REGLES DU RAISONNEMENT
(PROJET CARTAN)

Rédaction n° 054

Nombre de pages : 12

Nombre de feuilles : 12

Ensembles

Règles du raisonnement

54

RÈGLES DU RAISONNEMENT (projet CARTAN)

Construction de relations à partir de <u>relations élémentaires</u> explicitement nommées, et à l'aide des schémas :

et, ou, négation, quel que soit x , il ex. x.

Emploi des lettres (minuscules) pour désigner des "variables" (libres ou liées) ; des lettres (majuscules) pour désigner des relations (arbitraires). Tabou : dans la formation des relations, ne jamais employer, pour désigner une variable libre, une lettre déjà utilisée comme symbole de variable liée.

Signaler la substitution d'une variable à une autre dans une relation, et l'identification de deux variables.

Signaler quelque part la traduction de certaines locutions du langage courant ; par ex : "quel que soit x tel que A(x), B(x)" s'écrit $(x)\left[\bar{A}(x) \text{ ou } B(x)\right]$.

<u>Tableau d'"équivalences syntaxiques"</u> (équivalence de schémas portant sur des relations arbitraires désignées par des lettres majuscules).

$\bar{\bar{A}}$	A
A et A	A
A et B	B et A
A et (B et C)	(A et B) et C
(notation : "A et B et C")	
(x)A(x)	(y)A(y)
(x)A	A (lorsque A ne contient pas x)
(x)((y)A(x,y))	(y)((x)A(x,y))
(notation : (x)(y)A(x,y))	
(x)((y)(z)A(x,y,z))	(x)(y)((z)A(x,y,z))
(notation : (x)(y)(z)A(x,y,z))	

A ou B	$\bar{A}$ et $\bar{B}$

(pourrait servir de définition à "A ou B")

(Ex)A(x)	(x)$\bar{A}$(x)

(pourrait servir de définition à (Ex)A(x))

A ou (B et C)	(A ou B) et (A ou C)
(x) (A ou B(x))	A ou ((x)B(x)) (quand A ne contient pas x)
(x)(A(x) et B(x))	(x)A(x) et (x)B(x)

D'une manière générale, chaque fois que l'on aura trouvé une suite explicite de relations

A, B, C,...., F

telles que l'on passe de l'une quelconque à la suivante en remplaçant une relation partielle par une relation syntaxiquement équivalente (au sens du tableau précédent), on dira que A et F sont <u>syntaxiquement équivalentes</u>. Transitivité de cette notion. En particulier, on a la liste suivante d'équivalences syntaxiques, qui complète la précédente :

A ou A	A
A ou B	B ou A
A ou (B ou C)	(A ou B) ou C
(Ex)A(x)	(Ey)A(y)
(Ex)A	A (lorsque A ne contient pas x)
(Ex)((Ey)A(x,y))	(Ey)((Ex)A(x,y)

(notation : (Ex)(Ey)A(x,y))

(Ex)((Ey)(Ez)A(x,y,z))	(Ex)(Ey)((Ez)A(x,y,z))

(notation : (Ex)(Ey)(Ez)A(x,y,z))

A et (B ou C)	(A et B) ou (A et C)
(Ex)(A et B(x))	A et (Ex)B(x) (quand A ne contient pas x)
(Ex)(A(x) ou B(x))	(Ex)A(x) ou (Ex)B(x)

Définition des relations vraies, ou identités logiques.

On va, dans certains cas, appliquer l'épithète de "vraie" à une relation formée explicitement à partir de relations élémentaires (indéterminées) A, B, C,... Tout d'abord, toute relation

$$A \text{ ou } \bar{A}$$

est posée comme <u>vraie</u>. Ensuite, on donne des <u>règles</u> qui permettent de former des relations vraies à partir d'autres relations supposées vraies. Voici ces règles (règles du raisonnement) :

1) si A est vraie, et si B est syntaxiquement équivalente à A, B est vraie.

2) si A est vraie, et si B est vraie, alors (A et B) est vraie.

3) si A est vraie, (A ou B) est vraie (B désignant une relation quelconque).

4) si A est vraie, et si ($\bar{A}$ ou B) est vraie,(*) alors B est vraie.

5) si A(x,x) est vraie, (Ey)A(x,y) est vraie.

6) si A(x) est vraie, (y)A(y) est vraie.

Chaque fois qu'on aura une suite explicite de relations explicites c'est-à-dire construites explicitement à l'aide de relations arbitraires) A,B,C,...,F, telles que chacune d'elles puisse être prouvée comme vraie lorsque, les précédentes étant supposées vraies, on applique les règles de raisonnement ci-dessus, alors la relation F sera déclarée <u>vraie</u>.

<u>Définition</u> : Lorsque deux relations A et B sont telles que ($\bar{A}$ ou B) soit vraie, on dit que <u>A entraîne B</u> (attention : "A entraîne B" est une phrase du langage ordinaire, et non une "relation" du langage logique cette phrase exprime que la relation (A $\rightarrow$B) est <u>vraie</u>) . Avec cette convention de langage, la règle 4) s'énonce :

(*) "$\bar{A}$ ou B" se note aussi "A $\rightarrow$ B" ; "(A$\rightarrow$B) et (B$\rightarrow$A)" se note aussi "A $\rightleftarrows$ B" .

si A est vraie et si A entraîne B , alors B est vraie.

On montre sans peine, en s'appuyant sur les règles 1) à 4), que : si A entraîne B et si B entraîne C , alors A entraîne C (transitivité de la notion de "A entraîne B"). En outre :

- si A entraîne B , alors : $\bar{B}$ entraîne $\bar{A}$,(A et C) entraîne (B et C), (A ou C) entraîne (B ou C) (et cela pour toute relation C) ;
- si A(x) entraîne B(x), alors (y)A(y) entraîne (y)B(y), (Ey)A(y) entraîne (Ey)B(y) ;
- si A entraîne B , et si A entraîne C , alors A entraîne (B et C) ;
- si A entraîne C , et si B entraîne C , alors (A ou B) entraîne C .

D'autre part, il est commode de savoir une fois pour toutes que :

- (A et B) entraîne B ;
- A entraîne (A ou B) ;
- "(x)A(x) ou (x)B(x)" entraîne (x)(A(x) ou B(x)) ;
- (x)(A(x) ou B(x)) entraîne "(x)A(x) ou (Ex)B(x)" ;
- (Ex)(A(x) et B(x)) entraîne "(Ex)A(x) et (Ex)B(x)" ;
- "(Ex)A(x) et (x)B(x)" entraîne (Ex)(A(x) et B(x)) ;
- (Ex)(y)A(x,y) entraîne (y)(Ex)A(x,y) ;
- (x)A(x) entraîne A(y), pour toute variable libre y ; de manière plus précise, (x)A(x,y) entraîne A(y,y) ;
- A(x) entraîne (Ey)A(y) ; de manière plus précise, A(x,x) entraîne (Ey)A(x,y) ;
- (x)A(x) entraîne (Ey)A(y) ; de manière plus précise, (x)A(x,x) entraîne (x)(Ey)A(x,y) .

Définition : On dit que deux relations A et B sont équivalentes (ou, si l'on veut préciser, logiquement équivalentes, par opposition à "syntaxiquement équivalentes"); lorsque A entraîne B et que B entraîne A;

autrement dit, lorsque la relation ($A \rightleftarrows B$) est <u>vraie</u>. Il revient au même de dire que

$$(A \text{ et } B) \text{ ou } (\bar{A} \text{ et } \bar{B})$$

est vraie.

La notion de relations équivalentes est transitive : si A est équivalente à B , et si B est équivalente à C , alors A est équivalente à C .

Deux relations syntaxiquement équivalentes sont toujours logiquement équivalentes. Deux relations vraies sont logiquement équivalentes. Toute relation logiquement équivalente à une relation vraie est vraie (en vertu de la règle 4)).

Si, à l'intérieur d'une relation A , on remplace une relation partielle B par une relation logiquement équivalente à B , on obtient une relation logiquement équivalente à A (en particulier, si A est vraie, on obtient une relation vraie). Ceci se vérifie en regardant la construction de A à partir de B ; il suffit de remarquer (ce qui résulte évidemment du tableau précédent des "entraînements"(!)) que si B est équivalent à B', $\bar{B}$ est équivalent à $\bar{B}'$, (B et C) est équivalent à (B' et C), (B ou C) est équivalent à (B' ou C) ; si B(x) est équivalent à B'(x), alors (x)B(x) est équivalent à (x)B'(x), (Ex)B(x) est équivalent à (Ex)B'(x) .

Notons encore que chacune des relations "A et (A ou B)", "A ou (A et B)" est équivalente à A .

<u>Les théories avec axiomes.</u>

On pose explicitement certaines relations élémentaires (à un nombre quelconque de variables), et on écrit explicitement certains <u>schémas</u> de relations (où peuvent entrer des relations arbitraires) . Nous supposerons d'abord que <u>ces schémas ne contiennent pas de variable libre</u>.

L'ensemble de ces données définit une <u>théorie</u> $\mathcal{C}$. Les schémas donnés se nomment les <u>axiomes</u> de la théorie. Dans cette théorie, on n'envisage que des relations construites explicitement à partir des relations élémentaires ; si dans l'un quelconque des schémas donnés, on remplace les relations arbitraires qui y figurent par des relations explicites de la théorie, on obtient une proposition, dite axiome <u>explicité</u> de la théorie (dans le cas particulièrement simple où les schémas ne contiennent pas de relations arbitraires, les axiomes de la théorie $\mathcal{C}$ se trouvent explicités, en nombre fini).

Chaque fois que l'on aura une relation A (de la théorie $\mathcal{C}$) et des axiomes (explicités) B, C, D tels que

$$\bar{B} \text{ ou } \bar{C} \text{ ou } \bar{D} \text{ ou } A$$

soit une relation vraie (identité logique), on dira que la relation A est <u>$\mathcal{C}$-vraie</u> (ou, plus brièvement, <u>vraie</u> tout court, si aucune confusion n'est à craindre). Les règles du raisonnement se transposent de la manière suivante, comme on le vérifie sans peine :

1) si A est $\mathcal{C}$-vraie, et si B est syntaxiquement équivalente à A (ou même logiquement équivalente à A), alors B est $\mathcal{C}$-vraie.

2) si A est $\mathcal{C}$-vraie, et si B est $\mathcal{C}$-vraie, alors (A et B) est $\mathcal{C}$-vraie.

3) si A est $\mathcal{C}$-vraie, (A ou B) est $\mathcal{C}$-vraie.

4) si A est $\mathcal{C}$-vraie, et si ($A \rightarrow B$) est $\mathcal{C}$-vraie, alors B est $\mathcal{C}$-vraie.

5) si A(x,x) est $\mathcal{C}$-vraie, (Ey)A(x,y) est $\mathcal{C}$-vraie.

6) si A(x) est $\mathcal{C}$-vraie, (y)A(y) est $\mathcal{C}$-vraie.

Tout ce qui a été fait plus haut à partir de ces règles peut se transposer : on définit "A entraîne B dans la théorie $\mathcal{T}$ " (lorsqu' aucune confusion n'est à craindre, on dit simplement "A entraîne B"). Avec ce nouveau sens de "A entraîne B", toutes les règles énoncées plus haut restent valables, puisqu'elles résultaient des règles du raisonnement. De même, on définit la $\mathcal{T}$-équivalence de deux relations; elle jouit des mêmes propriétés que l'équivalence logique.

Les théories avec axiomes et hypothèses.

Comme plus haut, on pose explicitement certaines relations élémentaires et certains schémas de relations ne contenant pas de variable libre ; mais en outre, on écrit des schémas (explicites) de relations (où peuvent éventuellement figurer des relations arbitraires, susceptibles d'être remplacées par des relations construites explicitement à l'aide des relations élémentaires de la théorie) schémas qui, eux, contiennent certaines variables libres nommément désignées par des lettres déterminées a,b,c . Ces derniers schémas prennent le nom d'hypothèses de la théorie (intuitivement, ces hypothèses sont relatives à certains "êtres" a,b,c). On obtient des hypothèses explicitées en explicitant les relations arbitraires qui peuvent figurer dans les schémas d'hypothèses.

Dans une telle théorie, on s'interdit d'utiliser les lettres a,b,c comme symboles de variables liées.

Chaque fois que l'on aura une relation A (de la théorie $\mathcal{T}$) et des axiomes ou hypothèses B,C,D tels que

$$\overline{B} \text{ ou } \overline{C} \text{ ou } \overline{D} \text{ ou } A$$

soit une relation vraie (au sens absolu), on dira que la relation A (qui peut contenir les variables libres a,b,c) est vraie dans la théorie $\mathcal{C}$, ou <u>$\mathcal{C}$-vraie</u>. Toutes les règles de raisonnement se transposent encore, <u>sauf la règle 6</u>) qui est remplacée par la suivante :

6 bis) si A(x) est $\mathcal{C}$-vraie pour une variable libre x <u>autre que les variables a,b,c, des hypothèses</u>, alors (y)A(y) est $\mathcal{C}$-vraie.

Dans l'application de cette règle, on évitera de se tromper si l'on convient, comme nous l'avons dit, de ne jamais utiliser les lettres a,b,c comme symboles de variables liées, et si l'on applique la règle (6) sous la forme suivante : on conclut à la $\mathcal{C}$-vérité de (x)A(x) lorsque A(x) est $\mathcal{C}$-vraie.

Moyennant cette restriction, toutes les définitions et règles auxiliaires données antérieurement s'étendent aux théories avec axiomes et hypothèses ; mais la règle auxiliaire :

"si A(x) entraîne B(x), alors (x)A(x) entraîne (x)B(x), et (Ex)A(x) entraîne (Ex)B(x)"

ne doit être appliquée que lorsque x ne figure pas dans les hypothèses.

Désormais, nous considèrerons une théorie sans hypothèse, et même une théorie sans axiome ni hypothèse, comme un cas particulier d'une théorie avec axiomes et hypothèses.

Dire que <u>A entraîne B</u> dans une telle théorie $\mathcal{C}$, c'est dire que dans la théorie $\mathcal{C}_A$ obtenue en rajoutant l'hypothèse A, la relation B est $\mathcal{C}_A$-vraie. (vérification immédiate). On en déduit un mode de raisonnement fréquemment employé : pour prouver que A entraîne B dans une théorie $\mathcal{C}$, on rajoute l'hypothèse $\bar{B}$ à celles de la théorie $\mathcal{C}$, et l'on prouve que $\bar{A}$ est vraie dans la nouvelle théorie ("raisonnement par l'absurde").

Plaçons-nous une fois pour toutes dans une théorie $\mathcal{C}$. Soit A une relation de cette théorie, et supposons que (Ex)R(x) entraîne A.

Alors $R(x)$ entraîne évidemment A (puisque $R(x)$ entraîne $(\exists x)R(x)$). Réciproquement, supposons que $R(x)$ entraîne A , la variable x ne figurant pas comme variable libre dans A ni dans les hypothèses ; alors <u>$(\exists x)R(x)$ entraîne A</u> . (Conséquence de la règle 6 bis)). Autrement dit, pour démontrer que $(\exists x)R(x)$ entraîne A , on peut procéder ainsi : on raisonne sur un a <u>ne figurant pas dans A</u> ni dans les hypothèses, on pose la nouvelle hypothèse $R(a)$, et on prouve que A est vraie dans la nouvelle théorie.

<u>Théories non contradictoires</u>.

Si, dans une théorie $\mathcal{C}$, on rencontre une relation A telle que A soit $\mathcal{C}$-vraie ainsi que $\bar{A}$, on peut, pour toute relation R , prouver qu'elle est $\mathcal{C}$-vraie. (Cela résulte de la règle 4)). Une telle théorie est dite <u>contradictoire</u> et ne présente évidemment aucun intérêt.

On peut, dans certains cas, prouver qu'une théorie donnée n'est pas contradictoire ; en l'absence d'une telle preuve, et tant qu'aucune contradiction n'aura été rencontrée, on développera les conséquences des axiomes et hypothèses de la théorie, quitte à constater plus tard, si le cas se produit, que, la théorie étant contradictoire, les développements n'avaient aucun intérêt. On dira qu'une relation est <u>fausse</u> dans la théorie si sa négation est vraie dans la théorie ; dire qu'une relation peut être à la fois vraie et fausse dans la théorie, c'est dire que cette théorie est contradictoire.(et alors toutes les relations sont vraies et fausses). Dans une théorie donnée, on peut rencontrer une relation dont on n'aura su prouver ni qu'elle est vraie ni qu'elle est fausse ; mais pour pouvoir conclure avec certitude qu'une relation donnée A n'est ni vraie ni fausse dans une théorie $\mathcal{C}$, il faudrait pouvoir prouver que les théories $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_{\bar{A}}$ (obtenues en rajoutant respectivement l'hypothèse A et l'hypothèse $\bar{A}$ à celles de $\mathcal{C}$) sont non-contradictoires.

Soit une théorie $\mathcal{C}$; soit A(x) une relation de cette théorie, contenant notamment une variable libre x qui ne figure pas dans les hypothèses de la théorie $\mathcal{C}$. Pour que la théorie obtenue en rajoutant l'hypothèse A(x) à celles de $\mathcal{C}$, ne soit pas contradictoire, il faut et il suffit que (Ex)A(x) ne soit pas fausse dans la théorie $\mathcal{C}$. (Par exemple, en théorie générale des ensembles (théorie sans hypothèses), on peut rajouter l'hypothèse "x est un ensemble infini" sans que cela conduise à contradiction, à moins que la proposition "quel que soit x, x est fini" ne soit vraie en théorie générale des ensembles).

Parfois, on peut prouver la non-contradiction d'une certaine théorie sous réserve de la non-contradiction d'une autre théorie ; c'est ainsi que nous montrerons que, si, en théorie générale des ensembles, l'hypothèse "x est un ensemble infini" ne conduit pas à contradiction, la théorie des nombres réels n'est pas contradictoire.

Signalons qu'une théorie sans axiomes ni hypothèses n'est pas contradictoire. D'une manière générale, on est sûr qu'une théorie donnée $\mathcal{C}$ (avec axiomes et hypothèses) est non-contradictoire, lorsqu'on peut attribuer à chacune des relations élémentaires de la théorie l'un des deux symboles + et - (indépendamment des noms des variables libres pouvant figurer dans ces relations élémentaires) de manière que, si l'on convient d'attribuer à chaque relation construite explicitement à partir des relations élémentaires l'un des symboles + et - d'après les règles suivantes

$\bar{A}$ est affecté de { + si A est affecté de -
- si A est affecté de +

(A et B) est affecté { de + si chacune des relations A et B est affecté de +
de - dans tous les autres cas

(A ou B) est affecté { de - si chacune des relations A et B est affectée de -
de + dans tous les autres cas

(x)A(x) est affecté du même symbole que A(x)

(Ex)A(x) est affecté du même symbole que A(x) ,

les axiomes et les hypothèses de la théorie $\mathcal{C}$ soient tous affectés de + . En effet, en se reportant aux équivalences syntaxiques et aux règles du raisonnement, on constate que toute relation vraie de la théorie est alors affectée de + , et par conséquent toute relation fausse est affectée de - . Il n'y a donc pas de relation à la fois vraie et fausse.

Ceci prouve en particulier, que (A et $\bar{A}$) n'est jamais une identité logique, et, plus généralement, que la négation d'une identité logique n'est jamais une identité logique.
