'est là une question qui ne se pose pas ; pour nous , les objets mathématiques doivent simplement être pensés comme les pièces d'un jeu , que l'on manoeuvre suivant des règles précises . Nous ne cherchons pas à savoir ce qu'ils sont "réellement" , ni d'où ils proviennent ; la seule chose essentielle est que chaque objet mathématique doit avoir un nom individuel , qui n'appartienne qu'à lui seul ; c'est en effet le seul point de repère qui permette au mathématicien d'être sûr qu'il considère toujours le même objet. On peut dire en somme que tout l'être d'un objet mathématique réside dans son nom .

Par le "nom" d'un objet , nous entendons non seulement un substantif tiré de la langue française (ou fabriqué avec des racines gréco-latines) , mais plus généralement toute combinaison de signes graphiques (lettres de divers alphabets , mots , chiffres , et signes n'ayant aucun sens en dehors des mathématiques) disposés d'une certaine manière les uns par rapport aux autres . Rien n'empêche de donner plusieurs noms synonymes à un même objet (en prévenant naturellement le lecteur) : par exemple , $15!$ et $\Gamma(16)$ sont synonymes ; de même "e" et "la base des logarithmes népériens" .

Les objets mathématiques (comme les pièces du jeu d'échecs , par exemple) sont de plusieurs espèces ; il va sans dire qu'un objet ne peut appartenir qu'à une seule espèce .

Parmi les espèces que nous considérons comme fondamentales , il y a d'abord celle des types , qu'on peut considérer comme les objets primitifs de la mathématique . En second lieu , à chaque type est associée une nouvelle espèce d'objets , dits arguments du type considéré . Viennent enfin les objets qui sont les éléments constitutifs du langage mathématique , à savoir les relations , dont les propositions sont des cas particuliers , comme nous le verrons tout à l'heure .

Au début d'un raisonnement , le mathématicien spécifie les types qui vont y intervenir . Pour chaque type, il a le droit d'introduire (au début ou au cours du raisonnement) autant d'arguments de ce type qu'il le désire , à condition , bien entendu , de donner à chaque nouvel argument un nom distinct des précédents (ce seront souvent des lettres prises parmi les dernières de l'alphabet , éventuellement affectées d'indices ou d'accents) ; pour éviter toute confusion , il est nécessaire , de plus , de s'astreindre ici à ne donner <u>qu'un seul nom</u> à chaque argument (contrairement à ce qui a lieu pour les autres objets mathématiques , où nous nous sommes donné le droit d'utiliser des synonymes) .

Ce sont ces arguments enfin que le mathématicien introduit ensuite dans les relations , à partir desquelles il forme la chaîne des propositions de son raisonnement .

C'est ce dernier point qui est évidemment essentiel dans les opérations mathématiques , et ce paragraphe et les suivants n'ont d'autre but que d'expliquer justement suivant quelles règles on peut former des relations et des propositions ; il nous est donc impossible pour le moment de dire de façon précise ce qu'<u>est</u> une relation ; il nous suffit d'ailleurs de savoir que c'est une certaine combinaison de symboles où figurent , à certains endroits , un ou plusieurs arguments des types considérés ; on peut dire en outre que si , en dehors des arguments, ne figurent que des <u>mots</u> dans une relation , celle-ci deviendrait une phrase grammaticalement correcte en remplaçant chaque argument par un <u>substantif</u> .

<u>L'emploi des symboles dans les raisonnements généraux</u> .

Avant de poursuivre , il nous faut insister un peu sur un emploi particulier des symboles (lettres ou signes quelconques) en mathématique , et spécialement dans ce qui va suivre .

Un premier emploi qui ne nécessite aucun éclaircissement est celui que nous avons signalé plus haut , où les symboles sont les <u>noms</u> d'objets <u>déterminés</u> . Tout au plus est-il bon d'ajouter que souvent un symbole n'est pris comme nom d'un objet que de façon temporaire , au cours d'un raisonnement , et comme synonyme du nom usuel de l'objet ; c'est ce qu'on fait souvent lorsque ce dernier est une combinaison complexe de symboles , et qu'il est appelé à revenir à plusieurs reprises dans le raisonnement .

On dira par exemple : soit T le type des nombres rationnels ; ou : soit R la relation "x est inférieur à y" ; étant entendu que les lettres R et T ne garderont le sens qu'on leur attribue ainsi que pendant le raisonnement pour lequel on les introduit .

L'emploi des symboles sur lequel nous voulons attirer l'attention est celui qui a trait aux raisonnements dits généraux . Nous avons vu par exemple au § 1 que "p ou q" est considérée comme une proposition lorsqu'on y remplace les lettres p et q par deux propositions quelconques . Dans cette combinaison de signes , p et q ne sont donc pas les symboles de propositions déterminées , mais de n'importe quels objets de l'espèce des propositions . A proprement parler , "p ou q" n'est donc pas non plus une proposition , mais plutôt un schéma de proposition , qui ne devient une proposition que lorsque p et q sont remplacées elles-mêmes par des propositions. On convient pourtant de dire encore , par un abus de langage , que "p ou q" est une proposition ; celà ne peut entraîner aucun inconvénient , lorsqu'on précise ce que signifient p et q .

Dans tout ce paragraphe , et très souvent par la suite , les lettres que nous introduirons joueront un rôle de cette nature ; ce ne seront pas les symboles d'objets déterminés , mais d'objets indéterminés d'une espèce déterminée . Lorsqu'on dira qu'une phrase où figurent certaines de ces lettres est une relation , ou une proposition , ou une proposition vraie , on entendra dire qu'elle devient une relation (resp. une proposition , ou une proposition vraie) chaque fois qu'on y remplace chacune de ces lettres par un même objet déterminé de l'espèce correspondante , à chaque endroit où figure cette lettre .

On peut comparer les raisonnements où se trouvent des phrases de ce genre , à un texte de loi , qui ne concerne jamais des individus nommément désignés , mais prescrit l'action de la
/quelconque justice devant un cas/d'une espèce déterminée . Comme les si-

 6

tuations que visent les législateurs sont rarement très complexes , ils peuvent se passer de l'emploi des lettres en utilisant des périphrases ; l'obscurité qui en résulte d'ailleurs parfois suffit à faire comprendre pourquoi l'emploi des lettres est indispensable au mathématicien , dont la clarté doit être le principal souci .

Il faut naturellement avoir soin , lorsqu'on utilise les lettres et symboles dans ce sens , de prévenir le lecteur en disant par exemple "T étant un type quelconque ,..." , ou "soient R et S deux relations quelconques ;...." . Lorsque nous disions plus haut qu'au début d'un raisonnement , le mathématicien spécifie les types qui vont y intervenir , celà signifie donc , ou bien qu'il nomme ces types , ou bien qu'il introduit des lettres dont il précise qu'elles représentent des types quelconques .

Dans ce qui suit , nous utiliserons la notation $R\{x,y,z,u\}$ pour désigner une relation (déterminée ou non) , qui peut contenir les arguments x,y,z,u , mais aucun autre ; celà ne signifie donc pas qu'elle contienne tous ces arguments .

La formation de nouvelles relations à partir de relations données . Le mathématicien dispose d'un certain nombre de procédés qui lui permettent de formuler de nouvelles relations à partir de relations données , et que nous allons maintenant examiner .

Tout d'abord , si R est une relation quelconque , x un argument figurant dans R , on obtient une nouvelle relation R' en remplaçant x partout où il est écrit dans R , par un nouvel argument x' de même type que x (substitution d'un argument à un autre) ; on observera que x' n'est soumis à aucune autre restriction , et en particulier peut être un argument figurant déjà dans R . Si la première relation était notée $R\{x,x',y,z\}$ par exemple , la seconde se notera $R\{x',x',y,z\}$.

En second lieu , étant donnée une relation quelconque R , on peut former une nouvelle relation $\overline{R}$, qui est dite la négation de R ; on remarquera que nous disons "on peut former" , et non "la relation formée de la manière suivante est la négation de R " (c'est ce que nous avons déjà fait à propos des propositions au § 1) ; expliquer *comment* on forme la négation d'une relation ne sera possible que lorsque nous serons en possession complète de nos règles .

Soient maintenant R et S deux relations quelconques . La combinaison "R et S " est une nouvelle relation , dite *conjonction* de R et S ; la combinaison "R ou S " est également une nouvelle relation , dite *disjonction* de R et S .

Les opérations que nous venons de définir obéissent aux règles suivantes :

La négation d'une relation doit être définie de telle sorte que , si R est une relation quelconque , la négation de $\overline{R}$ soit R (règle de la double négation) .

R étant une relation quelconque , x un argument figurant dans R , R' la relation obtenue en remplaçant partout dans R l'argument x par un argument x' de même type , la négation de R' s'obtient en remplaçant partout x par x' dans $\overline{R}$.

La négation de "R et S " est "$\overline{R}$ ou $\overline{S}$ " ; celle de "R ou S " (en accord avec la règle de la double négation) est "$\overline{R}$ et $\overline{S}$ " .

Les relations "R et R " , "R ou R " sont considérées comme *synonymes* de R .

Enfin , on a les trois règles de *commutativité* , *associativité* , et *distributivité* :

a) "S et R " est synonyme de "R et S " ; "S ou R " est synonyme de "R ou S " .

b) "(R et S) et T" est synonyme de "R et (S et T)" , et "R et S et T " est par définition synonyme de ces deux relations ; de même , les trois relations "(R ou S) ou T " , "R ou (S ou T)" , "R ou S ou T " sont synonymes .

c) "(R ou S) et T " est synonyme de "(R et T) ou (S et T)" ; de même , "(R et S) ou T " est synonyme de "(R ou T) et (S ou T)" .

La combinaison "si R , S " est par définition synonyme de "$\bar{R}$ ou S ".
Mais (contrairement à ce qui a lieu pour les propositions) , il n'en est pas de même des combinaisons "R $\rightarrow$ S " , "R entraîne S " , auxquelles nous allons donner un peu plus loin un sens tout différent , lorsque R et S sont des relations , mais non des propositions .

Il nous reste encore à introduire deux opérations sur les relations qui nous permettront de définir les <u>propositions</u> mathématiques .

Ces opérations s'expriment par les mots "quel que soit x" ou "il existe x tel que" placés devant une relation ; autrement dit , si R est une relation quelconque , x un argument quelconque , les combinaisons "quel que soit x , R " et "il existe x tel que R " sont deux nouvelles relations . Dans l'emploi qui est fait ici des termes "quel que soit" et "il existe" , il convient , pour bien saisir la nature des raisonnements où ils interviennent , de <u>vider ces mots de tout contenu intuitif</u> , et de les considérer comme de simples assemblages de signes indiquant seulement qu'on forme de nouvelles relations suivant des procédés bien déterminés , dont l'usage n'est subordonné qu'aux règles qu'on posera plus loin ; on pourrait (comme font les logiciens) remplacer ces mots par des symboles sans signification dans le langage ordinaire .

> Lorsqu'on ne prend pas la précaution de séparer des autres (par des parenthèses ou des guillemets) la relation sur laquelle porte un "quel que soit" ou un "il existe" , il est entendu que cette relation est formée de tout ce qui suit ces mots .

Relativement à ces opérations , nous signalerons d'abord les règles suivantes :

a) Lorsque plusieurs "quel que soit" portant sur plusieurs arguments sont <u>consécutifs</u> dans une relation , on a une relation synonyme en les remplaçant par "quels que soient" suivi de tous ces arguments , <u>écrits dans un ordre quelconque</u> ; on a une règle analogue lorsque plusieurs "il existe" sont consécutifs .

Par exemple , chacune des relations

"quel que soit x , (quel que soit y , R)"

"quel que soit y , (quel que soit x , R)"

est synonyme de

"quels que soient x , y , R "

De même , la relation

"quel que soit x , (il existe u tel que (il existe v tel que R))"

est synonyme de

"quel que soit x , (il existe u,v, tels que R)"

b) La négation de "quel que soit x , R " est "il existe x tel que $\overline{R}$ " , et (en accord avec la règle de la double négation) , la négation de "il existe x tel que R " est "quel que soit x , $\overline{\overline{R}}$ " .

Les deux opérations précédentes amènent à faire une distinction essentielle entre les arguments qui figurent dans une relation .

Lorsque , dans une relation , un argument x ne figure que dans des parties de cette relation ~~auxlesquellesporte~~ sur lesquelles porte un "quel que soit x" ou un ~~XXXX~~ "il existe x tel que" , on dit que x est un argument *neutralisé* de cette relation ; un argument qui figure dans une relation et qui n'est pas neutralisé , est dit argument *effectif* .

Pour opérer correctement cette distinction , il importe d'observer que les phrases par lesquelles on introduit un objet , ou une notation , dans un raisonnement ,(telles , par exemple que "soit x un argument du type des entiers") *ne sont pas des relations* et ne peuvent faire partie d'aucune relation .

A l'aide de ces notions , nous pouvons d'abord formuler la *règle de redoublement* suivante :

Si R est une relation quelconque , et x un argument qui *n'est pas effectif* dans R , les relations "quel que soit x , R " et "il existe x tel que R " sont synonymes de R .

En second lieu , nous pouvons dire à présent ce que nous entendons par *proposition mathématique* :

Une proposition est une relation où ne figure aucun argument effectif, ou toute phrase qu'on convient de considérer comme synonyme d'une relation de cette nature. Autrement dit, ce n'est qu'aux objets mathématiques qui répondent à cette définition que nous nous donnons le droit d'appliquer le qualificatif "vrai", et les règles énoncées au § 1.

On donnera également le nom particulier de propriété à une relation quelconque où ne figurera qu'un seul argument effectif.

Nous pouvons maintenant définir les signes "$\rightarrow$" et "$\rightleftarrows$" pour les relations :

R et S étant deux relations quelconques, "R $\rightarrow$ S" (ou ~~son~~ ses synonymes "R entraîne S", "S est une conséquence de R") est par définition la relation "$\bar{R}$ ou S" dont chacun des arguments est neutralisé par un "quel que soit" ; autrement dit, si par exemple les arguments figurant dans R ou S sont x,y,z,u,v, "R $\rightarrow$ S" est synonyme de la proposition

"quels que soient x,y,z,u,v, $\bar{R}$ ou S"

Il faut donc bien se garder de confondre les relations "si R, S" et "R $\rightarrow$ S" ; lorsque R et S sont des propositions, elles sont synonymes, en vertu de la règle de redoublement (ce qui est donc bien en accord avec les définitions du § 1), mais elles ne peuvent l'être que dans ce cas ; car, s'il y a des arguments effectifs dans R ou dans S, ce sont encore des arguments effectifs dans "si R, S", alors que "R $\rightarrow$ S" ne contient jamais d'argument effectif.

"R $\rightleftarrows$ S" (ou son synonyme "R est équivalent à S") est par définition la proposition "(R $\rightarrow$ S) et (S $\rightarrow$ R)" ; d'après la commutativité de l'opération "et", les propositions "R $\rightleftarrows$ S" et "S $\rightleftarrows$ R" sont synonymes.

On notera parfois par "R $\not\rightarrow$ S" et "R $\not\rightleftarrows$ S" les négations de "R $\rightarrow$ S" et de "R $\rightleftarrows$ S" respectivement.

---

(1) Il ne faut pas croire que lorsque "R $\rightleftarrows$ S" est vraie, les arguments effectifs dans R soient les mêmes que les arguments effectifs dans S ; nous verrons par la suite de nombreux exemples du contraire

On dit souvent que "$S \to R$ " est la proposition <u>réciproque</u> de "$R \to S$ " ; il faut bien entendu se garder de la confusion grossière entre "$R \not\to S$ " et "$S \to R$ " .

"$\bar{R}$ ou S " et "S ou $\bar{R}$ " étant synonymes, il en est de même de "$R \to S$ " et "$\bar{S} \to \bar{R}$ " , d'après la règle de la double négation ; de même , "$R \rightleftarrows S$ " et "$\bar{R} \rightleftarrows \bar{S}$ " sont synonymes ; ce sont là deux remarques fort utiles , et nous avons déjà dit au § 1 le parti qu'on en peut tirer lorsque R et S sont des propositions .

Introduisons enfin une notion qui abrègera les raisonnements dans ce qui suit : nous dirons qu'une relation R est <u>partout vraie</u> (ou encore est une <u>identité</u>) si , en neutralisant chasun des arguments qui figurent dans R par un "quel que soit" , on obtient une <u>proposition vraie</u>; autrement dit , les arguments qui figurent dans R étant par exemple x,y,z , si la proposition "quels que soient x,y,z, R " est vraie . Par exemple , dire que "$R \to S$ " est vraie est la même chose que dire que la relation "$\bar{R}$ ou S " est partout vraie .

On dira de même que R est <u>partout fausse</u> , ou <u>nulle part vraie</u> , si $\bar{R}$ est partout vraie .

<u>Les règles générales du calcul des relations</u> .

Les règles que nous allons maintenant énoncer , et que nous appelons <u>règles générales du calcul des relations</u> , se présentent sous une autre forme que celles que nous avons données précédemment : elles consistent à tenir pour <u>vraies</u> certaines propositions , formées à partir de relations <u>quelconques</u> suivant un schéma déterminé , dans lequel on applique les opérations fondamentales qui viennent d'être énumérées (nous nous bornerons d'ailleurs à énoncer ces propositions , en sous-entendant toujours qu'elles sont vraies , suivant la pratique courante des mathématiciens) .

Toutes ces règles ne sont pas indépendantes , et nous verrons qu'on peut toutes les déduire des <u>dix</u> premières que nous énoncerons (et que nous numéroterons en chiffres romains pour les distinguer) , par l'application des deux règles fondamentales (règle du syllogisme , et règle: si p est vrai et si q est vrai , "p et q" est vrai) donnée au § 1 . Il se peut d'ailleurs qu'on puisse même les déduire d'un nombre moindre de règles primitives ; c'est là une question que nou n'aborderons pas , car elle intéresse surtout les logiciens (pour qui toute réduction dans le nombre de règles d'un système rend d'au tant moins difficile les tentatives de démonstration de la non-contradiction de ce système) . Pour l'usage qui en sera fait , il ne sera même pas indispensable de savoir que ces règles se réduisent à dix d'entre elles , et le lecteur que la question n'intéresse pas particulièrement pourra se dispenser d'en lire les démonstrations .

Enfin , la plupart des règles ci-dessous s'énoncent sous la forme "$A \rightarrow B$ " ou "$A \rightleftarrows B$ " , A et B étant des relations complexes formées à partir de relations quelconques R , S , T , par l'application des opérations fondamentales ; ces règles peuvent donc aussi s'énoncer "$\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ " (resp. "$\overline{A} \rightleftarrows \overline{B}$ ") , et , dans ce nouvel énoncé , $\overline{A}$ et $\overline{B}$ s'obtiennent en suivant le schéma de formation de A et B , mai en y remplaçant R , S , T par leurs négations respectives , et en remplaçant partout "et" par "ou" (et vice-versa) , et "quel que soit" par "il existe" (et vice-versa) . Si maintenant on remarque que $\overline{R}$, $\overline{S}$, $\overline{T}$ représentent encore des relations quelconque on peut , dans $\overline{A}$ et $\overline{B}$, leur substituer d'autres lettres ayant aussi cette signification , et en particulier R , S , T , respectivement nous aurons donc , pour chacune de ces règles, deux formes associée qui se transforment en deux propositions synonymes lorsqu'on rempla ce , dans l'une , les lettres R , S , T par des relations détermi- nées , et dans l'autre , les lettres R , S , T par les négations respectives de ces relations .

I. R étant une relation quelconque

$$"R \rightarrow R"$$

Cette règle peut encore s'exprimer en disant que "R ou $\bar{R}$" est une relation partout vraie ; sa forme associée lui est identique. Il en résulte immédiatement que "$R \rightleftarrows R$" est aussi une proposition vraie

II . R et S étant des relations quelconques

"R et S" $\rightarrow$ "R"

"R" $\rightarrow$ "R ou S" (forme associée)

Une autre manière d'énoncer cette règle est de dire que "R ou $\bar{R}$ ou S" est une relation partout vraie.

III . R, S, T étant des relations quelconques

("$R \rightarrow S$" et "$S \rightarrow T$") $\rightarrow$ ($R \rightarrow T$)

La forme associée de cette règle : ($R \not\rightarrow T$) $\rightarrow$ ("$R \not\rightarrow S$" ou "$S \not\rightarrow T$") est dénuée d'intérêt.

IV . Soit R une relation quelconque, x un argument figurant dans R, R' la relation obtenue en remplaçant, dans R, x par un autre argument x' de même type que x et distinct des autres arguments de R :

"quel que soit x, R" $\rightleftarrows$ "quel que soit x', R'"

"il existe x tel que R" $\rightleftarrows$ "il existe x' tel que R'" (forme associée).

V . R étant une relation quelconque, x un argument quelconque,

"quel que soit x, R" $\rightarrow$ "il existe x tel que R"

La forme associée de cette règle lui est identique.

VI . R étant une relation quelconque, x et y deux arguments quelconques

"il existe x tel que, quel que soit y, R" $\rightarrow$

$\rightarrow$ "quel que soit y, il existe x tel que R".

La forme associée de cette règle lui est identique.

VII . R et S étant deux relations quelconques, x un argument quelconque

"quel que soit x, (R et S)" $\rightleftarrows$ "(quel que soit x, R) et (quel que soit x, S)".

"il existe x tel que (R ou S)" $\rightleftarrows$ "(il existe x tel que R) ou (il existe x tel que S)" (forme associée).

VIII . <u>R et S étant deux relations quelconques , x un argument quelconque</u>

"il existe x tel que (R et S)" $\rightarrow$ "(il existe x tel que R) et (il existe x tel que S)"

(et la règle du syllogisme

"(quel que soit x, R) ou (quel que soit x , S)" $\rightarrow$ "quel que soit x , (R ou S)" (forme associée)

IX . <u>R et S étant deux relations quelconques , x un argument non effectif dans S</u>

"il existe x tel que (R et S)" $\rightleftarrows$ "(il existe x tel que R) et S "

"quel que soit x , (R ou S)" $\rightleftarrows$ "(quel que soit x , R) ou S " (forme associée) .

X . <u>R et S étant deux</u> ~~xxx~~ <u>relations quelconques , x un argument quelconque</u>

"quel que soit x , (R ou S)" $\rightarrow$ "(quel que soit x , R) ou (il existe x tel que S)"

"(quel que soit x , R) et (il existe x tel que S)" $\rightarrow$ "il existe x tel que (R et S)" (forme associée) .

11 . <u>R et S étant deux relations quelconques , x un argument quelconque</u>

$(R \rightarrow S) \rightarrow$ ("quel que soit x , R" $\rightarrow$ "quel que soit x , S")

$(R \rightarrow S) \rightarrow$ ("il existe x tel que R" $\rightarrow$ "il existe x tel que S")

<u>Démonstration</u> . La seconde proposition est synonyme de celle qu'on obtient en remplaçant , dans la première , R par $\overline{S}$ et S par $\overline{R}$; il suffit donc de démontrer la première .

Supposons d'abord que x soit le <u>seul</u> argument effectif de R et de S ; alors "$R \rightarrow S$ " est synonyme de "quel que soit x , $\overline{R}$ ou S " , donc (règle X)

$(R \rightarrow S) \rightarrow$ ("il existe x tel que $\overline{R}$ " ou "quel que soit x , S ")

c'est-à-dire

$(R \rightarrow S) \rightarrow$ ("quel que soit x , R " ou "quel que soit x , S ")

15

ce qui , dans ce cas , est la proposition à démontrer .

Si maintenant il y a <u>deux</u> arguments effectifs x , y , dans R et S , "R→S " est synonyme de "quel que soit y , (quel que soit x , $\overline{R}$ ou S)" ; or (règle X)

(quel que soit x , $\overline{R}$ ou S)→ ("il existe x tel que $\overline{R}$ " ou "quel que soit x , S ")

Mais les relations que nous venons d'écrire ne contiennent que y comme argument effectif ; on a donc , d'après ce qui précède / et la règle du syllogisme

(quel que soit y , quel que soit x , $\overline{R}$ ou S)→(quel que soit y , "(il existe x tel que $\overline{R}$) ou "(quel que soit x , S)")

ce qui , dans ce cas , est la proposition à démontrer . On procède ainsi de proche en proche , suivant le nombre d'arguments effectifs dans R et dans S .

12 . <u>Les règles IV à 11 subsistent sans changement lorsqu'on y remplace les "quel que soit" et les "il existe" portant sur un seul argument par ces mêmes opérations portant sur plusieurs arguments</u> .

<u>Démonstration</u> . Les démonstrations sont analogues pour chacune des règles envisagées ; donnons-la par exemple pour la règle VII .

x et y étant deux arguments quelconques , montrons d'abord que

"quels que soient x , y , (R et S)"→"(quels que soient x,y, R) et (quels que soient x,y, S)" .

On a (règle VII)

"quel que soit y , (R et S)"→"(quel que soit y , R) et (quel que soit y , S)" .

Donc (règle 11 et syllogisme)

"quels que soient x,y,(R et S)"→"quel que soit x , ("quel que soit y , R " et "quel que soit y , S ")"

Mais (règle VII)

"quel que soit x ,("quel que soit y , R " et "quel que soit y , S ")"→"(quels que soient x ,y, R) et "(quels que soient x,y, S)"

D'où la proposition , par application de la règle III et des deux règles de la déduction (syllogisme et conjonction des propositions vraies) . On montre de la même façon que / (règle 12)

"(quels que soient x,y, R) et (quels que soient x,y, S)" →

→ "quels que soient x,y, (R et S)"

On opérera ainsi de proche en proche , suivant le nombre d'arguments figurant dans les "quel que soit" .

13 . Si R est une relation partout vraie , et si S est une relation partout vraie , "R et S " est une relation partout vraie .

Démonstration . Soient par exemple x,y,z, les arguments effectifs qui figurent dans R ou dans S ; les propositions

"quels que soient x,y,z, R "

"quels que soient x,y,z, S "

sont vraies par hypothèse ; il en est donc de même de "(quels que soient x,y,z, R) et (quels que soient x,y,z, S)" Mais (règles VII et 12) , cette proposition entraîne

"quels que soient x,y,z, (R et S)"

Donc (syllogisme) , cette dernière proposition est vraie , autrement dit , "R et S " est une relation ~~toujours~~ partout vraie .

14 . Si R est une relation quelconque , S une relation partout vraie

"R et S " $\rightleftarrows$ "R"

Si R est une relation quelconque , S une relation partout fausse,

"R ou S " $\rightleftarrows$ "R"   (forme associée)

Démonstration . Il n'y a à démontrer , d'après la règle II , que la proposition "R" $\rightarrow$ "R et S " , lorsque S est partout vraie ; c'est à dire que la relation "$\overline{R}$ ou (R et S)" est partout vraie . Or cette relation est synonyme de "(R ou $\overline{R}$) et ($\overline{R}$ ou S)" ; mais (R ou $\overline{R}$) est partout vraie (règle I) , et "S" $\rightarrow$ "$\overline{R}$ ou S" (règle II) ; comme S est partout vraie , il en est de même de "$\overline{R}$ ou S " (règles 11 et 12 , et syllogisme) , d'où la proposition , d'après la règle 13 .

15 . R , S , T , étant des relations quelconques

($R \rightarrow S$) $\rightarrow$ ("R et T" $\rightarrow$ "S et T")

($R \rightarrow S$) $\rightarrow$ ("R ou T" $\rightarrow$ "S ou T")

Démonstration . La seconde proposition étant synonyme de

($\overline{S} \rightarrow \overline{R}$) $\rightarrow$ ("$\overline{S}$ et $\overline{T}$" $\rightarrow$ "$\overline{R}$ et $\overline{T}$")

il suffit de démontrer la première . Or , "$\overline{R}$ ou S" $\rightarrow$ "$\overline{R}$ ou S ou $\overline{T}$" (règle II) , et, comme "$\overline{R}$ ou T ou $\overline{T}$" est ~~toujours~~ partout vraie , "$\overline{R}$ ou S ou $\overline{T}$" $\rightarrow$ "($\overline{R}$ ou S ou $\overline{T}$) et ($\overline{R}$ ou T ou $\overline{T}$)"/ (règle 14) ; donc (règle III et distributivité) , "$\overline{R}$ ou S" $\rightarrow$ "($\overline{R}$ ou

$\overline{T}$)ou (S et T)" ; par suite , si les arguments effectifs figurant dans R , S ou T sont par exemple x,y,z, l'application des règles 11 et 12 , et de la règle du syllogisme , montre que

"quels que soient x,y,z, ($\overline{R}$ ou S)" → "quels que soient x,y,z; ("$\overline{R}$ ou $\overline{T}$" ou "S et T")"

ce qui est précisément la proposition à démontrer .

16 . <u>R , S , T étant des relations quelconques</u>

("si R , S" et "si S , T")→(si R , T)

<u>Démonstration</u> . Il faut montrer que

$\overline{\text{"("}\overline{R}\text{ ou S" et "}\overline{S}\text{ ou T")}}$ ou ($\overline{R}$ ou T)"

est une relation partout vraie ; or , elle est synonyme de

"(R et $\overline{S}$) ou (S et $\overline{T}$) ou ($\overline{R}$ ou T)"

et aussi (distributivité) de

"(R ou $\overline{R}$ ou S ou T) et (R ou $\overline{R}$ ou T ou $\overline{T}$) et (S ou $\overline{S}$ ou $\overline{R}$ ou T) et (T ou $\overline{T}$ ou $\overline{R}$ ou $\overline{S}$)"

Or , dans cette relation complexe , chacune des relations entre parenthèses est partout vraie (règle II) ; il en est donc de même de leur conjonction (règle 13) .

17 . <u>R ,S , T , étant des relations quelconques</u>

("R⇄S" et "S⇄T")→(R⇄T)

<u>Démonstration</u> . D'après la règle III

("R→S" et "S→T") →(R→T)

("T→S" et "S→R") →(T→R)

Donc (règle 15, règle III et syllogisme)

("R→S" et "S→T" et "T→S" et "S→R")→("R→T" et "T→R")

ce qui est la proposition à démontrer .

18

18 . Soient R et S deux relations quelconques ; soit A une relation complexe , formée à partir ~~des relations~~ de R (et éventuellement d'autres relations) par application des opérations fondamentales suivant un schéma quelconque ; soit B la relation obtenue en remplaçant partout R par S dans le schéma de formation de A ; dans ces conditions ,

$$(R \rightleftarrows S) \rightarrow (A \rightleftarrows B)$$

Démonstration . Il suffit de montrer que chacune des opérations fondamentales , appliquée à des relations équivalentes , donne des relations équivalentes .

Tout d'abord , soit R' la relation obtenue en remplaçant dans R un argument x par un argument de même type x', et S' la relation obtenue de même en remplaçant x par x' dans S ; d'après la règle IV

"quel que soit x , $\bar{R}$ ou S" $\rightarrow$ "quel que soit x' , $\bar{R}'$ ou S'"

donc (règles 11 et 12 et syllogisme)

$$(R \rightarrow S) \rightarrow (R' \rightarrow S')$$

et de même $\qquad (S \rightarrow R) \rightarrow (S' \rightarrow R')$

donc (règle 15 , règle III et syllogisme)

$$(R \rightleftarrows S) \rightarrow (R' \rightleftarrows S')$$

En second lieu , nous savons que $(R \rightleftarrows S)$ et $(\bar{R} \rightleftarrows \bar{S})$ sont synonymes ; donc (règle I)

$$(R \rightleftarrows S) \rightarrow (\bar{R} \rightleftarrows \bar{S})$$

Soit T une relation quelconque ; d'après la règle 15

~~(RXXS)XX(R~~

$$(R \rightarrow S) \rightarrow (\text{"R et T"} \rightarrow \text{"S et T"})$$

$$(S \rightarrow R) \rightarrow (\text{"S et T"} \rightarrow \text{"R et T"})$$

donc (règles 15 et III et syllogisme)

$$(R \rightleftarrows S) \rightarrow (\text{"R et T"} \rightleftarrows \text{"S et T"})$$

Même raisonnement pour l'opération "ou" .

Enfin (règle 11)

$$(R \rightarrow S) \rightarrow (\text{"quel que soit x , R"} \rightarrow \text{"quel que soit x , S"})$$

$$(S \rightarrow R) \rightarrow (\text{"quel que soit x , S"} \rightarrow \text{"quel que soit x , R"})$$

donc (règles 15 et III et syllogisme)

$$(R \rightleftarrows S) \rightarrow (\text{"quel que soit x , R"} \rightleftarrows \text{"quel que soit x , S"})$$

Même raisonnement pour l'opération "il existe" , ce qui achève de démontrer la règle .

Remarques . 1) La règle 18 montre qu'une fois qu'on a démontré que deux relations R , S , sont équivalentes , on peut les traiter comme si leurs énoncés étaient des énoncés synonymes d'une même relation , puisqu'en remplaçant partout R par S on obtient toujours des relations équivalentes , de même qu'en remplaçant partout l'énoncé d'une relation par un énoncé synonyme , on obtient toujours des énoncés synonymes .

2) Le lecteur remarquera que , si on excepte les deux règles de la déduction (syllogisme , et conjonction des propositions vraies) toutes les règles concernant les combinaisons de propositions , énoncées au § 1 , sont des cas particuliers des règles générales du calcul des relations (tout au moins si on ne considère comme des propositions mathématiques que les objets auxquels nous avons donné ce nom).

20

CHAPITRE II .

ENSEMBLES ET FONCTIONS .

Nous nous trouvons à présent , en ce qui concerne les relations , dans une situation analogue à celle où nous étions à la fin du § 1 du ch. I , vis-à-vis des propositions . A partir de relations données nous savons former de nouvelles relations , et énoncer des propositions vraies ; mais nous ne pouvons encore faire fonctionner l'appareil logique que nous avons monté à cet effet , faute d'avoir énoncé jusqu'ici une seule relation primitive , c'est-à-dire qui ne se déduise pas d'autres relations à l'aide des procédés du chapitre précédent .

C'est le but essentiel de ce chapitre de nommer les relations primitives de la mathématique , et d'énoncer les règles particulières auxquelles elles obéissent . Chemin faisant , (et précisément pour définir certaines relations primitives) , nous rencontrerons de nouvelles opérations mathématiques fondamentales , qui permettent , lorsqu'on a nommé des types d'en nommer de nouveaux , à partir de ceux-là ; opérations qu'on peut donc comparer à celles que nous avons introduites pour les relations au ch. I , et qu'on appelle procédés de formation des types.

Pour avoir terminé l'exposé de la "règle du jeu" de la mathématique , il nous restera encore à nommer des types primitifs (c'est-à-dire qui ne proviennent pas de l'application à d'autres types des procédés de formation ~~des types~~ , dont nous venons de parler) ; c'est ce que nous ferons , dans le chapitre suivant.

§ 1 . La relation d'égalité et les relations fonctionnelles .

La relation d'égalité . Soit T un type quelconque , x et y deux arguments du type T . Nous considérons la combinaison "x=y" (ou ses synonymes "x est égal à y" , "x égale y") comme une relation , dite relation d'égalité entre les arguments x , y , et dont l'emploi est soumis aux quatre règles suivantes (où il est toujours sous-entendu que les propositions énoncées sont vraies) :

E-1 . Quel que soit x , x=x (autrement dit , x=x est une propriété partout vraie).

E-2 . "x=y" $\rightleftarrows$ "y=x" .

E-3 . ("x=y" et "y=z") $\rightarrow$ (x=z) .

E-4 . Soit R une relation quelconque , contenant entre autres un argument u du type T , et soient R_x et R_y les relations qu'on obtient en substituant respectivement à u les arguments x et y de type T :

$$\text{"}x=y\text{"} \rightarrow \text{"si } R_x \text{ , } R_y\text{"}$$

A propos de cette dernière règle , il importe de remarquer que x et y peuvent être des arguments figurant déjà dans R .

Proposition 1 . Avec les mêmes notations que dans la règle E-4 ,

$$\text{"}R_x \text{ et } x=y\text{"} \rightarrow \text{"}R_y\text{"}$$

En effet , la règle E-4 s'écrit encore "x=y" $\rightarrow$ "$\overline{R}_x$ ou R_y" ; donc (règle 15)

$$\text{"}R_x \text{ et } x=y\text{"} \rightarrow \text{"}R_x \text{ et } (\overline{R}_x \text{ ou } R_y)\text{"} \rightleftarrows \text{"}(R_x \text{ et } \overline{R}_x) \text{ ou } (R_x \text{ et } R_y)\text{"}$$

Mais (R_x et $\overline{R}_x$) est une relation partout fausse ; donc (règle 14)

$$\text{"}R_x \text{ et } x=y\text{"} \rightarrow \text{"}R_x \text{ et } R_y\text{"} \rightarrow \text{"}R_y\text{"}$$

ce qui démontre la proposition .

La négation de "x=y" est par définition "x≠y" (ou la relation synonyme "x est différent de y") ; en accord avec la règle de la double négation , la négation de "x≠y" est "x=y" .

Remarque . On remarquera que nous utilisons le même signe "=" pour écrire la relation d'égalité dans deux types différents. C'est là évidemment un abus de langage , car la relation d'égalité devrait , en toute rigueur , ~~xxxxxxxx~~ avoir un nom différent pour chaque type où on la considère ; en fait , cet abus n'entraînera pas de confusion , pourvu que , dans "x=y" , on prenne toujours pour x et y des arguments de même type .

<u>Les relations fonctionnelles</u> . La relation d'égalité permet de caractériser certaines relations dont l'importance est capitale en mathématique , les <u>relations fonctionnelles</u> .

Soit R une relation contenant un argument u , et R' la relation obtenue en remplaçant , dans R , u par un argument u' de même type que u et distinct de tous les autres arguments de R ; par définition

"il existe au plus un u tel que R"

est une relation synonyme de

"quels que soient u,u', $\overline{R}$ ou $\overline{R'}$ ou u=u' "

La relation

"il existe un u et un seul tel que R"

est de même,par définition, synonyme de

"(il existe u tel que R) et (il existe au plus un u tel que R)"

Ici encore , pour bien comprendre les raisonnements qui suivent , il importe de <u>vider de leur contenu intuitif</u> les mots "il existe au plus un u" et "il existe un u et un seul" , et de ne leur attribuer qu'un rôle de symboles d'opérations à effectuer sur la relation R et la relation d'égalité , d'après les définitions précédentes .

Lorsque la relation "il existe un u et un seul tel que R" est <u>partout vraie</u> , nous dirons que R est <u>une relation fonctionnelle en u</u>.

D'après les définitions données ci-dessus , celà revient donc à dire que "il existe u tel que R" est partout vraie , et que la proposition

"(R et R')$\rightarrow$(u=u')"

est vraie .

D'après la règle 18, toute relation équivalente à R est encore une relation fonctionnelle en u ; d'après la règle IV , si on remplace certains des arguments de R , par exemple x,y,u, par des arguments x',y',u', respectivement de même type que x,y,u, et distincts des autres arguments de R , la relation obtenue est encore une relation fonctionnelle en u'.

<u>Proposition 2</u> . Soit R une relation fonctionnelle en u , et S une

relation quelconque :

"il existe u tel que R et S" $\rightleftarrows$ "quel que soit u , $\bar{R}$ ou S" .

En premier lieu , comme "R ou $\bar{R}$" est partout vraie ,

"$\bar{R}$ ou S" $\rightleftarrows$ "(R ou $\bar{R}$) et ($\bar{R}$ ou S)" $\rightleftarrows$ "$\bar{R}$ ou (R et S)"

(règle 14) ; donc (règles 18 et X)

"quel que soit u , $\bar{R}$ ou S" $\rightleftarrows$ "quel que soit u , $\bar{R}$ ou (R et S)" $\rightarrow$

$\rightarrow$ "(quel que soit u , $\bar{R}$) ou (il existe u tel que R et S)"

et enfin , puisque "quel que soit u , $\bar{R}$" est partout fausse , on a (règle 14)

"quel que soit u , $\bar{R}$ ou S" $\rightarrow$ "il existe u tel que R et S" .

Démontrons maintenant la réciproque de cette proposition ; comme R est une relation fonctionnelle, on voit que ~~XXXXXX~~ (avec les notations introduites ci-dessus et en supposant u' distinct des arguments de S) "$\bar{R}$ ou $\bar{R}'$ ou u=u' " est partout vraie ; donc

"quel que soit u', $\bar{R}$ ou $\bar{R}'$ ou u=u' "

est aussi partout vraie ; par suite (règles 14 et IX)

"R et S" $\rightleftarrows$ "(R et S) et (quel que soit u' , $\bar{R}$ ou $\bar{R}'$ ou u=u')" $\rightleftarrows$

$\rightleftarrows$ "quel que soit u' , (R et S) et ($\bar{R}$ ou $\bar{R}'$ ou u=u')"

Donc (règles 11 et VI)

"il existe u tel que R et S" $\rightleftarrows$ "il existe u tel que , quel que soit u' , (R et S) et ($\bar{R}$ ou $\bar{R}'$ ou u=u')" $\rightarrow$ "quel que soit u' , il existe u tel que (R et S) et ($\bar{R}$ ou $\bar{R}'$ ou u=u')"

Or , la relation "(R et S) et ($\bar{R}$ ou $\bar{R}'$ ou u=u')" est synonyme de "(R et $\bar{R}$ et S) ou (R et $\bar{R}'$ et S) ou (R et S et u=u')"

Mais (R et $\bar{R}$ et S) est partout fausse ; d'autre part (règle II)

(R et $\bar{R}'$ et S) $\rightarrow$ $\bar{R}'$

Enfin (prop.1 et règle II)

(R et S et u=u') $\rightarrow$ (S et u=u') $\rightarrow$ S'

où S' désigne la relation obtenue en remplaçant u par u' dans S ; on a donc (règles 14 , 15 et 11)

"il existe u tel que R et S" $\rightarrow$ "quel que soit u' , il existe u tel

Proposition 7 . Soient R une relation fonctionnelle en u ; v un ar-

 24

que $\overline{R}'$ ou S' "

et finalement (règle de redoublement et règle IV)

"il existe u tel que R et S" $\rightarrow$ "quel que soit u', $\overline{R}'$ ou S' " $\rightleftarrows$ "quel que soit u , $\overline{R}$ ou S"

C.Q.F.D.

On remarquera que la première partie de la démonstration ne suppose pas que R soit une relation fonctionnelle en u , mais seulement que "il existe u tel que R" soit partout vraie ; la seconde partie , au contraire , ne s'appuie que sur l'hypothèse que "il existe au plus un u tel que R" est partout vraie .

Dans ce qui suit , nous désignerons par la notation abrégée S_R la relation complexe

"il existe u tel que R et S"

R étant une relation fonctionnelle en u (quelconque) , S une relatio[n] quelconque ; la proposition 2 montre que

"S_R" $\rightleftarrows$ "quel que soit u , $\overline{R}$ ou S"

Remarquons que , si u <u>n'est pas un argument effectif</u> dans S , on a (règle IX)

"il existe u tel que R et S" $\rightleftarrows$ "(il existe u tel que R) et S"

et , comme "il existe u tel que R" est partout vraie , on a (règle 14) "S_R" $\rightleftarrows$ "S" .

<u>Proposition 3 . S et T étant deus relations quelconques</u>

(1) $(\overline{S})_R \rightleftarrows (\overline{S_R})$

(2) $(S \text{ et } T)_R \rightleftarrows (S_R \text{ et } T_R)$

(3) $(S \text{ ou } T)_R \rightleftarrows (S_R \text{ ou } T_R)$

En effet , (1) est une proposition équivalente à

"il existe u tel que R et $\overline{S}$" $\rightleftarrows$ "quel que soit u , $\overline{R}$ ou $\overline{S}$"

ce qui n'est autre que la proposition 2 , appliquée à $\overline{S}$.

(2) est une proposition équivalente à

"quel que soit u , $\overline{R}$ ou (S et T)" $\rightleftarrows$ "(quel que soit u , $\overline{R}$ ou S) et (quel que soit u , $\overline{R}$ ou T)"

ce qui est une conséquence de la règle de distributivité et de la règle VII . De même , (3) est équivalente à

"il existe u tel que R et (S ou T)" $\rightleftarrows$ "(il existe u tel que R et S) ou (il existe u tel que R et T)"

conséquence de la distributivité et de la règle VII .

Proposition 4 . Si x est un argument non effectif dans R ,

(4) $\quad$ (quel que soit x , S)$_R \rightleftarrows$(quel que soit x , S_R)

(5) $\quad$ (il existe x tel que S)$_R \rightleftarrows$(il existe x tel que S_R)

En effet , d'après la proposition 2 , (4) est équivalente à

"quel que soit u , $\bar{R}$ ou (quel que soit x , S)"$\rightleftarrows$"quel que soit x , quel que soit u , $\bar{R}$ ou S"

ce qui est une conséquence de la règle IX ; de même , (5) est équivalente à la proposition

"il existe u tel que R et (il existe x tel que S)"$\rightleftarrows$"il existe x tel qu'il existe u tel que R et S"

qui est encore une conséquence de la règle IX .

Proposition 5 . S et T étant deux relations quelconques

$$(S \rightarrow T) \rightarrow (S_R \rightarrow T_R)$$

Cette proposition s'écrit en effet

"S$\rightarrow$T"$\rightarrow$"(il existe u tel que R et S) $\rightarrow$(il existe u tel que R et T)"

et est une conséquence immédiate des règles 15 et 11 ; on remarquera d'ailleurs que l'hypothèse que R est une relation fonctionnelle n'y intervient pas .

Corollaire . $\quad (S \rightleftarrows T) \rightarrow (S_R \rightleftarrows T_R)$.

Proposition 6 . S étant une relation quelconque ,

"quel que soit u , S"$\rightarrow$"S_R"$\rightarrow$"il existe u tel que S"

En effet (règles II et 11)

"il existe u tel que R et S"$\rightarrow$"il existe u tel que S"

et d'autre part , comme "il existe u tel que R" est partout vraie

"quel que soit u , S"$\rightleftarrows$"(quel que soit u , S) et (il existe u tel que R)"$\rightarrow$"il existe u tel que R et S"

(règles 14 et X) , ce qui démontre la proposition .

Proposition 7 . Soient R une relation fonctionnelle en u ; v un argument du même type que u , et distinct des autres arguments de R ; R_v la relation (fonctionnelle en v) obtenue en remplaçant u par v dans R ; enfin , soit E la relation v=u ; on a

$$E_R \rightleftarrows R_v \quad .$$

En effet , d'après E-4, et les propositions 3 et 5 , "E_R" $\rightarrow$ "R_v ou $(\overline{R_R})$"

Mais R_R, relation équivalente à "il existe u tel que R" est partout vraie , donc (règle 14)

$$E_R \rightarrow R_v \quad .$$

Réciproquement , R étant fonctionnelle en u , "$\overline{R}$ ou $\overline{R_v}$ ou v=u" est partout vraie , autrement dit ,

$$\text{"}R \text{ et } R_v\text{"} \rightarrow \text{"}v=u\text{"}$$

donc "R_R et R_v" $\rightarrow$ "E_R"

(propositions 3 et 5) , et , comme R_R est partout vraie

$$R_v \rightarrow E_R$$

(règle 14) , ce qui démontre la proposition .

Les symboles fonctionnels . Nous allons maintenant introduire de nouveaux objets mathématiques , dont l'emploi est à la base de tout le système de notations adopté par la mathématique moderne .

Chaque fois que nous aurons démontré qu'une relation R est une relation fonctionnelle en u , nous nous donnerons le droit d'introduire dans les raisonnements un nouvel objet , auquel on donne le nom de symbole fonctionnel déterminé par R (et qu'on considérera comme faisant partie d'une nouvelle espèce , celle des symboles fonctionnels); on lui donnera d'habitude un nom abrégé , qui sera une certaine combinaison de signes graphiques , caractéristique de la relation R , et où figureront à certains endroits les arguments effectifs de R autres que u .

La variété de ces combinaisons est extrême , et ne se laisse pas résumer en règles ; en voici quelques échantillons (x et y étant des arguments du type des nombres réels)

x^2 , $\sqrt[3]{x}$, $x+y$, x/y , $[x]$, $|x|^y$, $\{x\}$, e^x , $\sin x$, $J_0(x)$

Dans les raisonnements généraux qui vont suivre , $f_R(x,y,z)$ désignera le symbole fonctionnel d'une relation fonctionnelle en u qu'on aura notée $R\{x,y,z,u\}$; d'après ce qui a été dit au ch.I (§ 2) sur l'emploi des symboles dans les raisonnements généraux , les raisonnements où figurent les combinaisons de signes précédentes sont simplement des schémas de propositions, qui deviennent des propositions chaque fois qu'on y remplace $R\{x,y,z,u\}$ par une relation fonctionnelle en u *déterminée* , et $f_R(x,y,z)$ par le symbole fonctionnel qu'elle détermine ; la présence des lettres x,y,z dans $f_R(x,y,z)$ ne signifie donc pas que les arguments x,y,z figurent dans le symbole fonctionnel par lequel on remplace $f_R(x,y,z)$, mais qu'ils *peuvent* y figurer , et qu'il n'en figure pas d'autres .

Signalons enfin que , si , dans une relation R fonctionnelle en u, on remplace u par un argument v de même type , distinct des autres arguments de R , on désignera le symbole fonctionnel déterminé par la relation R' fonctionnelle en v ainsi obtenue , par *le même nom* que le symbole fonctionnel déterminé par R ; c'est là un abus de langage qui ne présente aucun inconvénient , étant donné l'usage que l'on fait des symboles fonctionnels .

L'intérêt essentiel des symboles fonctionnels réside dans la simplification considérable qu'ils apportent dans le symbolisme mathématique , où , grâce à eux , il est possible de donner une méthode générale de formation de noms abrégés pour certaines relations complexes , comme nous allons le montrer .

Soit S une relation quelconque contenant u, R une relation fonctionnelle en u , $f_R(x,y,z)$ le symbole fonctionnel qu'elle détermine ; considérons la relation complexe S_R et supposons d'abord que le nom de S ne renferme aucun opérateur neutralisant (c'est-à-dire les termes "quel que soit" ou "il existe" , ou les termes "il existe au plus un" , "il existe un et un seul" qui en sont dérivés) ; nous posons alors comme règle nouvelle que la combinaison de signes qu'on obtient en remplaçant partout , dans S , la lettre u par la combinaison de signes qui est le nom du symbole fonctionnel $f_R(x,y,z)$, est *une relation équivalente à S_R* .

Si maintenant le nom de S renferme des opérateurs neutralisants , on commence par remplacer , dans la partie de la relation S sur laquelle porte un tel opérateur , l'argument qu'il neutralise par un argument de même type , distinct des autres arguments figurant dans R ou dans S ; on obtient ainsi une relation S' équivalente à S (règles IV et 18) . Celà étant , si , dans S' , on remplace partout la lettre u par $f_R(x,y,z)$, nous considérons encore que la combinaison de signes ainsi obtenue est une relation équivalente à S_R.

Le passage de S à S' , lorsque S contient des opérateurs neutralisants , est absolument indispensable si on veut que les règles que nous venons de poser n'entraînent pas contradiction. Supposons par exemple que R contienne deux arguments x,u, et soit fonctionnelle en u , et d'autre part , considérons une relation S contenant u , mais ne contenant pas x ; soit enfin T la relation "quel que soit x , S" ; d'après la règle de redoublement , S $\rightleftarrows$ T , et par suite (proposition 5) $S_R \rightleftarrows T_R$. Or , si on substituait directement , dans T , le symbole fonctionnel $f_R(x)$ à l'argument u , on obtiendrait d'après les règles précédentes une relation équivalente à "quel que soit x , S_R" , mais , comme x est un argument effectif dans S_R , cette relation ne serait pas équivalente à S_R (pour un choix convenable de S) , ce qui serait en contradiction avec ce qui précède . Au contraire , si on opère comme nous l'avons prescrit , on remplacera u par $f_R(x)$ dans la relation T' : "quel que soit x' , S" , où x' est un argument de même type que x , et la relation "quel que soit x' , S_R" est bien alors équivalente à S_R d'après la règle de redoublement .

On observera que ce sont essentiellement les propositions 3 et 4 qui rendent possible l'emploi des symboles fonctionnels que nous venons d'exposer .

On dit que la relation obtenue par le procédé qui vient d'être décrit est la relation S où on a substitué le symbole fonctionnel $f_R(x,y,z)$ à l'argument u ; cette relation se notera $S\{z,t,f_R(x,y,z)\}$ dans les raisonnements généraux , si on notait $S\{z,t,u\}$ la relation où on a fait cette substitution . On remarquera que si un argument (autre que u) est effectif dans R , il est effectif dans toute relation où on a substitué à u le symbole fonctionnel déterminé par R , car d'après la manière dont on fait cette substitution , aucun opérateur neutralisant cet argument ne peut porter sur une partie de la relation obtenue .

On peut naturellement substituer ainsi successivement plusieurs symboles fonctionnels à plusieurs arguments d'une même relation ; la relation finalement obtenue dépendra en général de l'<u>ordre</u> dans lequel on fait ces substitutions . Il est cependant un cas important où cet ordre n'intervient pas : c'est celui où chacun des arguments auquel on substitue un ~~argument~~ symbole fonctionnel , <u>ne figure que dans la relation fonctionnelle qui détermine ce symbole</u> ; par exemple , soit $S\{t,u,v\}$ une relation , R une relation fonctionnelle en u , ne contenant pas v , R' une relation fonctionnelle en v , ne contenant pas u ; si on substitue d'abord à u , dans S , le symbole fonctionnel déterminé par R , on a une relation équivalente à

"il existe u tel que R et S"

Si on substitue ensuite dans cette relation le symbole fonctionnel déterminé par R' , à l'argument v , on a une relation équivalente à "il existe v tel que R' et (il existe u tel que R et S)" ; mais , comme R' ne contient pas u , cette relation , d'après la règle IX , est équivalente à

"il existe u,v, tels que R et R' et S"

et on aurait de même une relation équivalente à cette dernière en faisant les substitutions dans l'ordre inverse .

Démontrons maintenant quelques propositions où interviennent les symboles fonctionnels . Tout d'abord , la proposition 7 s'écrit

(6) $$"v=f_R(x,y,z)" \rightleftarrows "R\{x,y,z,v\}"$$

si $f_R(x,y,z)$ est le symbole fonctionnel déterminé par la relation $R\{x,y,z,u\}$ fonctionnelle en u .

<u>Proposition 8 . Soient</u> $R\{x,y,z,u\}$, $S\{z,t,u\}$ <u>deux relations fonctionnelles en u ; on a</u>

$$"f_R(x,y,z)=f_S(z,t)" \rightleftarrows "\text{quel que soit } u \text{ , } \bar{R} \text{ ou } S"$$

En effet , "$f_R(x,y,z)=f_S(z,t)$" est la relation "$u=f_S(z,t)$" où on a substitué à u le symbole fonctionnel déterminé par R ; or , d'après

(6) cette relation est équivalente à S ; la proposition est alors une conséquence immédiate de la proposition 2 .

<u>Corollaire 1</u> .

$$"f_R(x,y,z)=f_S(z,t)" \rightleftarrows "\text{quel que soit } u\ ,\ (\overline{R} \text{ ou } S) \text{ et } (\overline{S} \text{ ou } R)"$$

En effet , comme (E-2) $"v=u" \rightleftarrows "u=v"$, on a (prop.5)

$$"u=f_S(z,t)" \rightleftarrows "f_S(z,t)=u"$$

et en appliquant de nouveau la proposition 5

$$"f_R(x,y,z)=f_S(z,t)" \rightleftarrows "f_S(z,t)=f_R(x,y,z)"$$

L'application de la proposition 8 , en intervertissant les rôles de R et de S, donne alors le corollaire .

<u>Corollaire 2</u> .

"quels que soient x,y,z,t, $f_R(x,y,z)=f_S(z,t)" \rightleftarrows "R \rightleftarrows S"$

Conséquence de la règle 11 et du corollaire précédent .

<u>Proposition 9 . Soient</u> $R\{x,y,z,u\}$, $S\{z,t,u\}$ <u>deux relations fonctionnelles en u , T une relation quelconque</u> :

$$"f_R(x,y,z)=f_S(z,t)" \longrightarrow "\overline{T}_R \text{ ou } T_S"$$

En effet , soit v un argument du même type que u, distinct des arguments de R,S,T , et T_v la relation obtenue en remplaçant u par v dans T ; on a , d'après E-4

$$"u=v" \rightarrow "\overline{T} \text{ ou } T_v"$$

d'où la proposition , en appliquant la proposition 5 deux fois de suite , aux relations $R\{x,y,z,u\}$ et $S\{z,t,v\}$.

<u>Propriétés déterminantes et éléments d'un type</u> . Ce qui précède s'applique en particulier au cas où R est une relation fonctionnelle en u et <u>ne contient pas d'argument effectif autre que u</u> , autrement dit est une <u>propriété</u> ; si T est le type de u , on dit alors que R est une <u>propriété déterminante dans le type T</u> ; le symbole fonctionnel qu'elle détermine , et qui ne contient donc aucun argument , reçoit le nom particulier d'<u>élément du type T déterminé par la propriété R</u> ; on le désignera (dans les raisonnements généraux) par a_R .

Certaines des propositions démontrées ci-dessus se simplifient dans ce cas particulier . C'est ainsi que la restriction relative à l'argument x dans la proposition 4 revient simplement ici à dire que x <u>est distinct de</u> u .

Pour substituer à l'argument u l'élément déterminé par R , dans une relation S contenant u , il n'y a de transformation préalable à faire que si S contient un ou plusieurs opérateurs <u>neutralisant u</u> .

Lorsqu'on substitue plusieurs éléments à des arguments de même type dans une relation , l'ordre dans lequel on fait ces substitutions est toujours indifférent .

~~La relation~~ (6) s'écrit ici $"u=a_R" \rightleftarrows "R\{u\}"$. Comme un élément ne contient aucun argument , ~~XXXpropositionX&X~~ les corollaires 1 et 2 de la proposition 8 sont ici identiques , autrement dit , si R et S sont deux propriétés déterminantes dans le type T

(7) $$"a_R=a_S" \rightleftarrows "R\rightarrow S" \rightleftarrows "S\rightarrow R" \rightleftarrows "R\rightleftarrows S"$$

Cette proposition montre en particulier que , si on donne deux noms synonymes a,b à un ~~même~~ élément du type T , "a=b" est une proposition vraie .

On utilise fréquemment ~~XXXpropositionXXXX~~ (7) pour démontrer qu'une propriété $S\{u\}$ est une propriété déterminante , et que l'élément quelle détermine est égal à celui que détermine une propriété déterminante $R\{u\}$ déjà connue ; il suffit de démontrer les propositions ~~XXXXX~~ $"S\rightarrow R"$ et "il existe u tel que S" ; car de ces propositions vraies résulte d'abord que

$$"S\{u\} \text{ et } S\{u'\}" \rightarrow "R\{u\} \text{ et } R\{u'\}" \rightarrow "u=u'"$$

c'est-à-dire que S est une propriété déterminante , et on peut ensuite appliquer (7) . Le résultat sera aussi atteint si on démontre $"R\rightleftarrows S"$, car (règle 11)

$$"R\rightarrow S" \rightarrow "(\text{il existe u tel que R}) \rightarrow (\text{il existe u tel que S})"$$

~~XXXXXX~~ d'où on déduit bien que "il existe u tel que S" est vraie .

Enfin , on a la proposition suivante :

<u>Proposition 10 . Soient</u> $R\{u\}$, $S\{u\}$ <u>deux propriétés déterminantes</u> , <u>T une relation quelconque</u> :

 32

"$a_R=a_S$" → "$T_R \rightleftarrows T_S$"

En effet , d'après (7) et la règle 18

"$a_R= a_S$" $\rightleftarrows$ "$R \rightleftarrows S$" → "(il existe u tel que R et T) $\rightleftarrows$ (il existe u tel que S et T)" .

<u>Les relations fonctionnelles composées</u> . Revenant aux relations fonctionnelles quelconques , nous allons démontrer une proposition dont l'importance est fondamentale , car elle permet de combiner des symboles fonctionnels donnés pour en former de nouveaux .

<u>Proposition 11</u> (principe des relations fonctionnelles composées). <u>Soient R une relation fonctionnelle en u , S une relation fonctionnelle en v ; si v n'est pas un argument effectif de</u> R , S_R <u>est une relation fonctionnelle en v</u> .

Par hypothèse , "il existe v tel que S" est partout vraie ; il en est donc de même de "quel que soit u , il existe v tel que S" ; d'autre part , "il existe u tel que R" est aussi partout vraie ; donc (règle 13)

"(quel que soit u , il existe v tel que S) et (il existe u tel que R)"

est partout vraie ; mais (règle X) cette relation entraîne

"il existe u tel que(R et "il existe v tel que S")"

relation qui est donc aussi partout vraie ; mais comme v n'est pas effectif dans R , par hypothèse , cette relation est équivalente (règle IX) à

"il existe u,v, tels que R et S"

relation qui est elle même ~~synonyme de~~ équivalente à

"il existe v tel que S_R"

d'après la règle sur les "il existe" consécutifs ; ceci démontre la première partie de la proposition .

Pour démontrer la seconde partie , désignons par u' , v' deux arguments, respectivement de même type que u et v , et distincts des arguments figurant dans R ou dans S ; soit R' la relation R où on a remplacé u par u' , S' la relation S où on a remplacé u par u' , S" la relation S' où on a remplacé v par v' ; il faut démontrer que

"(il existe u tel que R et S) et (il existe u' tel que R' et S")" $\rightarrow$

$\rightarrow$ "v=v' "

Or (règle IX)

"(il existe u tel que R et S) et (il existe u' tel que R' et S")" $\rightleftarrows$

$\rightleftarrows$ (il existe u,u', tels que R et R' et S et S")

Mais , puisque R est une relation fonctionnelle , (R et R') $\rightarrow$ (u=u')

et par ailleurs , d'après E-4 , (u=u') $\rightarrow$ ($\overline{S}$ ou S') ; donc

(R et R' et S et S") $\rightarrow$ (($\overline{S}$ ou S') et S et S")

c'est-à-dire

(R et R' et S et S") $\rightarrow$ (($\overline{S}$ et S et S") ou (S' et S et S"))

et , comme ($\overline{S}$ et S et S") est partout fausse

(R et R' et S et S") $\rightarrow$ (S' et S et S") $\rightarrow$ (S' et S")

Par ailleurs , S étant une relation fonctionnelle en v ,

(S' et S") $\rightarrow$ (v=v')

Finalement

"(il existe u tel que R et S) et (il existe u' tel que R' et S")" $\rightarrow$

$\rightarrow$ "il existe u,u' tels que v=v' " $\rightleftarrows$ "v=v' "

(règle de redoublement) , ce qui démontre la proposition .

Soit maintenant T une relation quelconque, contenant v mais ne contenant pas u ; on a $(T_S)_R \rightleftarrows T_{S_R}$ (avec les notations antérieures). En effet, $(T_S)_R$ est par définition ~~synonyme de~~ équivalente à

"il existe u tel que (il existe v tel que S et T) et R"

Si on tient compte de ce que T ne contient pas u, et que R ne contient pas v, on a donc (règle IX)

$(T_S)_R \rightarrow$ "il existe u,v tels que R et S et T" $\rightleftarrows$ "il existe v tel que (il existe u tel que R et S) et T"

et cette dernière relation est ~~synonyme de~~ équivalente à T_{S_R}.

Autrement dit, on obtient deux relations équivalentes, d'une part en substituant à v dans T le symbole fonctionnel de S_R, et d'autre part, en substituant d'abord à v le symbole fonctionnel de S, puis en substituant à u, dans la relation obtenue, le symbole fonctionnel de R ; mais, comme T ne contient pas u, cette seconde opération peut aussi se faire en substituant à v une combinaison de signes formée du symbole fonctionnel de S, dans lequel on a remplacé u par le symbole fonctionnel de R. Ce qui précède nous permet donc (en remplaçant au besoin des relations par d'autres qui leur sont équivalentes) de considérer cette combinaison de signes comme <u>un nom du symbole fonctionnel de</u> S_R ; c'est ce que nous ferons désormais. Si $f_R(x,y,z)$, $f_S(x,t,u)$ étaient par exemple les symboles fonctionnels de R et S respectivement, on notera par $f_S(x,t,f_R(x,y,z))$ la combinaison de signes qui vient d'être définie.

On voit donc qu'on peut former de nouveaux symboles fonctionnels en <u>substituant</u>, dans un symbole fonctionnel, à l'un des arguments qui y figurent, un autre symbole fonctionnel approprié ; et on pourra naturellement répéter cette opération autant de fois qu'on le désire, si on dispose de relations fonctionnelles convenables.

On aperçoit ainsi la fécondité de ce procédé de formation de relations fonctionnelles , qui est un des outils les plus utiles dont dispose le mathématicien .

Attirons en particulier l'attention sur un de ses emplois les plus fréquents : si , dans un symbole fonctionnel $f_R(x,y,z)$, on remplace chacun des <u>arguments</u> par un <u>élément</u> de même type , on obtient un symbole fonctionnel ne contenant plus d'arguments c'est-à-dire <u>un élément du type de u</u> , si la relation fonctionnelle qui détermine $f_R(x,y,z)$ était fonctionnelle en u ; si a , b , c sont les éléments qu'on a substitués respectivement à x,y,z , l'élément du type de u obtenu se notera $f_R(a,b,c)$; on dit souvent que c'est la <u>valeur</u> que prend le symbole fonctionnel $f_R(x,y,z)$ lorsque x,y,z prennent les <u>valeurs</u> a,b,c . La plupart des éléments des types qui interviennent en mathématique sont obtenus de cette façon , comme <u>valeurs</u> de symboles fonctionnels .

<u>La relation d'égalité , relation fonctionnelle</u> . Montrons tout d'abord que la proposition ~~il existe au plus un y tel que y=x~~

"quel que soit x , il existe au plus un y tel que y=x"

est vraie ; par définition , elle est synonyme de

"y=x et y'=x" → "y=y' "

Or , c'est là une conséquence immédiate de E-2 et E-3 .

Pour établir que y=x est une <u>relation fonctionnelle en y</u> , nous devrons donc admettre la vérité de la proposition

E-5 . <u>Quel que soit x , il existe y tel que y=x</u> .

Nous la poserons comme <u>nouvelle règle</u> concernant la relation d'égalité .

Désignons pour un instant par E la relation y=x ; comme E est fonctionnelle en y , elle détermine un symbole fonctionnel $f_E(x)$. Mais l'introduction de ce symbole se trouve rendue inutile par la proposition suivante :

<u>Proposition 12 . Soit R une relation quelconque</u> , R_x <u>la relation ob-</u>

tenue en remplaçant partout dans R l'argument y par l'argument (de même type) x , R_E la relation obtenue en substituant à y dans R le symbole fonctionnel $f_E(x)$; on a

$$"R_x \rightleftarrows R_E"$$

La proposition 1 (appliquée à R) s'écrit

$$"R_x" \rightarrow "R \text{ ou } y \neq x"$$

donc (règle 11 et règle de redoublement)

$$"R_x" \rightarrow "\text{quel que soit } y \text{ , } y \neq x \text{ ou } R"$$

Mais , comme y=x est une relation fonctionnelle en y (prop. 2)

$$"\text{quel que soit } y \text{ , } y \neq x \text{ ou } R" \rightleftarrows "\text{il existe } y \text{ tel que } y=x \text{ et } R"$$

et par suite $\quad "R_x" \rightarrow "R_E"$.

Réciproquement , d'après la proposition 1 ,

$$"y=x \text{ et } R" \rightarrow "R_x"$$

Donc $\quad "\text{il existe } y \text{ tel que } y=x \text{ et } R" \rightarrow "R_x"$

d'après la règle de redoublement , ce qui montre que $"R_E" \rightarrow "R_x"$ et achève la démonstration de la proposition .

Cette proposition , et celles démontrées ci-dessus sur les relations fonctionnelles permettent de compléter la règle IV en ce qui concerne la substitution d'un argument à un autre (de même type) .

Désignons encore par R_x la relation obtenue en substituant , dans une relation R , à un argument y , un argument (de même type) x (x pouvant déjà figurer dans R) ; d'après la proposition 7 , si R et S sont deux relations quelconques

$$"(R \rightarrow S) \rightarrow (R_x \rightarrow S_x)"$$

De même , d'après la proposition 11

$$"\text{quel que soit } y \text{ , } R" \rightarrow "R_x" \rightarrow "\text{il existe } y \text{ tel que } R"$$

Et , en particulier , $\quad "x=x" \rightarrow "\text{il existe } y \text{ tel que } y=x"$

Cette dernière proposition est donc une conséquence de E-5 ; mais inversement , elle entraîne E-5 , et lui est donc équivalente ; en effet , on en tire
"quel que soit x, x=x" → "quel que soit x , il existe y tel

que y=x" .

Or , d'après E-1 , "quel que soit x , x=x" est vraie , il en est donc de même de "quel que soit x , il existe y tel que y=x" .

La proposition 12 et le principe des relations fonctionnelles composées montrent d'autre part que , si R est une <u>relation fonctionnelle en u</u> , la relation R_x obtenue en substituant x dans R à un argument y de même type que x , mais <u>distinct de u</u> , est encore <u>une relation fonctionnelle en u</u> . D'autre part , si T est une relation quelconque ne contenant pas y , on a (proposition 12 et remarque sur les relations fonctionnelles composées)

$$T_{R_x} \rightleftarrows T_{R_E} \rightleftarrows (T_R)_E \rightleftarrows (T_R)_x$$

Autrement dit , on peut considérer (à des équivalences près) que la combinaison de signes obtenue en remplaçant y par x dans le symbole fonctionnel de R , est <u>un nom du symbole fonctionnel de</u> R_x

<u>Proposition 13 . Soit</u> $R\{x,x',y,z,u\}$ <u>une relation fonctionnelle en u,</u> <u>où x,x',y sont des arguments de même type</u> ;

$$\text{"}x=x'\text{"} \rightarrow \text{"}f_R(x,x',x,z)=f_R(x,x',x',z)\text{"} .$$

En effet , si R_x , $R_{x'}$ désignent respectivement les relations obtenues en substituant x et x' à y dans R , on a d'après E-4

$$\text{"}x=x'\text{"} \rightarrow \text{"}\bar{R}_x \text{ ou } R_{x'}\text{"}$$

d'où (règle de redoublement)

$$\text{"}x=x'\text{"} \rightarrow \text{"quel que soit } u \text{ , } \bar{R}_x \text{ ou } R_{x'}\text{"}$$

Comme $f_R(x,x',x,z)$ et $f_R(x,x',x',z)$ sont respectivement les symboles fonctionnels de R_x et de $R_{x'}$, la proposition résulte donc de la proposition 8 .

En particulier , d'après la proposition 5 , si a et b sont deux éléments du même type que y

$$\text{"}a=b\text{"} \rightarrow \text{"}f_R(x,x',a,z)=f_R(x,x',b,z)\text{"}$$

<u>Relations biunivoques</u> . Dans ce qui suit , les lettres T et T' seront , soit les noms de deux types distincts quelconques , soit deux noms synonymes d'un même type quelconque . Soit x un argument du type T , x' un argument du type T' ; une relation $B\{x,x'\}$ est dite <u>biunivoque</u> si elle est <u>fonctionnelle en x et fonctionnelle en x'</u> .

Désignons par $f_B(x)$ le symbole fonctionnel déterminé par B , en tant que relation fonctionnelle en x' , et par $\overset{-1}{f}_B(x')$ le symbole fonctionnel qu'elle détermine en tant que relation fonctionnelle en x . D'après ~~la proposition~~ (6)

$$"x'=f_B(x)" \rightleftarrows "B\{x,x'\}"$$

et , d'après la proposition 5

$$"x'=f_B(\overset{-1}{f}_B(x'))" \rightleftarrows "B\{\overset{-1}{f}_B(x'),x'\}"$$

Comme , par hypothèse , $B\{\overset{-1}{f}_B(x'),x'\}$ est partout vraie , il en est de même de $\quad x'=f_B(\overset{-1}{f}_B(x'))$

On démontre pareillement que

$$x=\overset{-1}{f}_B(f_B(x))$$

est une identité .

Montrons maintenant que si x figure dans une relation R , et si R' désigne la relation obtenue en remplaçant , dans R , l'argument x par le symbole fonctionnel $\overset{-1}{f}_B(f_B(x))$, on a $R \rightleftarrows R'$. Soit en effet y un argument de même type que x , et ne figurant pas dans R , et soit R_y la relation obtenue en remplaçant x par y dans R ; par définition $\quad R' \rightleftarrows$ "quel que soit y , $y \neq \overset{-1}{f}_B(f_B(x))$ ou R_y"

Donc $\quad R' \rightarrow "x \neq \overset{-1}{f}_B(f_B(x))$ ou R"

et , comme $x \neq \overset{-1}{f}_B(f_B(x))$ est partout fausse , $R' \rightarrow R$.

Réciproquement , comme $x=\overset{-1}{f}_B(f_B(x))$ est partout vraie ,

$R \rightarrow "x=\overset{-1}{f}_B(f_B(x))$ et $R" \rightarrow$ "il existe y tel que $y=\overset{-1}{f}_B(f_B(x))$ et R_y"

et la dernière relation est équivalente à R' , ce qui achève la démonstration .

Etant donnée une relation quelconque R contenant des arguments du type T et des arguments du type T' , on dit qu'une relation R *

est <u>homologue</u> (ou <u>transformée</u>) de R par la relation biunivoque B , si elle est équivalente à une relation obtenue de la façon suivante: pour chaque argument z du type T figurant dans R, on introduit un nouvel argument z' du type T' , et on remplace , dans R , l'argument z par $\overset{-1}{f_B}(z')$; de même , pour chaque argument u' du type T' figurant dans R , on introduit un nouvel argument u du type T , et on remplace u' par $f_B(u)$. Il résulte alors de ce qui précède qu'inversement , R <u>est homologue de</u> R^* par la relation biunivoque B .

On a enfin la proposition suivante :

<u>Proposition 14 . Si R est une relation fonctionnelle en z , son homologue R^* est une relation fonctionnelle en z'</u> .

Cet énoncé suppose naturellement que tous les nouveaux arguments introduits dans R^* sont distincts entre eux et distincts des arguments qui figuraient déjà dans R .

D'après le principe des relations fonctionnelles composées , il suffira de montrer que la relation S obtenue en remplaçant seulement z par $\overset{-1}{f_B}(z')$ dans R , est une relation fonctionnelle en z' .

Comme "S" $\rightleftarrows$ "il existe z tel que R et B(z,z')"

"il existe z' tel que S" $\rightleftarrows$ "il existe z,z' tels que R et B(z,z')"

et comme R ne contient pas z' (règle IX)

"il existe z'tel que S" $\rightleftarrows$ "il existe z tel que R et (il existe z' tel que B(z,z'))"

Or , "il existe z' tel que B(z,z')" est partout vraie , puisque B est une relation <u>fonctionnelle en z'</u> ; donc (règle ~~XIX~~ 14)

"il existe z' tel que S" $\rightleftarrows$ "il existe z tel que R"

et cette dernière relation est partout vraie par hypothèse , ce qui démontre la première partie de la proposition .

Soient maintenant x,y, deux arguments du type T distincts des arguments de ce type figurant dans R , x',y', deux arguments du type T' distincts des arguments de ce type figurant dans R ; et soient R_x , R_y les relations obtenues en remplaçant z respectivement par x et y dans R , $S_{x'}$, $S_{y'}$ celles qu'on obtient en remplaçant z' respectivement par x' et y' dans S . Il faut démontrer que

$$"S_{x'} \text{ et } S_{y'}" \rightarrow "x'=y'"$$

Or (définition et règle IX)

"$S_{x'}$ et $S_{y'}$" $\rightleftarrows$ "(il existe x tel que B(x,x') et R_x) et (il existe y tel que B(y,y') et R_y)" $\rightleftarrows$ "il existe x,y, tels que B(x,x') et B(y,y') et R_x et R_y"

Mais , comme R est une relation fonctionnelle en z

$$"R_x \text{ et } R_y" \rightarrow "x=y"$$

donc

"$S_{x'}$ et $S_{y'}$" $\rightarrow$ "il existe x,y, tels que x=y et B(x,x') et B(y,y')"

Or (prop.1) "x=y et B(y,y')" $\rightarrow$ "B(x,y')"

donc

"$S_{x'}$ et $S_{y'}$" $\rightarrow$ "il existe x,y, tels que B(x,x') et B(x,y')"

Mais , comme B(x,z') est <u>fonctionnelle en z'</u>

$$"B(x,x') \text{ et } B(x,y')" \rightarrow "x'=y'"$$

d'où la proposition , d'après la règle de redoublement .

<u>La relation d'égalité et l'identité logique</u> . En terminant ce paragraphe , il convient , pour éviter toute méprise sur sa signification , d'insister un peu sur un point qui aura peut-être attiré déjà l'attention du lecteur .

Dans le langage courant , et dans beaucoup de systèmes logiques , la combinaison de signes "x=y" a un sens tout autre que celui que nous lui avons attribué : elle exprime <u>l'identité logique</u> de x et y , c'est-à-dire que <u>x et y sont deux noms synonymes d'un même objet</u> (on dit souvent que x=y exprime que <u>x est le même que y</u> , ce qui, pris à la lettre , est absurde x et y étant deux signes distincts : c'est là simplement une manière abrégée de dire que x <u>représente le même objet</u> que y).

Dans le système que nous avons adopté , au contraire , nous n'établissons a priori aucun rapport entre la combinaison "x=y" et la phrase "x et y sont deux noms synonymes" ; cette dernière est simplement une des phrases par lesquelles le mathématicien précise ses notations , au début ou au cours d'un raisonnement ; remarquons d'ailleurs qu'on n'aura jamais à la formuler lorsque x et y sont des <u>arguments</u>, puisque nous nous sommes interdits dans ce cas de donner deux noms distincts à un même argument ; d'autre part , cette phrase <u>n'est jamais une relation mathématique</u> , ni par conséquent une proposition mathématique .

Quant à "x=y" , c'est pour nous un objet de l'espèce des relations , qu'on se donne le droit de considérer quand on introduit deux arguments x et y d'un même type , et qu'on ne peut utiliser pour former des propositions vraies qu'en suivant exclusivement les règles qui composent notre "règle du jeu" .

Bien entendu , celà ne signifie pas que les règles que nous avons introduites dans ce paragraphe soient arbitraires , ni qu'elles soient sans rapport avec celles auxquelles obéit l'identité logique ; tout au contraire , ce sont ces dernières qui en sont la véritable origine (voir § 5) ; mais il est bon d'oublier volontairement cette origine pour bien comprendre l'emploi qui en est fait dans ce paragraphe et les suivant

Au lecteur qui éprouverait quelque difficulté à faire cette dissociation , nous conseillons de remplacer partout , dans les raisonnements précédents , la notation "x=y" par une autre telle que $E\{x,y\}$, qui n'éveille pas de résonance intuitive.

<u>Exercices</u> . 1) Montrer que , si une relation $R\{x,y\}$ entre deux arguments d'un même type , obéit aux règles E-1 , E-2 , E-3 , E-4 , elle est équivalente à x=y .

2) Montrer (avec les mêmes notations que dans l'énoncé de la règle E-4) que

$$\text{"}x=y\text{"} \rightarrow \text{"(si } R_x , R_y\text{) et (si } R_y , R_x\text{)"} \quad .$$

§ 2 . Type des parties et relation d'appartenance .

Nous allons maintenant élargir le champ d'application des règles formulées jusqu'ici , en nous donnant le droit , chaque fois que nous aurons nommé un ou plusieurs types , d'en introduire d'autres, qui leur seront associés de la manière qui va être précisée dans ce paragraphe et les suivants .

T désignant un type quelconque , nous considérons que les termes "le <u>type des parties</u> de T" et la combinaison de signes P(T) sont deux noms synonymes d'un nouvel objet de l'espèce des types .

De plus , x étant un argument quelconque du type T , X un argument quelconque du type P(T) (on adoptera dans ce paragraphe la convention de désigner les arguments de T par des petites lettres , ceux de P(T) par des grandes lettres) , nous considérons que la combinaison de signes " $x \in X$ " est une <u>relation</u> entre x et X , qu'on appelle encore <u>relation d'appartenance</u> relative au type T ; "x appartient à X" , "x est dans X" sont considérés comme des noms synonymes de cette relation . La négation de "$x \in X$" est par définition "$x \notin X$"; en accord avec la règle de la double négation, la négation de "$x \notin X$" est "$x \in X$".

Ici encore , on adopte le même signe pour écrire les relations d'appartenance relatives à des types distincts ; c'est un abus de langage qui n'a pas plus d'inconvénients que l'abus analogue concernant la relation d'égalité , pourvu qu'on précise toujours ce que sont x et X .

L' emploi de la relation d'appartenance est régi par deux règles fondamentales . La première relie cette relation à la relation d'égalité dans le type P(T) ; pour l'énoncer , nous définirons d'abord une relation complexe , formée à partir de la relation d'appartenance , et tout aussi importante que cette dernière : la <u>relation d'inclusion</u> .

x étant un argument du type T , X et Y deux arguments du type P(T), nous considérons la combinaison de signes " $X \subset Y$ " comme une relatio <u>équivalente</u> à la relation

"quel que soit x , si $x \in X$, $x \in Y$ "

" $Y \supset X$ " , "X est contenu dans Y" , "Y contient X" , "X est une partie de Y" seront considérés comme des noms synonymes de cette relation .

On remarquera qu'en vertu de la règle I , "$X \subset X$" est une relation <u>partout vraie</u> . On a de plus la proposition suivante :

<u>Proposition 1 . X , Y , Z étant trois arguments quelconques du type</u> P(T)

$$"(X \subset Y) \text{ et } (Y \subset Z)" \rightarrow "X \subset Z"$$

En effet (règle 16)

"(si $x \in X$, $x \in Y$) et (si $x \in Y$, $x \in Z$)" $\rightarrow$ "si $x \in X$, $x \in Z$"

donc (règles VII et 11)

"(quel que soit x , si $x \in X$, $x \in Y$) et (quel que soit x , si $x \in Y$, $x \in Z$)" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , (si $x \in X$, $x \in Y$) et (si $x \in Y$, $x \in Z$)" $\rightarrow$

$\rightarrow$ "quel que soit x , si $x \in X$, $x \in Z$"

ce qui démontre la proposition .

Cette proposition montre (règle 15) que la relation "$X \subset Y$ et $Y \subset X$" satisfait à la règle E-3 ; elle satisfait évidemment par ailleurs aux règles E-1 et E-2 . La première règle relative à la relation d'appartenance que nous allons poser exprime que "$X \subset Y$ et $Y \subset X$" satisfait en outre à E-4 :

A-1 . X et Y étant des arguments quelconques du type P(T)

$$\text{"}X \subset Y \text{ et } Y \subset X\text{"} \rightleftarrows \text{"}X = Y\text{"}$$

La négation de "$X \subset Y$" se note parfois "$X \not\subset Y$" , et est équivalente à la relation

"il existe x tel que $x \in X$ et $x \notin Y$"

On évitera bien entendu la confusion grossière entre $X \not\subset Y$ et $Y \subset X$.

La seconde règle est celle qui va nous permettre de nommer des éléments du type P(T) et des relations fonctionnelles par rapport à des arguments de ce type :

A-2 (Règle de passage au type ~~supérieur~~ des parties). Soit R une ~~relation~~ quelconque contenant un argument x du type T ; la relation (que nous désignerons en abrégé par S)

"quel que soit x ,(si $x \in X$, R) et (si R , $x \in X$)"

est une relation fonctionnelle en X . De plus , si par exemple y,z sont les arguments autres que x figurant dans R , et si $E_R(y,z)$ désigne le symbole fonctionnel déterminé par S ,

$$\text{"}x \in E_R(y,z)\text{"} \rightleftarrows \text{"R"} \quad .$$

On peut remarquer que la proposition

"il existe au plus un X tel que S"

est une conséquence de A-1 et des règles antérieures ; en

44

effet , soit X' un nouvel argument du type P(T) , et désignons par S' la relation S où on a remplacé X par X' ; d'après la règle VII

"S et S' " $\rightleftarrows$ "quel que soit x , (si $x \in X$, R) et (si R , $x \in X$) et (si $x \in X'$, R) et (si R , $x \in X'$)"

Or (règle 16)

"(si $x \in X$, R) et (si R , $x \in X'$)" $\rightarrow$ "si $x \in X$, $x \in X'$ "

"(si $x \in X'$,R) et (si R , $x \in X$)" $\rightarrow$ "si $x \in X'$, $x \in X$ "

Donc (règle ~~XX~~ 11 et règle A-1)

"S et S' " $\rightarrow$ "quel que soit x , (si $x \in X$, $x \in X'$) et (si $x \in X'$ $x \in X$)" $\rightleftarrows$ "$X=X'$ "

ce qui démontre la proposition .

Il suffirait donc de poser comme règle que la proposition

"il existe X tel que S"

est vraie , pour en conclure que S est une relation fonctionnelle en X .

De la règle A-2 on tire immédiatement la proposition suivante :

<u>Proposition 2 . Soient R , S deux relations quelconques contenant un argument x du type T</u> , $X=E_R(y,z)$, $X=E_S(y,z,u)$ (par exemple) <u>les relations fonctionnelles qu'on en déduit respectivement par passage au type des parties de T</u> :

"$R \rightarrow S$" $\rightleftarrows$ "quels que soient y,z,u, $E_R(y,z) \subset E_S(y,z,u)$"

En effet , d'après A-2 , "R" $\rightleftarrows$ "$x \in E_R(y,z)$" , "S" $\rightleftarrows$ "$x \in E_S(y,z,u)$"

Donc "$R \rightarrow S$" $\rightleftarrows$ "quels que soient x,y,z,u, si $x \in E_R(y,z)$, $x \in E_S(y,z,u)$" ; or , cette dernière relation s'obtient en substituant $E_R(y,z)$ à X et $E_S(y,z,u)$ à Y dans la relation "quels que soient y,z,u, quel que soit x , si $x \in X$, $x \in Y$" ; comme "quel que soit x , si $x \in X$, $x \in Y$" $\rightleftarrows$ "$X \subset Y$" , on en déduit la proposition , par application de la proposition 5 du § 1 .

<u>Corollaire . Avec les mêmes notations</u> ,

"$R \rightleftarrows S$" $\rightleftarrows$ "quels que soient y,z,u, $E_R(y,z)=E_S(y,z,u)$"

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 , de la règle 15 et de la règle A-1 .

On peut d'ailleurs ~~donner~~ (d'une partie) de ce corollaire une démonstration indépendante de la règle A-1 ; en effet ; "$R \rightleftarrows S$" entraîne "quel que soit x , (si $x \in X$, R) et (si R , $x \in X$)" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , (si $x \in X$, S) et (si S , $x \in X$)"
c'est-à-dire (règle A-2 et prop. 7 du § 1)
$(R \rightleftarrows S) \rightarrow$ ("$X=E_R(y,z)$" $\rightleftarrows$ "$X=E_S(y,z,u)$")
et par suite (prop. 8 du § 1)
"$R \rightleftarrows S$" $\rightarrow$ "quels que soient y,z,u, $E_R(y,z)=E_S(y,z,u)$" .

<u>Ensemble fondamental et ensemble vide</u> . Lorsqu'on applique la règle A-2 à une propriété $P\{x\}$ de l'argument x du type T , on voit que la relation

"quel que soit x , (si $x \in X$, $P\{x\}$) et (si $P\{x\}$, $x \in X$)"

est une <u>propriété déterminante</u> dans le type $P(T)$; on notera E_P l'élément de ce type qu'elle détermine , et on dira aussi que E_P est <u>la partie du type T déterminée par la propriété</u> $P\{x\}$; "$x \in E_P$" est <u>équivalente</u> à $P\{x\}$.

Considérons en particulier la propriété "$x=x$" ; nous donnerons à la partie E du type T qu'elle détermine le nom d'<u>ensemble fondamental du type T</u> ; comme "$x=x$" est partout vraie , et que "$x \in E$" $\rightleftarrows$ "$x=x$", "$x \in E$" est <u>partout vraie</u> . Comme "$x \in E$" $\rightarrow$ "($x \notin X$) ou($x \in E$)" , cette dernière prop~~osition~~riété est partout vraie , autrement dit , "$X \subset E$" est <u>partout vraie</u> .

Remarquons maintenant que deux propriétés $P\{x\}$, $Q\{x\}$ <u>partout</u>

vraies sont équivalentes (car d'après la règle 14 , XXXXXXXXXX "P" $\rightleftarrows$ "P et Q" $\rightleftarrows$ "Q") ; donc , si $P\{x\}$ est une propriété partout vraie , $E_P=E$ (corollaire de la prop.2) , et réciproquement .

De la même manière , la partie du type T que détermine la propriété "$x\neq x$" reçoit le nom d'ensemble vide du type T ; on la notera $\emptyset$ (ce qui est un abus de langage , puisque cette notation est la même pour les ensembles vides de deux types distincts ; d'ordinaire ,cela ne présentera aucun inconvénient sérieux ; si on veut éviter toute confusion , on notera par exemple $\emptyset^T$ l'ensemble vide du type T). Comme XXXXXX "$x\in\emptyset$" $\rightleftarrows$ "$x\neq x$" , "$x\in\emptyset$" est partout fausse , et par suite sa négation "$x\notin\emptyset$" est partout vraie ; mais "$x\notin\emptyset$" $\rightarrow$ "$(x\notin\emptyset)$ ou $(x\in X)$" , donc cette dernière propriété est partout vraie ; autrement dit "$\emptyset\subset X$" est partout vraie .

Deux propriétés partout fausses étant équivalentes , si $P\{x\}$ est une propriété partout fausse , $E_P=\emptyset$, et réciproquement . Comme "$X\subset E$" est partout vraie , "$E\subset X$" $\rightleftarrows$ "$(E\subset X)$ et $(X\subset E)$" $\rightleftarrows$ "$X=E$"; de même "$X\subset\emptyset$" $\rightleftarrows$ "$(X\subset\emptyset)$ et $(\emptyset\subset X)$" $\rightleftarrows$ "$X=\emptyset$" . On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3 . "Il existe x tel que $x\in X$" $\rightleftarrows$ "$X\neq\emptyset$"

Cette proposition est en effet synonyme de

"quel que soit x , $x\notin X$" $\rightleftarrows$ "$X=\emptyset$"

Or , "$x\notin X$" $\rightleftarrows$ "$(x\notin X)$ ou $(x\in\emptyset)$" , puisque "$x\in\emptyset$" est partout fausse (règle 14) ; donc

"quel que soit x , $x\notin X$" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $x\notin X$ ou $x\in\emptyset$" $\rightleftarrows$ "$X\subset\emptyset$"

d'où la proposition , d'après ce qui précède .

On montrerait de même que

"quel que soit x , $x\in X$" $\rightleftarrows$ "$X=E$"

ou encore (forme associée synonyme)

"il existe x tel que $x\notin X$" $\rightleftarrows$ "$X\neq E$" .

D'après la règle V

"quel que soit x , $x\in X$" $\rightarrow$ "il existe x tel que $x\in X$"

donc (§ 1 , prop.5) ,

"quel que soit x , $x \in E$" $\rightarrow$ "il existe x tel que $x \in E$" $\rightleftarrows$ "$E \neq \emptyset$"
et par suite , "$E \neq \emptyset$" est une proposition vraie .

Par définition "X est strictement contenu dans Y" sera une relation synonyme de "$X \subset Y$ et $X \neq Y$" ; on peut donc dire que "$\emptyset$ est strictement contenu dans E" est une proposition vraie.

Comme (d'après nos conventions de langage antérieures) "X est une partie de E" est une identité , on remplace fréquemment les termes "partie du type T" par "partie (ou sous-ensemble) de l'ensemble fondamental E" , considérés comme synonymes ; de même , au lieu de dire "élément du type T" , on dira plus souvent "élément de l'ensemble fondamental E" .

Les parties formées d'un seul élément . Appliquons maintenant le principe de passage au type des parties , à la relation y=x et à l'argument y ; d'après ce principe , la relation

"quel que soit y , (si $y \in X$, y=x) et (si y=x , $y \in X$)"

est une relation fonctionnelle en ~~X~~ ; nous désignerons le symbole fonctionnel correspondant par $\{x\}$; on a donc la proposition

$$"y \in \{x\}" \rightleftarrows "y=x"$$

~~[illegible] est donc une [illegible] propriété par[illegible]~~
~~[illegible]~~
~~[illegible] (y=x)~~

"$y \in \{x\}$" est donc une relation fonctionnelle en y , autrement dit ,

"il existe un y et un seul tel que $y \in \{x\}$"

est partout vraie ; aussi la partie de T qu'on obtient en substituant à x dans le symbole fonctionnel $\{x\}$ un élément a quelconque du type T est-elle appelée <u>la partie de T formée du (ou réduite au) seul élément a</u> . Il faut bien entendu éviter soigneusement de confondre a , qui est un élément ~~XXXTX~~ du type T , et $\{a\}$, qui est un élément du type P(T) .

Proposition 4 . "$x \in X$" $\rightleftarrows$ "$\{x\} \subset X$" .

En effet , comme "$y \in \{x\}$" est une relation fonctionnelle en y , équivalente à "$y=x$" ,

"$x \in X$" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , $y \notin \{x\}$ ou $y \in X$"

(§ 1 ; propositions 2 et 12) , ce qui n'est autre que la proposition à démontrer .

Proposition 5 . "$X \subset \{x\}$" $\rightleftarrows$ "($X=\emptyset$) ou ($X=\{x\}$)" .

En effet "($y \notin X$) ou ($y \in \{x\}$)" $\rightleftarrows$ "($y \notin X$) ou ("$y \in X$" et "$y \in \{x\}$")" (règle 14 et distributivité)

Donc (règle X)

"$X \subset \{x\}$" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , $y \notin X$ ou ($y \in X$ et $y \in \{x\}$)" $\rightarrow$ "(quel que soit y , $y \notin X$) ou (il existe y tel que $y \in X$ et $y \in \{x\}$)"

Mais (proposition 3) "quel que soit y , $y \notin X$" $\rightleftarrows$ "$X=\emptyset$" ; et d'autre part , comme "$y \in \{x\}$" $\rightleftarrows$ "$y=x$" ,

"il existe y tel que $y \in \{x\}$ et $y \in X$" $\rightleftarrows$ "$x \in X$" $\rightleftarrows$ "$\{x\} \subset X$"

Donc "$X \subset \{x\}$" $\rightarrow$ "($X=\emptyset$) ou ($\{x\} \subset X$)" ; et , comme

"$X \subset \{x\}$" $\rightarrow$ "($X=\emptyset$) ou ($X \subset \{x\}$)"

"$X \subset \{x\}$" $\rightarrow$ "($X=\emptyset$) ou ($X \subset \{x\}$ et $\{x\} \subset X$)" $\rightleftarrows$ "($X=\emptyset$) ou ($X=\{x\}$)"

Réciproquement , comme "$\emptyset \subset Y$" est partout vraie , "$\emptyset \subset \{x\}$" est partout vraie (§ 1 , prop. 6) ; donc

"$X=\emptyset$" $\rightarrow$ "($X=\emptyset$) et ($\emptyset \subset \{x\}$)" $\rightarrow$ "$X \subset \{x\}$"

(§ 1 , propositions 1 et 5) . D'autre part (A-1 et prop. 5 du § 1)

"$X=\{x\}$" $\rightleftarrows$ "$X \subset \{x\}$ et $\{x\} \subset X$" $\rightarrow$ "$X \subset \{x\}$"

donc "($X=\emptyset$) ou ($X=\{x\}$)" $\rightarrow$ "$X \subset \{x\}$" , ce qui achève la démonstration.

Proposition 6 . "quel que soit X , si $x \in X$, $y \in X$" $\rightleftarrows$ "$y=x$" .

D'après E-4 , on a

"$y=x$" $\rightarrow$ "si $x \in X$, $y \in X$"

donc (règle de redoublement)

"$y=x$" $\rightarrow$ "quel que soit X , si $x \in X$, $y \in X$"

Réciproquement (§ 1 , prop.11)

"quel que soit X , si $x \in X$, $y \in X$" $\rightarrow$ "si $x \in \{x\}$, $y \in \{x\}$

$\rightarrow$ "si x=x , y=x" $\rightarrow$ "y=x"

puisque $x \neq x$ est partout fausse (règle 14) .

<u>Le complémentaire d'une partie</u> . Considérons la relation (entre un argument x d'un type T et un argument X du type P(T)) "$x \notin X$" , et appliquons-lui le principe de passage au type des parties : la relation

"quel que soit x , (si $x \in Y$, $x \notin X$) et (si $x \notin X$, $x \in Y$)"

est une relation fonctionnelle en Y ; on désignera par $\complement X$ le symbole fonctionnel qu'elle détermine ; "le complémentaire de X" sera considéré comme un nom synonyme de ce symbole . On a la proposition

(1) $$\text{"}x \notin X\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \in \complement X\text{"} .$$

Si on substitue à X , dans le symbole fonctionnel X , un élément A du type P(T) , l'élément $\complement A$ du type T qu'on obtient s'appelle <u>la partie (ou le sous-ensemble) de E complémentaire de A</u> .

La proposition (1) est synonyme de

$$\text{"}x \in X\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \notin \complement X\text{"}$$

Mais d'autre part , de "$x \notin Y$" $\rightleftarrows$ "$x \in \complement Y$" on déduit (prop.5 du § 1)

$$\text{"}x \notin \complement X\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \in \complement(\complement X)\text{"}$$

Donc $$\text{"}x \in X\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \in \complement(\complement X)\text{"}$$

par suite

"quel que soit x ,(si $x \in X$, $x \in \complement(\complement X)$) et (si $x \in \complement(\complement X)$, $x \in X$)"

est une propriété partout vraie ; donc (A-1)

$$\complement(\complement X)=X$$

est <u>une identité</u> .

D'après (1) et la proposition 3 du § 1

$$\text{"}x \in E\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \notin \complement E\text{"}$$

donc "quel que soit x , $x \in E$" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $x \notin \complement E$"

et comme "quel que soit x , $x \in E$" est ~~partout~~ vraie , il en est de même de "quel que soit x , $x \notin \complement E$" ; donc (prop.3) "$\complement E=\emptyset$" est vraie

On en déduit (prop.13 du § 1)

$$\complement\emptyset= \complement(\complement E)=E .$$

Enfin , d'après (1)

"$X \subset Y$" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $x \notin X$ ou $x \in Y$" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $x \in \complement X$ ou $x \notin \complement Y$" $\rightleftarrows$ "$\complement Y \subset \complement X$"

d'où
$$\text{"}X \subset Y\text{"} \rightleftarrows \text{"}\complement Y \subset \complement X\text{"} .$$

<u>Réunion ~~d~~et intersection de deux parties</u> . Appliquons le principe de passage au type des parties à la relation "$x \in X$ ou $x \in Y$" : la relation

"quel que soit x , si ($x \in X$ ou $x \in Y$) , $x \in Z$, et si $x \in Z$, ($x \in X$ ou $x \in Y$)"

est une relation fonctionnelle en Z ; nous désignerons par $X \cup Y$ le symbole fonctionnel qu'elle détermine , et qu'on nomme aussi "la réunion de X et de Y" ; on a

(2) $$\text{"}x \in X \text{ ou } x \in Y\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \in X \cup Y\text{"} .$$

En opérant de même sur la relation "$x \in X$ et $x \in Y$" , on voit que la relation

"quel que soit x , si ($x \in X$ et $x \in Y$) , $x \in Z$, et si $x \in Z$, ($x \in X$ et $x \in Y$)"

est une relation fonctionnelle en Z ; on désigne par $X \cap Y$, ou par le nom synonyme "l'intersection de X et de Y" le symbole fonctionnel qu'elle détermine , et on a

(3) $$\text{"}x \in X \text{ et } x \in Y\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \in X \cap Y\text{"} .$$

Si on substitue à X et Y respectivement des éléments A , B du type P(T) dans le symbole $X \cup Y$ (resp. $X \cap Y$) , l'élément $A \cup B$ (resp. $A \cap B$) du type P(T) qu'on obtient s'appelle <u>la réunion</u> (resp. <u>l'intersection) des parties A , B de E</u> .

<u>Proposition 7</u> . "Quels que soient X,Y, $\complement(X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y)$" .

"Quels que soient X,Y, $\complement(X \cap Y) = (\complement X) \cup (\complement Y)$".

En effet , d'après (2) , (3) et (1)

$$\text{"}x \in \complement(X \cup Y)\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \notin X \cup Y\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \notin X \text{ et } x \notin Y\text{"} \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows \text{"}x \in \complement X \text{ et } x \in \complement Y\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \in ((\complement X) \cap (\complement Y))\text{"}$$

d'où on déduit immédiatement , d'après A-1 que $\complement(X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y)$ est une <u>identité</u> . Démonstration analogue pour la seconde identité.

<u>Proposition 8</u> . "Quels que soient X , Y , $X\cup Y=Y\cup X$ et $X\cap Y=Y\cap X$" .

En effet "$x\in X\cup Y$" $\rightleftarrows$ "$x\in X$ ou $x\in Y$" $\rightleftarrows$ "$x\in Y$ ou $x\in X$" $\rightleftarrows$ "$x\in Y\cup X$"

et d'après A-1 , il en résulte que "$X\cup Y=Y\cup X$" est une identité .

Démonstration analogue pour l'intersection .

<u>Proposition 9</u> . "Quels que soient X,Y,Z, $X\cup(Y\cup Z)=(X\cup Y)\cup Z$,et $X\cap(Y\cap Z)=(X\cap Y)\cap Z$".

En effet , "$x\in X\cup(Y\cup Z)$" $\rightleftarrows$ "$x\in X$ ou ($x\in Y$ ou $x\in Z$)" $\rightleftarrows$ "($x\in X$ ou $x\in Y$) ou $x\in Z$" $\rightleftarrows$ "$x\in(X\cup Y)\cup Z$"

d'où la proposition pour la réunion , d'après A-1 ; même démonstration pour l'intersection . On considère le symbole $X\cup Y\cup Z$ comme synonyme du symbole fonctionnel $X\cup(Y\cup Z)$;de même pour l'intersection.

<u>Proposition 10</u> . "Quels que soient X,Y,Z, $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$ et $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$" .

En effet , "$x\in(X\cap Y)\cup Z$" $\rightleftarrows$ "($x\in X\cap Y$) ou $x\in Z$" $\rightleftarrows$ "($x\in X$ et $x\in Y$) ou $x\in Z$" $\rightleftarrows$ "($x\in X$ ou $x\in Z$) et ($x\in Y$ ou $x\in Z$)" $\rightleftarrows$ "($x\in X\cup Z$) et ($x\in Y\cup Z$)" $\rightleftarrows$ "$x\in(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$"

d'où la proposition pour la réunion ; même démonstration pour l'intersection .

On remarquera que la seconde partie de chacune des trois propositions précédentes se déduit de la première partie par un même procédé , dit <u>principe de dualité</u> : il consiste , étant donnée une identité A=B , où A et B représentent deux symboles fonctionnels du type P(T), contenant des arguments X,Y,Z , à en déduire l'identité $\complement A=\complement B$ (§ 1 , propositions 13 et 5) puis à appliquer la proposition 7/ l'identité $\complement(\complement X)=X$ pour faire disparaître les doubles complémentaires .

/ à remplacer chaque argument X, Y, Z, par le complémentaire d'un argument du même type, et à appliquer

Ce procédé , appliqué par exemple à l'identité "$X\cup Y=Y\cup X$" donne l'identité "$\complement(X\cup Y)=\complement(Y\cup X)$" , puis (prop.7) "$(\complement X)\cap(\complement Y)=(\complement Y)\cap(\complement X)$" ; en substituant à X le symbole fonctionnel $\complement Z$, à Y le symbole fonctionnel $\complement U$, il vient l'identité "$Z\cap U=U\cap Z$" , équivalente à "$X\cap Y=Y\cap X$" .

<u>Proposition 11</u> . "Quel que soit X , $X\cap(\complement X)=\emptyset$ et $X\cup(\complement X)=E$" .

La seconde partie de la proposition se déduit de la première par dualité et application de la proposition 8 ; il suffit donc de démontrer que "$X\cap(\complement X)=\emptyset$" est une identité .

Or , "$x\in X\cap(\complement X)$" $\rightleftarrows$ "$x\in X$ et $x\notin X$" , relation partout fausse ,

donc "quel que soit x , $x\notin X\cap(\complement X)$" est une identité , d'où résulte la proposition , d'après la proposition 3 .

<u>Proposition 12</u> . "$X\subset Y$" $\rightleftarrows$ "$X\cup Y=Y$" $\rightleftarrows$ "$X\cap Y=X$" .

Il suffit de démontrer que "$X\subset Y$" $\rightleftarrows$ "$X\cup Y=Y$" , car on en déduit que

~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX(XXX)XX(XXX)=XXXXXX((XXX)XX(XXX))X~~

$$"X\subset Y" \rightleftarrows "\complement Y\subset \complement X" \rightleftarrows "(\complement Y)\cup(\complement X)=\complement X" \rightleftarrows "\complement((\complement X)\cup(\complement Y))=X" \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows "X\cap Y=X" .$$

Il faut établir que "$X\subset Y$" $\rightleftarrows$ "($Y\subset X\cup Y$) et ($X\cup Y\subset Y$)" , d'après A-1.
Or "$Y\subset X\cup Y$" est une <u>identité</u> , car "$x\in Y$" $\rightarrow$ "$x\in Y$ ou $x\in X$" $\rightleftarrows$ "$x\in X\cup Y$" (règle II) ; d'après la règle 14 , tout revient donc à démontrer que "$X\subset Y$" $\rightleftarrows$ "$X\cup Y\subset Y$" . Or , (règles I et 14)

$$"x\notin X \text{ ou } x\in Y" \rightleftarrows "(x\notin X \text{ ou } x\in Y) \text{ et } (x\notin Y \text{ ou } x\in Y)" \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows "(x\notin X \text{ et } x\notin Y) \text{ ou } x\in Y" \rightleftarrows "x\notin X\cup Y \text{ ou } x\in Y"$$

d'où (règle 11)

"quel que soit x , si $x\in X$, $x\in Y$" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , si $x\in X\cup Y$, $x\in Y$"

ce qui est la proposition à démontrer .

<u>Corollaire 1 . Les relations</u>

"$X\cup X=X$" , "$X\cup\emptyset=X$" , "$X\cup E=E$"

"$X\cap X=X$" , "$X\cap\emptyset=\emptyset$" , "$X\cap E=X$"

<u>sont des identités</u> .

Ce sont en effet des conséquences de la proposition précédente et de la proposition 6 du § 1./

<u>Corollaire 2</u> . "$X\subset Y$" $\rightarrow$ "$X\cup Z\subset Y\cup Z$" ; "$X\subset Y$" $\rightarrow$ "$X\cap Z\subset Y\cap Z$" .

D'après le ~~s~~ corollaire 1 et la proposition 9

$(X\cup Z)\cup(Y\cup Z)=((X\cup Y)\cup Z)$ est une identité.

Or , (prop.12) "$X\subset Y$" $\rightleftarrows$ "$X\cup Y=Y$" ; on a donc

$$"X\subset Y" \rightarrow "(X\cup Z)\cup(Y\cup Z)=Y\cup Z" \rightleftarrows "X\cup Z\subset Y\cup Z"$$

en appliquant de nouveau la proposition 12 . Même démonstration pour la seconde proposition (qui se déduit d'ailleurs de la première par dualité) .

Corollaire 3 . "$X\cap Y=\emptyset$" $\rightleftarrows$ "$Y\subset \complement X$" ; "$X\cup Y=E$" $\rightleftarrows$ "$\complement Y\subset X$" .

Il suffit de démontrer la première proposition , la seconde s'en déduisant par dualité .

Or (proposition 10)

$$(X\cap Y)\cup((\complement X)\cap Y)=(X\cup \complement X)\cap Y=E\cap Y=Y$$

Donc , "$X\cap Y=\emptyset$" $\rightarrow$ "$(\complement X)\cap Y=Y$" $\rightarrow$ "$Y\subset \complement X$"

Réciproquement (corollaire 2)

$$\text{"}Y\subset \complement X\text{"}\rightarrow \text{"}(X\cap Y)\subset (X\cap \complement X)\text{"}\rightarrow \text{"}X\cap Y\subset \emptyset\text{"}\rightleftarrows \text{"}X\cap Y=\emptyset\text{"} .$$

Signalons encore , à propos de la réunion de deux arguments du type $P(T)$ que , si x et y sont deux arguments du type T , on donne au symbole fonctionnel composé $\{x\}\cup\{y\}$ le nom abrégé synonyme $\{x,y\}$; de même , $\{x,y,z\}$ sera un nom synonyme de $\{x,y\}\cup\{z\}$,(et par suite aussi de $\{x\}\cup\{y\}\cup\{z\}$); et ainsi de suite

Corollaire 4 . "$(Z\subset X)$ et $(Z\subset Y)$" $\rightarrow$ "$Z\subset X\cap Y$" ; "$(X\subset Z)$ et $(Y\subset Z)$" $\rightarrow$ $\rightarrow$ "$X\cup Y\subset Z$" .

Il suffit de démontrer la première proposition , la seconde s'en déduisant par dualité . D'après la proposition 12 ,

"$(Z\subset X)$ et $(Z\subset Y)$" $\rightleftarrows$ "$Z\cup X=X$ et $Z\cup Y=Y$" $\rightarrow$ "$(Z\cup X)\cap(Z\cup Y)=X\cap Y$" $\rightleftarrows$ $\rightleftarrows$ "$Z\cup(X\cap Y)=X\cap Y$" $\rightleftarrows$ "$Z\subset X\cap Y$" .

<u>L'extension d'une relation biunivoque aux types des parties</u> . Dans ce qui suit , de même qu'à la fin du § 1 , T et T' seront les noms de deux types distincts , ou deux noms synonymes d'un même type . Nous supposons donnée une relation $B\{x,x'\}$ <u>biunivoque</u> entre un argument x du type T et un argument x' du type T' .

Considérons la relation , entre x' et un argument X du type $P(T)$, "$\overset{-1}{f}_B(x')\in X$"; d'après la règle A-2 , la relation "quel que soit x' , si $\overset{-1}{f}_B(x')\in X$, $x'\in X'$, et si $x'\in X'$, $\overset{-1}{f}_B(x')\in X$" (où X' est un argument du type $P(T')$) est <u>fonctionnelle en X'</u> ; nous allons voir qu'elle est aussi <u>fonctionnelle en X</u> , autrement dit que c'est une relation <u>biunivoque</u> entre les types $P(T)$ et $P(T')$,

qu'on appelle l'<u>extension</u> de la relation B à ces types .
En effet , en remplaçant "$\overset{-1}{f}_B(x')\in X$" par la relation équivalente "il existe x tel que B et $x\in X$" , tenant compte de ce que B est fonctionnelle en x et fonctionnelle en x' , et appliquant la règle IX et la proposition 2 du § 1 , on a les équivalences
"quel que soit x' , ("quel que soit x , $\overline{B}$ ou $x\notin X$" ou $x'\in X'$) et ("quel que soit x , $\overline{B}$ ou $x\in X$" ou $x'\notin X'$)" $\rightleftarrows$ "quels que soient x , x', ($\overline{B}$ ou $x\notin X$ ou $x'\in X'$) et ($\overline{B}$ ou $x\in X$ ou $x'\notin X'$)" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , ("quel que soit x' , $\overline{B}$ ou $x'\notin X'$ " ou $x\in X$) et ("quel que soit x' , $\overline{B}$ ou $x'\in X'$ " ou $x\notin X$)"
et cette dernière relation est équivalente à
"quel que soit x , si $f_B(x)\in X'$, $x\in X$ et si $x\in X$, $f_B(x)\in X'$ "
relation qui est fonctionnelle en X , d'après A-2 .

Par un abus de langage (sans inconvénient pourvu qu'on précise bien ce que sont les arguments introduits) , nous désignerons par $f_B(X)$ le symbole fonctionnel déterminé par l'extension de B , en tant que relation fonctionnelle en X' , et par $\overset{-1}{f}_B(X')$ le symbole fonctionnel déterminé par cette même relation , en tant que relation fonctionnelle en X . On a donc (règle A-2) les équivalences

(4) "$\overset{-1}{f}_B(x')\in X$" $\rightleftarrows$ "$x'\in f_B(X)$" , "$f_B(x)\in X'$ " $\rightleftarrows$ "$x\in\overset{-1}{f}_B(X')$"

d'où on déduit , par application de la prop.5 du § 1 , et en se rappelant que $x=\overset{-1}{f}_B(f_B(x))$, $x'=f_B(\overset{-1}{f}_B(x'))$,

(5) "$x\in X$" $\rightleftarrows$ "$f_B(x)\ \ f_B(X)$" , "$x'\in X'$ " $\rightleftarrows$ "$\overset{-1}{f}_B(x')\in\overset{-1}{f}_B(X')$"

On en tire les <u>identités</u>

$f_B(X\cup Y)=f_B(X)\cup f_B(Y)$; $f_B(X\cap Y)=f_B(X)\cap f_B(Y)$; $f_B(\complement X)=\complement f_B(X)$; $f_B(\{x\})=\{f_B(x)\}$; $f_B(\emptyset)=\emptyset$; $f_B(E)=E'$ (E , E' ensembles fondamentaux des types T , T') .

Démontrons par exemple la première , la quatrième et la cinquième de ces identités , laissant au lecteur le soin de démontrer de façon analogue les autres .

On a d'abord

$$"x' \in f_B(X) \cup f_B(Y)" \rightleftarrows "x' \in f_B(X) \text{ ou } x' \in f_B(Y)" \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows "\overset{-1}{f}_B(x') \in X \text{ ou } \overset{-1}{f}_B(x') \in Y" \rightleftarrows "\overset{-1}{f}_B(x') \in X \cup Y" \rightleftarrows "x' \in f_B(X \cup Y)"$$

c'est-à-dire (A-1) que

$$f_B(X) \cup f_B(Y) = f_B(X \cup Y)$$

est une identité .

De même , y' un argument du type T'

$$"y' \in f_B(\{x\})" \rightleftarrows "\overset{-1}{f}_B(y') \in \{x\}" \rightleftarrows "\overset{-1}{f}_B(y') = x" \rightleftarrows "B\{x, y'\}" \rightleftarrows "y' = f_B(x)" \rightleftarrows$$

$$\rightleftarrows "y' \in \{f_B(x)\}"$$

d'où (A-1) on tire que

$$f_B(\{x\}) = \{f_B(x)\}$$

est une identité .

Enfin , comme de (4) on tire que "$\overset{-1}{f}_B(x') \notin X$" $\rightleftarrows$ "$x' \notin f_B(X)$" , on a

$$"x' \notin f_B(\emptyset)" \rightleftarrows "\overset{-1}{f}_B(x') \notin \emptyset"$$

Comme "$\overset{-1}{f}_B(x') \notin \emptyset$" est partout vraie (§ 1 , prop.6) , il en est de même de "$x' \notin f_B(\emptyset)$" donc (prop.3) "$f_B(\emptyset) = \emptyset$" est une proposition vraie .

§ 3./ Sous-types et types produits .

Sous-types d'un type donné . Soit T un type quelconque , A un élément quelconque différent de $\emptyset$ du type $P(T)$; nous considérons que les termes "le sous-type de T correspondant à A" et la combinaison de signes T_A sont des noms synonymes d'un nouvel objet de l'espèce des types ; de plus , si x est un argument quelconque du type T , x_A un argument quelconque du type T_A (nous adopterons , dans la partie de ce paragraphe consacrée aux sous-types , la convention de désigner par des lettres affectées de l'indice A les arguments du type T_A) , nous considérons que la combinaison $K_A\{x,x_A\}$ est *une relation fonctionnelle en x* , dite *relation canonique entre x et* x_A ; $k_A(x_A)$, ou simplement $k(x_A)$, s'il n'y a pas de confusion possible , seront les noms du symbole fonctionnel déterminé par cette relation , qui est donc équivalente à $x=k_A(x_A)$. Enfin , nous posons les deux règles suivantes , relatives à cette relation :

S-1 . "Il existe x_A tel que $x=k(x_A)$" $\rightleftarrows$ "$x\in A$" .

S-2 . "Il existe au plus un x_A tel que $x=k(x_A)$" est *partout vraie* ; autrement dit , si x_A et y_A sont deux arguments du type T_A

$$"k(x_A)=k(y_A)" \rightleftarrows "x_A=y_A" .$$

Comme toute relation fonctionnelle en x , la relation canonique permet de passer d'une relation R contenant x à la relation ρR_A obtenue en substituant à x dans R le symbole fonctionnel correspondant , ici $k(x_A)$; mais elle permet aussi de passer inversement d'une relation S contenant x_A à la relation suivante , que nous désignerons par S^K : "il existe x_A tel que $x=k(x_A)$ et S" ; on a de plus la proposition suivante :

<u>Proposition 1. Soit R une relation contenant x, mais ne contenant pas x_A, et soit S une relation contenant x_A, mais ne contenant pas x ; on a</u>

$$(R_A)^K \rightleftarrows \text{"}x \in A \text{ et } R\text{"} \quad ; \quad (S^K)_A \rightleftarrows S \ .$$

En effet, soit y un argument du même type que x et distinct des arguments figurant dans R, et soit R_y la relation obtenue en substituant y à x dans R ; on a "R_A" $\rightleftarrows$ "il existe y tel que $y=k(x_A)$ et R_y", donc

$(R_A)^K \rightleftarrows$ "il existe x_A tel que $x=k(x_A)$ et (il existe y tel que $y=k(x_A)$ et R_y)" $\rightleftarrows$ "il existe y,x_A tels que $x=k(x_A)$ et $y=k(x_A)$ et R_y"

d'après la règle IX, puisque x_A n'est pas effectif dans R ; comme (E-2, E-3 et proposition 5 du § 1) "$x=k(x_A)$ et $y=k(x_A)$" $\rightleftarrows$ "$x=k(x_A)$ et $x=y$", on a

$(R_A)^K \rightleftarrows$ "il existe y,x_A tels que $x=k(x_A)$ et $x=y$ et R_y" $\rightleftarrows$ "(il existe x_A tel que $x=k(x_A)$) et (il existe y tel que $x=y$ et R_y)"

d'où finalement (règle S-1 et prop.12 du § 1)

$(R_A)^K \rightleftarrows$ "(il existe x_A tel que $x=k(x_A)$) et R" $\rightleftarrows$ "$x \in A$ et R"

De même, soit y_A un argument du type T_A, distinct des arguments figurant dans S, et soit S_{y_A} la relation obtenue en substituant y_A à x_A dans S ; on a

$$(S^K)_A \rightleftarrows \text{"il existe } y_A \text{ tel que } k(x_A)=k(y_A) \text{ et } S_{y_A}\text{"}$$

d'où (règle S-2 et prop.12 du § 1)

$$(S^K)_A \rightleftarrows \text{"il existe } y_A \text{ tel que } x_A=y_A \text{ et } S_{y_A}\text{"} \rightleftarrows \text{"S"} \ .$$

 58

<u>Proposition 2 . S étant une relation quelconque contenant</u> x_A

"S^K" $\rightleftarrows$ "(quel que soit x_A , $x\neq k(x_A)$ ou S) et $x\in A$"

En effet , d'après la règle S-2 et une remarque faite au sujet de la démonstration de la prop.2 du § 1 ,

~~quel que soit x_A , $x\neq k(x_A)$ ou S S^K~~

"S^K" $\rightarrow$ "quel que soit x_A , $x\neq k(x_A)$ ou S"

et d'autre part

"S^K" $\rightleftarrows$ "il existe x_A tel que $x=k(x_A)$ et S" $\rightarrow$ "il existe x_A tel que $x=k(x_A)$" $\rightleftarrows$ "$x\in A$" , d'après la règle S-1 , ce qui démontre la première partie de la proposition .

Réciproquement (règle S-1 et règle X)

"(quel que soit x_A , $x\neq k(x_A)$ ou S) et $x\in A$" $\rightleftarrows$ "(quel que soit x_A , $x\neq k(x_A)$ ou S) et (il existe x_A tel que $x=k(x_A)$)" $\rightarrow$ "il existe x_A tel que $x=k(x_A)$ et ($x\neq k(x_A)$ ou S)" $\rightleftarrows$ "il existe x_A tel que ($x=k(x_A)$ et $x\neq k(x_A)$) ou ($x=k(x_A)$ et S)" $\rightleftarrows$ "S^K"

puisque "$x=k(x_A)$ et $x\neq k(x_A)$" est partout fausse (règle 14) .

<u>Corollaire 1 . S et</u> <u>U étant deux relations quelconques contenant</u> x_A , y <u>un argument distinct de x et</u> x_A

(1) $(\overline{S})^K \rightleftarrows$ "$(\overline{S^K})$ et $x\in A$"

(2) $(S \text{ ou } U)^K \rightleftarrows$ "S^K ou U^K"

(3) $(S \text{ et } U)^K \rightleftarrows$ "S^K et U^K"

(4) (quel que soit y , S$)^K \rightleftarrows$ "quel que soit y , S^K"

(5) (il existe y tel que S$)^K \rightleftarrows$ "il existe y tel que S^K"

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter les démonstrations de ces propositions , qui sont conséquences des règles VII et IX , de la définition de S^K et de la proposition 2 .

<u>Proposition 3 . Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 1,</u>

(6) "il existe x tel que $x \in A$ et R" $\rightleftarrows$ "il existe x_A tel que R_A"

(7) "quel que soit x , $x \notin A$ ou R" $\rightleftarrows$ "quel que soit x_A , R_A"

(8) "il existe x_A tel que S" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que S^K"

(9) "quel que soit x_A , S" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $x \notin A$ ou S^K"

En effet , d'après la règle S-1 et la règle IX , R ne contenant pas x_A ,

"il existe x tel que $x \in A$ et R" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que R et (il existe x_A tel que $x=k(x_A)$)" $\rightleftarrows$ "il existe x_A tel que (il existe x tel que $x=k(x_A)$ et R)" $\rightleftarrows$ "il existe x_A tel que R_A"

ce qui démontre (6) ; (7) s'en déduit immédiatement en appliquant (6) à $\overline{R}$. D'autre part , comme S^K ne contient pas x_A , et que $(S^K)_A \rightleftarrows S$, en appliquant (6) et (7) à la relation S^K , on en déduit respectivement (8) et (9) , en tenant compte de ce que $S^K \rightleftarrows$ "S^K et $x \in A$" d'après la proposition 2 .

<u>Corollaire 1 . R et T étant deux relations contenant x et ne contenant pas</u> x_A , <u>S et U deux relations contenant</u> x_A <u>et ne contenant pas x</u> ,

"$S \rightarrow U$" $\rightleftarrows$ "$S^K \rightarrow U^K$"

"$R \rightarrow (x \notin A$ ou $T)$" $\rightleftarrows$ "$R_A \rightarrow T_A$"

Démontrons par exemple la première de ces propositions ; on a

"quel que soit x_A , $\overline{S}$ ou U" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $x \notin A$ ou $(\overline{S})^K$ ou U^K" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $x \notin A$ ou ($x \in A$ et $\overline{(S^K)}$) ou U^K" $\rightleftarrows$ "quel que soit x ,($x \notin A$ ou $\overline{(S^K)}$) ou U^K"

d'après (9) , (2) et (1) ; d'où immédiatement

"$S \rightarrow U$" $\rightleftarrows$ "($x \in A$ et $S^K) \rightarrow U^K$" $\rightleftarrows$ "$S^K \rightarrow U^K$"

en tenant compte de ce que "$x \in A$ et S^K" $\rightleftarrows S^K$. Démonstration analogue pour la seconde proposition .

<u>Corollaire 2 . Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 1,</u>

<u>supposons de plus que "$x \in A$ et R" soit une relation fonctionnelle</u>

en x , et que S soit une relation fonctionnelle en x_A ; alors R_A est une relation fonctionnelle en x_A et S^K une relation fonctionnelle en x .

En effet , d'après (6) , "il existe x_A tel que R_A" est partout vrai; d'autre part , en désignant par x' un argument du type de x , distinct des arguments figurant dans R , par R' la relation obtenue en substituant x' à x dans R , on a par hypothèse

$$"x\in A \text{ et } R \text{ et } x'\in A \text{ et } R'" \rightarrow "x=x'"$$

d'après le corollaire 1 , cette proposition est équivalente à

$$"R_A \text{ et } R'_A" \rightarrow "x_A=x'_A"$$

où x'_A est un argument du même type que x_A , ne figurant pas dans R, et R'_A la relation R' où on a substitué $k(x'_A)$ à x' ; cela démontre donc que R_A est une relation fonctionnelle en x_A . On raisonnerait demême pour S^K , mais il est aussi simple de remarquer que le fait que S^K est fonctionnelle en x résulte du principe des relations fonctionnelles composées .

Cette dernière remarque montre que , si f(y,z,u) est par exemple le symbole fonctionnel de S , on pourra prendre comme symbole fonctionnel de S^K , la combinaison k(f(y,z,u)) . Pour symbole fonctionnel de R_A , on prendra , par un abus de langage , le symbole fonctionnel de "$x\in A$ et R"

X_A étant un argument du type $P(T_A)$, considérons la relation

$$(x_A\in X_A)^K$$

C'est une relation entre x et X_A ; en lui appliquant le principe de passage au type des parties , on en déduit une relation entre X_A et un argument X du type P(T) , relation fonctionnelle en X , dont nous désignerons (par un abus de langage) le symbole fonctionnel correspondant par $k(X_A)$; on a donc

$$"x\in k(X_A)" \rightleftarrows "(x_A\in X_A)^K" \rightleftarrows "\text{il existe } x_A \text{ tel que } x=k(x_A) \text{ et } x_A\in X_A"$$

D'après la proposition 3 , $(x_A\in X_A)^K \rightarrow "x\in A"$, donc $"x\in k(X_A)" \rightarrow$ $\rightarrow "x\in A"$, autrement dit "$k(X_A)\subset A$" est une identité .

~~En particulier~~, Si E_A est l'ensemble fondamental du type T_A , on a ~~$k(E_A)\in A$; d'autre part ,~~

$$"\text{quel que soit } x_A ,\ x_A\in E_A" \rightarrow "\text{quel que soit } x_A ,\ x\neq k(x_A) \text{ ou } x_A\in E_A"$$

donc , cette dernière relation est partout vraie , ~~donc~~ d'où (prop. 2 et règle 14) $"x\in A" \rightleftarrows (x_A\in E_A)^K \rightleftarrows "x\in k(E_A)"$, ~~d'où~~ et il en résulte que $k(E_A)=A$.

D'après (1) $\quad (x_A\in \complement X_A)^K \rightleftarrows "\overline{(x_A\in X_A)^K} \text{ et } x\in A"$

donc $\quad "x\in k(\complement X_A)" \rightleftarrows "x\in \complement k(X_A) \text{ et } x\in A"$

autrement dit $\quad k(\complement X_A)=A\cap \complement k(X_A)$

D'après (2) $\quad ((x_A\in X_A) \text{ ou } (x_A\in Y_A))^K \rightleftarrows ((x_A\in X_A)^K \text{ ou } (x_A\in Y_A)^K)$

donc $\quad$ "$x\in k(X_A\cup Y_A)$" $\rightleftarrows$ "$x\in k(X_A)$ ou $x\in k(Y_A)$"

autrement dit $\quad$ $k(X_A\cup Y_A)=k(X_A)\cup k(Y_A)$

De la même manière , en s'appuyant sur (3) on montre que

$$k(X_A\cap Y_A)=k(X_A)\cap k(Y_A)$$

<u>Exercices</u> . 1) Déduire cette dernière formule des deux précédentes . ~~3°) Montrer que "$X_A\subset Y_A$" → "$k(X_A)\subset k(Y_A)$"~~

2) Montrer que $k(\emptyset)=\emptyset$, et que $k(\{x_A\})=\{k(x_A)\}$.

X étant un argument du type P(T) , considérons maintenant la relation $(x\in X)_A\rightleftarrows$ "$k(x_A)\in X$" entre x_A et X ; par passage au type des parties , on en déduit une relation entre X et un argument X_A du type $P(T_A)$,relation <u>fonctionnelle en</u> X_A , dont nous désignerons le symbole fonctionnel par $\overset{-1}{k}(X)$; on a donc

~~XXXXXX(X)"XX"X(XX AXXXXXXXXXXXXXX~~ $\quad$ "$x_A\in \overset{-1}{k}(X)$" $\rightleftarrows$ "$k(x_A)\in X$"

D'après la proposition 1 , on a

$$((x\in X)_A)^K \rightleftarrows (x_A\in \overset{-1}{k}(X))^K \rightleftarrows \text{"}x\in A \text{ et } x\in X\text{"}$$

d'où $\quad$ $k(\overset{-1}{k}(X))=A\cap X$ $\quad$ identiquement .

De même $\quad$ $((x_A\in X_A)^K)_A \rightleftarrows (x\in k(X_A))_A \rightleftarrows$ "$x_A\in \overset{-1}{k}(k(X_A))$" $\rightleftarrows$ "$x_A\in X_A$"

d'où $\quad$ $\overset{-1}{k}(k(X_A))=X_A$ $\quad$ identiquement .

<u>Exercices</u> . 1) Démontrer les identités

$\overset{-1}{k}(\complement X)=\complement \overset{-1}{k}(X)$ $\quad$, $\overset{-1}{k}(X\cup Y)=\overset{-1}{k}(X)\cup \overset{-1}{k}(Y)$ $\quad$, $\overset{-1}{k}(X\cap Y)=\overset{-1}{k}(X)\cap \overset{-1}{k}(Y)$

2) Démontrer que "$X\subset Y$" → "$\overset{-1}{k}(X)\subset \overset{-1}{k}(Y)$" .

3) Démontrer que $\overset{-1}{k}(\emptyset)=\emptyset$, ~~K(E)~~ $\overset{-1}{k}(E)=E_A$.

5. Montrer que "$X_A\subset Y_A$" $\rightleftarrows$ "$k(X_A)\subset k(Y_A)$"

4) Montrer que

"$x\in A$" $\rightleftarrows$ "il existe x_A tel que $\overset{-1}{k}(\{x\})=\{x_A\}$. !

Notons encore qu'on a "$X=k(X_A)$" → "$\overset{-1}{k}(X)=\overset{-1}{k}(k(X_A))$" → "$\overset{-1}{k}(X)=X_A$" , et d'autre part "$X_A=\overset{-1}{k}(X)$ et $X\subset A$" → "$k(X_A)=k(\overset{-1}{k}(X))$ et $A\cap X=X$" → "$k(X_A)=A\cap X$ et $A\cap X=X$" → "$X=k(X_A)$" , d'où

$$\text{"}X=k(X_A)\text{"} \rightleftarrows \text{"}X\subset A \text{ et } X_A=\overset{-1}{k}(X)\text{"}$$

En appliquant le principe de passage au type des parties à la propriété "$X\subset A$" , on obtient une propriété déterminante dans le type $P(P(T))$; soit $\mathfrak{a}$ l'élément de ce type (partie de $P(T)$) qu'elle détermine ; on a "$X\subset A$" $\rightleftarrows$ "$X\in\mathfrak{a}$" . Soit alors $(P(T))_{\mathfrak{a}}$ le sous-type de $P(T)$ correspondant à $\mathfrak{a}$, $X_{\mathfrak{a}}$ un argument de ce type , $X=k'(X_{\mathfrak{a}})$ la relation canonique entre X et $X_{\mathfrak{a}}$. Montrons que "$k(X_A)=k'(X_{\mathfrak{a}})$" est une relation biunivoque . En effet , "$X_A=\overset{-1}{k}(k(X_A))$" étant une identité

"$k(X_A)=k'(X_{\mathfrak{a}})$" $\rightleftarrows$ "il existe X tel que $X_A=\overset{-1}{k}(X)$ et $X=k(X_A)$ et $k(X_A)=k'(X_{\mathfrak{a}})$" $\rightarrow$ "il existe X tel que $X_A=\overset{-1}{k}(X)$ et $X=k'(X_{\mathfrak{a}})$" $\rightarrow$ ~~XXXXXXXXXX~~ $\rightarrow$ "$X_A=\overset{-1}{k}(k'(X_{\mathfrak{a}}))$"

et réciproquement

"$X_A=\overset{-1}{k}(k'(X_{\mathfrak{a}}))$" $\rightarrow$ "$k(X_A)=k(\overset{-1}{k}(k'(X_{\mathfrak{a}})))$" $\rightarrow$ ~~XXXXXXXXXXXXXX~~ $\rightarrow$ "$k(X_A)=A\cap k'(X_{\mathfrak{a}})$" $\rightarrow$ "$k(X_A)=k'(X_{\mathfrak{a}})$"

puisque $k'(X_{\mathfrak{a}})\subset A$ est une identité d'après ~~XXX~~ S-1 . Ceci montre que la relation considérée est fonctionnelle en X_A . D'autre part "$k(X_A)\in\mathfrak{a}$" est une identité , et d'après S-1 , "$k(X_A)\in\mathfrak{a}$" $\rightarrow$ "il existe $X_{\mathfrak{a}}$ tel que $k(X_A)=k'(X_{\mathfrak{a}})$" , donc cette relation est partout vraie ; enfin "$k(X_A)=k'(X_{\mathfrak{a}})$ et $k(X_A)=k'(Y_{\mathfrak{a}})$" $\rightarrow$ "$k'(X_{\mathfrak{a}})=k'(Y_{\mathfrak{a}})$" $\rightarrow$ "$X_{\mathfrak{a}}=Y_{\mathfrak{a}}$" d'après S-2 , ce qui ~~XXXXXXXXX~~ achève de démontrer la proposition .

Il en résulte qu'il est inutile de considérer le sous-type ~~XXX(P(~~ $(P(T))_{\mathfrak{a}}$, le type $P(T_A)$ jouant exactement le même rôle , et la relation $X=k(X_A)$ le rôle de la relation canonique ; on peut donc appliquer aux types $P(T)$ et $P(T_A)$ et à cette relation tout ce qui a été établi ci-dessus pour les types T , T_A et la relation $x=k(x_A)$. On notera seulement qu'ici , ~~XXXXXXXXXX~~ si S est une relation contenant X_A , ~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ "il existe X_A tel que $X=k(X_A)$ et S" $\rightleftarrows$ "il existe X_A tel que $X_A=\overset{-1}{k}(X)$ et $X\subset A$ et S" $\rightleftarrows$ "$X\subset A$ et S'" , où S' désigne la relation S ~~où~~ dans laquelle on a substitué le symbole fonctionnel $\overset{-1}{k}(X)$ à ~~XX~~ X_A . De même , si R est une relation contenant X , "il existe X tel que $X=k(X_A)$ et $X\subset A$ et R" $\rightleftarrows$ "il existe X tel que $X_A=\overset{-1}{k}(X)$ et $X\subset A$ et R" ; si de plus R ne contient pas X_A , et "$X\subset A$ et R" est une relation fonctionnelle en X , "il existe X tel que $X=k(X_A)$ et $X\subset A$ et R" sera une relation fonctionnelle en X_A , dont le symbole fonctionnel sera $\overset{-1}{k}(g(x,y,v))$ d'après le principe des relations fonctionnelles composées , si $g(x,y,v)$ était par exemple celui de "$X\subset A$ et R" ; on n'aura donc pas besoin ici de commettre l'abus de langage que nous avons signalé à propos du corollaire 2 de la prop.3 .

Dans le cas particulier où $A=E$ (ensemble fondamental du type T) ~~X_A~~ les règles S-1 et S-2 ne font qu'énoncer le fait que $x=k(x_A)$ est une relation fonctionnelle en x_A , et par suite une relation biunivoque entre x et x_A .

Soit maintenant (A étant une partie quelconque de E) , B une partie quelconque de E telle que $B\subset A$, et posons $B_A=\overset{-1}{k}_A(B)$; on a $k_A(B_A)=k_A(\overset{-1}{k}_A(B))=A\cap B=B$. Soient T_A , T_B les sous-types de T correspondant à A et B respectivement , et T_{B_A} le sous-type de T_A correspondant à B_A ; la relation $k_A(k_{B_A}(x_{B_A}))=k_B(x_B)$ est *biunivoque* (*transitivité* des sous-types). En effet, $k_B(x_B)\in B$ est une identité, donc aussi, $k_B(x_B)\in A$; par suite (d'après S-1), il en est de même de "il existe x_A tel que $k_A(x_A)=k_B(x_B)$ et $x_A\in B_A$", puisque "$k_A(x_A)\in B$" $\rightleftarrows$ "$x_A\in \overset{-1}{k}_A(B)$". Comme d'autre part, "$x_A\in B_A$" $\rightleftarrows$ "il existe x_{B_A} tel que $x_A=k_{B_A}(x_{B_A})$", on voit que "il existe x_{B_A} tel que $k_A(k_{B_A}(x_{B_A}))=k_B(x_B)$" est partout vraie ; d'autre part "$k_A(k_{B_A}(x_{B_A}))=k_A(k_{B_A}(y_{B_A}))$" $\rightarrow$ "$k_{B_A}(x_{B_A})=k_{B_A}(y_{B_A})$" $\rightarrow$ "$x_{B_A}=y_{B_A}$", ce qui achève de montrer que la relation considérée ci-dessus est *fonctionnelle en* x_{B_A}. En second lieu, comme "$k_{B_A}(x_{B_A})\in B_A$" est une identité, il en est de même de $k_A(k_{B_A}(x_{B_A}))\in k_A(B_A)$, et par suite de "$k_A(k_{B_A}(x_{B_A}))\in B$" ; d'après S-1, "il existe x_B tel que $k_A(k_{B_A}(x_{B_A}))=k_B(x_B)$" est donc partout vraie ; par ailleurs, "$k_B(x_B)=k_B(y_B)$" $\rightarrow$ "$x_B=y_B$", ce qui complète la démonstration de la proposition.

Il en résulte que, si $A=B$, la relation $k_A(x_A)=k_B(x_B)$ est une relation *biunivoque* entre les sous-types T_A et T_B.

Enfin, soient T, T' deux types, et $B\{x,x'\}$ une relation *biunivoque* entre un argument x de T et un argument x' de T' ; soit A une partie quelconque de T, et désignons par A' la partie $f_B(A)$, par $T'_{A'}$ le sous-type de T' correspondant à A' ; la relation $B\{k(x_A),k'(x'_{A'})\}$ est *biunivoque* ; en effet, $k(x_A)\in A$ est une identité, donc il en est de même de $f_B(k(x_A))\in A'$; d'après S-1, "il existe $x'_{A'}$ tel que $k'(x'_{A'})=f_B(k(x_A))$" est donc partout vraie ; comme de plus "$k'(x'_{A'})=k'(y'_{A'})$" $\rightarrow$ "$x'_{A'}=y'_{A'}$" d'après S-2, on voit que la relation considérée est fonctionnelle en $x'_{A'}$; on montrerait de même qu'elle est fonctionnelle en x_A ; on dit que cette relation est l'*extension* de la relation biunivoque B aux sous-types T_A, $T'_{A'}$.

Types produits. Dans ce qui suit, les symboles T_α, T_β, T_γ, sont les noms de trois types (ce nombre n'ayant été choisi que pour fixer les idées) distincts ou non (c'est-à-dire que T_α et T_β , par exemple , peuvent être deux noms synonymes du même type) . Nous considérons que les symboles $T_{\lambda\mu\nu}$ ou$(T_\lambda, T_\mu, T_\nu)$, où il faut remplacer λ, μ, ν par les indices α, β, γ dans un ordre quelconque , sont des noms synonymes d'un même type nouveau , dit type produit des types T_α , T_β, T_γ . De plus , si u,v,w sont respectivement des arguments des types T_α , T_β , T_γ et x un argument du type $T_{\alpha\beta\gamma}$, nous considérons que les symboles $C_\alpha^{\alpha\beta\gamma}\{u,x\}$, $C_\beta^{\alpha\beta\gamma}\{v,x\}$ $C_\gamma^{\alpha\beta\gamma}\{w,x\}$ sont les noms de trois relations ~~fonctionnelles en u, et dont on désignera les symboles fonctionnels correspondants respectivement par c(u), c(v), c(w)~~ respectivement fonctionnelles en u,v,w ; on désignera les symboles fonctionnels qu'elles déterminent respectivement par $c_\alpha^{\alpha\beta\gamma}(x)$, $c_\beta^{\alpha\beta\gamma}(x)$, $c_\gamma^{\alpha\beta\gamma}(x)$, ou plus simplement par $c_\alpha(x)$, $c_\beta(x)$, $c_\gamma(x)$ si aucune confusion n'est à craindre ; "la coordonnée d'indice α de x" est encore considéré comme un nom synonyme de $c_\alpha(x)$, et de même pour les autres . Enfin , nous posons la règle fondamentale suivante :

P . La relation

$$"u=c_\alpha(x) \text{ et } v=c_\beta(x) \text{ et } w=c_\gamma(x)"$$

est une relation fonctionnelle en x ; autrement dit

$$"c_\alpha(x)=c_\alpha(y) \text{ et } c_\beta(x)=c_\beta(y) \text{ et } c_\gamma(x)=c_\gamma(y)" \rightarrow "x=y" \text{ et}$$

"quels que soient u,v,w , il existe x tel que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$" sont deux propositions vraies .

Pour nom du symbole fonctionnel déterminé par cette relation , nous prendrons l'un quelconque des symboles tels que $(\overset{\gamma}{w}, \overset{\alpha}{u}, \overset{\beta}{v})$, tous les symboles qu'on obtient en écrivant ainsi les trois signes $\overset{\alpha}{u}$, $\overset{\beta}{v}$, $\overset{\gamma}{w}$ dans un ordre quelconque étant considérés comme synonymes ; mais , plus fréquemment, pour simplifier l'écriture , nous conviendrons d'écrire une fois pour toutes les indices α, β, γ dans cet ordre , et nous prendrons simplement comme symbole fonctionnel synonyme des précédents la combinaison (u,v,w) .

Il faut bien prendre garde que cette convention (ainsi que la convention analogue que nous ferons un peu plus loin concernant les produits de parties) n'implique nullement qu'il faille considérer qu'il y a <u>plusieurs</u> types produits des trois types T_α , T_β , T_γ, suivant l'ordre dans lequel on les énumère ; on pourrait en effet être tenté de prendre (v,u,w) par exemple , comme un nouveau symbole fonctionnel correspondant à un autre produit de ces trois types ; nous n'admettons nullement cette manière de voir : si T_α et T_β désignent deux types <u>distincts</u> , (v,u,w) <u>n'a pas de sens</u> , car la combinaison de signes "$v=c_\alpha(x)$" n'en a aucun , $c_\alpha(x)$ n'étant pas un symbole fonctionnel qu'on puisse substituer à un argument de type T_β ; si au contraire T_α et T_β sont des noms synonymes du <u>même</u> type , (v,u,w) est le symbole fonctionnel de la relation

$$\text{"}v=c_\alpha(x) \text{ et } u=c_\beta(x) \text{ et } w=c_\gamma(x)\text{"}$$

d'après nos conventions .

On peut encore présenter le point de vue sous lequel nous considérons la notion de type produit de la manière suivante : chaque fois qu'on s'est donné des types , qu'on a attaché à chacun d'entre eux un certain nombre de noms synonymes , on a le droit d'introduire d'une part un nouveau type , uniquement déterminé par les types donnés et le nombre de noms synonymes pris pour chacun d'eux , d'autre part autant de relations fonctionnelles entre un argument de ce nouveau type et un argument de l'un des types donnés que l'on a pris de noms synonymes pour ce dernier ; c'est uniquement pour distinguer ces relations les unes des autres qu'on introduit des indices ou qu'on les range suivant un ordre conventionnel .

Il est à remarquer de plus qu'en vertu de la règle P , si T_α et T_β représentent le <u>même</u> type , les relations fonctionnelles $C_\alpha^{\alpha\beta\gamma}\{u,x\}$ et $C_\beta^{\alpha\beta\gamma}\{v,x\}$ ne sont pas équivalentes si l'ensemble fondamental de ce type n'est pas un ensemble à un seul élément, c'est-à-dire si "il existe u,v, tel que $u\neq v$ " est vraie ; en effet (règle X)

"(quel que soit u,v,w, il existe x tel que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$) et (il existe u,v, tels que $u\neq v$)" $\rightarrow$ "il existe u,v, w,x tels que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $u\neq v$" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que $c_\alpha(x)\neq c_\beta(x)$" ,

ce qui montre bien que $c_\alpha(x)=c_\beta(x)$ n'est pas une identité .

Avec ces notations , on a les <u>identités</u>

(1) $u=c_\alpha((u,v,w))$, $v=c_\beta((u,v,w))$, $w=c_\gamma((u,v,w))$, $x=(c_\alpha(x),c_\beta(x),c_\gamma(x))$

En effet

"$u=c_\alpha((u,v,w))$" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que $u=c_\alpha(x)$ et $x=(u,v,w)$" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que $u=c_\alpha(x)$ et ($u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$)" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$"

~~proposition~~ relation partout vraie d'après la règle P . On démontre de même les autres identités .

Les relations fonctionnelles que nous avons introduites permettent d'effectuer un double passage : d'une part , d'une ~~la~~ relation contenant au plus un seul argument (respectivement u,v,w par exemple) de chacun des types T_α , T_β , T_γ , à une relation ne contenant plus ces arguments mais contenant l'argument x du type produit , en substituant $c_\alpha(x)$ à u , $c_\beta(x)$ à v , $c_\gamma(x)$ à w ; si R était la relation primitive , on désignera en abrégé par R^P la nouvelle relation obtenue ainsi . Inversement , on passera d'une relation S contenant x à une relation ne contenant plus x , mais contenant u,v,w , en substituant (u,v,w) à x dans S ; on désignera en abrégé par S_P la relation ainsi obtenue .

<u>Proposition 4 . Si R est une relation quelconque contenant u,v,w mais ne contenant pas x , et S une relation quelconque contenant x mais ne contenant pas u,v,w, on a</u>

$$(R^P)_P \rightleftarrows R \qquad , \qquad (S_P)^P \rightleftarrows S$$

En effet , soient u',v',w', trois arguments respectivement des types T_α , T_β , T_γ , distincts des arguments figurant dans R , et soit R' la relation obtenue en remplaçant u,v,w respectivement par u',v',w' dans R ; on a

$(R^P)_P \rightleftarrows$ "il existe x tel que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$ et (il existe u',v',w' tels que $u'=c_\alpha(x)$ et $v'=c_\beta(x)$ et $w'=c_\gamma(x)$ et R')" $\rightleftarrows$ "il existe x,u',v',w', tels que $u=c_\alpha(x)$ et $u'=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $v'=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$ et $w'=c_\gamma(x)$ et R'" $\rightleftarrows$ "il existe x,u',v',w' tels que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$ et $u=u'$ et $v=v'$ et $w=w'$ et R' " $\rightleftarrows$ "(il existe x tel que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$) et R" $\rightleftarrows$

$\rightleftarrows R$

puisque "il existe x tel que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$" est partout vraie . Démonstration analogue pour la seconde proposition .

<u>Proposition 5 . Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 4</u>

(2) "il existe u,v,w tels que R" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que R^P"

(3) "il existe x tel que S" $\rightleftarrows$ "il existe u,v,w, tels que S_P"

(4) "quels que soient u,v,w, R" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , R^P"

(5) "quel que soit x , S" $\rightleftarrows$ "quels que soient u,v,w, S_P"

En effet (règles IX et 14)

"il existe x tel que R^P" $\rightleftarrows$ "il existe x,u,v,w, tels que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$ et R" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que R et (il existe u,v,w, tels que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$)" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que R"

puisque "il existe u,v,w, tels que $u=c_\alpha(x)$ et $v=c_\beta(x)$ et $w=c_\gamma(x)$" est partout vraie .

(3) se déduit de (2) en appliquant cette dernière proposition à S_P et tenant compte de la proposition 4 . (4) et (5) sont respectivement les formes associées de (2) et (3) (en tenant compte de la proposition 3 du § 1) .

<u>Corollaire . R et U étant deux relations contenant u,v,w, mais ne contenant pas x , S et V deux relations contenant x , mais ne contenant pas u,v,w,</u>

$$(R \to U) \rightleftarrows (R^P \to U^P) \qquad ; \qquad (S \to V) \rightleftarrows (S_P \to V_P) .$$

De la même manière que pour les relations biunivoques (§ 1) , on voit donc qu'à toute <u>proposition</u> contenant les arguments u,v,w, on peut associer une proposition <u>équivalente</u> contenant x , mais ne contenant plus u,v,w, et vice-versa . On peut ainsi , grâce à la notion de type produit , remplacer , dans une proposition , des arguments en nombre quelconque par <u>un seul argument</u> d'un type produit convenable : c'est là une faculté dont on use fréquemment , et qui simplifie de nombreuses propositions .

<u>Associativité</u> . Soit $T_{\alpha\beta}$ le type produit des types T_α , T_β ,

et soit x' un argument du type produit $(T_{\alpha\beta},T_\gamma)$; les coordonnées de x' dans ce produit seront notées respectivement $c^{(\alpha\beta)\gamma}_{(\alpha\beta)}(x')$ et $c^{(\alpha\beta)\gamma}_{\gamma}(x')$ Montrons que la relation "$x'=((c^{\alpha\beta\gamma}_\alpha(x),c^{\alpha\beta\gamma}_\beta(x)),c^{\alpha\beta\gamma}_\gamma(x))$" est biuni voque . Elle est en effet équivalente à

"$c^{(\alpha\beta)\gamma}_{(\alpha\beta)}(x')=(c^{\alpha\beta\gamma}_\alpha(x),c^{\alpha\beta\gamma}_\beta(x))$ et $c^{(\alpha\beta)\gamma}_\gamma(x')=c^{\alpha\beta\gamma}_\gamma(x)$"

et par suite aussi à

"$c^{\alpha\beta}_\alpha(c^{(\alpha\beta)\gamma}_{(\alpha\beta)}(x'))=c^{\alpha\beta\gamma}_\alpha(x)$ et $c^{\alpha\beta}_\beta(c^{(\alpha\beta)\gamma}_{(\alpha\beta)}(x'))=c^{\alpha\beta\gamma}_\beta(x)$ et $c^{(\alpha\beta)\gamma}_\gamma(x')=c^{\alpha\beta\gamma}_\gamma(x)$"

et finalement à

$$"x=(c^{\alpha\beta}_\alpha(c^{(\alpha\beta)\gamma}_{(\alpha\beta)}(x')),c^{\alpha\beta}_\beta(c^{(\alpha\beta)\gamma}_{(\alpha\beta)}(x')),c^{(\alpha\beta)\gamma}_\gamma(x'))"$$

ce qui montre bien qu'elle est fonctionnelle en x aussi bien qu'en x' ; il y a donc une relation biunivoque dite canonique entre les types produits $(T_\alpha,T_\beta,T_\gamma)$ et $((T_\alpha,T_\beta),T_\gamma)$; on exprime souvent ce fait en disant que le produit des types est associatif .

Produits et projections . Soient U, V, W trois arguments des types respectifs $P(T_\alpha)$ $P(T_\beta)$, $P(T_\gamma)$; appliquons le principe de passage au type des parties à la relation "$c_\alpha(x)\in U$ et $c_\beta(x)\in V$ et $c_\gamma(x)\in W$" ; on obtient une relation entre U,V,W et un argument X du type $P(T_{\alpha\beta\gamma})$, relation fonctionnelle en X , dont nous désignerons le symbole fonctionnel correspondant par $U\times V\times W$ (relativement à l'ordre conventionnel adopté dans cette notation , mêmes remarques que plus haut pour la notation (u,v,w)); "le produit de U,V,W" sera considéré comme un nom synonyme de ce symbole . On a donc

$$"x\in U\times V\times W"\rightleftarrows"c_\alpha(x)\in U \text{ et } c_\beta(x)\in V \text{ et } c_\gamma(x)\in W"$$

ou encore , d'après le ~~s XXXXXXXXX(XX)~~ corollaire de la prop.5

$$"(u,v,w)\in U\times V\times W"\rightleftarrows"u\in U \text{ et } v\in V \text{ et } w\in W"$$

Lorsqu'on substitue à U,V,W, dans le symbole fonctionnel $U\times V\times W$, les éléments (respectivement de même type) A,B,C, l'élément $A\times B\times C$ du type $P(T_{\alpha\beta\gamma})$ qu'on obtient est dit le produit des parties A,B,C .

Soient E_α, E_β, E_γ les ensembles fondamentaux des types T_α , T_β , T_γ et E l'ensemble fondamental du type $T_{\alpha\beta\gamma}$; on a $E=E_\alpha\times E_\beta\times E_\gamma$. En effet , "$c_\alpha(x)\in E_\alpha$ et $c_\beta(x)\in E_\beta$ et $c_\gamma(x)\in E_\gamma$" est une identité ,

69

(règle 13) , donc aussi "$x \in E_\alpha \times E_\beta \times E_\gamma$" , d'où la proposition , d'après la proposition 3 du § 2 .

Soit maintenant b un élément quelconque du type T_β , c un élément quelconque du type T_γ , et considérons le produit $H=E_\alpha \times \{b\} \times \{c\}$; par définition "$x=(u,b,c)$"$\rightleftarrows$"$c_\alpha(x)=u$ et $c_\beta(x)=b$ et $c_\gamma(x)=c$" , et comme $c_\alpha(x) \in E_\alpha$ est une identité , on a aussi (règle 14)

$$\text{"}x=(u,b,c)\text{"}\rightleftarrows\text{"}c_\alpha(x)=u \text{ et } (c_\alpha(x) \in E_\alpha \text{ et } c_\beta(x) \in \{b\} \text{ et } c_\gamma(x) \in \{c\})\text{"}$$
$$\rightleftarrows \text{"}c_\alpha(x)=u \text{ et } x \in H\text{"}$$

Soit alors x_H un argument du sous-type de $T_{\alpha\beta\gamma}$ correspondant à H , et $x=k(x_H)$ la relation canonique entre cet argument et x ; d'après ce qui précède "$x=(u,b,c)$"$\rightarrow$"$x \in H$" , donc "$x=(u,b,c)$"$\rightleftarrows$"$x=(u,b,c)$ et $x \in H$" , et cette dernière relation est donc fonctionnelle en x ; donc (corollaire 2 de la prop.3) la relation "$k(x_H)=(u,b,c)$" est fonctionnelle en x_H ; mais d'autre part

$$\text{"}k(x_H)=(u,b,c)\text{"}\rightleftarrows\text{"}c_\alpha(k(x_H))=u \text{ et } k(x_H) \in H\text{"}\rightleftarrows\text{"}u=c_\alpha(k(x_H))\text{"}$$

puisque "$k(x_H) \in H$" est une identité ; ceci montre donc que la relation "$k(x_H)=(u,b,c)$" est <u>biunivoque</u> .

On définirait de même une relation biunivoque entre un argument du type (T_α, T_β) et un argument du sous-type correspondant à la partie $E_\alpha \times E_\beta \times \{c\}$.

<u>Proposition 6</u> . "$U \times V \times W=\emptyset$"$\rightleftarrows$"$U=\emptyset$ ou $V=\emptyset$ ou $W=\emptyset$" .

En effet (prop.5)

"quel que soit x , $x \notin U \times V \times W$"$\rightleftarrows$"quels que soient u,v,w, $(u,v,w) \notin U \times V \times W$"$\rightleftarrows$"quels que soient u,v,w, $u \notin U$ ou $v \notin V$ ou $w \notin W$"$\rightleftarrows$"(quel que soit u , $u \notin U$) ou (quel que soit v , $v \notin V$) ou (quel que soit w , $w \notin W$)"

d'après la règle IX , d'où la proposition , d'après la prop.3 du §2.

<u>Proposition 7</u> . "$U \times V \times W \subset U' \times V' \times W'$ "$\rightleftarrows$"$U \times V \times W=\emptyset$ ou ($U \subset U'$ et $V \subset V'$ et $W \subset W'$)" .

En effet

"quel que soit x , $x \notin U \times V \times W$ ou $x \in U' \times V' \times W'$ "$\rightleftarrows$"quels que soient u,v,w, $u \notin U$ ou $v \notin V$ ou $w \notin W$ ou ($u \in U'$ et $v \in V'$ et $w \in W'$)" $\rightleftarrows$ "(quels que soient u,v,w, $u \notin U$ ou $v \notin V$ ou $w \notin W$ ou $u \in U'$) et (quels que soient u,v,w, $u \notin U$ ou $v \notin V$ ou $w \notin W$ ou $v \in V'$) et (quels que soient u,v,w, $u \notin U$ ou $v \notin V$ ou $w \notin W$ ou $w \in W'$)"

Or , "quels que soient u,v,w, $u \notin U$ ou $v \notin V$ ou $w \notin W$ ou $u \in U'$" $\rightleftarrows$ "(quel que soit u , $u \notin U$ ou $u \in U'$) ou (quel que soit v , $v \notin V$) ou (quel que soit w , $w \notin W$)" $\rightleftarrows$ "$U \subset U'$ ou $V=\emptyset$ ou $W=\emptyset$"

Donc

"$U \times V \times W \subset U' \times V' \times W'$ " $\rightleftarrows$ "($U \subset U'$ ou ~~XX~~ $V=\emptyset$ ou $W=\emptyset$) et ($U=\emptyset$ ou $V \subset V'$ ou $W=\emptyset$) et ($U=\emptyset$ ou $V=\emptyset$ ou $W \subset W'$)" $\rightleftarrows$ "($U \subset U'$ et $V \subset V'$ et $W \subset W'$) ~~XX~~ ou ($U=\emptyset$ et $V=\emptyset$ et $W=\emptyset$) ou ($U=\emptyset$ et $V=\emptyset$) ou ($V=\emptyset$ et $W=\emptyset$) ou ($W=\emptyset$ et $U=\emptyset$) ou $U=\emptyset$ ou $V=\emptyset$ ou $W=\emptyset$" $\rightleftarrows$ "($U \subset U'$ et $V \subset V'$ et $W \subset W'$) ou $U=\emptyset$ ou $V=\emptyset$ ou $W=\emptyset$"

en remarquant que "$U=\emptyset$ et $U \subset U'$ " $\rightleftarrows$ "$U=\emptyset$ et $\emptyset \subset U'$ " $\rightleftarrows$ "$U=\emptyset$",et les analogues , et en utilisant les règles de distributivité ; la proposition résulte finalement de la proposition 6 .

Remarquons encore que l'on a identiquement

$$\{u\} \times \{v\} \times \{w\} = \{(u,v,w)\}$$

car "$c_\alpha(x) \in \{u\}$ et $c_\beta(x) \in \{v\}$ et $c_\gamma(x) \in \{w\}$" $\rightleftarrows$ "$c_\alpha(x)=u$ et $c_\beta(x)=v$ et $c_\gamma(x)=w$" $\rightleftarrows$ "$x=(u,v,w)$" $\rightleftarrows$ "$x \in \{(u,v,w)\}$" .

<u>Proposition 8</u> . "$(U \times V \times W) \cup (U' \times V \times W) = (U \cup U') \times V \times W$" <u>est une identité</u>

En effet

"($c_\alpha(x) \in U$ et $c_\beta(x) \in V$ et $c_\gamma(x) \in W$) ou ($c_\alpha(x) \in U'$ et $c_\beta(x) \in V$ et $c_\gamma(x) \in W$)" $\rightleftarrows$ "($c_\alpha(x) \in U$ ou $c_\alpha(x) \in U'$) et $c_\beta(x) \in V$ et $c_\gamma(x) \in W$" $\rightleftarrows$ "$c_\alpha(x) \in U \cup U'$ et $c_\beta(x) \in V$ et $c_\gamma(x) \in W$" .

<u>Proposition 9</u> . "$(U \times V \times W) \cap (U' \times V' \times W') = (U \cap U') \times (V \cap V') \times (W \cap W')$" <u>est une identité</u> .

Cela résulte immédiatement de l'associativité de l'opération "et" .

<u>Exercices</u> . 1) Montrer que

"$U \times V \times W = U' \times V' \times W'$ et $U \times V \times W \neq \emptyset$" $\Rightarrow$ "$U=U'$ et $V=V'$ et $W=W'$ " .

2) Montrer que

$$\complement(U \times V \times W) = (\complement U \times E_\beta \times E_\gamma) \cup (U \times \complement V \times E_\gamma) \cup (U \times V \times \complement W)$$

est une identité .

Considérons maintenant la relation "il existe v,w, tels que $(u,v,w)\in X$" , et appliquons-lui le principe de passage au type des parties: on en déduit une relation entre X et un argument U du type $P(T_\alpha)$, relation fonctionnelle en U , dont nous désignerons le symbole fonctionnel correspondant par $pr_\alpha(X)$, ou "la <u>projection</u> de X sur T_α" ou encore , par abus de langage , $c_\alpha(X)$; on a donc

$$\text{"}u\in pr_\alpha(X)\text{"} \rightleftarrows \text{"il existe } v,w, \text{ tels que } (u,v,w)\in X\text{"}$$

De même , soit y un argument du type $T_{\alpha\beta}$ et considérons la relation "il existe u,v,w, tels que $y=(u,v)$ et $(u,v,w)\in X$" ; en passant au type $P(T_{\alpha\beta})$, on en déduit une relation entre X et un argument Y de ce type , relation fonctionnelle en Y , dont nous désignerons par $pr_{\alpha\beta}(X)$ ou "la projection de X sur $T_{\alpha\beta}$" le symbole fonctionnel qui lui correspond ; on a

$$\text{"}y\in pr_{\alpha\beta}(X)\text{"} \rightleftarrows \text{"il existe } u,v,w, \text{ tels que } y=(u,v) \text{ et } (u,v,w)\in X\text{"}$$

<u>Proposition 10</u> . "$V\neq\emptyset$ et $W\neq\emptyset$"$\to$"$pr_\alpha(U\times V\times W)=U$"

En effet

"$u\in pr_\alpha(U\times V\times W)$"$\rightleftarrows$"il existe v,w, tels que $(u,v,w)\in U\times V\times W$"$\rightleftarrows$"il existe v,w, tels que $u\in U$ et $v\in V$ et $w\in W$"$\rightleftarrows$"$u\in U$ et (il existe v tel que $v\in V$) et (il existe w tel que $w\in W$)"$\rightleftarrows$"$u\in U$ et $V\neq\emptyset$ et $W\neq\emptyset$"

Désignons pour abréger , respectivement par R,S,T les relations "$u\in pr_\alpha(U\times V\times W)$" , "$u\in U$" et "$V\neq\emptyset$ et $W\neq\emptyset$" ; nous venons de montrer que $R\rightleftarrows$"S et T" , d'où il résulte d'abord que "$R\to S$" est vraie , ~~et par suite aussi "quel que soit u , R"→"quel que soit u , S"~~, c'est-à-dire que "$pr_\alpha(U\times V\times W)\subset U$" est une identité ; donc

$$\text{"}V\neq\emptyset \text{ et } W\neq\emptyset\text{"}\to\text{"}pr_\alpha(U\times V\times W)\subset U\text{"}$$

D'autre part , comme "$\overline{S}$ ou $\overline{T}$ ou R" est partout vraie ,(règle 14) $T\rightleftarrows$"T et ($\overline{S}$ ou $\overline{T}$ ou R)"$\rightleftarrows$"(T et $\overline{T}$) ou (T et ($\overline{S}$ ou R))"$\rightleftarrows$"T et ($\overline{S}$ ou R)"$\to$"$\overline{S}$ ou R"

Donc , comme T ne contient pas u

$$T\rightleftarrows\text{"quel que soit } u , T\text{"}\to\text{"quel que soit } u , \overline{S} \text{ ou } R\text{"}$$

c'est-à-dire "$V\neq\emptyset$ et $W\neq\emptyset$"$\to$"$U\subset pr_\alpha(U\times V\times W)$"

 72

ce qui démontre la proposition .

Comme $\{u\}\neq\emptyset$ et $\{v\}\neq\emptyset$ sont des identités , il en est donc de même de $\mathrm{pr}_\alpha(\{u\}\times\{v\}\times\{w\})=\{u\}$; c'est la raison pourquoi on a pris $c_\alpha(X)$ comme nom synonyme de $\mathrm{pr}_\alpha(X)$.

On démontrera de même que

$$\text{"}W\neq\emptyset\text{"}\rightarrow\text{"}\mathrm{pr}_{\alpha\beta}(U\times V\times W)=U\times V\text{"}$$

10 bis

Proposition 10 bis . La relation "$X\subset\mathrm{pr}_\alpha(X)\times\mathrm{pr}_\beta(X)\times\mathrm{pr}_\gamma(X)$" est une identité .

En effet "$(u,v,w)\in X$"$\rightarrow$"il existe v,w tels que $(u,v,w)\in X$"$\rightleftarrows$ $\rightleftarrows$ "$u\in\mathrm{pr}_\alpha(X)$" , et de même "$(u,v,w)\in X$"$\rightarrow$"$v\in\mathrm{pr}_\beta(X)$" et "$(u,v,w)\in X$"$\rightarrow$ $\rightarrow$"$w\in\mathrm{pr}_\gamma(X)$" , donc

"$(u,v,w)\in X$"$\rightarrow$"$u\in\mathrm{pr}_\alpha(X)$ et $v\in\mathrm{pr}_\beta(X)$ et $w\in\mathrm{pr}_\gamma(X)$"$\rightleftarrows$

$\rightleftarrows$"$(u,v,w)\in\mathrm{pr}_\alpha(X)\times\mathrm{pr}_\beta(X)\times\mathrm{pr}_\gamma(X)$"

ce qui démontre la proposition .

Corollaire . "$X\neq\emptyset$"$\rightarrow$"$\mathrm{pr}_\alpha(X)\neq\emptyset$" .

En effet , d'après la prop.6 , "$\mathrm{pr}_\alpha(X)=\emptyset$"$\rightarrow$"$\mathrm{pr}_\alpha(X)\times\mathrm{pr}_\beta(X)\times\mathrm{pr}_\gamma(X)=$ $=\emptyset$" ; donc , d'après la prop.10 ,"$\mathrm{pr}_\alpha(X)=\emptyset$"$\rightarrow$"$X\subset\emptyset$"$\rightleftarrows$"$X=\emptyset$" , d'où le corollaire , en prenant les négations .

10 ter

$\mathrm{pr}_\alpha(Z\cap(X\times E_\beta\times E_\gamma))=(\mathrm{pr}_\alpha Z)\cap X$

Enfin , appliquons le principe de passage au type des parties à la relation "$(u,v,w)\in X$" et à l'argument u ; on en déduit une relation entre v,w,X et un argument U du type $P(T_\alpha)$, relation fonctionnelle en U dont nous désignerons le symbole fonctionnel par $\mathrm{cp}_{\beta\gamma}(v,w;X)$ ou "la <u>coupe</u> de X suivant v et w" . De même , y étant un argument du type $T_{\alpha\beta}$, si on applique le principe de passage au type des parties à la relation "il existe u,v, tels que $y=(u,v)$ et $(u,v,w)\in$ $\in X$" et à l'argument y , on obtient une relation entre w,X et un argument Y du type $P(T_{\alpha\beta})$, relation fonctionnelle en Y , dont on désigne le symbole fonctionnel par $\mathrm{cp}_\gamma(w;X)$ ou "la coupe de X suivant w" .

<u>Proposition 11</u> . "$\mathrm{cp}_{\beta\gamma}(v,w;X)=\mathrm{pr}_\alpha((E_\alpha\times\{v\}\times\{w\})\cap X)$" <u>est une identité</u> .

En effet

"$u\in\mathrm{pr}_\alpha((E_\alpha\times\{v\}\times\{w\})\cap X)$"$\rightleftarrows$"il existe v',w', tels que $(u,v',w')\in X$ et $u\in E_\alpha$ et $v'\in\{v\}$ et $w'\in\{w\}$"$\rightleftarrows$"il existe v',w', tels que $v=v'$ et $w=w'$ et $(u,v',w')\in X$"$\rightleftarrows$"$(u,v,w)\in X$"$\rightleftarrows$"$u\in\mathrm{cp}_{\beta\gamma}(v,w;X)$"

d'où la proposition .

On démontre de même l'identité "$\mathrm{cp}_\gamma(w;X)=\mathrm{pr}_{\alpha\beta}((E_\alpha\times E_\beta\times\{w\})\cap X)$" .

<u>Exercices</u> . 1) Démontrer l'identité "$\mathrm{pr}_\alpha(X\cup Y)=\mathrm{pr}_\alpha(X)\cup\mathrm{pr}_\alpha(Y)$"

2) Démontrer les propositions

$\mathrm{pr}_\alpha(E)=E_\alpha$; $\mathrm{pr}_\alpha(\emptyset)=\emptyset$; "$X\subset Y$"$\rightarrow$"$\mathrm{pr}_\alpha(X)\subset\mathrm{pr}_\alpha(Y)$"

3) Démontrer l'identité "$\mathrm{pr}_\alpha(X\cap(U\times E_\beta\times E_\gamma))=(\mathrm{pr}_\alpha X)\cap U$" .

<u>Extension de relations biunivoques aux types produits</u> . Soient maintenant T'_α , T'_β , T'_γ trois nouveaux types (distincts ou non de T_α , T_β, T_γ) et supposons qu'on ait nommé une relation biunivoque $B_\alpha\{u,u'\}$ entre T_α et T'_α , une relation biunivoque $B_\beta\{v,v'\}$ entre T_β

73

et T'_β , et une relation biunivoque $B_\gamma\{w,w'\}$ entre T_γ et T'_γ ; soit $T'_{\alpha\beta\gamma}$ le type produit des types T'_α , T'_β , T'_γ , et $c'_\alpha(x')$, $c'_\beta(x')$, $c'_\gamma(x')$ les symboles fonctionnels correspondants ; montrons que la relation

$$x'=(f_{B_\alpha}(c_\alpha(x)),f_{B_\beta}(c_\beta(x)),f_{B_\gamma}(c_\gamma(x)))$$

est une relation <u>biunivoque</u> , qu'on nomme l'<u>extension</u> aux types produits $T_{\alpha\beta\gamma}$, $T'_{\alpha\beta\gamma}$, des relations biunivoques B_α , B_β , B_γ . En effet , cette relation est équivalente à

"$c'_\alpha(x')=f_{B_\alpha}(c_\alpha(x))$ et $c'_\beta(x')=f_{B_\beta}(c_\beta(x))$ et $c'_\gamma(x')=f_{B_\gamma}(c_\gamma(x))$"

donc aussi à

"$c_\alpha(x)=\overset{-1}{f}_{B_\alpha}(c'_\alpha(x'))$ et $c_\beta(x)=\overset{-1}{f}_{B_\beta}(c'_\beta(x'))$ et $c_\gamma(x)=\overset{-1}{f}_{B_\gamma}(c'_\gamma(x'))$"

donc finalement à

$$x=(\overset{-1}{f}_{B_\alpha}(c'_\alpha(x')),\overset{-1}{f}_{B_\beta}(c'_\beta(x')),\overset{-1}{f}_{B_\gamma}(c'_\gamma(x')))$$

ce qui montre bien que cette relation est fonctionnelle en x aussi bien qu'en x' .

<u>Produit de sous-types</u> . Soient A,B,C trois parties quelconques non vides, respectivement des types T_α , T_β , T_γ , et posons $H=A\times B\times C$; désignons par T' le produit des sous-types $(T_\alpha)_A$, $(T_\beta)_B$, $(T_\gamma)_C$, par y un argument de ce type , par $c'_\alpha(y)$, $c'_\beta(y)$, $c'_\gamma(y)$ les symboles fonctionnels correspondants . Montrons que la relation entre y et un argument x_H du sous-type $(T_{\alpha\beta\gamma})_H$

$$k_H(x_H)=(k_A(c'_\alpha(y)),k_B(c'_\beta(y)),k_C(c'_\gamma(y)))$$

est <u>biunivoque</u> ; en effet , comme $k_A(c'_\alpha(y))\in A$, $k_B(c'_\beta(y))\in B$, et $k_C(c'_\gamma(y))\in C$ sont des identités , il en est de même de

$$(k_A(c'_\alpha(y)),k_B(c'_\beta(y)),k_C(c'_\gamma(y)))\in H$$

ce qui montre (en vertu de S-1 et S-2) que cette relation est fonctionnelle en x_H . D'autre part , elle est équivalente à

"$k_A(c'_\alpha(y))=c_\alpha(k_H(x_H))$ et $k_B(c'_\beta(y))=c_\beta(k_H(x_H))$ et $k_C(c'_\gamma(y))=c_\gamma(k_H(x_H))$"

ou encore à

"il existe u_A , v_B , w_C tels que $y=(u_A,v_B,w_C)$ et $k_A(u_A)=c_\alpha(k_H(x_H))$

et $k_B(v_B)=c_\beta(k_H(x_H))$ et $k_C(w_C)=c_\gamma(k_H(x_H))$"

Or , comme $c_\alpha(k_H(x_H))\in A$ est une identité , $k_A(u_A)=c_\alpha(k_H(x_H))$ est fonctionnelle en u_A d'après S-1 et S-2 , et de même les deux relations analogues , d'où il résulte que la relation considérée est fonctionnelle en y , d'après le principe des relations fonctionnelles composées . Cette relation biunivoque est encore dite <u>canonique</u>.

§ 4 . Correspondances , fonctions , applications .

<u>Applications d'un type dans un autre</u> .

Dans ce paragraphe , T_α et T_β sont encore , soit les noms de deux types distincts , soit deux noms synonymes d'un même type ; $T_{\alpha\beta}$ désignera leur produit , z un argument de ce type , $c_\alpha(z)$ et $c_\beta(z)$ les symboles fonctionnels "coordonnées" .

Considérons la propriété de l'argument Z du type $P(T_{\alpha\beta})$ (x étant un argument du type T_α , y un argument du type T_β):

"quel que soit x , il existe un y et un seul tel que $(x,y)\in Z$"

Par application de la règle A-2 , on en déduit un élément du type $P(P(T_{\alpha\beta}))$, c'est-à-dire une partie de $P(T_{\alpha\beta})$, que nous désignerons par $\mathfrak{A}_{T_\alpha}^{T_\beta}$ (ou plus simplement , quand aucune confusion n'est à craindre , par $\mathfrak{A}_\alpha^\beta$) , telle que "$Z\in\mathfrak{A}_\alpha^\beta$" soit une propriété équivalente à la précédente . ~~Cette partie sera dite aussi "l'ensemble des applications de T_α dans T_β (ou de E_α dans E_β)"~~.

$\mathfrak{A}_\alpha^\beta$ <u>n'est pas vide</u> ; montrons en effet que , si y' est un argument du type T_β , "$E_\alpha\times\{y'\}\in\mathfrak{A}_\alpha^\beta$" est une <u>identité</u> ; en effet

$$"(x,y)\in E_\alpha\times\{y'\}" \rightleftarrows "x\in E_\alpha \text{ et } y\in\{y'\}" \rightleftarrows "y=y'"$$

puisque "$x\in E_\alpha$" est une identité ; mais alors

$$"E_\alpha\times\{y'\}\in\mathfrak{A}_\alpha^\beta" \rightleftarrows "\text{il existe un et un seul } y \text{ tel que } y=y'"$$

et cette dernière relation est une identité , d'après E-5 .

Nous pouvons donc considérer le <u>sous-type</u> de $P(T_{\alpha\beta})$ correspondant à $\mathfrak{A}_\alpha^\beta$; nous le désignerons par $A_{T_\alpha}^{T_\beta}$, ou simplement par A_α^β , et nous lui donnerons encore le nom de "type des <u>applications</u> de T_α dans T_β (ou de E_α dans E_β)". u étant un argument de ce sous-type , u^* désignera le symbole fonctionnel de la relation canonique entre A_α^β et $P(T_{\alpha\beta})$.

 75

Cela étant , "$u^* \in \mathfrak{A}_\alpha^\beta$" est une identité , donc "il existe un y et un seul tel que $(x,y)\in u^*$" est aussi une identité , autrement dit , "$(x,y)\in u^*$" est une relation en x,y,u, qui est fonctionnelle en y ; nous désignerons le symbole fonctionnel qu'elle détermine par l'une ou l'autre des notations u(x) , u_x (cette dernière est appelée notation indicielle); on a donc "$y=u(x)$"$\rightleftarrows$"$(x,y)\in u^*$" .

Nous venons d'utiliser l'identité "$E_\alpha \times \{y\} \in \mathfrak{A}_\alpha^\beta$" ; la relation "il existe y tel que $u^*=E_\alpha \times\{y\}$" s'énonce encore de la manière synonyme "u est constante dans E_α" .

Un élément du type A_α^β est appelé application de T_α dans T_β , ou encore fonction définie sur E_α , à valeurs dans E_β ; soit f un tel élément (quelconque) . D'après le principe des relations fonctionnelles composées , f(x) est le ~~un~~ symbole fonctionnel de la relation fonctionnelle en y ~~[illegible]~~ "il existe u tel que y=u(x) et u=f" , relation qui est donc équivalente à y=f(x) .

Inversement , soit $R\{x,y\}$ une relation fonctionnelle en y , quelconque ; soit R^P la propriété ~~relation~~ qu'on en déduit par passage au type produit $T_{\alpha\beta}$, puis E_R l'élément de $P(T_{\alpha\beta})$ qui correspond à cette propriété par passage au type des parties ; on a (corollaire de la prop.5 du § 3)

$$"(x,y)\in E_R" \rightleftarrows "R\{x,y\}"$$

Donc "$(x,y)\in E_R$" est une relation fonctionnelle en y, proposition équivalente à "$E_R\in \mathfrak{A}_\alpha^\beta$" ; par suite , il existe un u et un seul tel que $u^*=E_R$; on désignera par f_R l'élément du type A_α^β ainsi déterminé ; on dit que c'est l'application (ou la fonction) déterminée par la relation R .

L'introduction du type des applications permet donc de donner un sens au signe f_R qui figure dans le symbole fonctionnel déterminé par une relation fonctionnelle , alors que jusqu'ici ce symbole devait être considéré comme un tout indissociable.

On observera aussi que ce qui précède permet de considérer une relation fonctionnelle quelconque à deux arguments comme une relation fonctionnelle composée ; et comme , en introduisant un type produit convenable , on peut toujours ramener à deux les arguments figurant dans une relation , cette remarque s'étend aux relations fonctionnelles quelconques . Par exemple , la relation fonctionnelle y=u(x) que nous venons de définir donne naissance , quand on y remplace x et u par les coordonnées d'un argument t du type produit $(T_\alpha , A_{T_\alpha}^{T_\beta})$, à un <u>élément</u> du type des applications de $(T_\alpha, A_{T_\alpha}^{T_\beta})$ dans T_β . A titre d'exercice , et pour se familiariser avec cette sorte de point de vue, nous engageons le lecteur à considérer de la même manière toutes les relations fonctionnelles que nous avons déjà nommées au cours de ce chapitre .

<u>Proposition 1 . u et v étant deux arguments du type A_α^β</u> ,

"u=v" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , u(x)=v(x)"

~~Tout d'abord , d'après la prop.1 du § 1 , "u=v" ⇄ "u(x)=v(x)" , d'où (règle I et règle de redoublement) "u=v" ⇄ "quel que soit x , u(x)=v(x)" . Réciproquement~~ En effet, comme "y=u(x)" $\rightleftarrows$ "$(x,y)\in u^*$" , on a (prop.8 du § 1 , prop.5 du § 3, règle A-1 et règle S-2)

"quel que soit x , u(x)=v(x)" $\rightleftarrows$ "quels que soient x,y, (si $(x,y)\in u^*$, $(x,y)\in v^*$) et (si $(x,y)\in v^*$, $(x,y)\in u^*$)" $\rightleftarrows$ "quel que soit z , (si $z\in u^*$, $z\in v^*$) et (si $z\in v^*$, $z\in u^*$)" $\rightleftarrows$ "$u^*=v^*$" $\rightleftarrows$ "u=v" .

Remarquons encore que l'on a

"il existe x tel que y=u(x)" $\rightleftarrows$ "il existe x tel que $(x,y)\in u^*$" $\rightleftarrows$ "$y\in pr_\beta u^*$" ; donc "$u(x)\in pr_\beta u^*$" est une identité .

Considérons maintenant la relation "$pr_\beta u^*=E_\beta$" , relation équivalente à "quel que soit y , il existe x tel que y=u(x)" ; par passage au type des parties , elle détermine une partie B_α^β de A_α^β , qu'on nomme "l'ensemble des applications de T_α <u>sur</u> T_β " , et à laquelle correspond , par la relation canonique entre A_α^β et $P(T_{\alpha\beta})$, une partie $\mathcal{B}_\alpha^\beta \subset \mathcal{A}_\alpha^\beta$. Un élément f de A_α^β tel que $f\in B_\alpha^\beta$, est appelé une application de T_α <u>sur</u> T_β (ou de E_α <u>sur</u> E_β).

Il peut se faire ici que $B_\alpha^\beta=\emptyset$; il en est ainsi , comme nous le verrons au ch.III , lorsque T_β est le type des parties de T_α .

Soit f un <u>élément</u> quelconque de A_α^β ; comme $f^*\neq\emptyset$ (puisque "il existe x,y tels que $(x,y)\in f^*$" est vraie) , $pr_\beta f^*\neq\emptyset$; on peut donc considérer le <u>sous-type</u> F de T_β correspondant à $pr_\beta f^*$. La relation $k_F(y_F)=f(x)$ est fonctionnelle en y_F (§ 3 , corollaire 2 de la prop.3) , car "y=f(x) et $y\in pr_\beta f^*$" $\rightleftarrows$ "y=f(x)"

($f(x)\in pr_\beta f^*$ étant une identité) ; soit f^F l'application de ~~EX~~ T_α dans F qu'elle détermine . D'après la prop.3 du § 3
"quel que soit y_F , il existe x tel que $k_F(y_F)=f(x)$" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , $y\notin pr_\beta^* f^*$ ou (il existe x tel que $y=f(x)$)"
et comme "il existe x tel que ~~EX~~ $y=f(x)$" $\rightleftarrows$ "$y\in pr_\beta f^*$" , on voit que f^F est une application de T_α <u>sur</u> F ; ainsi , toute application de T_α <u>dans</u> T_β donne naissance à une application de T_α <u>sur un~~e~~ ~~partie~~ sous-type</u> de T_β.

Considérons de même la relation "quel-que soit y , il existe au plus un x tel que $y=u(x)$" ; par passage au type des parties , elle détermine une partie D_α^β de A_α^β , qu'on nomme "l'ensemble des applications <u>biunivoques</u> de T_α <u>dans</u> T_β" , et à laquelle correspond , par la relation canonique entre A_α^β et $P(T_{\alpha\beta})$, une partie $\mathcal{D}_\alpha^\beta\subset\mathcal{A}_\alpha^\beta$. Un élément f de A_α^β tel que $f\in D_\alpha^\beta$, est appelé une application biunivoque de T_α <u>dans</u> T_β (ou de E_α <u>dans</u> E_β).

Il peut se faire aussi que $D_\alpha^\beta=\emptyset$; c'est ce qui a lieu , par exemple , quand T_α est le type des parties de T_β (voir ch.III) .

Posons $C_\alpha^\beta=B_\alpha^\beta\cap D_\alpha^\beta$; cet élément de $P(A_\alpha^\beta)$ (éventuellement vide) est dit "l'ensemble des applications <u>biunivoques</u> de T_α <u>sur</u> T_β" ; il lui correspond ~~/~~ dans $P(T_{\alpha\beta})$ la partie $\mathcal{C}_\alpha^\beta=\mathcal{B}_\alpha^\beta\cap\mathcal{D}_\alpha^\beta$. Si $C_\alpha^\beta\neq\emptyset$, on désignera par Γ_α^β le sous-type de A_α^β correspondant à C_α^β ; w étant un argument de ce sous-type , on désignera encore (par abus de langage) par w^* le symbole fonctionnel de la relation canonique entre Γ_α^β et $P(T_{\alpha\beta})$.

Nous pouvons maintenant reprendre toutes les définitions précédentes en y intervertissant les rôles de T_α et T_β ; la relation "quel que soit y , il existe un x et un seul tel que $(x,y)\in Z$" définit une partie $\mathcal{A}_\beta^\alpha$ de $P(T_{\alpha\beta})$, dont on peut considérer le sous-type A_β^α correspondant : v étant un argument de ce sous-type , $^*v$ désignera le symbole fonctionnel de la relation canonique entre A_β^α et $P(T_{\alpha\beta})$; "$(x,y)\in {}^*v$" est une relation fonctionnelle en x , dont on notera $v(y)$ le symbole fonctionnel .

78

On définira de même l'ensemble B^α_β des applications de T_β sur T_α, l'ensemble D^α_β des applications biunivoques de T_β dans T_α, et l'intersection C^α_β de ces ensembles, ensemble des applications biunivoques de T_β sur T_α ; à ces ensembles correspondront respectivement, par la relation canonique entre A^α_β et $P(T_{\alpha\beta})$, les parties $\mathcal{B}^\alpha_\beta$, $\mathcal{D}^\alpha_\beta$ et $\mathcal{C}^\alpha_\beta = \mathcal{B}^\alpha_\beta \cap \mathcal{D}^\alpha_\beta$. Si $C^\alpha_\beta \neq \emptyset$, on désignera par Γ^α_β le sous-type correspondant de A^α_β, et par $^*t$ le symbole fonctionnel de la relation canonique entre Γ^α_β et $P(T_{\alpha\beta})$.

On a $\mathcal{C}^\beta_\alpha = \mathcal{C}^\alpha_\beta = \mathcal{A}^\beta_\alpha \cap \mathcal{A}^\alpha_\beta$; car "$Z \in \mathcal{C}^\beta_\alpha$" $\rightleftarrows$ "(quel que soit x, il existe un y et un seul tel que $(x,y) \in Z$) et (quel que soit ~~x~~ y, il existe x tel que $(x,y) \in Z$) et (quel que soit y, il existe au plus un x tel que $(x,y) \in Z$)" $\rightleftarrows$ "$Z \in \mathcal{A}^\beta_\alpha$ et $Z \in \mathcal{A}^\alpha_\beta$".

Il en résulte immédiatement que, si w est un argument de Γ^β_α, et t un argument de Γ^α_β, la relation "$w^* = {}^*t$" est biunivoque ; en effet, "$(w^* = {}^*t)$ et $(w'^* = {}^*t)$" $\rightarrow$ "$w^* = w'^*$" $\rightarrow$ "$w = w'$" d'après S-2; d'autre part "${}^*t \in \mathcal{C}^\alpha_\beta$" est une identité, donc aussi "${}^*t \in \mathcal{C}^\beta_\alpha$" et par suite "il existe w tel que $w^* = {}^*t$" en est également une d'après S-1, ce qui montre que "$w^* = {}^*t$" est fonctionnelle en w ; on montre de même qu'elle est fonctionnelle en t.

On désignera par $\overset{-1}{t}$ et $\overset{-1}{w}$ les deux symboles fonctionnels déterminés par cette relation ; on a donc

$$"w^* = {}^*t" \rightleftarrows "w = \overset{-1}{t}" \rightleftarrows "t = \overset{-1}{w}"$$

dire "inverse" donc "$(\overset{-1}{t})^* = {}^*t$" et "${}^*(\overset{-1}{w}) = w^*$" sont des identités ; il en est de même

~~Revenir~~ En -1. de $\overset{-1}{(\overset{-1}{w})} = w$ et $\overset{-1}{(\overset{-1}{t})} = t$.

La relation "$w = \overset{-1}{t}$" s'exprime encore en disant que w est l'inverse de t. On a

$$"y = w(x)" \rightleftarrows "x = \overset{-1}{w}(y)"$$

car "$x = \overset{-1}{w}(y)$" $\rightleftarrows$ "$(x,y) \in {}^*(\overset{-1}{w})$" $\rightleftarrows$ "$(x,y) \in w^*$" $\rightleftarrows$ "$y = w(x)$".

Toute relation biunivoque $B\{x,y\}$ détermine une application f_B de T_α sur T_β et une application g_B de T_β sur T_α ; comme on a $f_B^* = E_B = {}^*g_B$ il en résulte que $g_B = \overset{-1}{f_B}$, ce qui justifie la notation introduite au § 1.

préc. f_B et f_B
$w(x) = y \rightleftarrows x = \overset{-1}{w}(y)$

Cas où T_α et T_β désignent le même type. z et z' étant des arguments du type $T_{\alpha\beta}$, montrons d'abord que la relation "$z' = (c_\beta(z), c_\alpha(z))$" est biunivoque ; elle est en effet équivalente à "$c_\alpha(z') = c_\beta(z)$ et $c_\beta(z') = c_\alpha(z)$", donc (règle P) à "$z = (c_\beta(z'), c_\alpha(z'))$", et par suite est fonctionnelle en z aussi bien qu'en z' ; on remarquera en outre qu'elle est symétrique en z et z', c'est-à-dire qu'on obtient une relation équivalente lorsqu'on y permute z et z' . Désignons par $\overset{-1}{z}$ et ~~XX~~ $\overset{-1}{z'}$ les symboles fonctionnels déterminés par cette relation .

On remarquera que nous avons déjà utilisé cette notation ci-dessus comme symbole fonctionnel d'une autre relation fonctionnelle , et nous l'introduirons encore avec un autre sens un peu plus loin ; ce sont des abus de langage qui n'ont pas d'inconvénient , pourvu qu'on spécifie bien ce que sont les arguments que l'on considère .

On a donc les identités "$\overset{-1}{(\overset{-1}{z})}=z$" , ~~XXXXXXXXX~~ "$\overset{-1}{(x,y)}=(y,x)$" , et la proposition "$z'=\overset{-1}{z}$" $\rightleftarrows$ "$z=\overset{-1}{z'}$" .

Considérons maintenant l'<u>extension</u> au type $P(T_{\alpha\beta})$ (§ 2) de cette relation biunivoque : on sait que , par passage au type $P(T_{\alpha\beta})$, la relation "$\overset{-1}{z} \in Z$" détermine une relation biunivoque entre Z et un nouvel argument Z' du même type , relation dont nous désignerons encore les symboles fonctionnels qu'elle détermine par $\overset{-1}{Z}$ et $\overset{-1}{Z'}$; on a donc "$z \in Z$" $\rightleftarrows$ "$\overset{-1}{z} \in \overset{-1}{Z}$" , ~~XX~~ "$(x,y) \in Z$" $\rightleftarrows$ "$(y,x) \in \overset{-1}{Z}$" , ainsi que l'identité $\overset{-1}{(\overset{-1}{Z})}=Z$.

u étant un argument de A_α^β , v un argument de A_β^α , montrons alors que la relation "$\overset{-1}{(u^*)}={}^*v$" est <u>biunivoque</u> . Pour voir qu'elle est fonctionnelle en v , il suffit de montrer que "$\overset{-1}{(u^*)} \in \mathcal{A}_\beta^\alpha$" est une identité . Or

"quel que soit x , il existe un y et un seul tel que $(x,y) \in u^*$" $\rightleftarrows$
$\rightleftarrows$ "quel que soit x , il existe un y et un seul tel que $(y,x) \in \overset{-1}{(u^*)}$"
comme la première de ces relations est partout vraie , il en est de même de la seconde , ce qui démontre la proposition .

Comme d'autre part "$\overset{-1}{(u^*)}={}^*v$" $\rightleftarrows$ "$u^*=\overset{-1}{({}^*v)}$" , un raisonnement analogue montre que cette relation est ~~XXXXXXXXXX~~ fonctionnelle en u . On désignera par u^S et ${}^Sv$ les deux symboles fonctionnels qu'elle détermine . On a donc les identités ~~XX~~ "$\overset{-1}{(u^*)}={}^*(u^S)$" , "$\overset{-1}{({}^*v)}=({}^Sv)^*$" , "${}^S(u^S)=u$" , "$({}^Sv)^S=v$" .

Il faut encore remarquer que , dans le cas que nous considérons , l'ensemble $\mathcal{C}_\alpha^\beta=\mathcal{C}_\beta^\alpha$ <u>n'est pas vide</u> , car la relation "$y=x$" est une

 80

relation biunivoque ; on appelle diagonale la partie Δ de $T_{\alpha\beta}$ qu'elle détermine , application identique de T_α sur T_β l'élément ε de Γ_α^β tel que $\varepsilon^* = \Delta$. Il est clair que $\overset{-1}{\Delta} = \Delta$.

Exercices . 1) Montrer que "$u \in B_\alpha^\beta$" $\rightleftarrows$ "$u^S \in B_\beta^\alpha$" , "$u \in D_\alpha^\beta$" $\rightleftarrows$ "$u^S \in D_\beta^\alpha$"
2) w étant un argument du type Γ_α^β , t un argument du type Γ_β^α la relation "$(\overset{-1}{w^*}) = {}^*t$" est biunivoque ; on désigne par w^S et St les symboles fonctionnels qu'elle détermine ; montrer que ${}^S(\overset{-1}{w}) = (\overset{-1}{w^S})$ est une identité , ainsi que "$(\overset{-1}{t})^S = (\overset{-1}{{}^St})$" .

Correspondances d'un type à un autre .

Considérons maintenant le type $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ des applications de T_α dans ~~TX~~ $P(T_\beta)$; on le nomme aussi type des correspondances de T_α à T_β ; ses éléments sont dits correspondances de T_α à T_β .

Nous allons établir une relation biunivoque entre un argument U de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ et un argument Z de ~~TX~~ $P(T_{\alpha\beta})$. Considérons à cet effet la relation "$(x,y) \in Z$" ; par application de la règle A-2 , la relation "quel que soit y , si $(x,y) \in Z$, $y \in Y$, et si $y \in Y$, $(x,y) \in Z$" est une relation fonctionnelle en Y (argument de $P(T_\beta)$) ; nous la désignerons par $R\{x,Y,Z\}$. Si , dans cette relation , on substitue à x et Y les coordonnées d'un argument t du type produit $(T_\alpha, P(T_\beta))$ on obtient une relation entre t et Z ; par passage au type des parties pour l'argument t , on obtient une relation fonctionnelle en un argument du type $P(T_\alpha, P(T_\beta))$, relation dont nous désignerons le symbole fonctionnel par $E_R(Z)$; on a donc

$$\text{"}R\{x,Y,Z\}\text{"} \rightleftarrows \text{"}(x,Y) \in E_R(Z)\text{"}$$

et comme R est fonctionnelle en Y , "$E_R(Z) \in \mathcal{A}_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$" est une identité ; il s'en suit que la relation "$U^* = E_R(Z)$" est fonctionnelle en U ; nous désignerons par $Z_\circ$ le symbole fonctionnel qu'elle détermine .

Pour établir que cette relation est fonctionnelle en Z , nous allons d'abord démontrer la proposition

(1) $$\text{"}y \in Z_\circ(x)\text{"} \rightleftarrows \text{"}(x,y) \in Z\text{"}$$

Tout d'abord "$Y = Z_\circ(x)$" $\rightleftarrows$ "il existe U tel que $Y = U(x)$ et $U = Z_\circ$." $\rightleftarrows$ "il existe U tel que $(x,Y) \in U^*$ et $U^* = E_R(Z)$" $\rightleftarrows$ "$(x,Y) \in E_R(Z)$" $\rightleftarrows$ "$R\{x,Y,Z\}$"

Donc , si $f_R(x,Z)$ est le symbole fonctionnel déterminé par R , la relation "$Z_\circ(x)=f_R(x,Z)$" est une identité (§ 1 , cor.2 de la prop.8) Par suite (§ 1 , prop.9) "$y\in Z_\circ(x)$"$\rightleftarrows$"$y\in f_R(x,Z)$"$\rightleftarrows$"$(x,y)\in Z$" d'après la règle A-2 , ce qui démontre (1) .

Cela étant , d'après la proposition 1 , la règle A-1 et la prop.5 du § 3 "$Z_\circ=Z'_\circ$ "$\rightleftarrows$"quel que soit x , $Z_\circ(x)=Z'_\circ(x)$"$\rightleftarrows$" quels que soient x,y, si $y\in Z_\circ(x)$, $y\in Z'_\circ(x)$, et si $y\in Z'_\circ(x)$, $y\in Z_\circ(x)$"$\rightleftarrows$"quels que soient x,y, si $(x,y)\in Z$, $(x,y)\in Z'$, et si $(x,y)\in Z'$, $(x,y)\in Z$ "$\rightleftarrows$ $\rightleftarrows$"quel que soit z , si $z\in Z$, $z\in Z'$, et si $z\in Z'$, $z\in Z$"$\rightleftarrows$"$Z=Z'$ "
Reste à démontrer que "il existe Z tel que $U=Z_\circ$." est une identité .

Or , considérons la relation "$y\in U(x)$" ; si on y remplace x et y par les coordonnées de l'argument z du type $T_{\alpha\beta}$, on a une relation entre z et U ; par passage au type $P(T_{\alpha\beta})$, on a une relation entre U et un argument Z de ce type , relation fonctionnelle en Z , dont nous désignerons par U° le symbole fonctionnel; on a donc (A-2) "$z\in U^\circ$"$\rightleftarrows$"$c_\beta(z)\in U(c_\alpha(z))$" , donc (prop.5 du § 3) "$(x,y)\in U^\circ$"$\rightleftarrows$ $\rightleftarrows$"$y\in U(x)$" .

meilleures notations que les pr.: $U^{(\alpha\beta)}$ pour U°, $Z_{(\alpha\beta)}$ pour $Z_\circ$.

Cela étant
"$(x,Y)\in E_R(U^\circ)$"$\rightleftarrows$"$R\{x,Y,U^\circ\}$"$\rightleftarrows$"quel que soit y , si $y\in Y$, $(x,y)\in U^\circ$ et si $(x,y)\in U^\circ$, $y\in Y$"$\rightleftarrows$"quel que soit y , si $y\in Y$, $y\in U(x)$, et si $y\in U(x)$, $y\in Y$"$\rightleftarrows$"$Y=U(x)$"$\rightleftarrows$"$(x,Y)\in U^*$"
d'où il résulte que "$U^*=E_R(U^\circ)$" est une identité , par suite aussi "$U=(U^\circ)_\circ$" , ce qui achève de démontrer que "$U=Z_\circ$" est fonctionnelle en Z , et est donc une relation biunivoque dite canonique entre U et Z ; on voit de plus qu'on peut prendre U° comme symbole fonctionnel de cette relation (considérée comme relation fonctionnelle en Z) ; on a donc l'identité "$Z=(Z_\circ)^\circ$" .

On remarquera que nous avons déjà considéré au § 3 la relation que nous avons désignée par R dans la démonstration précédente ; ce n'est autre que la relation "$Y=cp_\alpha(x;Z)$" ; on a donc l'identité "$cp_\alpha(x;Z)=Z_\circ(x)$" .

Considérons de la même manière le type $A_{T_\beta}^{P(T_\alpha)}$ des applications de T_β dans $P(T_\alpha)$, appelé aussi type des correspondances de T_β à T_α ; on établit de la même manière une relation biunivoque entre un argument V de ce type et un argument Z de $P(T_{\alpha\beta})$; on désignera par ${}_\circ Z$ et ${}^\circ V$ les symboles fonctionnels correspondants ; ~~XYM~~ on a donc "$x \in {}_\circ Z(y)$" $\rightleftarrows$ "$(x,y) \in Z$" , et "$(x,y) \in {}^\circ V$" $\rightleftarrows$ "$x \in V(y)$" .

Les notations à l'aide de points que nous adoptons ci-dessus ont l'avantage de ne pas trop compliquer l'écriture , mais semblent faire jouer des rôles tout à fait différents aux types T_α et T_β ; pour éviter cet inconvénient , il serait préférable d'adopter des notations indicielles , telles que $U^{(\alpha\beta)}$ et $Z_{(\alpha\beta)}$, pour désigner ce que nous avons noté plus haut U° et $Z_\circ$ respectivement , $U^{(\beta\alpha)}$ et $Z_{(\beta\alpha)}$ pour désigner ${}^\circ U$ et ${}_\circ Z$.

Cela étant , la relation "$U^\circ = {}^\circ V$" est une relation <u>biunivoque</u> entre U et V , car "$U^\circ = {}^\circ V$" $\rightleftarrows$ "$(U^\circ)_\circ = ({}^\circ V)_\circ$" $\rightleftarrows$ "$U = ({}^\circ V)_\circ$" , et de même on voit que "$U^\circ = {}^\circ V$" $\rightleftarrows$ "$V = {}_\circ(U^\circ)$" ; on désignera les symboles fonctionnels composés $({}^\circ V)_\circ$ et ${}_\circ(U^\circ)$ que détermine cette relation par les noms synonymes $\overset{-1}{V}$ et $\overset{-1}{U}$; on a donc identiquement "$U^\circ = {}^\circ(\overset{-1}{U})$" , "${}^\circ V = (\overset{-1}{V})^\circ$" . Si M est une correspondance de T_α à T_β , $\overset{-1}{M}$ est dite la correspondance <u>inverse</u> de M .

On a identiquement $(\overset{-1}{\overset{-1}{U}}) = U$, $(\overset{-1}{\overset{-1}{V}}) = V$, et enfin

$$\text{"}y \in U(x)\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \in \overset{-1}{U}(y)\text{"} \rightleftarrows \text{"}(x,y) \in U^\circ\text{"}$$

et

$$\text{"}x \in V(y)\text{"} \rightleftarrows \text{"}y \in \overset{-1}{V}(x)\text{"} \rightleftarrows \text{"}(x,y) \in {}^\circ V\text{"} .$$

Soit $R\{x,y\}$ une relation quelconque entre x et y ; par passage au type produit $T_{\alpha\beta}$, elle engendre une propriété $R\{c_\alpha(z), c_\beta(z)\}$ de l'argument z de ce type ; cette propriété , par passage au type des parties $P(T_{\alpha\beta})$, détermine une partie E_R de ce type , et on a "$z \in E_R$" $\rightleftarrows$ "$R\{c_\alpha(z), c_\beta(z)\}$" , d'où (§ 3, prop.5)

$$\text{"}(x,y) \in E_R\text{"} \rightleftarrows \text{"}R\{x,y\}\text{"}$$

Soit $F_R = (E_R)_\circ$; il résulte de ce qui précède que

$$\text{"}y \in F_R(x)\text{"} \rightleftarrows \text{"}x \in \overset{-1}{F}_R(y)\text{"} \rightleftarrows \text{"}(x,y) \in E_R\text{"} \rightleftarrows \text{"}R\{x,y\}\text{"}$$

On dit que F_R et $\overset{-1}{F}_R$ sont les deux correspondances (inverses l'une de l'autre) <u>engendrées par R</u> . Inversement , il est clair que toute correspondance M du type T_α au type T_β est engendrée par la relation "$y \in M(x)$" .

La relation biunivoque entre $P(T_{\alpha\beta})$ et $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ permet de transporter à ce dernier type les relations définies au § 2 entre arguments du type des parties d'un type donné ; U et V étant deux arguments du type des correspondances de T_α à T_β , on notera $U \cup V$ le symbole fonctionnel composé $(U^\circ \cup V^\circ)_\circ$, $U \cap V$ le symbole fonctionnel composé $(U^\circ \cap V^\circ)_\circ$; la relation "$U \subset V$" sera par définition équivalente à "$U^\circ \subset V^\circ$" .

Exercices . 1) Démontrer les identités
"$(U \cup V)(x)=(U(x)) \cup (V(x))$" ; "$(U \cap V)(x)=(U(x)) \cap (V(x))$"
2) Montrer que
"$U \subset V$" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $U(x) \subset V(x)$" .

Classification des correspondances . Nous avons défini ci-dessus la partie $\mathfrak{A}_\alpha^\beta$ de $P(T_{\alpha\beta})$, dont le sous-type correspondant est le type des applications de T_α dans T_β ; par la relation canonique entre $P(T_{\alpha\beta})$ et $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$,il lui correspond une partie $\overline{A}_\alpha^\beta$ de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$; autrement dit , si u est un argument du type A_α^β , $(u^*)_\circ \in \overline{A}_\alpha^\beta$ est une identité . On désignera encore par $\overline{u}$ le symbole fonctionnel composé $(u^*)_\circ$;donc "$(\overline{u})^\circ = u^*$" identiquement.

On a l'identité "$\overline{u}(x)=\{u(x)\}$"

En effet , "$y \in \overline{u}(x)$" $\rightleftarrows$ "$(x,y) \in (\overline{u})^\circ$" $\rightleftarrows$ "$(x,y) \in u^*$" $\rightleftarrows$ "$y=u(x)$" $\rightleftarrows$ "$y \in \{u(x)\}$"
On désignera de même par $\overline{B}_\alpha^\beta$, $\overline{D}_\alpha^\beta$, $\overline{C}_\alpha^\beta$ les parties de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ qui correspondent respectivement à $\mathfrak{B}_\alpha^\beta$, $\mathfrak{D}_\alpha^\beta$, $\mathfrak{C}_\alpha^\beta$; par $\overset{-1}{\overline{A}}{}_\beta^\alpha$, $\overset{-1}{\overline{B}}{}_\beta^\alpha$, $\overset{-1}{\overline{D}}{}_\beta^\alpha$, $\overset{-1}{\overline{C}}{}_\beta^\alpha$ celles qui correspondent à $\mathfrak{A}_\beta^\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta^\alpha$, $\mathfrak{D}_\beta^\alpha$, $\mathfrak{C}_\beta^\alpha$; comme $\mathfrak{C}_\beta^\alpha = \mathfrak{C}_\alpha^\beta$; on a $\overline{C}_\alpha^\beta = \overset{-1}{\overline{C}}{}_\beta^\alpha$. On définit de même les parties correspondantes de $A_{T_\beta}^{P(T_\alpha)}$: les notations sont les mêmes, en y permutant seulement α et β ; si v est un argument de A_β^α , on prendra encore $\overline{v}$ comme nom abrégé du symbole fonctionnel composé $_\circ({}^*v)$. Enfin , si w et t sont des arguments des types Γ_α^β , Γ_β^α respectivement (en supposant $\mathfrak{C}_\alpha^\beta \neq \emptyset$) , $\overline{w}$ et $\overline{t}$ seront de même des noms abrégés de $(w^*)_\circ$ et $_\circ({}^*t)$; on a ici l'identité "$\overset{-1}{\overline{w}} = \overline{(\overset{-1}{w})}$" , car $\overline{(\overset{-1}{w})} = {}_\circ({}^*(\overset{-1}{w})) = {}_\circ(w^*) = {}_\circ((\overline{w})^\circ) = \overset{-1}{\overline{w}}$ identiquement; c'est la raison qui nous fait adopter la même notation pour désigner l'inverse d'une application biunivoque de T_α sur T_β et l'inverse d'une correspondance quelconque de T_α à T_β .

Si f est une application quelconque de T_α dans T_β , un abus de langage extrêmement fréquent consiste à écrire $\overset{-1}{f}$ pour $\overset{-1}{\overline{f}}$; cela n'a d'inconvénients que lorsque f est une application biunivoque de T_α sur T_β

On serait par contre conduit à de graves confusions en remplaçant $\overline{f}(x)$ par $f(x)$, ces deux symboles fonctionnels ne pouvant être substitués à des arguments de même type ; nous montrerons plus loin comment , par un autre abus de langage qui ne présente pas le même inconvénient , on peut éviter l'emploi du symbole $\overline{f}$.

On définit encore d'autres parties de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ de la façon suivante : la propriété "quel que soit x , il existe au plus un y tel que $y \in U(x)$" définit , par passage au type des parties , une partie F_α^β de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ qu'on appelle "l'ensemble des fonctions définies <u>dans</u> T_α, à valeurs dans T_β"; il lui correspond dans $P(T_{\alpha\beta})$ une partie $\mathfrak{F}_\alpha^\beta$, et dans $A_{T_\beta}^{P(T_\alpha)}$ une partie $\overset{-1}{F}{}_\alpha^\beta$; on a évidemment $\mathfrak{A}_\alpha^\beta \subset \mathfrak{F}_\alpha^\beta$.

Soit f un élément quelconque de F_α^β , tel que $f^\circ \neq \emptyset$; comme $pr_\alpha f^\circ \neq \emptyset$, on peut considérer le sous-type F de T_α correspondans à cette partie de T_α . Comme "$x \in pr_\alpha f^\circ$" $\rightleftarrows$ "il existe y tel que $(x,y) \in f^\circ$" , on a (§ 3, prop.3)

"quel que soit x_F , il existe y tel que $(k_F(x_F),y) \in f^\circ$" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $x \notin pr_\alpha f^\circ$ ou $x \in pr_\alpha f^\circ$"

D'autre part , d'après la même proposition

"quel que soit x , il existe au plus un y tel que $(x,y) \in f^\circ$" $\rightarrow$ "quel que soit x_F , il existe au plus un y tel que $(k_F(x_F),y) \in f^\circ$"

La proposition "$f^\circ \in \mathfrak{F}_\alpha^\beta$" entraîne donc que "$(k_F(x_F),y) \in f^\circ$" est une relation <u>fonctionnelle en</u> y ; elle détermine donc une <u>application</u> f_F du sous-type F de T_α <u>dans</u> T_β. Ainsi , toute fonction définie <u>dans</u> T_α , à valeurs dans T_β , donne naissance à une <u>application</u> d'un <u>sous-type</u> de T_α dans T_β (et aussi , d'après ce qu'on a vu plus haut , à une application de ce sous-type <u>sur</u> un sous-type de T_β), ou encore, à une fonction définie <u>sur</u> un sous-type de T_α. Il est bon de remarquer toutefois , que $f(x)$ peut être substitué à un argument du type $P(T_\beta)$, alors que $f_F(x_F)$ peut être substitué à un argument du type T_β (même différence que ci-dessus entre f et $\overline{f}$ lorsque f est une application de T_α dans T_β) .

De la même manière , la propriété "quel que soit y , il existe au plus un x tel que $x \in V(y)$" définit une partie F_β^α de $A_{T_\beta}^{P(T_\alpha)}$, à laquelle correspondent des parties $\mathcal{F}_\beta^\alpha$ de $P(T_{\alpha\beta})$ et $\overset{-1}{F}{}_\beta^\alpha$ de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$, et qu'on appelle "l'ensemble des fonctions définies dans T_β , à valeurs dans T_α" ; on a $\mathcal{A}_\beta^\alpha \subset \mathcal{F}_\beta^\alpha$. On voit comme précédemment que tout élément g de F_β^α tel que $g \neq \emptyset$ donne naissance à une application d'un sous-type de T_β sur un sous-type de T_α .

Enfin, soit $\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathcal{F}_\alpha^\beta \cap \mathcal{F}_\beta^\alpha$, et soient G_α^β et G_β^α les parties correspondantes de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ et $A_{T_\beta}^{P(T_\alpha)}$ respectivement ; il est facile de voir que $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ n'est pas vide , car on a l'identité "$\{(x,y)\} \in \mathcal{G}_{\alpha\beta}$"; en effet

"$(x',y') \in \{(x,y)\}$ et $(x',y'') \in \{(x,y)\}$" $\rightleftarrows$ "$(x',y')=(x,y)$ et $(x',y'')=(x,y)$" $\rightleftarrows$ "$x'=x$ et $y'=y$ et $y''=y$ " $\rightarrow$ "$y'=y$" "

ce qui montre que" $\{(x,y)\} \in \mathcal{F}_\alpha^\beta$" est une identité , et on montre de même que " $\{(x,y)\} \in \mathcal{F}_\beta^\alpha$" est une identité , d'où la proposition .

différent de ($\emptyset$).

On voit encore ici que tout élément de G_α^β donne naissance à une application biunivoque d'un sous-type de T_α sur un sous-type de T_β (ou dans T_β) , et l'élément homologue de G_β^α à l'application biunivoque inverse de la précédente . C'est pourquoi on appelle (un peu improprement) G_α^β "l'ensemble des applications biunivoques d'une partie de T_α sur une partie de T_β" ; il est clair que $\mathcal{D}_\alpha^\beta \subset \mathcal{G}_{\alpha\beta}$ et $\mathcal{D}_\beta^\alpha \subset \mathcal{G}_{\alpha\beta}$.

Exercice . Montrer que $\emptyset \in \mathcal{G}_{\alpha\beta}$.

Correspondances partielles. Restriction et prolongement d'une correspondance. Supposons maintenant que T_α soit le produit de deux types T, T' ; soit x un argument du type T, y un argument du type T', z un argument du type T_α, t un argument du type T_β, et enfin U un argument du type des correspondances de T_α à T_β. Par un abus de langage, on note $U(x,y)$ le symbole fonctionnel composé $U((x,y))$.

Considérons alors la relation "$t \in U(x,y)$", équivalente à "$((x,y),t) \in U^\circ$", et que nous désignerons en abrégé par R ; par passage au type produit (T,T_β), puis au type des parties de ce type, elle détermine une relation entre y,U et un argument de ce dernier type, relation fonctionnelle en cet argument, et dont nous désignerons par $f_R(y,U)$ le symbole fonctionnel correspondant ; de sorte que "$t \in U(x,y)$" $\rightleftarrows$ "$(x,t) \in f_R(y,U)$". Soit U_y un nom synonyme du symbole fonctionnel composé $(f_R(y,U))_\circ$; on aura finalement

$$"t \in U(x,y)" \rightleftarrows "t \in U_y(x)"$$

autrement dit $U(x,y)=U_y(x)$ identiquement. U_y est donc le symbole fonctionnel d'une application du type produit $(A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)},T')$ dans le type $A_T^{P(T_\beta)}$; lorsqu'on substitue à U un élément M du type $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$, à y un élément b du type T', M_b est dite la correspondance <u>partielle</u> définie par M et b.

On opère de même sur un argument u du type des <u>applications</u> de T_α dans T_β ; en désignant encore par R la relation "$t=u(x,y)$" équivalente à "$((x,y),t) \in u^*$", on aura

$$"((x,y),t) \in u^*" \rightleftarrows "(x,t) \in f_R(y,u)"$$

donc "il existe un t et un seul tel que $(x,t) \in f_R(y,u)$" est une identité, autrement dit, si v est un argument du type des applications de T dans T_β, "il existe v et un seul tel que $v^*= f_R(y,u)$" est une identité ; on désignera encore par u_y le symbole fonctionnel déterminé par la relation fonctionnelle "$v^*=f_R(y,u)$" ; quand on y remplacera u par une application g de T_α dans T_β, et y par un élément b de T', on dira encore que g_b est l'application

<u>partielle</u> définie par g et b .

Revenons au cas où T_α désigne un type quelconque , et soit A une non vide partie de ce type ; x étant un argument du type T_α , y un argument du type T_β , U un argument du type des correspondances de T_α à T_β , la relation "$x \in A$ et $y \in U(x)$" est équivalente à "$(x,y) \in A \times E_\beta$ et $(x,y) \in U^\circ$" , donc à "$(x,y) \in U^\circ \cap (A \times E_\beta)$" , et finalement , si on désigne par U_A le symbole fonctionnel composé $(U^\circ \cap (A \times E_\beta))_\circ$, à "$y \in U_A(x)$" . On dit encore que U_A est la <u>restriction</u> de U à A ; inversement , la relation "$V=U_A$" s'exprime encore en les termes synonymes "U est un <u>prolongement</u> de V" .

~~On opère de même sur un argument u du type des applications de T~~ ~~dans T~~ En particulier , u étant un argument du type des applications de T_α dans T_β , $\overline{u}_A \in F_\alpha^\beta$ est une identité , car "$x \in A$ et $y=u(x)$ et $x \in A$ et $y'=u(x)$" $\rightarrow$ "$y=y'$ " ; de plus , comme on a identiquement $pr_\alpha(U^\circ \cap (A \times E_\beta))=(pr_\alpha U^\circ) \cap A$, et $pr_\alpha(\overline{u})^\circ=E_\alpha$, on a aussi $pr_\alpha(\overline{u}_A)^\circ=A$, autrement dit , si f est une application quelconque de T_α dans T_β , $\overline{f}_A$ engendre une application du sous-type de T_α correspondant à A , dans T_β ; on dit encore que cette application f_A est la <u>restriction</u> de f à A .

<u>Exemple</u> . Soit T un type quelconque , X et Y deux arguments du type P(T) , et considérons la relation "$Y \subset X$" ; elle définit une partie A du type produit (P(T),P(T)) , et cette partie n'est pas vide , car "$\emptyset \subset E$" est vraie , donc aussi $(E,\emptyset) \in A$. Soit alors f l'application de (P(T),P(T)) dans P(T) telle que $f(X,Y)=X \cap \complement Y$ identiquement ; on considère fréquemment sa restriction à A ; ou plutôt , par un abus de langage , on considère la relation "$Z \in \overline{f}_A(X,Y)$" , et , bien que cette relation ne soit pas fonctionnelle en Z , on introduit un pseudo-symbole fonctionnel correspondant , qu'on note X-Y , et qu'on appelle aussi la <u>différence</u> de X et Y ; autrement dit , on considère que la relation "Z=X-Y" est synonyme de "$(X,Y) \in A$ et $Z=X \cap \complement Y$" , ou encore de "$Y \subset X$ et $Z=X \cap \complement Y$" .

<u>L'extension des correspondances</u> . U étant un argument du type des correspondances de T_α à T_β , considérons la relation R entre y,U et un argument X du type $P(T_\alpha)$: "il existe x tel que $x \in X$ et $y \in U(x)$".

Par passage au type des parties de T_β , elle engendre une relation entre U,X et un argument Y de $P(T_\beta)$, relation fonctionnelle en Y ; puis , par passage au type des parties du type produit $(P(T_\alpha),P(T_\beta))$, cette relation engendre une relation entre U et un argument $\mathfrak{Z}$ de ce type , relation fonctionnelle en $\mathfrak{Z}$, et dont nous désignerons par f(U) le symbole fonctionnel . La relation "$(X,Y)\in f(U)$" est donc équivalente à la relation obtenue à partir de R par passage au type des parties de T_β , autrement dit , elle est fonctionnelle en Y , ou encore "$f(U)\in \mathcal{A}_{P(T_\alpha)}^{P(T_\beta)}$" est une <u>identité</u> . Par suite , V étant un argument du type des applications de $P(T_\alpha)$ dans $P(T_\beta)$, la relation "$V^*=f(U)$" est fonctionnelle en V ; nous désignerons par $\widetilde{U}$ le symbole fonctionnel qu'elle détermine . $\widetilde{U}$ est dit l'<u>extension</u> de U au type $P(T_\alpha)$.
La relation "$Y=\widetilde{U}(X)$" est donc équivalente à la relation obtenue à partir de R par passage au type des parties de T_β ; par suite , on a finalement

"il existe x tel que $x\in X$ et $y\in U(x)$"$\rightleftarrows$"$y\in\widetilde{U}(X)$"

On écrit en général U(X) au lieu de $\widetilde{U}(X)$, par un abus de langage qui n'offre pas d'inconvénient , du moment qu'on précise de quel type est l'argument X . On donne aussi à U(X) le nom synonyme de "l'<u>image</u> de X par U" .

On a identiquement "$U(\{x\})=U(x)$"

car "$x'\in\{x\}$"$\rightleftarrows$"$x'=x$" , donc

"$y\in U(\{x\})$"$\rightleftarrows$"il existe x' tel que $x'\in\{x\}$ et $y\in U(x')$"$\rightleftarrows$"il existe x' tel que $x'=x$ et $y\in U(x')$"$\rightleftarrows$"$y\in U(x)$" .

On en déduit que l'application de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ <u>dans</u> $A_{P(T_\alpha)}^{P(T_\beta)}$ qui correspond à la relation fonctionnelle $V=\widetilde{U}$, est une application <u>biunivoque</u> de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ sur une partie de $A_{P(T_\alpha)}^{P(T_\beta)}$; en effet (prop.1)

"$\widetilde{U}=\widetilde{U}'$ "$\rightleftarrows$"quel que soit X , $U(X)=U'(X)$"$\rightarrow$"quel que soit x , $U(\{x\})=U'(\{x\})$"$\rightleftarrows$"quel que soit x , $U(x)=U'(x)$"$\rightleftarrows$"$U=U'$ " .

Mais nous allons voir que cette application n'est pas une application biunivoque de $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ <u>sur</u> $A_{P(T_\alpha)}^{P(T_\beta)}$. L'extension d'une correspondance possède en effet d'importantes propriétés particulières, que nous allons démontrer .

<u>Théorème 1</u> . "$U(\emptyset)=\emptyset$" <u>est une identité</u> .

En effet

"$y\notin U(\emptyset)$"$\rightleftarrows$"quel que soit x , $x\notin\emptyset$ ou $(x,y)\notin U$"

comme "$x\notin\emptyset$" est partout vraie , il en est de même de "$x\notin\emptyset$ ou $(x,y)\notin U$" , et par suite aussi de "$y\notin U(\emptyset)$" , ce qui démontre le théorème (d'après la proposition 3 du § 2) .

$x\neq\emptyset$ $U(X)\neq\emptyset \rightarrow x\neq\emptyset$

<u>Corollaire</u> . "$U(X)\neq\emptyset$"$\rightarrow$"$X\neq\emptyset$" .

Cette proposition n'est autre en effet que "$X=\emptyset$"$\rightarrow$"$U(X)=\emptyset$" écrite sous une autre forme .

<u>Théorème 2</u> . "$X\subset Y$"$\rightarrow$"$U(X)\subset U(Y)$" .

En effet

"$X\subset Y$"$\rightleftarrows$"quel que soit x , $x\notin X$ ou $x\in Y$"$\rightleftarrows$"quels que soient x,y, $x\notin X$ ou $x\in Y$"

Or "$x\notin X$"$\rightarrow$"$x\notin X$ ou $y\notin U(x)$" ; d'autre part , comme "$x\notin X$ ou $y\notin U(x)$ ou $y\in U(x)$" est partout vraie , on a , d'après la distributivité

"$x\notin X$ ou $x\in Y$"$\rightarrow$"($x\notin X$ ou $y\notin U(x)$) ou ($x\in Y$ et $y\in U(x)$)"

donc (règle X)

"$X\subset Y$"$\rightarrow$"quel que soit y , (quel que soit x , $x\notin X$ ou $y\notin U(x)$) ou (il existe x tel que $x\in Y$ et $y\in U(x)$)"$\rightleftarrows$"quel que soit y , $y\notin U(X)$ ou $y\in U(Y)$"$\rightleftarrows$"$U(X)\subset U(Y)$" .

<u>Théorème 3</u> . "$U(X\cup Y)=U(X)\cup U(Y)$" <u>est une identité</u> .

En effet (règle VII)

"$y\in U(X\cup Y)$"$\rightleftarrows$"il existe x tel que $x\in X\cup Y$ et $y\in U(x)$"$\rightleftarrows$"il existe x tel que ($x\in X$ et $y\in U(x)$) ou ($x\in Y$ et $y\in U(x)$)"$\rightleftarrows$"(il existe x tel que $x\in X$ et $y\in U(x)$) ou (il existe x tel que $x\in Y$ et $y\in U(x)$)"$\rightleftarrows$ $\rightleftarrows$"$y\in U(X)$ ou $y\in U(Y)$"$\rightleftarrows$"$y\in U(X)\cup U(Y)$" .

L'analogue du théorème 3 relatif à l'intersection <u>n'est pas vrai en général</u> . Comme "$X\cap Y\subset X$" et "$X\cap Y\subset Y$" sont des identités , on a d'après le théorème 2 , "$U(X\cap Y)\subset U(X)$ et $U(X\cap Y)\subset U(Y)$" identiquement , donc (§ 2 , corollaire 4 de la prop. 12)

$$U(X\cap Y)\subset U(X)\cap U(Y)$$

<u>identiquement</u> ; c'est la réciproque de cette proposition qui n'est

pas vraie . De façon précise , on a l'important théorème suivant :

Théorème 4 . Les relations suivantes sont équivalentes :

a)"$U \in \overset{-1}{F}{}^{\alpha}_{\beta}$" (relation équivalente à "quel que soit y , il existe au plus un x tel que $y \in U(x)$") ;

b)"quels que soient X,Y , $U(X \cap Y) = U(X) \cap U(Y)$" ;

c) "quels que soient X,Y, si $X \cap Y = \emptyset$, $U(X) \cap U(Y) = \emptyset$";

d) "quels que soient X,Y, si $Y \subset X$, $U(X-Y) = U(X) - U(Y)$" .

La démonstration de ce théorème comprend plusieurs parties :

1°) "a→b" . Comme "quels que soient X,Y , $U(X \cap Y) \subset U(X) \cap U(Y)$" est partout vraie , il suffit de montrer que "a→b' " , où b' est la relation "quels que soient X,Y, $U(X) \cap U(Y) \subset U(X \cap Y)$" .

Or "a"⇄"quels que soient x,x',y, $y \notin U(x)$ ou $y \notin U(x')$ ou $x = x'$ "→ →"quels que soient x,x', $y \notin U(x)$ ou $y \notin U(x')$ ou $x = x'$ "

Donc (règle X)

"$U \in \overset{-1}{F}{}^{\alpha}_{\beta}$ et $y \in U(X) \cap U(Y)$"→"(quels que soient x,x', $y \notin U(x)$ ou $y \notin U(x')$ ou $x = x'$) et (il existe x,x', tels que $x \in X$ et $x' \in Y$ et $y \in U(x)$ et $y \in U(x')$)"→"il existe x,x', tels que ($y \notin U(x)$ ou $y \notin U(x')$ ou $x = x'$) et $x \in X$ et $x' \in Y$ et $y \in U(x)$ et $y \in U(x')$"

Or , "$y \notin U(x)$ et $y \in U(x)$ et $x \in X$ et $x' \in Y$ et $y \in U(x')$" est partout fausse , ainsi que "$y \notin U(x')$ et $y \in U(x')$ et $x \in X$ et $x' \in Y$ et $y \in U(x)$" ; donc , d'après la distributivité et la règle 14

"$U \in \overset{-1}{F}{}^{\alpha}_{\beta}$ et $y \in U(X) \cap U(Y)$"→"il existe x,x', tels que $x = x'$ et $x \in X$ et $x' \in Y$ et $y \in U(x)$ et $y \in U(x')$"→"il existe x,x', tels que $x \in X$ et $x \in Y$ et $y \in U(x)$"⇄"$y \in U(X \cap Y)$".

Cela étant , par le même raisonnement que dans la prop.10 du § 3 , on montre que "$U \in \overset{-1}{F}{}^{\alpha}_{\beta}$ "→"$y \notin U(X) \cap U(Y)$ ou $y \in U(X \cap Y)$" , puis , en vertu de la règle de redoublement , que "$U \in \overset{-1}{F}{}^{\alpha}_{\beta}$ "→"quels que soient X,Y,y, $y \notin U(X) \cap U(Y)$ ou $y \in U(X \cap Y)$"⇄"quels que soient X,Y, $U(X) \cap U(Y) \subset U(X \cap Y)$" ,c'est-à-dire que "a→b' " .

2°) "b→c" . En effet

"b"⇄"quels que soient X,Y, $U(X \cap Y) = U(X) \cap U(Y)$ et ($X \cap Y = \emptyset$ ou $X \cap Y \neq \emptyset$)"

91

$\rightleftarrows$"quels que soient X,Y, ($X\cap Y=\emptyset$ et $U(X\cap Y)=U(X)\cap U(Y)$) ou ($X\cap Y\neq\emptyset$ et $U(X\cap Y)=U(X)\cap U(Y)$)"

Mais "$X\cap Y=\emptyset$ et $U(X\cap Y)=U(X)\cap U(Y)$"$\rightarrow$"$U(X)\cap U(Y)=U(\emptyset)$" $\rightarrow$ "$U(X)\cap U(Y)=\emptyset$" d'après le théorème 1 ; donc

"b"$\rightarrow$"quels que soient X,Y, $X\cap Y\neq\emptyset$ ou $U(X)\cap U(Y)=\emptyset$"$\rightleftarrows$"c" .

3°) . "c$\rightarrow$a" . En effet

"quels que soient X,Y, $X\cap Y\neq\emptyset$ ou $U(X)\cap U(Y)=\emptyset$"$\rightarrow$"quels que soient x,x', $\{x\}\cap\{x'\}\neq\emptyset$ ou $U(\{x\})\cap U(\{x'\})=\emptyset$"

Or (§ 2, prop.3) ,"$\{x\}\cap\{x'\}\neq\emptyset$"$\rightleftarrows$"il existe z tel que $z\in\{x\}\cap\{x'\}$"$\rightleftarrows$ "il existe z tel que $z\in\{x\}$ et $z\in\{x'\}$"$\rightleftarrows$"il existe z tel que $z=x$ et $z=x'$ "$\rightleftarrows$ "$x=x'$ " . D'autre part "$U(\{x\})=U(x)$" et "$U(\{x'\})=U(x')$" sont des identités , donc

"c"$\rightarrow$"quels que soient x,x', $x=x'$ ou $U(x)\cap U(x')=\emptyset$"

Mais (§ 2,prop.3)

"$U(x)\cap U(x')=\emptyset$"$\rightleftarrows$"quel que soit y , $y\notin U(x)\cap U(x')$"$\rightleftarrows$"quel que soit y , $y\notin U(x)$ ou $y\notin U(x')$"

Donc (règle IX)

"c"$\rightarrow$"quels que soient x,x',y, $x=x'$ ou $y\notin U(x)$ ou $y\notin U(x')$"$\rightleftarrows$"a" .

Ces trois premières parties de la démonstration nous montrent donc que a,b,c <u>sont trois relations équivalentes</u> .

4°) Pour démontrer que d est une relation équivalente aux trois premières , nous établirons d'abord la proposition suivante : X,Y,Z étant trois arguments ~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ du type des parties d'un type T ,

"$Z=X-Y$"$\rightleftarrows$"$Y\cap Z=\emptyset$ et ~~XXXXXXX~~ $Y\cup Z=X$" .

En effet , par définition "$Z=X-Y$"$\rightleftarrows$"$Y\subset X$ et $Z=X\cap\complement Y$" ; donc "$Z=X-Y$"$\rightarrow$"$Z\subset\complement Y$"$\rightleftarrows$"$Z\cap Y=\emptyset$" ; d'autre part "$Z=X-Y$"$\rightarrow$"$Y\cup Z=Y\cup(X\cap\complement Y)$"$\rightarrow$"$Y\cup Z=(X\cup Y)\cap(Y\cup\complement Y)$"$\rightleftarrows$"$Y\cup Z=X\cup Y$" , et comme enfin "$Z=X-Y$"$\rightarrow$"$Y\subset X$"$\rightleftarrows$"$X\cup Y=X$" , on voit que "$Z=X-Y$"$\rightarrow$"$Y\cup Z=X$" , ce qui démontre la première partie de la proposition .

D'autre part , "$Y\cup Z=X$"$\rightarrow$"$Y\subset X$" , et "$Y\cup Z=X$"$\rightarrow$"$X\cap\complement Y=(Y\cup Z)\cap\complement Y$"$\rightleftarrows$"$X\cap\complement Y=Z\cap\complement Y$" ; mais comme "$Y\cap Z=\emptyset$"$\rightleftarrows$"$Z\subset\complement Y$"$\rightleftarrows$"$Z\cap\complement Y=Z$" , on voit bien que "$Y\cap Z=\emptyset$ et $Y\cup Z=X$" $\rightarrow$ "$Y\subset X$ et $Z=X\cap\complement Y$" $\rightleftarrows$ "$Z=X-Y$" , ce qui achève de démontrer la proposition .

Revenons maintenant au théorème 4 . Remarquons d'abord que la relation d s'énonce correctement de la façon suivante : "quels que soient X,Y,Z, si ($Y\subset X$ et $Z=X\cap\complement Y$) , $U(Y)\subset U(X)$ et $U(Z)=U(X)\cap\complement(U(Y))$" ; ou encore , d'après la proposition qui vient d'être démontrée : "quels que soient X,Y,Z, si ($Y\cap Z=\emptyset$ et $Y\cup Z=X$) , $U(Y)\cap U(Z)=\emptyset$ et $U(Y)\cup U(Z)=U(X)$" ; or , tout d'abord , "$Y\cup Z=X$" $\rightarrow$ "$U(Y)\cup U(Z)=U(X)$" est vraie d'après le théorème 3 ; donc "d" $\rightleftarrows$ "quels que soient X,Y,Z, $Y\cap Z\neq\emptyset$ ou $U(Y)\cap U(Z)=\emptyset$" $\rightleftarrows$ "c" d'après la règle 14 et la règle de redoublement , ce qui achève de démontrer le théorème .

<u>Théorème 5</u> . "$U\in\overset{-1}{\overline{A}}{}^{\alpha}_{\beta}$" $\rightleftarrows$ "<u>quel que soit X</u> , $U(\complement X)=\complement U(X)$" .

Remarquons d'abord qu'on a identiquement "$X\subset E_\alpha$" , donc aussi "$\complement X=E_\alpha-X$" ; comme "$\overset{-1}{\overline{A}}{}^{\alpha}_{\beta}\subset\overset{-1}{\overline{F}}{}^{\alpha}_{\beta}$" , "$U\in\overset{-1}{\overline{A}}{}^{\alpha}_{\beta}$" $\rightarrow$ "quel que soit X , $U(E_\alpha-X)=U(E_\alpha)-U(X)$" ; d'autre part "$U\in\overset{-1}{\overline{A}}{}^{\alpha}_{\beta}$" $\rightarrow$ "quel que soit y , il existe x tel que $x\in E_\alpha$ et $y\in U(x)$" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , $y\in U(E_\alpha)$" $\rightleftarrows$ "$U(E_\alpha)=E_\beta$" puisque "$x\in E_\alpha$" est une identité ; donc

$$"U\in\overset{-1}{\overline{A}}{}^{\alpha}_{\beta}" \rightarrow "\text{quel que soit } X\ ,\ U(\complement X)=\complement U(X)"$$

ce qui démontre la première partie du théorème .

Réciproquement

"quel que soit X , $U(\complement X)=\complement U(X)$" $\rightarrow$ "quels que soient X,Y, $U(\complement X)\cup U(\complement Y)=(\complement U(X))\cup(\complement U(Y))$" $\rightleftarrows$ "quels que soient X,Y, $U((\complement X)\cup(\complement Y))=\complement(U(X)\cap U(Y))$" $\rightleftarrows$ "quels que soient X,Y, $U(\complement(X\cap Y))=\complement(U(X)\cap U(Y))$" ; mais "quel que soit X , $U(\complement X)=\complement U(X)$" $\rightarrow$ "quels que soient X,Y, $U(\complement(X\cap Y))=\complement U(X\cap Y)$" ; finalement "quel que soit X , $U(\complement X)=\complement U(X)$" $\rightarrow$ "quels que soient X,Y, $U(X\cap Y)=U(X)\cap U(Y)$" $\rightleftarrows$ "$U\in\overset{-1}{\overline{F}}{}^{\alpha}_{\beta}$" , d'après le théorème 4 .

Par ailleurs , "quel que soit X , $U(\complement X)=\complement U(X)$" $\rightarrow$ "$U(\complement\emptyset)=\complement U(\emptyset)$" $\rightleftarrows$ "$U(E_\alpha)=E_\beta$" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , il existe x tel que $y\in U(x)$" d'après le théorème 1 , et ceci achève de démontrer le théorème .

<u>Exercices</u> . 1) Montrer que "il existe X tel que $U(\complement X)=\complement U(X)$" $\rightarrow$ "$U(E_\alpha)=E_\beta$" .

2) Démontrer l'identité "$U(X)=pr_\alpha(U^\circ \cap (X\times E_\beta))$" .

3) Démontrer que "$U \subset V$" $\rightleftarrows$ "quel que soit X , $U(X) \subset V(X)$" .

4) Démontrer l'identité "$(U\cup V)(X)=U(X)\cup V(X)$" ; montrer qu'en général "$(U\cap V)(X)\neq U(X)\cap V(X)$" .

5) A étant une partie de E_α , U_A la restriction de U à A , montrer qu'on a identiquement "$U_A(X)=U(X\cap A)$" .

u étant un argument du type des <u>applications</u> de T_α dans T_β , on utilise , par un nouvel abus de langage , la notation u(X) comme synonyme de $\bar{u}(X)$; ici encore , pourvu qu'on précise ce qu'est l'argument X , il ne peut y avoir de confusion . Cet abus de langage permet alors d'éviter l'usage de la notation $\bar{u}(x)$ dans les formules , puisqu'on a identiquement "$\bar{u}(x)=u(\{x\})$" ; l'identité "$\bar{u}(x)=\{u(x)\}$" s'écrit donc encore "$u(\{x\})=\{u(x)\}$" . On écrit de même $\overset{-1}{u}(X')$ au lieu de $\overset{-1}{\bar{u}}(X')$ (X' argument de $P(T_\beta)$) .

L'application des théorèmes 3,4 et 5 et l'identité "$\overset{-1}{\bar{u}}\in \overset{-1}{\bar{A}}{}_\alpha^\beta$" donnent alors les <u>identités fondamentales</u> suivantes , où X' et Y' sont des arguments du type $P(T_\beta)$:

(1) $$\text{"}\overset{-1}{u}(X'\cup Y')=\overset{-1}{u}(X')\cup\overset{-1}{u}(Y')\text{"}$$

(2) $$\text{"}\overset{-1}{u}(X'\cap Y')=\overset{-1}{u}(X')\cap\overset{-1}{u}(Y')\text{"}$$

(3) $$\text{"}\overset{-1}{u}(\complement X')=\complement\overset{-1}{u}(X')\text{"}$$

Il faut bien se garder d'appliquer inconsidérément les identités (2) et (3) où on remplacerait $\overset{-1}{u}$ par u ; au contraire , on peut faire cette substitution dans (1) d'après le théorème 3 .

<u>Exercices</u> . 1) Appliquer les identités fondamentales précédentes , et les théorèmes 1 et 2 , aux applications rencontrées antérieurement dans le cours du chapitre ; on retrouvera ainsi des formules déjà démontrées ou données en exercice .

2) Les notations générales adoptées ci-dessus justifient en particulier la notation $c_\alpha(X)$ synonyme de $pr_\alpha(X)$ dans un produit de trois types T_α , T_β , T_γ par exemple ; montrer de plus qu'on a identiquement "$\overset{-1}{c}_\alpha(U)=U\times E_\beta\times E_\gamma$" et

$$\text{"}\overset{-1}{c}_\alpha(U)\cap\overset{-1}{c}_\beta(V)\cap\overset{-1}{c}_\gamma(W)=U\times V\times W\text{"} .$$

La composition des correspondances. Désignons de nouveau par T_α, T_β, T_γ, trois types quelconques distincts ou non, et considérons les types produits $T_{\alpha\beta}$, $T_{\beta\gamma}$ et $T_{\alpha\gamma}$. Soient x,y,z trois arguments respectivement des types T_α, T_β, T_γ, et U, V deux arguments respectivement des types $P(T_{\alpha\beta})$ et $P(T_{\beta\gamma})$, et considérons la relation entre x,z,U,V

"il existe y tel que $(x,y)\in U$ et $(y,z)\in V$"

En passant au type produit $T_{\alpha\gamma}$, puis au type des parties de ce type, on en déduit une relation entre U,V et un argument W de $P(T_{\alpha\gamma})$, relation fonctionnelle en W, dont nous désignerons le symbole fonctionnel correspondant par $V\circ U$, ou simplement par VU, si aucune confusion n'est possible. On a donc

"$(x,z)\in VU$" $\rightleftarrows$ "il existe y tel que $(x,y)\in U$ et $(y,z)\in V$"

Cette notation est à rapprocher de celles utilisées dans le § 3 pour le produit des types, où on fixait également un ordre déterminé aux divers arguments ; comme ces notations, elle a l'avantage de ne pas surcharger l'écriture. Mais pour éviter toute possibilité de confusion, il serait préférable d'adopter une notation telle que $\underset{(\beta\gamma)(\alpha\beta)}{V\circ U}$, étant entendu que ce symbole serait synonyme de $\underset{(\alpha\beta)\,(\beta\gamma)}{U\circ V}$.

Une telle notation montre alors clairement dans quel cas on peut y permuter U et V sans permuter les indices, (U et V gardant la même signification) de sorte que le symbole obtenu conserve un sens : il faut et il suffit que les types $T_{\alpha\beta}$ et $T_{\beta\gamma}$ soient identiques, c'est-à-dire que les types T_α et T_γ soient identiques. Mais il est essentiel de remarquer que (en revenant aux notations adoptées), la relation "VU=UV" <u>n'est pas une identité</u>.

<u>Exercice</u>. Donner un exemple de deux éléments A,B du type des parties d'un type produit (T,T) d'un type T par lui-même, tels que "$AB\neq BA$".

<u>Proposition 2</u>. "$U\subset U'$" $\rightarrow$ "$VU\subset VU'$"; "$V\subset V'$" $\rightarrow$ "$VU\subset V'U$".

On a (règle X)

"(quel que soit y, $(x,y)\notin U$ ou $(x,y)\in U'$) et $(x,z)\in VU$" $\rightleftarrows$ "(quel que soit y, $(x,y)\notin U$ ou $(x,y)\in U'$) et (il existe y tel que $(x,y)\in U$ et $(y,z)\in V$)" $\rightarrow$ "il existe y tel que (($(x,y)\notin U$ ou $(x,y)\in U'$) et $(x,y)\in U$ et $(y,z)\in V$" $\rightarrow$ "il existe y tel que $(x,y)\in U'$ et $(x,y)\in U$ et $(y,z)\in V$" $\rightarrow$ "il existe y tel que $(x,y)\in U'$ et $(y,z)\in V$" $\rightleftarrows$ "$(x,z)\in VU'$".

Il en résulte (voir le raisonnement de la prop.10, § 3) que "quel que soit y, $(x,y)\notin U$ ou $(x,y)\in U'$" $\rightarrow$ "$(x,z)\notin VU$ ou $(x,z)\in VU'$

et par suite , d'après la règle de redoublement

"quels que soient x,y, $(x,y) \notin U$ ou $(x,y) \in U'$ " $\rightarrow$ "quels que soient x,z, $(x,z) \notin VU$ ou $(x,z) \in VU'$ "

ce qui est la première proposition à démontrer . La démonstration de la seconde est tout à fait analogue .

Exercices . 1) Démontrer les identités "$\emptyset \circ U = \emptyset$" , "$V \circ \emptyset = \emptyset$" , "$V \circ (E_\alpha \times E_\beta) = E_\alpha \times (pr_\gamma V)$" , "$(E_\beta \times E_\gamma) \circ U = (pr_\alpha U) \times E_\gamma$" .

2) Démontrer les identités

"$V \circ (U \cup U') = (V \circ U) \cup (V \circ U')$" ; "$(V \cup V') \circ U = (V \circ U) \cup (V' \circ U)$"

Montrer que les relations analogues , où on remplace la **réunion** par l'**intersection** , ne sont pas des identités .

3) X étant un argument de $P(T_\alpha)$, Y et Y' des arguments de $P(T_\beta)$, Z un argument de $P(T_\gamma)$, montrer que

"$Y \cap Y' = \emptyset$" $\rightarrow$ "$(X \times Y) \circ (Y' \times Z) = \emptyset$"

et "$Y \cap Y' \neq \emptyset$" $\rightarrow$ "$(X \times Y) \circ (Y' \times Z) = X \times Z$" .

Lorsque T_α , T_β , T_γ sont trois noms d'un **même** type T , on a de nouvelles propositions relatives au symbole VU ; citons seulement la suivante :

Proposition 3 . Δ étant la diagonale du type produit (T,T) , U un argument du type des parties de ce type produit , les relations "$\Delta U = U$" et "$U \Delta = U$" sont des identités .

En effet "$(x,z) \in \Delta U$" $\rightleftarrows$ "il existe y tel que $(x,y) \in U$ et $(y,z) \in \Delta$ " $\rightleftarrows$ "il existe y tel que $(x,y) \in U$ et $y = z$" $\rightleftarrows$ "$(x,z) \in U$" , d'où "$\Delta U = U$" identiquement , et de même pour l'autre identité .

Supposons maintenant que U et V soient respectivement des arguments des types $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$ (correspondances de T_α à T_β) et $A_{T_\beta}^{P(T_\gamma)}$ (correspondances de T_β à T_γ) ; nous désignerons alors par $V \circ U$ ou VU le symbole fonctionnel composé $((V^\circ) \circ (U^\circ))_\circ$; on aura donc

"$z \in VU(x)$" $\rightleftarrows$ "il existe y tel que $y \in U(x)$ et $z \in V(y)$"

De même , si U' est un argument du type $A_{T_\beta}^{P(T_\alpha)}$ et V' un argument du type $A_{T_\gamma}^{P(T_\beta)}$, on désignera par $U' \circ V'$ ou $U'V'$ le symbole fonctionnel composé $_\circ((^\circ V') \circ (^\circ U'))$, de sorte que

"$x \in U'V'(z)$" $\rightleftarrows$ "il existe y tel que $x \in U'(y)$ et $y \in V'(z)$"

Ici encore , la notation ainsi adoptée , où l'ordre des lettres ne peut être modifié , tout en étant très commode en pratique, n'est pas des meilleures au point de vue strictement logique ; une notation indicielle telle que $V^{\gamma}_{\beta}\circ U^{\beta}_{\alpha}$, qui serait considérée comme synonyme de $U^{\beta}_{\alpha}\circ V^{\gamma}_{\beta}$, serait , à ce point de vue , préférable , car elle préciserait sans ambiguité ce que doivent signifier U et V pour que cette combinaison de signes ait un sens .

On remarquera aussi l'avantage que présenterait ici la notation indicielle au,lieu de la notation abrégée des points , pour désigner les symboles fonctionnels de la correspondance canonique entre le ~~MM~~ type produit de deux types donnés , et le type des correspondances de l'un à l'autre de ces types ; $V\circ U$ serait alors par définition synonyme de $(V^{(\beta\gamma)}\circ U^{(\alpha\beta)})_{(\alpha\gamma)}$, et $U'\circ V'$ synonyme de $(V'^{(\gamma\beta)}\circ U'^{(\beta\alpha)})_{(\gamma\alpha)}$, définitions qui ne présentent plus aucune ambiguité .

Lorsqu'on substitue à U et V deux éléments A , B , respectivement du même type , on dit que BA est la correspondance <u>composée</u> de A et B . La raison de cette dénomination , comme de l'ordre adopté dans la notation VU , est le théorème fondamental suivant :

<u>Théorème 6 . X étant un argument du type des parties de</u> T_{α} ,

$$"VU(X)=V(U(X))"$$

<u>est une identité</u> .

En effet (règle IX)

"$z\in VU(X)$"$\rightleftarrows$"il existe x tel que $x\in X$ et $z\in VU(x)$"$\rightleftarrows$ "il existe x,y tels que $x\in X$ et $y\in U(x)$ et $z\in V(y)$"$\rightleftarrows$"il existe y tel que (il existe x tel que $x\in X$ et $y\in U(x)$) et $z\in V(y)$"$\rightleftarrows$"il existe y tel que $y\in U(X)$ et $z\in V(y)$"$\rightleftarrows$"$z\in V(U(X))$" .

Notons encore la proposition suivante , qui donne l'<u>inverse</u> d'une correspondance composée ;

<u>Proposition 4</u> . "$\overset{-1}{(VU)}=\overset{-1}{U}\overset{-1}{V}$" <u>est une identité</u> .

En effet

~~XXXX(MM)(z)~~ "$x\in\overset{-1}{(VU)}(z)$"$\rightleftarrows$"$z\in VU(x)$"$\rightleftarrows$"il existe y tel que $y\in U(x)$ et $z\in V(y)$"$\rightleftarrows$"il existe y tel que $x\in\overset{-1}{U}(y)$ et $y\in\overset{-1}{V}(z)$"$\rightleftarrows$"$x\in\overset{-1}{U}\overset{-1}{V}(z)$".

Soit maintenant u un argument du type des <u>applications</u> de T_{α} dans

T_β , et v un argument du type des applications de T_β dans T_γ . D'après le théorème 6 , on a identiquement

$$"(\overline{v}\circ\overline{u})(x)=\overline{v}(\overline{u}(x))=\overline{v}(\{u(x)\})=\{v(u(x))\}"$$

et par suite "il existe un z et un seul tel que $z\in(\overline{v}\circ\overline{u})(x)$" est une identité ; il en résulte que "il existe un w et un seul tel que $\overline{w}=\overline{v}\circ\overline{u}$ " est aussi une identité , autrement dit que "$\overline{w}=\overline{v}\circ\overline{u}$" est une relation fonctionnelle en w (w argument du type des applications de T_α dans T_γ) ; on désignera encore par $v\circ u$, ou simplement vu , le symbole fonctionnel qu'elle détermine ; on a donc identiquement

$$"vu(x)=v(u(x))"$$

U désignant de nouveau un argument du type des correspondances de T_α à T_β , nous allons maintenant démontrer deux importantes propositions relatives aux symboles fonctionnels $\overset{-1}{U}U$ et $U\overset{-1}{U}$.

<u>Proposition 5 . "quel que soit x , il existe</u> y <u>tel que</u> $y\in U(x)$" $\rightleftarrows$ $\rightleftarrows$ "<u>quel que soit X</u> , $X\subset\overset{-1}{U}U(X)$"

En effet

"$(x\in X)$ et (quel que soit x , il existe y tel que $y\in U(x)$)" $\rightarrow$ $\rightarrow$ "$x\in X$ et il existe y tel que $y\in U(x)$" $\rightleftarrows$ "il existe y tel que $x\in X$ et $y\in U(x)$"

Or (th.2) "$x\in X$ et $y\in U(x)$" $\rightleftarrows$ "$\{x\}\subset X$ et $y\in U(\{x\})$" $\rightarrow$ "$y\in U(X)$"

Donc

"$(x\in X)$ et (quel que soit x , il existe y tel que $y\in U(x)$)" $\rightarrow$ $\rightarrow$ "il existe y tel que $y\in U(x)$ et $y\in U(X)$" $\rightleftarrows$ "il existe y tel que $x\in\overset{-1}{U}(y)$ et $y\in U(X)$" $\rightleftarrows$ "$x\in\overset{-1}{U}U(X)$"

Il en résulte que

"quel que soit x , il existe y tel que $y\in U(x)$" $\rightarrow$ "$x\notin X$ ou $x\in\overset{-1}{U}U(X)$"

d'où , en vertu de la règle de redoublement

"quel que soit x , il existe y tel que $y\in U(x)$" $\rightarrow$ "quels que soient x,X, $x \notin X$ ou $x \in \overset{-1}{U}U(X)$" $\rightleftarrows$ "quel que soit X, $X \subset \overset{-1}{U}U(X)$" .

Réciproquement

"quel que soit X , $X \subset \overset{-1}{U}U(X)$" $\rightarrow$ "quel que soit x , $\{x\} \subset \overset{-1}{U}U(\{x\})$" $\rightleftarrows$ "quel que soit x , $x \in \overset{-1}{U}U(x)$"

Or , "$x \in \overset{-1}{U}U(x)$" $\rightleftarrows$ "il existe x' tel que $x' \in \overset{-1}{U}U(x)$" $\rightleftarrows$ "$\overset{-1}{U}U(x) \neq \emptyset$" $\rightarrow$ "$U(x) \neq \emptyset$" ; donc

"quel que soit X , $X \subset \overset{-1}{U}U(X)$" $\rightarrow$ "quel que soit x , $U(x) \neq \emptyset$" $\rightleftarrows$

$\rightleftarrows$ "quel que soit x , il existe y tel que $y \in U(x)$"

ce qui achève de démontrer la proposition .

<u>Proposition 6 . "quel que soit x , il existe au plus un</u> y <u>tel que</u> $y \in U(x)$" $\rightleftarrows$ "<u>quel que soit</u> Y , $U\overset{-1}{U}(Y) \subset Y$" .

En effet ,

"quel que soit x , il existe au plus un y tel que $y \in U(x)$" $\rightleftarrows$ "quels que soient x,y,y', $y \notin U(x)$ ou $y' \notin U(x)$ ou $y=y'$ " $\rightleftarrows$ "quels que soient y,y', (quel que soit x , $y \notin U(x)$ ou $y' \notin U(x)$) ou $y=y'$ " $\rightleftarrows$ "quels que soient y,y' , (quel que soit x , $y' \notin U(x)$ ou $x \notin \overset{-1}{U}(y)$) ou $y=y'$ " $\rightleftarrows$

$\rightleftarrows$ "quels que soient y,y', $y' \notin U\overset{-1}{U}(y)$ ou $y'=y$ " $\rightleftarrows$ "quel que soit y , $U\overset{-1}{U}(y) \subset \{y\}$" .

On en déduit d'abord que

"quel que soit Y , $U\overset{-1}{U}(Y) \subset Y$" $\rightarrow$ "quel que soit y , $U\overset{-1}{U}(y) \subset \{y\}$" $\rightleftarrows$

$\rightleftarrows$ "quel que soit x , il existe au plus un y tel que $y \in U(x)$" .

Réciproquement

"($y' \in U\overset{-1}{U}(Y)$) et (quel que soit y , $U\overset{-1}{U}(y) \subset \{y\}$)" $\rightarrow$ "(il existe y tel que $y \in Y$ et $y' \in U\overset{-1}{U}(y)$) et (quel que soit y , $U\overset{-1}{U}(y) \subset \{y\}$)"

$\rightarrow$ "il existe y tel que $y \in Y$ et $y' \in U\overset{-1}{U}(y)$ et $U\overset{-1}{U}(y) \subset \{y\}$" $\rightarrow$ "il existe y tel que $y \in Y$ et $y' \in \{y\}$" $\rightarrow$ "il existe y tel que $y' \in Y$" $\rightleftarrows$ "$y' \in Y$"

D'où

"quel que soit y , $U\overset{-1}{U}(y) \subset \{y\}$" $\rightarrow$ "$y' \notin U\overset{-1}{U}(Y)$ ou $y' \in Y$"

d'où , en vertu de la règle de redoublement

"quel que soit y , $U\overset{-1}{U}(y) \subset \{y\}$" $\rightarrow$ "quels que soient y',Y, $y' \notin U\overset{-1}{U}(Y)$ ou $y' \in Y$" $\rightleftarrows$ "quel que soit Y , $U\overset{-1}{U}(Y) \subset Y$" .)

De ces propositions , on déduit , comme corollaires , les théorèmes suivants , d'application fréquente :

<u>Théorème 7</u> . <u>u étant un argument du type des applications de</u> T_α <u>dans</u> T_β , "$u\overset{-1}{u}(Y) \subset Y$" <u>et</u> "$X \subset \overset{-1}{u}u(X)$" <u>sont des identités</u> .

En effet , d'après les propositions 5 et 6 ,
"(quel que soit X , $X \subset \overset{-1}{U}U(X)$) et (quel que soit Y , $U\overset{-1}{U}(Y) \subset Y$)" $\rightleftarrows$ "$U \in \overline{A}_\alpha^\beta$" (puisque cette dernière relation est équivalente à "quel que soit x , il existe un y et un seul tel que $y \in U(x)$") . Comme "$\overline{u} \in \overline{A}_\alpha^\beta$" est une identité , le théorème en résulte .

<u>Théorème 8</u> . <u>u étant un argument du type des applications de</u> T_α <u>dans</u> T_β , "quel que soit Y , $u\overset{-1}{u}(Y)=Y$" $\rightleftarrows$ "$u \in B_\alpha^\beta$"

Comme "$u\overset{-1}{u}(Y) \subset Y$" est une identité d'après le th.7 , il suffit de montrer que "quel que soit Y, $Y \subset u\overset{-1}{u}(Y)$" $\rightleftarrows$ "$u \in B_\alpha^\beta$" . Or , d'après la proposition 5 appliquée à $\overset{-1}{u}$,
"quel que soit Y , $Y \subset u\overset{-1}{u}(Y)$" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , il existe x tel que $x \in \overset{-1}{u}(y)$" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , il existe x tel que $y=u(x)$" $\rightleftarrows$ "$u \in B_\alpha^\beta$"

<u>Théorème 9</u> . <u>u étant un argument du type des applications de</u> T_α <u>dans</u> T_β , "quel que soit X , $\overset{-1}{u}u(X)=X$" $\rightleftarrows$ "$u \in D_\alpha^\beta$" .

En effet , d'après le th.7 , il suffit de montrer que "quel que soit X , $\overset{-1}{u}u(X) \subset X$" $\rightleftarrows$ "$u \in D_\alpha^\beta$" . Or , la prop.6 appliquée à $\overset{-1}{u}$ donne "quel que soit X , $\overset{-1}{u}u(X) \subset X$" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , il existe au plus un x tel que $x \in \overset{-1}{u}(y)$" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , il existe au plus un x tel que $y=u(x)$" $\rightleftarrows$ "$u \in D_\alpha^\beta$" .

Enfin , des théorèmes 8 et 9 et de l'identité $C_\alpha^\beta = B_\alpha^\beta \cap D_\alpha^\beta$, on déduit immédiatement le

<u>Théorème 10</u> . <u>u étant un argument du type des applications de</u> T_α <u>dans</u> T_β , "quels que soient X,Y, $\overset{-1}{u}u(X)=X$ et $u\overset{-1}{u}(Y)=Y$" $\rightleftarrows$ "$u \in C_\alpha^\beta$" .

Les propositions 5 et 6 permettent ainsi de <u>caractériser</u> les ensembles F_α^β , $\overline{A}_\alpha^\beta$, $\overline{B}_\alpha^\beta$, $\overline{D}_\alpha^\beta$, $\overline{C}_\alpha^\beta$ dans le type des correspondances de T_α à T_β , de même que les théorèmes 4 et 5 nous avaient permis de caractériser les ensembles $\overset{-1}{F}{}_\beta^\alpha$ et $\overset{-1}{A}{}_\beta^\alpha$. Nous terminerons par un théorème de nature analogue :

<u>Théorème 11 . u étant un argument du type A_{α}^{β}, v un argument du type</u> A_{β}^{α}, "quels que soient x,y, vu(x)=x et uv(y)=y" $\rightleftarrows$ "$u \in C_{\alpha}^{\beta}$ et $v \in C_{\beta}^{\alpha}$ et $\bar{v}=\bar{u}^{-1}$ " .

En effet ,

"quel que soit y , uv(y)=y" $\rightleftarrows$ "quel que soit y , il existe x tel que x=v(y) et y=u(x)" $\rightarrow$ "quel que soit y , il existe x tel que y=u(x)" .

En second lieu , x,x',et z étant des arguments du type T_{α},

"quel que soit x , vu(x)=x" $\rightleftarrows$ "quels que soient x,z, z≠vu(x) ou z=x" $\rightleftarrows$ "quels que soient x,y,z, y≠u(x) ou z≠v(y) ou z=x" $\rightarrow$ "quels que soient x,x',y,z, y≠u(x) ou y≠u(x') ou z≠v(y) ou z=x"

et de même

"quel que soit x , vu(x)=x" $\rightleftarrows$ "quels que soient x',y,z, y≠u(x') ou z≠v(y) ou z=x' " $\rightarrow$ "quels que soient x,x',y,z, y≠u(x) ou y≠u(x') ou z≠v(y) ou z=x' "

d'où

"quel que soit x , vu(x)=x" $\rightarrow$ "quels que soient x,x',y,z, y≠u(x) ou y≠u(x') ou z≠v(y) ou (z=x et z=x')" $\rightarrow$ "quels que soient x,x',y,z, y≠u(x) ou y≠u(x') ou z≠v(y) ou x=x' " $\rightleftarrows$ "quels que soient x,x',y, (quel que soit z , z≠v(y)) ou y≠u(x) ou y≠u(x') ou x=x' " $\rightleftarrows$ "quels que soient x,x',y, y≠u(x) ou y≠u(x') ou x=x' "

puisque "quel que soit z , z≠v(y)" est partout fausse .

Autrement dit

"quel que soit x , vu(x)=x" $\rightarrow$ "quel que soit y , il existe au plus un x tel que y=u(x)"

ce qui montre donc que

"quels que soient x,y, vu(x)=x et uv(y)=y" $\rightarrow$ "$u \in C_{\alpha}^{\beta}$"

On voit de même que

"quels que soient x,y, vu(x)=x et uv(y)=y" $\rightarrow$ "$v \in C_{\beta}^{\alpha}$"

Cela étant (théorèmes 6 et 10)

"quel que soit y , uv(y)=y" $\rightarrow$ "quel que soit y , $\bar{u}^{-1}(\bar{u}(\bar{v}(y)))=\bar{u}^{-1}(y)$"

et "$u \in C_{\alpha}^{\beta}$" $\rightarrow$ "quel que soit x , $\bar{u}^{-1}(\bar{u}(x))=x$" $\rightarrow$ "quel que soit y ,

$\overset{-1}{\overline{u}}(\overline{u}(\overline{v}(y)))=\overline{v}(y)$"

d'où

"quels que soient x,y, $vu(x)=x$ et $uv(y)=y$" $\rightarrow$ "quel que soit y , $\overline{v}(y)=\overset{-1}{\overline{u}}(y)$" $\rightleftarrows$ "$\overline{v}=\overset{-1}{\overline{u}}$" (prop.1)

ce qui démontre la première partie du théorème .

La réciproque est une conséquence du théorème 10 , car "$u\in C_\alpha^\beta$ et $\overline{v}=\overset{-1}{\overline{u}}$ " $\rightarrow$ "quels que soient X,Y, $vu(X)=X$ et $uv(Y)=Y$" $\rightarrow$ $\rightarrow$ "quels que soient x,y, $uv(x)=x$ et $vu(y)=y$" .

<u>Exercices</u> . 1) T_α , T_β, T_γ, T_δ désignant quatre types quelconques , distincts ou non , U,V,W des arguments respectivement des types $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$, $A_{T_\beta}^{P(T_\gamma)}$, $A_{T_\gamma}^{P(T_\delta)}$, démontrer que la relation

"$W\circ(V\circ U)=(W\circ V)\circ U$"

est une identité . On pose "$W\circ V\circ U=W\circ(V\circ U)$" .

2) U étant un argument du type P(T,T) , X un argument du type P(T) , démontrer l'identité

"$U\circ(X\times X)\circ U=U(X)\times U(X)$"

3) U étant un argument du type $A_{T_\alpha}^{P(T_\beta)}$, V un argument du type $A_{T_\beta}^{P(T_\alpha)}$, montrer que la relation

"quel que soit x , $VU(x)=\{x\}$"

est équivalente à la conjonction des relations

"quel que soit x , il existe y tel que $y\in U(x)$ et $V(y)\neq\emptyset$" et

"quel que soit y , $\overset{-1}{U}(y)=\emptyset$ ou $V(y)=\emptyset$ ou ($\overset{-1}{U}(y)=V(y)$ et il existe un x et un seul tel que $x\in\overset{-1}{U}(y)$)" .

En déduire que

"quels que soient x, y, $VU(x)=\{x\}$ et $UV(y)=\{y\}$" $\rightleftarrows$

"$U\in\overline{C}_\alpha^\beta$ et $V=\overset{-1}{U}$"