

RÉDACTION N°51

COTE HCR 001

**TITRE ENSEMBLES
(RÉDACTION CARTAN INITIALE)**

FONDS HENRI CARTAN

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 21

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 21

- ENSEMBLES -

(RÉDACTION CARTAN INITIALE)

1 - ENSEMBLES.

Nous admettons la notion d'ensemble. Un ensemble d'objets a, b, c, ... est un nouvel objet E, qui est défini lorsque les objets a, b, c, ... sont connus, et qui, inversement, définit ces objets. On dit que l'ensemble E se compose des objets a, b, c, ..., et, inversement, que les objets a, b, c, ... appartiennent à l'ensemble, ou encore que ce sont des éléments de l'ensemble E. Pour exprimer qu'un objet a appartient à un ensemble E, on écrit

$$a \in E .$$

Deux ensembles E et F sont dits égaux ou identiques s'ils se composent des mêmes éléments ; on écrit

$$E = F .$$

L'ensemble E qui se compose des objets a, b, c, ... se note parfois

$$E = \{ a, b, c, \dots \} ,$$

l'ordre des lettres étant indifférent⁽¹⁾. Un ensemble composé d'un seul élément a se note

$$\{ a \} .$$

Exemples d'ensembles : l'ensemble des nombres naturels inférieurs à 10 ; - l'ensemble de tous les nombres naturels ; l'ensemble des nombres naturels impairs ; - l'ensemble des points d'un plan ; - l'ensemble des droites de l'espace à trois dimensions.

(1) Cette notation ne suppose même pas qu'il soit possible de ranger tous les éléments de l'ensemble E dans un ordre déterminé.

2 - FONCTIONS.

Considérons deux ensembles X et Y. Supposons une loi qui associe à chaque élément x de X un élément bien déterminé de Y ; désignons par $y = f(x)$ cet élément.

On dit que $f(x)$ est une fonction définie sur l'ensemble X, et que cette fonction réalise une application de l'ensemble X dans l'ensemble Y. x s'appelle la variable ; l'élément $y = f(x)$ qui correspond à x s'appelle l'image de x dans Y par la fonction $f(x)$.

Etant donnée une fonction $f(x)$, on peut, à chaque élément y de Y, faire correspondre les éléments x dont il est l'image ; il se peut qu'il n'y ait pas de tels éléments, ou qu'il y en ait un seul. On dit que la fonction $f(x)$ réalise une application biunivoque de X sur Y lorsque chaque élément de Y est l'image d'un élément de X et d'un seul. Dans ce cas, la loi qui, à chaque y de Y, fait correspondre le x de X dont il est l'image, définit une fonction sur l'ensemble Y ; cette fonction réalise une application biunivoque de Y sur X, et porte le nom de fonction inverse de la fonction $f(x)$; on le note

$$x = f^{-1} (y).$$

On dit ainsi que les ensembles X et Y sont en correspondance biunivoque par le moyen des fonctions $y = f(x)$ et $x = f^{-1} (y)$.

Etant donnés deux ensembles quelconques X et Y, il n'est pas toujours possible de les mettre en correspondance biunivoque ; lorsque c'est possible, on dit qu'ils ont même puissance.

$$Y \sim X .$$

.....

Etant donnés trois ensembles X, Y, Z, si l'on a

$$X \sim Y, \quad Y \sim Z,$$

on a aussi

$$X \sim Z.$$

(on dit que la loi d'équivalence est transitive).

Exemples.- Les ensembles équivalents à l'ensemble des nombres naturels (2) 1, 2, ..., n sont les ensembles de n objets. Un ensemble de n objets n'est équivalent à un ensemble de n' objets que si n = n'. Un ensemble est dit fini s'il existe un nombre naturel n tel que l'ensemble contienne n objets ; sinon, il est dit infini.

L'exemple le plus simple d'ensemble infini est fourni par l'ensemble de tous les nombres naturels.

$$\{ 1, 2, \dots, n, \dots \} ;$$

tout ensemble équivalent à cet ensemble est dit dénombrable. Nous verrons (§) qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables.

Notation indicielle.- Soit I un ensemble, et soit f(i) une fonction réalisant une application de I dans un ensemble E. Au lieu de noter f(i) l'élément de E qui correspond à i, on peut le noter a_i. On donne alors à i le nom d'indice (a_i se lit : a indice i).

Par exemple, si I est l'ensemble des nombres naturels, les éléments a_i correspondants constituent ce qu'on appelle une suite dénombrable.

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

d'éléments pris dans l'ensemble E.

.....

(2) On admet que le lecteur sait compter.

- 4 -

On peut caractériser les ensembles dénombrables par la condition que leurs éléments puissent être rangés en une suite dénombrable chaque élément figurant une fois et une seule dans la suite.

Exemples d'ensembles dénombrables.-

L'ensemble des nombres pairs est dénombrable ; il suffit en effet de les ranger par ordre de grandeur croissante pour en faire une suite dénombrable. Plus généralement, tout ensemble infini de nombres naturels est dénombrable.

L'ensemble des nombres rationnels (entiers et fractions) est dénombrable. En effet, chaque nombre rationnel peut être mis d'une façon et d'une seule sous la forme d'une fraction irréductible. Pour ranger tous les nombres rationnels en une suite dénombrable, il suffit d'écrire d'abord les fractions irréductibles dont la somme des termes est égale à 2, puis celles dont la somme des termes est égale à 3, et ainsi de suite.

3 - SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FONDAMENTAL.

Etant donné un ensemble A, on peut être amené à considérer, parmi les éléments de A, ceux qui jouissent d'une certaine propriété ; ces éléments, s'il en existe, constituent un ensemble B qu'on nomme sous-ensemble ou partie de l'ensemble A. Par exemple, l'ensemble des nombres naturels premiers est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les nombres naturels.

Il se peut que les éléments de A jouissent tous de la propriété qui sert à définir le sous-ensemble B ; pour cette raison, on convient de regarder A comme sous-ensemble de A lui-même. Si aucun élément de A ne jouit de la propriété envisagée, on convient de parler encore

....

- 5 -

de l'"ensemble" des éléments de A qui jouissent de cette propriété, et on dit que c'est un ensemble vide ; on étend donc ainsi légèrement le sens donné au mot "ensemble".

Pour exprimer qu'un ensemble B est sous-ensemble de A, on écrit

$$B \subset A .$$

Dans certains cas, on est amené à ne considérer que des sous-ensembles d'un même ensemble ; on donne alors à ce dernier le nom d'ensemble fondamental.

Soit \mathcal{F} un ensemble fondamental ; les sous-ensembles de \mathcal{F} peuvent être envisagés comme de nouveaux objets, et ces objets peuvent à leur tour faire partie d'autres ensembles ; un ensemble dont les éléments sont des sous-ensembles de \mathcal{F} sera souvent dénommé, pour des raisons de phonétique, famille de sous-ensembles⁽³⁾, au lieu de : ensemble de sous-ensembles.

Partage en classes et relations d'équivalence.

Etant donné un ensemble fondamental \mathcal{F} , nous disons que \mathcal{F} est partagé en classes lorsqu'on a une famille de sous-ensembles de \mathcal{F} , telle que chaque élément de \mathcal{F} appartienne à un sous-ensemble de la famille et à un seul. Les sous-ensembles en question prennent alors le nom de classes.

Etant donné un partage en classes de l'ensemble fondamental \mathcal{F} on peut convenir de dire qu'un élément x de \mathcal{F} est équivalent à un élément x' de \mathcal{F} si x et x' appartiennent à la même classe. On écrit alors

$$x \sim x' .$$

On remarque que cette convention satisfait aux trois conditions suivantes :

.....

- 1°) $x \sim x$ (la loi d'équivalence est réflexive).
- 2°) si $x \sim x'$, alors $x' \sim x$ (la loi d'équivalence est symétrique).
- 3°) les relations

$$x \sim x' \quad \text{et} \quad x' \sim x''$$

entraînent

$$x \sim x'' \quad (\text{la loi d'équivalence est transitive}).$$

Inversement, donnons-nous à priori une relation d'équivalence entre les éléments de \mathcal{F} , c'est-à-dire une loi réflexive, symétrique et transitive. Appelons alors classe de l'élément x le sous-ensemble des éléments qui sont équivalents à x . Les classes de deux éléments équivalents sont identiques, celles de deux éléments non équivalents n'ont pas d'élément commun. Si nous admettons que l'on a alors le droit de considérer l'ensemble de toutes les classes, il s'ensuit que la relation d'équivalence définit un partage en classes.

A chaque fonction $f(x)$ définie sur l'ensemble fondamental, on peut faire correspondre un partage en classes, en convenant que deux éléments x et x' sont équivalents si

$$f(x) = f(x').$$

Réciproquement, chaque partage en classes correspond à une fonction, savoir celle qui, à chaque élément x , associe, dans l'ensemble des classes, la classe de l'élément x .

....

(3) Nous verrons plus loin (§) que nous admettons qu'on a le droit de considérer la famille de tous les sous-ensembles d'un ensemble \mathcal{F} supposé donné.

Exemple. - Le cas le plus simple est celui où \mathcal{F} est partagé en deux classes ; ce cas correspond aux fonctions à deux valeurs définies sur \mathcal{F} . On ne restreint pas la généralité en supposant que ces valeurs sont des nombres, égaux par ^{exemple} rapport à zéro et un.

Un partage en deux classes est défini quand on connaît l'une des classes, par exemple celle où $f = 1$; l'autre classe s'ensuit . Etant donné arbitrairement un sous-ensemble E de l'ensemble fondamental, on appelle sous-ensemble complémentaire, et on note $\mathcal{C}E$, le sous-ensemble des éléments de \mathcal{F} qui n'appartiennent pas à E ; on appelle fonction caractéristique de E la fonction égale à un en chacun des éléments de E, à zéro en chacun des éléments de $\mathcal{C}E$.

4 - OPÉRATIONS SUR LES SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FONDAMENTAL.

Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, nous appellerons ensembles (tout court) les sous-ensembles de l'ensemble fondamental.

Soit \mathcal{F} un ensemble fondamental, et soit I un ensemble d'indices. Considérons une famille de sous-ensembles A_i de \mathcal{F} (i parcourant l'ensemble I). Par définition, la réunion de ces sous-ensembles est l'ensemble des éléments de \mathcal{F} qui appartiennent à l'un au moins des ensembles A_i ; l'intersection de ces sous-ensembles est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_i . La réunion se note

$$\bigcup_{i \in I} A_i ,$$

et l'intersection

$$\mathcal{D}_{i \in I} A_i \quad (\mathcal{D} \text{ signifie "Durchschnitt"}).$$

Dans le cas de deux ensembles A_1 et A_2 , la réunion se note aussi

$$A_1 + A_2 ,$$

.....

et l'intersection

$$A_1 \cap A_2.$$

On a donc, par définition

$$(4, 1) \begin{cases} A_1 \dot{+} A_2 = A_2 \dot{+} A_1 \\ A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1 ; \end{cases}$$

ces relations expriment la commutativité de chacuné des opérations $\dot{+}$ et \cap .

La relation

$$A_1 \cap A_2 = 0$$

exprime que l'intersection de A_1 et A_2 est vide, c'est-à-dire que A_1 et A_2 n'ont aucun élément commun. On dit que A_1 et A_2 sont des ensembles disjoints.

Etant donnée une famille d'ensembles A_i disjoints deux à deux (c'est-à-dire tels que $A_i \cap A_j = 0$ quels que soient les indices i et j distincts), on donne le nom de somme à la réunion de ces ensembles. La somme se note

$$\sum_i A_i,$$

et, dans le cas de deux ensembles A_1 et A_2 ,

$$A_1 + A_2.$$

Exemple.- Soient A_i les classes d'un partage en classes de l'ensemble fondamental. On a

$$\mathcal{F} = \sum_i A_i.$$

Associativité des opérations $\dot{+}$ et \cap .

Soit toujours I un ensemble d'indices, et une famille de sous-ensembles A_i de l'ensemble \mathcal{F} , i parcourant l'ensemble I .

- 9 -

Supposons maintenant qu'on ait, dans l'ensemble I , un partage en classes, c'est-à-dire que

$$I = \sum_k I_k,$$

k parcourant un autre ensemble d'indices. A chaque indice k , faisons correspondre la famille des A_i pour lesquels

$$i \in I_k,$$

et désignons respectivement par

$$\bigcup_{i \in I_k} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I_k} A_i$$

la réunion et l'intersection des ensembles de cette famille. L'associativité des opérations \bigcup et \bigcap s'exprime alors par les relations évidentes

$$(4,2) \quad \begin{cases} \bigcup_k \left(\bigcup_{i \in I_k} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} A_i \\ \bigcap_k \left(\bigcap_{i \in I_k} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} A_i \end{cases}$$

Prenons en particulier trois ensembles A_1, A_2, A_3 ; on aura

$$A_1 \dot{+} (A_2 \dot{+} A_3) = \bigcup_i A_i \quad (i \text{ prenant les valeurs } 1, 2, 3),$$

et aussi

$$(A_1 \dot{+} A_2) \dot{+} A_3 = \bigcup_i A_i,$$

d'où la relation

$$A_1 \dot{+} (A_2 \dot{+} A_3) = (A_1 \dot{+} A_2) \dot{+} A_3,$$

qui a la forme de la relation qui, en arithmétique, exprime l'associativité de l'addition. On aurait des relations analogues avec le symbole \cap .

Cela conduit à noter respectivement

$$A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} A_3 \quad \text{et} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

la réunion et l'intersection de trois ensembles, et, plus généralement,

$$A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \dots \dot{+} A_n \quad \text{et} \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

- 10 -

la réunion et l'intersection de n ensembles (n étant un nombre naturel quelconque). La somme de n ensembles disjoints deux à deux se note

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n .$$

Distributivité de l'une des opérations par rapport à l'autre.

Elle s'exprime par les relations

$$(4,3) \left\{ \begin{array}{l} A + \left(\bigcap_i B_i \right) = \bigcap_i (A + B_i) \\ A \cap \left(\bigcup_i B_i \right) = \bigcup_i (A \cap B_i) \end{array} \right.$$

Démontrons par exemple la première. Le premier membre représente l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A , soit à tous les B_i , soit encore à A et à tous les B_i . Ces éléments appartiennent à chacune des réunions $A + B_i$, donc à leur intersection, c'est-à-dire au second membre. Réciproquement, si un élément appartient à toutes les réunions $(A + B_i)$, ou bien il appartient à A , ou bien alors il appartient à tous les B_i .

On démontrerait de même la deuxième relation.

Dualité des opérations.

L'opération qui consiste à prendre le complémentaire d'un ensemble transforme chacune des deux opérations dans l'autre : le complémentaire de la réunion est l'intersection des complémentaires, et vice-versa. Cette double propriété s'écrit

$$(4,4) \left\{ \begin{array}{l} \complement \left(\bigcup_i A_i \right) = \bigcap_i (\complement A_i) \\ \complement \left(\bigcap_i A_i \right) = \bigcup_i (\complement A_i) \end{array} \right. ,$$

et elle explique que, chaque fois qu'on a une relation, telle que la première relation (4, 3), où figurent les symboles \cap et $+$, on en a une autre en échangeant ces symboles. C'est là le principe de dualité.

.....

- 11 -

Démontrons par exemple la première relation (4, 4). Dire qu'un élément n'appartient pas à $\bigcap_i A_i$, c'est dire qu'il n'appartient à aucun des A_i ; il appartient donc à tous les $\complement A_i$. Réciproquement, si un élément appartient à tous les $\complement A_i$, il n'appartient à aucun des A_i , donc il n'appartient pas à $\bigcap_i A_i$.

Différence de deux ensembles.

Nous avons vu que la somme de deux ensembles disjoints A et A' se note

$$(4, 5) \quad B = A + A' ,$$

et on a évidemment

$$(4, 6) \quad A \subseteq B .$$

Inversement, étant donnés deux ensembles A et B satisfaisant à (4, 5), la relation (4, 5) définit un ensemble A' : l'ensemble des éléments qui appartiennent à B sans appartenir à A ; on l'appelle la différence des ensembles B et A , et on le note

$$B - A .$$

L'opération "différence" peut d'ailleurs se ramener aux opérations \complement et \cap . On a en effet, de toute évidence,

$$(4, 7) \quad B - A = B \cap (\complement A)$$

Exercice. - En supposant

$$A \subseteq C \quad \text{et} \quad B \subseteq C ,$$

démontrer

$$C - (A \cap B) = (C - A) \dot{+} (C - B) ,$$

d'abord directement, ensuite comme conséquence des relations (4, 3), (4, 4) et (4, 7).

.....

2 - PRODUIT DE DEUX ENSEMBLES.

Soient A et B deux ensembles quelconques. Nous ne supposons plus qu'ils fassent partie d'un même ensemble fondamental. L'ensemble constitué par un élément a de A et un élément b de B se nomme un couple et se note

$$(a, b) ;$$

dans la parenthèse, on écrit d'abord l'élément a de A, ensuite l'élément b de B. Nous convenons que deux couples (a, b) et (a', b') sont identiques dans le cas, et dans le cas seulement où les éléments a et a' de A sont identiques, et les éléments b et b' de B aussi. Nous admettrons qu'on a le droit de considérer l'ensemble de tous les couples, correspondant à tous les choix possibles de a dans A, et de b dans B. L'ensemble des couples se nomme le produit de l'ensemble A par l'ensemble B et se note $A \times B$.

Le produit $B \times A$ est équivalent au produit $A \times B$; pour les mettre en correspondance biunivoque, il suffit de faire correspondre, à chaque élément (a, b) de $A \times B$, l'élément (b, a) de $B \times A$.

D'autre part, si A' et B' désignent des ensembles respectivement équivalents à A et B, le produit $A' \times B'$ est équivalent au produit $A \times B$.

Exemple.- Si A et B sont des ensembles finis à p et q éléments respectivement, l'ensemble-produit $A \times B$ possède pq éléments (pq désignant le produit des nombres p et q, au sens de l'arithmétique).

Théorèmes.- Le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable (pour ranger tous les couples de nombres naturels en une suite dénombrable, il suffit d'écrire d'abord les couples dont la somme des termes est égale à deux, puis ceux dont la somme des termes est égale à trois, et ainsi de suite.)

- 13 -

Carré d'un ensemble : c'est, par définition, le produit de cet ensemble par lui-même.

Par exemple, l'ensemble des points du plan, rapport à deux axes de coordonnées, est équivalent à l'ensemble des couples de nombres réels, c'est-à-dire au carré de l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire, en définition, au carré de l'ensemble des points d'une droite.

Projections.

De même que, en géométrie plane, un point a deux projections sur les axes de coordonnées, de même, dans le cas général du produit E d'un ensemble A par un ensemble B , on appelle projection sur A d'un élément (a, b) de E , l'élément \underline{a} de A qui figure dans le couple (a, b) ; on définit de même la projection d'un élément de E sur B . Chaque élément de E peut être défini par ses deux projections, qu'on peut d'ailleurs choisir arbitrairement.

Si on désigne par $a = f(e)$ la projection sur A de l'élément e de E , $f(e)$ est une fonction qui réalise une application de E dans A . De même, soit $b = g(e)$ la projection sur B de e ; $g(e)$ est une fonction qui réalise une application de E sur B .

Réciproquement, soient trois ensembles A, B, E , et deux fonctions, définies sur E , et réalisant une application de E sur A et sur B respectivement. Supposons de plus que, étant donné arbitrairement un élément \underline{a} de A et un élément \underline{b} de B , il existe, dans E , un élément et un seul admettant respectivement \underline{a} et \underline{b} pour images. Alors E est équivalent au produit $A \times B$, puisqu'on a une correspondance biunivoque entre les éléments de E et les couples (a, b) .

.....

Sous-ensembles du produit et fonctions plurivoques.

Considérons une fonction qui réalise une application de A dans B ; soit $b = f(a)$. A cette fonction, associons l'ensemble des couples $(a, f(a))$; c'est un sous ensemble F du produit $A \times B$, et chaque élément de A est la projection d'un élément de F et d'un seul.

Réciproquement, soit F un sous-ensemble de $A \times B$, tel que chaque élément de A soit la projection d'un élément de F et d'un seul.

A chaque a de A faisons alors correspondre l'élément b de B tel que

$$(a, b) \in F .$$

Nous définissons ainsi une fonction qui réalise une application de A dans B.

Exemple.- A chaque fonction réelle d'une variable réelle x , on associe, dans le plan (à coordonnées x, y) le lieu des points.

$$y = f(x) \quad (\text{courbe représentative}) ;$$

c'est un ensemble de points du plan qui est coupé en un seul point par chaque parallèle à l'axe des y .

Ce qui précède nous conduit à généraliser la notion de fonction. Prenons en effet un sous-ensemble F de $A \times B$, sans aucune restriction cette fois. A chaque a de A faisons correspondre le sous-ensemble des éléments b de B tels que

$$(a, b) \in F ;$$

nous désignerons ce sous-ensemble (qui peut être vide) par $f(a)$, et nous donnerons le nom de fonction plurivoque à la correspondance ainsi définie. Par opposition, on appelle fonction univoque toute fonction au sens adopté jusqu'ici.

.....

- 15 -

Inversement, soit donnée une fonction plurivoque, c'est-à-dire une loi qui, à chaque élément de A , associe un sous-ensemble de B , désigné par $f(a)$. Il lui correspond un sous-ensemble F de $A \times B$, savoir celui des couples (a, b) tels que

$$b \in f(a).$$

Une fonction plurivoque est donc caractérisée par un sous-ensemble F de $A \times B$. Mais cet ensemble F définit à son tour dans B une fonction plurivoque \hat{a} , savoir celle qui, à chaque b de B , associe le sous-ensemble des a de A tels que

$$(a, b) \in F,$$

ou, en d'autres termes, tels que

$$b \in f(a).$$

Cette nouvelle fonction porte le nom de fonction réciproque de la fonction $f(a)$, et se note

$$f^{-1}(b).$$

En particulier, chaque fonction univoque possède une fonction réciproque, qui est en général plurivoque ; elle n'est univoque que si la fonction donnée réalise une correspondance biunivoque entre A et B ; dans ce cas, la fonction réciproque est la fonction inverse.

Dans le cas général d'une fonction plurivoque $f(a)$, on désigne par $f(A')$ (où A' désigne un sous-ensemble de A) la réunion des sous-ensembles $f(a)$ lorsque a parcourt A' .

Exercices. - 1^o Si $A' \subset A''$, alors $f(A') \subset f(A'')$.

2^o On a

$$f(\bigcup A_i) = \bigcup (f(A_i))$$

- 16 -

3° Si f est univoque, les ensembles $f^{-1}(b)$ sont disjoints, et constituent les classes de partage en classes défini par f (cf § 3).
Il en résulte que : $f^{-1}(A' - A'') = f^{-1}(A') - f^{-1}(A'')$.

4° Si f est univoque, on a

$$f^{-1} \left(\bigcup_i B_i \right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i).$$

6. - PRODUIT GÉNÉRALISÉ.

Dans le paragraphe précédent, nous avons deux ensembles A et B , et nous considérons les couples (a, b) . Analysons de plus près ce qu'est un couple. Donnons-nous un ensemble auxiliaire, formé de deux éléments (par exemple les nombres 1 et 2) ; un couple (a, b) s'obtient en substituant, dans cet ensemble auxiliaire, un élément a de A à l'élément 1, et un élément b de B à l'élément 2. Pour parler un langage plus imagé, l'ensemble auxiliaire se compose de deux cases vides ; dans l'une on met un élément (d'ailleurs quelconque) de A , et dans l'autre un élément de B .

Au lieu d'un ensemble auxiliaire de deux éléments, prenons maintenant un ensemble quelconque I , considéré comme ensemble d'indices. Soient donnés d'autre part une famille d'ensembles A_i (l'indice i parcourant I). Si à chaque i de I nous associons un élément a_i pris arbitrairement dans l'ensemble A_i correspondant à i , nous définissons ce que nous appellerons un groupement suivant l'ensemble I . En langage imagé, I est un ensemble de cases vides ; à chaque case est attaché un ensemble A_i ; un groupement s'obtient en mettant, dans chaque case, un élément de l'ensemble attaché à cette case.

.....

- 17 -

Admettons maintenant qu'on ait le droit de considérer l'ensemble de tous les groupements correspondant à tous les choix possibles. Cet ensemble prend le nom de produit des ensembles A_i suivant l'ensemble I , et se note

$$\prod_{i \in I} A_i .$$

Si on remplace les ensembles A_i par des ensembles respectivement équivalents aux A_i , et l'ensemble I par un ensemble équivalent à I , on obtient comme produit un ensemble équivalent au précédent.

Exemple : si I a un nombre fini n d'éléments, on obtient le produit de n ensembles A_1, A_2, \dots, A_n , produit qui se note aussi

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n .$$

Exponentielle de base A et d'exposant I . - Supposons que tous les ensembles A_i soient égaux à un même ensemble A . Le produit

$$\prod_{i \in I} A_i$$

prend le nom d'exponentielle de base A et d'exposant I , et se note

$$A^I .$$

Par exemple, si A a un nombre fini n d'éléments, et I un nombre fini p d'éléments, l'exponentielle A^I possède n^p éléments. Si E désigne l'ensemble des nombres réels, et I un ensemble de p éléments, l'ensemble E^I est équivalent à l'ensemble des points de l'espace à p dimensions. Si I est dénombrable, E^I est équivalent à l'espace à une infinité dénombrable de dimensions.

Chaque groupement de l'ensemble A^I s'obtient en mettant, dans chaque case de l'ensemble I , un élément arbitraire de A . L'ensemble des groupements est donc équivalent à l'ensemble des fonctions définies dans I et réalisant une application de I dans A .

.....

- 18 -

Exemples.- Si E désigne l'ensemble des nombres réels; l'ensemble E^E est équivalent à l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle.

Si A est un ensemble à 2 éléments, l'ensemble A^I est équivalent à l'ensemble des fonctions à deux valeurs définies dans I , c'est-à-dire à l'ensemble des parties de I .

7.- LEMME DE DÉCOMPOSITION.

On a parfois besoin du lemme suivant :

Lemme.- Etant donné un ensemble fondamental, et une famille de sous-ensembles E_i , on peut trouver une famille de sous-ensembles F_j dis-joints deux à deux, tels que chaque E_i soit la somme de certains des F_j . Si les E_i sont en nombre fini, les F_j sont en nombre fini.

La 1^{ère} partie de l'énoncé est triviale. La 2^e ne l'est pas.

Procédé de formation des F_j .

Démonstration.- Soit la famille de sous-ensembles E_i , i parcourant un ensemble I d'indices. A chaque i de I , associons un ensemble A_i , savoir l'ensemble des deux sous-ensembles E_i et $\complement E_i$. Considérons alors le produit.

$$\prod_{i \in I} A_i ;$$

chaque élément j de ce produit est, par définition, un groupement, suivant l'ensemble I , d'éléments pris dans les ensembles A_i ; autrement dit, pour chaque j , la case i est remplie soit avec E_i soit avec $\complement E_i$. Pour chaque groupement j , prenons l'intersection de tous les ensembles (E_i ou $\complement E_i$) qui figurent dans les cases ; c'est un sous-ensemble F_j de l'ensemble fondamental.

....

Les ensembles F_j (j parcourant le produit $\prod_{i \in I} A_i$) sont disjoints deux à deux ; en effet, étant donnés j et j' ($j \neq j'$), il existe au moins une case i qui est remplie avec E_i dans l'un des groupements j et j' , et avec $\complement E_i$ dans l'autre. Donc on a par exemple

$$F_j \subseteq E_i, \quad F_{j'} \subseteq \complement E_i,$$

ce qui prouve que F_j et $F_{j'}$ sont disjoints.

Montrons que chaque E_i est une somme d'ensembles F_j . L'indice i étant donné, considérons les groupements j pour lesquels la case i est remplie avec E_i ; la somme $\sum_j F_j$, étendue à l'ensemble de ces groupements, est égale à E_i , comme le lecteur s'en assurera facilement.

Si l'ensemble I est fini, l'ensemble $\prod_{i \in I} A_i$ est fini, ce qui achève de démontrer le lemme.

8.- SOMME D'ENSEMBLES.

Jusqu'ici nous avons défini la somme de deux ensembles dans le cas où ces ensembles sont des sous-ensembles disjoints d'un même ensemble dit fondamental. Etant donnés deux ensembles A et B qui ne font pas partie d'un même ensemble, comment définir leur somme ? Ces deux ensembles vont être considérés, par convention, comme n'ayant pas d'élément commun. D'une façon précise :

Définition.- On appelle somme de deux ensembles A et B , et on note

$$A + B,$$

un ensemble S (dont l'existence est admise par postulat) qui peut se mettre sous la forme de la somme de deux sous-ensembles disjoints, respectivement équivalents à A et B .

D'après cette définition, tout ensemble équivalent à S doit encore être considéré comme la somme des ensembles A et B ; d'ailleurs, si on remplace A et B par des ensembles respectivement équivalents, leur somme ne change pas (à une équivalence près).

Plus généralement, soit une famille quelconque d'ensemble abstrait A_i (i parcourant un ensemble I). On appelle somme de ces ensembles, et on note

$$\sum_{i \in I} A_i,$$

un ensemble S (dont l'existence est admise par postulat) qui peut se mettre sous la forme d'une somme $\sum_i A'_i$, les A'_i étant des sous-ensembles de S, disjoints deux à deux, et respectivement équivalents aux A_i .

Cas particulier.- Si tous les A_i sont équivalents à un même ensemble A, le produit $A \times I$ est équivalent à la somme

$$\sum_{i \in I} A_i$$

En effet, chaque élément de

$$S = \sum_i A'_i$$

est caractérisé par l'indice i de l'ensemble A'_i auquel il appartient, et l'élément de A qui correspond à l'élément envisagé de A'_i . Donc S est équivalent à l'ensembles des couples d'éléments pris respectivement dans I et dans A. C.Q.F.D.

Exemple.- Si I a n éléments, la somme de n ensembles égaux à A est égale au produit de l'ensemble A par l'ensemble à n éléments.

Autre exemple.- Si A et I sont dénombrables, la somme

$$\sum_{i \in I} A_i$$

est égale au produit de deux ensembles dénombrables. C'est donc un ensemble dénombrable (cf § 5).