

COTE : BKI 01-1.8

CHAPITRE I  
QUELQUES ELEMENTS  
DE SYNTAXE ET DE LOGIQUE  
CHAPITRE II  
ENSEMBLES ET FONCTIONS  
+ SYNTAXE ET LOGIQUE

Rédaction n° 053

Nombre de pages : 30

Nombre de feuilles : 30

Université Henri Poincaré - Nancy I  
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502  
Bibliothèque de mathématiques  
B.P. 239  
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

*livre I - Chap. I*  
*Syntaxe et logique*

53

A 53 2

CHAPITRE I. QUELQUES ÉLÉMENTS DE SYNTAXE ET DE LOGIQUE.  
-----

Etat 1 bis

I. LES OPÉRATIONS SYNTACTIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Nous exprimerons dans cet ouvrage les propositions mathématiques avec les moyens que met à notre disposition le langage ordinaire, convenablement complété. Il paraît aujourd'hui indispensable d'en agir ainsi, sous peine d'imposer au lecteur des difficultés de lecture quasi-insurmontables.

Cependant, il ne faut pas non plus se dissimuler les inconvénients de cette manière de faire, inconvénients qui tiennent à ce que le langage commun n'est pas adapté à la formulation de jugements précis, pour peu que ces derniers présentent quelque complication. On peut dire qu'il a tout à la fois trop et pas assez de souplesse.

D'une part, en effet, le langage commun comporte, pour formuler une même affirmation, toute une série de tournures différentes qui permettent au littérateur de nuancer de mille manières l'expression de sa pensée ou de son absence de pensée, mais qui ne peuvent que masquer au mathématicien l'identité sous-jacente du jugement porté : en ce domaine, trop de richesse nuit.

Mais, par ailleurs, on sent bien vite à quel point le langage résiste quand on veut lui faire exprimer des jugements compliqués. Une phrase mathématique assez simple telle que "la condition que  $p$  soit un nombre premier entraîne que tout diviseur de  $p$  est égal soit à 1 soit à  $p$ " apparaît déjà lourde et inélégante ; que dire de phrases où plusieurs affirmations de cet ordre se trouvent superposées ?

Le mathématicien n'a besoin que d'un nombre très restreint de moyens de syntaxe, et n'a que faire des procédés de nuancement ....

de ces moyens élémentaires (les conjonctions "ou", "ou bien" jouent le même rôle à ses yeux ; de même pour "puisque", "car", "en effet", "parce que", etc. etc..) ; mais il a besoin de pouvoir superposer un grand nombre de fois ces liaisons syntactiques dans une même phrase, et se trouve très rapidement limité dans cette direction par la difficulté de compréhension de ce qu'il serait amené à écrire.

Les logisticiens ont, à vrai dire, fabriqué un langage plus adapté à la formulation des propositions mathématiques, dans lequel, notamment, les conjonctions usuelles sont remplacées par des signes. Les phrases mathématiques peuvent, dans ce langage, s'exprimer de façon beaucoup plus abrégée que dans le langage ordinaire, et surtout sans aucune ambiguïté : leur examen graphique révèle d'un seul coup d'oeil à l'initié leur signification. Mais, l'initiation à ce langage étant assez longue et difficile, nous avons renoncé à l'imposer à notre lecteur.

Nous voulons cependant donner ici quelques indications succinctes sur la manière dont les phrases mathématiques se construisent les unes à partir des autres, c'est-à-dire sur les opérations syntaxiques que l'on a couramment à faire.

On doit tout d'abord savoir prendre la négation d'une proposition  $p$ , c'est-à-dire former la proposition qui affirme exactement le contraire de ce qu'affirme  $p$ .

D'autre part, à partir de deux propositions  $p$ ,  $q$  on peut former leur conjonction qui s'énonce " $p$  et  $q$ ", et qui affirme à la fois ce qu'affirme  $p$  et ce qu'affirme  $q$ .

A partir de ces opérations fondamentales, on peut en dériver d'autres. Si on forme la conjonction des négations de  $p$  et de  $q$ ,

4

on a une proposition qui affirme que  $p$  et  $q$  sont toutes deux fausses. En prenant la négation de cette dernière proposition, on affirme que  $p$  et  $q$  ne sont pas toutes deux fausses, donc que l'une au moins est vraie. La proposition ainsi obtenue s'appelle la disjonction de  $p$  et de  $q$  et s'énonce "ou  $p$ , ou  $q$ ". Dès maintenant, nous sommes en mesure de constater l'un des dangers du langage ordinaire : pour beaucoup d'esprits en effet, la phrase "ou  $p$ , ou  $q$ " signifie que l'une des propositions en question est vraie, à l'exclusion de l'autre ; nous devons au contraire considérer l'affirmation "ou  $p$  ou  $q$ " comme parfaitement compatible avec l'affirmation simultanée de  $p$  et de  $q$ .

Formons maintenant la proposition "ou non  $p$  ou  $q$ " (non  $p$  représentant la négation de  $p$ ). Elle affirme que  $p$  ne saurait être vrai sans que  $q$  le soit aussi : on la formule "p entraîne q". L'importance exceptionnelle de cette combinaison provient de son rôle dans le schéma de la démonstration. Toutes les fois en effet que l'on a démontré les propositions " $p$ " et " $p$  entraîne  $q$ ", on peut ajouter " $q$ " à la liste des propositions démontrées.

On formule souvent la proposition "p entraîne q" de la manière suivante : "pour que  $p$ , il est nécessaire que  $q$ " (n'oublions pas que  $p$  et  $q$  représentent des phrases ; elles doivent, dans la formulation précédente, être mises au subjonctif) ; - ou encore "pour que  $q$ , il est suffisant que  $p$ " .

Une autre combinaison extrêmement importante est celle que l'on obtient en formant la conjonction de "p entraîne q" et de "q entraîne p". On obtient ainsi une proposition qui se formule "p est équivalent à q" et qui signifie qu'aucune des propositions  $p$ ,  $q$  ne saurait être

vraie sans que l'autre le soit en même temps ; - c'est-à-dire, que p et q affirment en réalité la même chose, éventuellement sous des formes différentes.

La proposition "p est équivalente à q" peut encore se formuler comme suit : "pour que p, il est nécessaire et suffisant que q" ou : "la condition nécessaire et suffisante pour que p est q". Pour démontrer des propositions de ce genre, on se sert souvent d'un procédé dit des propositions en chaîne : p,q,r désignant par exemple trois propositions, si on a démontré que p entraîne q, que q entraîne r et que r entraîne p, alors les propositions p et q sont équivalentes, entre elles et à la proposition r.

Nous avons décrit quelques procédés pour combiner syntactiquement les propositions les unes avec les autres. Les démonstrations mathématiques sont des enchaînements de phrases telles que l'on puisse affirmer la vérité de chacune d'elles quand on sait déjà que les précédentes sont vraies. Mais qui nous donne le droit d'émettre de pareilles affirmations ? Ce sont certaines règles les règles de la logique, qu'il faut distinguer des moyens syntactiques, qui ne sont que des procédés pour fabriquer des phrases sans préjuger en rien de leur vérité ou de leur fausseté.

Nous avons déjà cité l'une de ces règles : si on a démontré les propositions "p" et "p entraîne q", on peut considérer "q" comme démontrée. Il en est d'autres, qui prennent l'aspect suivant : on se donne le droit de considérer comme vraies certaines combinaisons de phrases, faites suivant des schémas déterminés, quelles que soient les phrases que l'on combine par les schémas en question.

Par exemple toutes les phrases que l'on pourra déduire du schéma "la proposition "p et q" entraîne p" seront tenues pour vraies, quelles que soient les phrases p et q. Ces schémas de combinaisons qui fournissent toujours des propositions vraies, quelles que soient les phrases auxquelles on les applique, sont appelés les identités logiques. On peut le déduire de certaines d'entre elles, les axiomes de la logique. Il n'entre pas dans nos vues d'énumérer ici ces axiomes. Signalons cependant que, à l'encontre de certains logiciens, nous reconnaissons comme axiome le schéma de la double négation, qui se formule " la négation de la négation de p est une proposition équivalente à p", ainsi que celui du tiers exclu, qui se formule "p ou non p" .

Parmi les identités logiques figure notamment la suivante "la conjonction de p et de non p entraîne q". Ce qui signifie que, si on tient simultanément pour vraies deux propositions contradictoires, on peut en déduire toute proposition q : toutes les propositions deviennent alors vraies, ce qui suffit à montrer le manque d'intérêt d'une théorie dans laquelle une phrase p serait vraie en même temps que sa négation.

D'autre part, si de la négation "non q" d'une proposition q on peut déduire une contradiction, c'est-à-dire si de non q on peut déduire une proposition de la forme "p et non p", ou simplement si on peut déduire de "non q" la négation d'une proposition p déjà démontrée, on pourra considérer q comme démontrée : car dans ce cas, non q entraîne "p et non q", qui est la négation de la proposition vraie "p ou non p" ; donc "non q ou p et non p" est vraie, c'est-à-dire que "p ou non p entraîne q" est vraie ; "p ou non p" étant vraie, il en est de même de q. Le procédé précédent pour démontrer une proposition "q" s'appelle raisonnement par l'absurde.

## § II. PRÉDICATS ET RELATIONS.

Nous sommes partis au § 1 des phrases mathématiques supposées données pour les combiner entre elles. Nous allons maintenant entre dans l'étude de leur structure interne.

Nous trouverons d'abord un premier type de jugement qui consiste en l'attribution à un certain objet d'une certaine propriété. Par exemple : "2 est un nombre premier". De pareils jugements sont souvent construits, comme dans l'exemple précédent en interposant la copule "est" entre le sujet et l'énoncé de la propriété attribuée. Mais cette construction n'est pas la seule possible ainsi, si au lieu de dire "2 est un nombre premier" nous disons que "2 n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même", nous obtenons une proposition équivalente à la précédente, mais construite avec le verbe "avoir".

En tous cas, ce qui importe, c'est de voir que la même propriété peut être attribuée, par des propositions diverses, à divers objets. Par exemple, à côté de la proposition "2 est premier", nous aurons les propositions "3 est premier", "4 est premier", etc..etc.. Nous pouvons fabriquer ces diverses propositions en substituant dans "x est premier" les divers nombres entiers au symbole x. Nous devons donc considérer "x est premier" comme un schéma de proposition ; cette écriture ne représente pas par elle-même une proposition, mais un moyen de former des propositions. De pareils schémas s'appellent des prédicats ; un prédicat consiste donc en une phrase dans laquelle le nom de l'objet auquel la phrase attribue une certaine propriété a été remplacé par un symbole tel que x ou y : on notera un prédicat  $P(x)$  (ou  $P(y)$ ....).

Considérons maintenant une proposition telle que "6 est divisible par 2". On peut la considérer comme énonçant une propriété du nombre 6 :

elle dérive alors du prédicat : "x est divisible par 2". On peut aussi la considérer comme énonçant une propriété du nombre 2 ; elle dérive alors du prédicat "6 est divisible par y". Mais, d'aucun de ces deux prédicats, on ne peut faire dériver la proposition "8 est divisible par 4" dont l'analogie de structure avec "6 est divisible par 2" est cependant évidente.

C'est pourquoi on introduit un schéma de construction plus large que le prédicat, à savoir le schéma "x est divisible par y" : ce schéma donne une proposition en y remplaçant simultanément x et y par des entiers. Un tel schéma est appelé une relation il exprimer quelque chose qui porte sur les rapports mutuels entre x et y. On note une relation par un symbole tel que  $R(x, y)$ .

Les prédicats et les relations peuvent se combiner entre eux comme les propositions. Ainsi,  $P(x)$  et  $Q(x)$  étant des prédicats, nous pourrions former les prédicats "non  $P(x)$ ", " $P(x)$  et  $Q(x)$ ", " $P(x)$  ou  $Q(x)$ ", " $P(x)$  entraîne  $Q(x)$ ", " $P(x)$  est équivalent à  $Q(x)$ ", et de même avec les relations. D'autre part, on notera qu'un prédicat  $P(x)$  peut être considéré comme une relation particulière  $P(x, y)$  dans laquelle y serait absent. De sorte que " $P(x)$  ou  $Q(y)$ " doit être considéré comme une combinaison de relations entre x et y, donc comme une relation.

Mais nous avons, avec les prédicats et les relations, des procédés combinatoires nouveaux. Tout d'abord les substitutions : si  $P(x)$  est un prédicat, nous pouvons former une proposition  $P(a)$  en y remplaçant x par un objet a ; si  $R(x, y)$  est une relation, nous pouvons former une relation  $R(a, b)$  en substituant à x et à y des objets a, b ; nous pouvons aussi substituer à y l'objet b sans toucher



à  $x$  : nous obtenons alors le prédicat  $R(x, b)$  ; on obtiendrait de même le prédicat  $R(a, y)$ .

Deux autres procédés, d'une importance décisive, permettent de fabriquer des propositions à partir d'un prédicat  $P(x)$ . L'un consiste à former la proposition "il existe un  $x$  tel que  $P(x)$ ", et l'autre la proposition "quel que soit  $x$ ,  $P(x)$ ". La première de ces propositions affirme qu'il existe un objet  $a$  (au moins) qui possède la propriété énoncée par  $P(x)$ , et la seconde, que tous les objets la possèdent.

Soit maintenant  $R(x, y)$  une relation : nous pouvons lui appliquer des opérations de même nature et obtenir ainsi :  
a) des prédicats, tels que "il existe un  $x$  tel que  $R(x, y)$ " ou "quel que soit  $y$ ,  $R(x, y)$ " ; b) des propositions : par exemple "il existe un  $x$  tel que pour tout  $y$ ,  $R(x, y)$ " ou encore "pour tout  $x$  et pour tout  $y$ ,  $R(x, y)$ ".

$P(x)$  et  $Q(x)$  étant deux prédicats, nous attirons tout particulièrement l'attention sur la proposition "quel que soit  $x$ ,  $P(x)$  est équivalent à  $Q(x)$ ". Cette proposition affirme que n'importe quel objet  $x$  possède ou ne possède pas en même temps les propriétés énoncées par  $P(x)$  et par  $Q(x)$  : autrement dit elle affirme que ces deux propriétés sont la même propriété, éventuellement énoncée de manières différentes. C'est cette proposition que nous viserons quand nous dirons que les prédicats  $P(x)$  et  $Q(x)$  sont équivalents. De même quand nous dirons que le prédicat  $P(x)$  entraîne  $Q(x)$ , cela aura pour nous le sens de "quel que soit  $x$ ,  $P(x)$  entraîne  $Q(x)$ ". Il s'agit là d'une proposition, qu'il ne faut pas confondre avec le prédicat " $P(x)$  entraîne  $Q(x)$ ". Les mêmes considérations s'appliquent aux relations.

Le maniement dans les démonstrations mathématiques des prédicats et relations obéit à certaines règles qui viennent s'ajouter à celles données au § I . Il n'entre pas dans nos vues d'énoncer ces règles : nous voulons seulement attirer l'attention sur certains points.

Et tout d'abord sur les rapports entre les affirmations de généralité et d'existence et la négation. L'une des règles en question est en effet que la proposition "quel que soit  $x$ ,  $P(x)$ " est équivalente à la négation de la proposition "il existe un  $x$  tel que non  $P(x)$ ". De même, la proposition "il existe un  $x$  tel que  $P(x)$ " est équivalente à la négation de la proposition "quel que soit  $x$ , non  $P(x)$ ".

D'autres règles se rapportent aux substitutions :  $a$  étant un objet, si on a démontré la propriété  $P(a)$ , on peut considérer comme démontrée la proposition "il existe un  $x$  tel que  $P(x)$ ". Inversement, si on a démontré la proposition "il existe un  $x$  tel que  $P(x)$ " on se donne le droit d'introduire dans la suite des raisonnements un symbole nouveau qui représentera un objet dont on saura qu'il jouit de la propriété énoncée par  $P(x)$ . De même,  $a$  étant un objet, la proposition "quel que soit  $x$ ,  $P(x)$ " entraîne " $P(a)$ ".

D'autres règles se rapportent aux rapports des propositions d'existence et de généralité avec les opérations syntaxiques élémentaires : par exemple : "il existe un  $x$  tel que  $P(x)$  ou  $Q(x)$ " est une proposition équivalente à la proposition "il existe un  $x$  tel que  $P(x)$  ou il existe un  $x$  tel que  $Q(x)$ ".

Enfin signalons que toute proposition (ou tout prédicat ou toute relation) construit à partir de propositions, de prédicats, de relations au moyen des opérations syntaxiques que nous avons décrites se changent en une proposition équivalente (ou un prédicat équivalent

ou une relation équivalente) si on change les propositions, les prédicats et les relations qui ont servi au cours de la construction, en les remplaçant par des propositions, des prédicats ou des relations respectivement équivalents. Ainsi : si  $P(x)$  et  $P'(x)$  sont des prédicats équivalents; il en est de même des prédicats non  $P(x)$  et non  $P'(x)$  ; si de plus  $Q(x)$  et  $Q'(x)$  sont un nouveau couple de prédicats équivalents,  $P(x)$  et  $Q(x)$  est un prédicat équivalent à  $P'(x)$  et  $Q'(x)$  ; si  $R(x, y)$ ,  $R'(x, y)$  sont des relations équivalentes, les prédicats "il existe un  $x$  tel que  $R(x, y)$ " et "il existe un  $x$  tel que  $R'(x, y)$ " sont équivalents, etc. etc..

### § III. LA NOTION DE TYPES. LES COUPLES.

Jusqu'ici, nous avons dit que,  $P(x)$  étant un prédicat, on en déduisait une proposition en substituant à  $x$  un "objet", sans limiter la catégorie des objets que l'on peut ainsi substituer. Or, considérons un prédicat tel que "x est un nombre premier" et substituons à  $x$  l'expression "le triangle ABC" : nous obtenons une phrase dépourvue de signification. Certains logiciens considèrent que de pareilles phrases doivent être considérées comme de véritables propositions auxquelles ils attribuent la valeur logique du "faux". Ce point de vue est à rejeter absolument : d'une part, parce qu'il conduit assez facilement à des contradictions et d'autre part, pour des raisons de commodité. En effet, il est commode de pouvoir déduire valablement de la négation du fait que  $x$  soit premier l'affirmation de l'existence d'un diviseur de  $x$  autre que 1 ou  $x$  : c'est ce qu'on ne saurait faire si  $x$  pouvait représenter un triangle.

Il convient donc de considérer que l'on a un certain nombre de types d'objets, et que chaque prédicat se rapporte à l'un de ces types,

de telle manière que les seuls objets que l'on puisse substituer au symbole  $x$  dans le prédicat soient des objets du type en question.

Graphiquement, il est souvent commode de réserver certaines catégories de notations à chaque type, de telle sorte que les minuscules latines représentent les objets d'un certain type, les majuscules latines ceux d'un autre type, etc. etc.. Si on n'a pas fait de convention de cette sorte, il faut préciser quand on parle d'un objet le type auquel il appartient.

Les mêmes considérations s'appliquent aux relations :  $R(x, y)$  étant une relation, il convient de considérer que cette relation ne donne une proposition sensée que si on substitue à  $x$  un objet d'un certain type, et à  $y$  un objet d'un nouveau type, qui peut être le même que celui relatif à  $x$  ou en être différent. Par exemple, la relation " $x$  est divisible par  $y$ " ne donne de propositions sensées que si on remplace  $x$  et  $y$  par des entiers ; la relation " $x$  est un habitant de  $y$ " ne donne de proposition sensée que si on remplace  $x$  par un nom d'homme et  $y$  par un nom géographique.

Nous allons maintenant voir que, grâce à cette notion de type, nous allons pouvoir faire rentrer la notion de relation dans le cadre de la notion de prédicat. L'idée qui préside à cette intégration est celle de considérer une relation  $R(x, y)$  comme énonçant une propriété du système formé par les objets  $x$  et  $y$ , ce système étant lui-même considéré comme un objet d'un nouveau type.

De même que nous avons considéré  $R(x, y)$  comme un schéma de construction de propositions, nous considérerons  $(x, y)$  comme un schéma de construction d'objets : c'est-à-dire que nous considérerons comme des objets tous les symboles  $(a, b)$  que l'on déduit du schéma

$(x, y)$  en  $y$  substituant à  $x$  un objet d'un certain type et à  $y$  un objet d'un certain type. L'objet  $(a, b)$  s'appelle le couple formé par  $a$  et par  $b$ . Il est d'un type qui ne dépend que des types de  $a$  et de  $b$ .

Nous voyons ainsi comment, à partir de types donnés, on peut en fabriquer d'autres. Supposons que nous connaissions deux types d'objets  $T_1$  et  $T_2$  ; nous pourrions fabriquer : le type des couples d'objets du type  $T_1$  : on le désigne par  $T_1 \times T_1$  ; - le type des couples d'un objet de type  $T_1$  et d'un objet de type  $T_2$  : on le désigne par  $T_1 \times T_2$  ; - le type des couples d'un objet de type  $T_2$  et d'un objet de type  $T_1$  : on le désigne par  $T_2 \times T_1$  ; - et enfin, le type des couples d'objets de type  $T_2$  : on le désigne par  $T_2 \times T_2$  .

Mais la puissance du procédé ne s'arrête pas là : on peut encore former le type des couples d'objets de type  $T_1$  et d'objets du type  $T_1 \times T_2$  ; ce type se désigne par  $T_1 \times (T_1 \times T_2)$ . Par exemple, si  $a$  et  $b$  sont de type  $T_1$  et  $\alpha$  de type  $T_2$ , le couple  $(a, (b, \alpha))$  est de type  $T_1 \times (T_1 \times T_2)$ . On peut encore former les types  $(T_1 \times T_2) \times T_1$ ,  $(T_1 \times T_1) \times T_1$ ,  $(T_1 \times T_2) \times (T_2 \times T_2)$ , etc. etc..

Si  $T_1, T_2, T_3$  sont trois types, nous pourrions considérer des relations entre objets de type  $T_1 \times T_2$  et objets de type  $T_3$ . De telles relations peuvent aussi être appelées relations à 3 termes, car elles comportent trois symboles  $x, y, z$  tels qu'on obtienne une proposition en remplaçant  $x$  par un objet de type  $T_1$ ,  $y$  par un objet de type  $T_2$  et  $z$  par un objet de type  $T_3$ . Une telle relation doit se représenter par un symbole tel que  $R(x, y), z$ ). Cependant, pour alléger les notations, il est commode de convenir que l'objet  $((a, b), c)$  se représente par  $(a, b, c)$ , de sorte qu'on pourra noter la relation en

question  $R(x, y, z)$ . De même, la notation  $(a, b, c, d)$  représentera par définition la même chose que  $((a, b), c), d)$  ou encore que  $((a, b, c), d)$ , et ainsi de suite. Mais il faut se garder de confondre  $(a, b, c)$  avec  $(a, (b, c))$  : ce ne sont pas des objets de même type. De même, les objets  $(a, b, c, d)$ ,  $(a, (b, c, d))$ ,  $(a, (b, (c, d)))$ ,  $((a, b), (c, d))$ ,  $(a, b, (c, d))$ ,  $((a, b), c, d)$  sont de types tous différents les uns des autres.

Les procédés de fabrication de types que nous venons de décrire sont engendrés par le procédé de fabrication des couples. Il est encore un autre mode de génération des types, dont nous allons parler maintenant.

$T$  étant un type, nous pouvons considérer les prédicats portant sur les objets de ce type comme de nouveaux objets, d'un type différent de  $T$ . C'est ainsi que les diverses propriétés que peut posséder un entier sont considérées par les mathématiciens comme autant d'objets, qu'il maniera comme il manie les entiers. On pourra notamment avoir des prédicats portant sur ces nouveaux objets, c'est-à-dire des <sup>de prédicats.</sup> prédicats. Ainsi l'écriture " $X(0)$ " devient une proposition si on remplace le symbole  $X$  par un prédicat : " $X(0)$ " doit donc être considéré comme un prédicat de prédicat. (cf. cependant au § suivant une précision sur la notion de prédicat de prédicat).

Ainsi, à chaque type  $T$  se trouve associé le type, que nous désignerons par  $P(T)$ , des prédicats portant sur les objets de type  $T$ .

Ce nouveau mode de formation vient s'ajouter au précédent pour engendrer des types. Par exemple, en partant du type  $T$ , nous pourrions former les types  $T \times T$ ,  $P(T)$ ,  $P(T) \times T$ ,  $T \times P(T)$ ,  $P(T) \times P(T)$ ,  $P(T \times T)$ ,  $P(P(T))$ ,  $P(P(T) \times T)$ , etc. etc.. Le type  $P(T \times T)$  sera évidemment le type des relations entre objets de type  $T$ .

Si nous partons de certains types de base  $T, U, \dots, W$ , les types que nous pouvons former à partir d'eux par les procédés générateurs dont il a été question forment ce qu'on appelle l'échelle des types construite à partir des types donnés.

### § IV. L'ÉGALITÉ

Chaque théorie mathématique construit en principe son langage au moyen de certains prédicats ou de certaines relations qui lui sont propres : les propositions de la théorie sont celles que l'on peut former à partir de ces prédicats et relations de base par les procédés syntaxiques que nous avons indiqués.

Mais il est certaines relations que l'on retrouve dans toutes les théories : elles forment une sorte de fond commun. Parmi elles figurent les relations d'égalité " $x = y$ ".

Une relation d'égalité est une relation entre objets d'un même type ; une phrase qui énoncerait l'égalité de deux objets de types différents serait vide de sens ; ce ne serait pas une proposition.

Il faut donc considérer que, pour chaque type, il existe une relation d'égalité entre objets de ce type. Ces relations sont toutes désignées par le même signe " $=$ ".

L'introduction des relations d'égalité comportent certaines règles de raisonnement, qui en prescrivent le mode d'emploi. Par exemple :

"quel que soit  $x$ ,  $x = x$ " est une proposition vraie. Par suite,  $a$  étant un objet, " $a = a$ " est une proposition vraie.

"quels que soient  $x$  et  $y$ ,  $x = y$  entraîne  $y = x$ " est une proposition vraie. Ce que nous pouvons encore, en tenant compte des convention<sub>2</sub>

du § II, énoncer ainsi : la relation " $x = y$ " entraîne la relation " $y = x$ ".

La conjonction " $x = y$  et  $y = z$ " entraîne " $x = z$ ".

D'autres règles se rapportent à la considération simultanée des relations d'égalité pour différents types :

La conjonction " $x = y$  et  $x' = y'$ " est équivalente à la relation " $(x, x') = (y, y')$ ".

Dans ceci,  $x$  et  $y$  sont nécessairement d'un même type ; il en est de même de  $x'$  et de  $y'$  ; mais  $x$  et  $x'$  ne sont pas nécessairement du même type.

$P(x)$  étant un prédicat, la relation " $x = y$ " entraîne la relation " $P(x)$  est équivalent à  $P(y)$ ".

Il en résulte que, des propositions  $a = b$  et  $P(a)$ , on peut déduire  $P(b)$ . Autrement dit, l'égalité de deux objets entraîne l'impossibilité que l'un des objets possède une propriété sans que l'autre la possède aussi.

Enfin, et ceci est très important, nous avons une règle qui affirme que l'égalité des prédicats signifie la même chose que leur équivalence :

La relation " $X(x) = Y(x)$ " entre prédicats est équivalente à la relation "le prédicat  $X(x)$  est équivalent au prédicat  $Y(x)$ ".

La comparaison des deux dernières règles que nous avons énoncées risquerait de nous conduire à une contradiction si nous ne précisions pas ce qu'il faut entendre par prédicat de prédicat. On pourrait en effet croire que l'on peut considérer comme propriétés d'un prédicat des propriétés qui se rapportent à sa formulation, comme par exemple la propriété  $P(X)$  qui s'énonce ainsi : "le prédicat  $X$  se formule en dix mots".



Mais ceci nous conduirait facilement à des contradictions : supposons en effet connu un prédicat  $X_0$  qui se formule en dix mots ; donc  $P(X_0)$  est vrai ; on pourrait dans beaucoup de cas fabriquer un nouveau prédicat  $X'_0$  qui énonce la même propriété que  $X_0$  mais qui la formule en par exemple huit mots. Les prédicats  $X_0$  et  $X'_0$  seraient par suite équivalents, donc égaux, tandis que  $P(X_0)$  serait vrai sans que  $P(X'_0)$  le soit, ce qui serait en contradiction avec l'avant dernière règle d'égalité.

Cette difficulté se lève en distinguant entre un prédicat et sa formulation, le prédicat étant un objet d'un certain type et sa formulation un objet d'un autre type : de la même manière qu'un nom d'homme n'est pas un objet du même type que l'homme qu'il désigne.

Nous aurions donc là, en principe, un nouveau procédé de formation de types. Cependant, ces types ne sont d'aucun intérêt pour le mathématicien ; leur étude serait plutôt l'objet de la sémantique. Nous nous contenterons donc de dire que les prédicats de prédicats que nous constituerons seront des prédicats qui portent sur le contenu ou la signification d'un prédicat  $X(x)$  et non pas sur sa formulation.

Pour en finir avec l'égalité, donnons encore les définitions suivantes :

- 1) la relation " $x \neq y$ " est la négation de la relation " $x = y$ "
- 2)  $P(x)$  étant un prédicat, la proposition "il existe au plus un  $x$  tel que  $P(x)$ " est par définition identique à la proposition "la relation  $P(x) = P(y)$  entraîne  $x = y$ ".

La proposition "il existe un  $x$  et un seul tel que  $P(x)$ " est par définition identique à la conjonction "il existe un  $x$  tel que  $P(x)$  et il existe au plus un  $x$  tel que  $P(x)$ ".

## § V. LA NOTION GÉNÉRALE DE THÉORIE MATHÉMATIQUE.

Pour constituer une théorie mathématique, il faut d'abord se donner divers types de base  $T, U, \dots, W$  (dans chaque théorie ces types doivent être individuellement donnés, c'est-à-dire désignés). A partir de ces types de base, on construit comme nous l'avons indiqué (§ III) l'échelle des types. Les objets qui seront considérés dans la théorie seront les objets des différents types de cette échelle. Il importe de considérer que l'on ne considère jamais que des objets appartenant à un nombre fini de ces types. On pourrait donc indiquer à l'avance quels sont les types de l'échelle des types dont on a besoin. Nous ne donnerons pas, dans la suite, ces indications qui sont sans intérêt pour notre objet.

Il faut ensuite définir les éléments du langage de la théorie. Ces éléments comportent d'une part des éléments syntactiques communs à toutes les théories (l'emploi de "et", "non", "il existe", etc.etc..) d'autre part certains prédicats et certaines relations, explicitement désignés, portant sur des objets de types déterminés. On pourra par exemple se donner pour définir les éléments du langage, un prédicat  $P(x)$  portant sur des objets de type  $T$  et une relation  $R(x, Y)$  entre objets de type  $T$  et objets de type  $P(U)$ . Parmi les éléments du langage figureront toujours, implicitement, les relations d'égalité pour les différents types.

Ayant fixé les éléments du langage, les propositions de la théorie seront celles que l'on obtient en combinant les prédicats et relations de base suivant les règles de la syntaxe.

Cependant, il convient de remarquer que l'on pourra introduire dans la théorie de nouveaux symboles (autres que ceux donnés au départ)

par les procédés suivants :

1. Définitions constructives. Si un ensemble de signes représente un objet d'un certain type, on pourra introduire un signe nouveau pour abrégier la représentation de cet objet. Par exemple, si  $P(x)$  et  $Q(x)$  représentent des prédicats déjà construits, portant sur des objets d'un même type, on pourra introduire un nouveau signe  $R(x)$  qui représentera le prédicat  $P(x)$  et  $Q(x)$ . En principe ce nouveau signe doit être différent de tous ceux qui ont déjà servi dans la théorie ; en fait, l'insuffisance des moyens de notation oblige le plus souvent à faire réserver les mêmes signes avec des significations différentes. On n'en agira ainsi que s'il n'y a pas danger de confusion.

2. Définitions non-constructives. Elles consistent en l'opération suivante :  $P(x)$  étant un prédicat de la théorie, si on a démontré la proposition "il existe un  $x$  tel que  $P(x)$ ", on pourra introduire un signe  $a$  nouveau et admettre que la proposition  $P(a)$  est vraie.  $a$  sera un objet qui ne sera déterminé par aucune autre condition que celle-ci : que  $P(a)$  soit vraie.  $Q(x)$  étant un nouveau prédicat portant sur des objets de même type que  $P(x)$ , la proposition  $Q(a)$  sera équivalente à la proposition "quel que soit  $x$ ,  $P(x)$  entraîne  $Q(x)$ ".

Pour indiquer que l'on fait une définition non constructive, on emploie le plus souvent l'expression "prenons un objet  $a$  quelconque tel que  $P(a)$  soit vraie". Dans le cas où  $P(x)$  est le prédicat " $x = x$ ", portant sur les objets  $x$  du type  $T$ , on dira simplement : "prenons un objet  $a$  quelconque du type  $T$ ". Dans ce cas,  $Q(x)$  étant un autre prédicat portant sur les objets du type  $T$ , la proposition  $Q(a)$  est équivalente à : "quel que soit  $x$ ,  $Q(x)$ ".

On notera que l'introduction de signes nouveaux par les procédés 1) et 2) ne représente qu'une commodité d'écriture et de lecture. Toute proposition dans laquelle il en figure peut être remplacée par une proposition équivalente qui n'en contienne pas ; toute démonstration qui en fait usage peut être remplacée par une démonstration qui ne les utilise pas. (Les assertions précédentes se démontrent en logique mathématique).

Dès que nous avons défini les éléments du langage de la théorie, nous avons déjà des propositions vraies : ce sont celles que l'on peut démontrer au moyen des règles générales de la logique. Telle est par exemple : "quel que soit  $x$ ,  $x = x$ ". Mais, on donne en général en plus un certain nombre d'axiomes. Ce sont des propositions que l'on peut formuler avec les éléments du langage de la théorie et que l'on convient de tenir pour vraies dans la théorie. Démontrer une proposition, ce sera alors la déduire des axiomes.

x

x x

Nous allons au chapitre suivant étudier ce qu'on appelle la théorie des ensembles. Elle consiste en un certain nombre de définitions et de théorèmes qui sont communs à toutes les théories mathématiques. Ces définitions et théorèmes se rapportent en effet aux propositions que l'on peut formuler avec comme seuls éléments de langage les éléments de la syntaxe et les relations d'égalité.

Les théorèmes de la théorie des ensembles sont les conséquences des règles générales de la logique. Or, ces règles ne se rapportent pas à des types particuliers spécifiquement définis. Ce qui ne signifie

pas qu'elles n'aient rien à faire avec la notion de type : Les propositions en question n'ont au contraire de sens que s'il existe certains rapports entre les types des signes qui y figurent. Mais ces rapports ne déterminent ces types que relativement les uns aux autres. Ainsi la proposition "x y est équivalent à y x" suppose que x et y représentent des objets de même type, ce type pouvant être quelconque. De même la règle suivant laquelle "quel que soit x, X(x)" entraîne "X(a)" n'a de sens que si x et a sont d'un même type T et si X est de type  $P(T)$  ; mais T peut être lui-même un type quelconque.

Il en résulte que tous les théorèmes de la théorie des ensembles ont ce caractère commun de s'appliquer simultanément aux objets de toute une série de types.



Au lecteur qui voudrait se renseigner d'une manière précise sur les règles de raisonnement et sur la logique mathématique, ainsi que sur les diverses opinions qui ont cours à ce sujet, nous conseillons les ouvrages suivants :

Heyting, *Mathematische Grundlagenforschung*, Collection "Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete", Bd. 3, Berlin, J. Springer, 1934 (exposé sommaire des principales tendances en honneur parmi les logiciens).

Hilbert et Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin, 1928, J. Springer (exposé assez simple des bases du système logique de Hilbert).

Hilbert et Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, 1 ; J. Springer Berlin, 1934 (traité très complet de logique mathématique du point de vue de Hilbert).

Herbrand, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Thèse, Paris, 1930 (exposé de logique mathématique principalement orienté vers les questions de non contradiction).

Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, J. Springer, Wien, 1934 (étude approfondie de tout ce qui se rapporte à la syntaxe des langages mathématiques).

-----

## CHAPITRE II. ENSEMBLES ET FONCTIONS.

### § I. LE LANGAGE DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

Concurremment au langage des prédicats, nous emploierons systématiquement un autre langage, qui en est une traduction, celui des ensembles.

Dans le langage de la théorie des ensembles, au lieu de parler d'un prédicat  $P(x)$ , on parle de l'ensemble des objets qui possèdent la propriété décrite par le prédicat. On peut, si on veut, s'imaginer que tous les objets possibles (du type convenable) ont été répartis en deux catégories en rangeant dans la première tous les objets  $a$  pour lesquels  $P(a)$  est une proposition vraie, et dans la seconde tous ceux pour lesquels  $P(a)$  est faux : l'ensemble des objets jouissant de la propriété décrite par le prédicat est alors la collection des objets de la première catégorie. Cependant cette représentation n'est nullement nécessaire ; elle a l'inconvénient de faire appel à l'intuition d'une opération de tri qui est en général impossible à effectuer ; et enfin, elle ne fait qu'obscurcir certaines notions telles que celle de l'ensemble vide (cf. plus bas). Nous ne ferons donc pas explicitement appel à cette représentation et nous nous contenterons de considérer la notion d'ensemble comme une autre forme de celle de prédicat.

Un prédicat ne porte que sur les objets d'un certain type : de même, les objets d'un ensemble seront tous d'un certain type.

$P(x)$  étant un prédicat,  $P$  l'ensemble qui lui est attaché, le prédicat  $P(x)$  pourra encore être noté " $x \in P$ " qui se lit " $x$  est

élément de P". Donc, dire que l'objet a est élément de l'ensemble P, c'est dire qu'il possède la propriété énoncée par P(x).

La négation du prédicat "x ∈ P" se note "x ∉ P".

P et Q désignant deux ensembles, dont les éléments appartiennent à un même type, ces ensembles sont appelés "égaux", et on écrit P = Q lorsque les prédicats "x ∈ P" et "x ∈ Q" sont égaux, c'est-à-dire équivalents (chap. I, § IV). La proposition P = Q est donc équivalente à la conjonction des propositions "x ∈ P entraîne x ∈ Q" et "x ∈ Q entraîne x ∈ P". Autrement dit, on démontre l'égalité de deux ensembles en montrant que du fait qu'un objet est élément de l'un il est élément de l'autre, et inversement.

P et Q étant deux ensembles (dont les éléments appartiennent au même type, ), la proposition P ⊂ Q (qu'on lit P est contenu dans Q, ou P est une partie de Q, ou P est un sous-ensemble de Q) est par définition identique à la proposition "x ∈ P entraîne x ∈ Q". Elle signifie que tout élément de P est élément de Q.

Il résulte de là que la proposition P = Q est équivalente à la conjonction des propositions P ⊂ Q, Q ⊂ P.

Au lieu d'écrire "P ⊂ Q" on écrit souvent "Q ⊃ P", qu'on lit "Q contient P".

Les négations des propositions P ⊂ Q et P ⊃ Q se notent P ⊄ Q et P ⊈ Q.

Envisageons divers cas particuliers. T étant un type d'objets, considérons d'abord le prédicat "x = x" portant sur les objets du type T (ou tout autre prédicat équivalent). L'ensemble qui lui correspond s'appelle l'ensemble de tous les objets du type T.



Désignons le par  $E$  ; si  $a$  est un objet du type  $T$ , la proposition  $a \in E$  est vraie. Sinon, elle n'a aucun sens.

Si nous considérons maintenant le prédicat " $x \neq x$ ", l'ensemble qui lui correspond s'appelle ensemble vide (relatif au type  $T$ ) et se désigne par  $\emptyset$ . Si  $a$  est un objet du type  $T$ , la proposition " $a \in \emptyset$ " est fausse.

$a$  étant un objet du type  $T$ , considérons le prédicat " $x = a$ " : l'ensemble qui lui correspond se note  $\{a\}$  ; on dit qu'il possède  $a$  pour seul élément : en effet, il existe un élément  $x$  et un seul tel que  $x \in \{a\}$ , à savoir  $a$ .

On notera les faits suivants :  $E$  contient tout ensemble d'éléments du type  $T$ , et  $\emptyset$  est contenu dans tout ensemble d'éléments de ce type.  $P$  étant un ensemble d'éléments du type  $T$ , les propositions  $a \in P$  et  $\{a\} \subset P$  sont équivalentes.

Si maintenant nous considérons un prédicat portant sur des prédicats, il peut aussi être considéré comme un prédicat portant sur des ensembles, ou comme un ensemble d'ensembles (on dit souvent une famille d'ensembles). Le type des ensembles dont les éléments sont du type  $T$  se désigne par  $P(T)$ .

$P$  étant l'un de ces ensembles, le prédicat " $X \subset P$ " est un prédicat portant sur des ensembles. L'ensemble des  $X$  tels que  $X \subset P$  s'appelle l'ensemble des parties de  $P$  et se désigne par  $P(P)$ . En particulier  $P(E)$  est identique à l'ensemble de tous les éléments du type  $P(T)$ .

Donnons-nous maintenant deux types  $T$  et  $U$  (différents ou non) ainsi qu'un ensemble  $P$  d'éléments du type  $T$  et un ensemble  $Q$  d'éléments du type  $U$ . Le prédicat " $x \in P$  et  $y \in Q$ " est un prédicat portant

sur les couples  $(x, y)$  de type  $T \times U$ . L'ensemble qui correspond à ce prédicat s'appelle le produit des ensembles  $P, Q$  et se désigne par  $P \times Q$ . En particulier, si  $E$  est l'ensemble des éléments du type  $T$  et si  $F$  est l'ensemble des éléments du type  $U$ ,  $E \times F$  est l'ensemble des éléments du type  $T \times U$ .

Exercices. 1. Montrer que la proposition  $P \not\subseteq Q$  est équivalente à la suivante : il existe un  $x$  tel que  $x \notin P$  et  $x \in Q$ .

2.  $a$  et  $b$  étant des objets appartenant ou non au même type, montrer que  $\{a\} \times \{b\} = \{(a, b)\}$ .

3. Montrer que  $\emptyset \times P = \emptyset$ .

4. Montrer que  $P(\emptyset)$  possède un seul élément. Quels sont les éléments de  $P(\{a\})$  ?

-----  
§ II. LE LANGAGE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS.

Considérons deux types  $T$  et  $U$ , distincts ou, non et une relation  $R(x, y)$  entre objets de type  $T$  et objets de type  $U$ .  $R(x, y)$  est un prédicat portant sur les objets de type  $T \times U$ .

Parmi ces relations, il en est qui jouent un rôle particulière-ment important : ce sont les relations fonctionnelles :

La relation  $R(x, y)$  est appelée une relation fonctionnelle de type  $(T \times U)$  si elle satisfait à la condition suivante : quel que soit  $x$ , il existe au plus un  $y$  tel que  $R(x, y)$ .

A toute relation fonctionnelle on attache un objet nouveau qu'on appelle une fonction. Il y a entre la fonction et la relation fonctionnelle une relation de même espèce qu'entre ensemble et prédicat : on doit considérer le langage de la théorie des fonctions comme une

traduction du langage de la théorie des relations fonctionnelles.

$f$  étant une fonction définie par une relation fonctionnelle  $R(x, y)$  ; on appelle champ de définition de la fonction  $f$  l'ensemble  $E$  des éléments  $x$  pour lesquels il existe un  $y$  tel que  $R(x, y)$  : c'est une partie  $E$  de l'ensemble  $\mathbb{E}$  des objets du type  $T$ , et on dit que la fonction  $f$  est définie sur  $E$ . Pour exprimer que  $E \subset \mathbb{E}$ , on dit souvent que  $f$  est définie dans  $\mathbb{E}$ .

Si  $a$  est un élément de  $E$ , il existe un  $y$  et un seul tel que  $R(a, y)$  : cet élément  $y$  s'appelle valeur prise en  $a$  par la fonction  $f$  ou image de  $a$  par la fonction, et se désigne par  $f(a)$ .

Au lieu de représenter la fonction par la seule lettre  $f$ , on la représente souvent par  $f(x)$ , indiquant ainsi le type des objets du champ de définition de la fonction ;  $x$  s'appelle alors l'argument de la fonction.

La notation  $f(x)$  permet de fabriquer des prédicats et relations. Soit  $F$  l'ensemble des objets du type  $U$  ;  $b$  étant un élément de  $F$ , " $f(x) = b$ " doit être considéré comme un prédicat portant sur  $x$  et équivalent à  $R(x, b)$ . Ce prédicat est appelé une équation.  $a$  étant un objet du type  $T$ , la proposition  $f(a) = b$  est équivalente à  $R(a, b)$ . Si cette proposition est vraie,  $a$  s'appelle une solution de l'équation  $f(x) = b$  ; résoudre cette équation, c'est en trouver les solutions.

D'une manière plus générale, si  $P(y)$  est un prédicat portant sur les objets de type  $U$ ,  $P(f(x))$  sera un prédicat portant sur les objets de type  $T$ , équivalent par définition à : il existe un  $y$  tel que  $R(x, y)$  et  $P(y)$ .

De même,  $f(x) = y$  doit être considéré comme une relation

équivalente à  $R(x, y)$ . Plus généralement, si  $S(y, z)$  est une relation entre objets  $y$  de type  $U$  et objets  $z$  d'un troisième type  $V$ ,  $S(f(x), z)$  sera une relation entre objets de type  $T$  et objets de type  $V$ , qui sera par définition équivalente à la relation : il existe un  $y$  tel que  $R(x, y)$  et  $S(y, z)$ . Si  $S(y, z)$  est elle-même une relation fonctionnelle  $z = g(y)$ ,  $S(f(x), z)$  est aussi une relation fonctionnelle ; la fonction correspondante se note  $g(f(x))$  et s'appelle une fonction de fonction.

L'ensemble  $F$  des  $y$  tels qu'il existe un  $x$  tel que  $f(x) = y$  s'appelle le champ de valeurs de la fonction  $f$ , ou encore l'image de  $E$  par cette fonction. Pour exprimer que  $F \subset F'$ , on dit souvent que la fonction prend ses valeurs dans  $F'$ . Plus généralement, si  $F'$  est un ensemble qui contient  $F$ , on dit que la fonction prend ses valeurs dans  $F'$ .

Au lieu de parler d'une fonction définie sur  $E$  et prenant ses valeurs dans un ensemble  $F'$ , on parle souvent d'une application de  $E$  dans  $F'$ . Si  $F'$  coïncide avec le champ de valeurs de l'application, on parle d'une application de  $E$  sur  $F'$ . Le langage des applications est une nouvelle traduction du langage des relations fonctionnelles.

Trois cas particuliers méritent de retenir l'attention :

1) celui où  $E = \{a\}$ ,  $a$  étant un objet du type  $T$ . Dans ce cas, la fonction est parfaitement déterminée par la donnée de l'élément  $b = f(a)$ . En effet, dans le cas général, la relation  $f(x) = y$  entraîne  $x \in E$  ; donc ici  $f(x) = y$  entraîne  $x = a$  ; donc  $f(x) = y$  entraîne aussi  $f(a) = y$  qui entraîne  $y = b$  ; mais inversement, la conjonction  $x = a$  et  $y = b$  entraîne  $f(x) = y$ , et lui est par conséquent équivalente. La relation  $f(x) = y$  est donc complètement

déterminée par les données de  $a$  et de  $b$ . De plus, dans ce cas, on a  $F = \{ b \}$ .

2) celui où  $E$  est vide :  $E = \emptyset$ . Dans ce cas, la relation  $f(x) = y$  est parfaitement déterminée ; en effet,  $f(x) = y$  entraîne  $x \in \emptyset$  ; et inversement, la proposition quel que soit  $x$ ,  $x \notin \emptyset$  étant vraie, le prédicat  $x \in \emptyset$  entraîne n'importe quelle relation, en particulier  $f(x) = y$  : la relation  $f(x) = y$  est donc équivalente à  $x \in \emptyset$  ou encore à la conjonction  $x \in \emptyset$  et  $y \in \emptyset$ . Inversement, cette conjonction est une relation fonctionnelle. On doit donc considérer qu'il existe une fonction et une seule de type  $(T \rightarrow U)$  dont le champ de définition est l'ensemble vide ; son champ de valeurs est l'ensemble vide.

3) celui où  $F$  se compose d'un seul élément  $b$ . Dans ce cas, on voit facilement que la relation  $f(x) = y$  est équivalente à la conjonction  $x \in E$  et  $y = b$ . Elle est parfaitement déterminée par les données de  $E$  et de  $b$ . On dit dans ce cas que la fonction est constante. Si on a précisé à l'avance le champ de définition  $E$ , on décrira la fonction en l'appelant la constante  $b$ . (On notera que le cas 1) est un cas particulier du cas 3) ).

4) Dans le cas où les types  $T$  et  $U$  sont identiques, la relation " $x = y$ " est une relation fonctionnelle de type  $(T \rightarrow U)$  comme on le vérifie tout de suite. L'application définie par cette relation fonctionnelle s'appelle l'application identique. Le champ de définition et le champ de valeurs de la fonction correspondante coïncident tous deux avec  $E$ .

Soient maintenant  $f(x)$  et  $f'(x)$  deux fonctions de type  $(T \rightarrow U)$ . Soient  $E, E'$  leurs champs de définition. On dit que  $f'$  est un prolongement de  $f$  si les conditions suivantes sont réalisées :

a)  $E \subset E'$  ; b) le prédicat  $x \in E$  entraîne  $f(x) = f'(x)$ . Si on veut faire connaître  $E'$ , on dit que  $f'$  est un prolongement de la fonction  $f$  à l'ensemble  $E'$ .

Au lieu de dire que  $f'$  est un prolongement de  $f$ , on peut aussi dire que  $f$  est une restriction de  $f'$ , ou une restriction de  $f'$  à l'ensemble  $E$ . Connaissant  $f'$  et  $E$ , la restriction de  $f'$  à l'ensemble  $E$  est une fonction parfaitement déterminée. Par contre la donnée de  $f$  et de  $E'$  ne détermine nullement le prolongement de  $f$  à  $E'$  .

