ELEMENTS DE LA THEORIE DES ENSEMBLES.

Rédaction n° 050

Nombre de pages : 70

Nombre de feuilles : 70

Eléments de la théorie des ensembles.

A 50

Etat 1

ELEMENTS de la THEORIE des ENSEMBLES

Prolégomènes sur la notion de théorie mathématique

> La pensée qui contemple est le sujet de la réflexion,
> la pensée contemplée en est l'objet .
>
> (Victor Cousin)

Ce chapitre doit être considéré, par le lecteur, comme une préface nécessaire à toute théorie mathématique. Nous nous proposons d'y faire une description sommaire des êtres que l'on rencontre et des procédés que l'on utilise dans l'une quelconque de ces théories . Précisons d'abord ce que nous entendons par ce vocable: théorie mathématique. On appelle ainsi l'étude d'une ou plusieurs catégories d'éléments, de leurs propriétés, des relations qui les unissent, des constructions dont ils peuvent être les matériaux; cette étude ne se fait d'ailleurs qu'en admettant préalablement un certain nombre de propositions non contradictoires, concernant ces éléments, ces propriétés, ces relations, ces constructions . La tâche de la théorie est de déduire de ces prémisses d'autres propositions dont l'exactitude est seulement conditionnée par celle des propositions initialement admises, sans qu'il y ait besoin de faire de nouvelles hypothèses .

Dans ce qui précède, nous laissons, à dessein, au mot élément, son sens le plus vague. Il désignera seulement tout être susceptible de posséder les propriétés non contradictoires que nous lui prêtons. Les catégories d'éléments qui font ainsi l'<u>objet</u> d'une théorie mathématique constituent les <u>ensembles fondamentaux</u> de la théorie ; mais ces ensembles ne sont pas des agrégats amorphes; ils présentent une certaine <u>organisation</u>: nous entendons par ce dernier terme tout le complexe logique formé par les définitions des propriétés des éléments de ces ensembles, des relations qui les unissent, des constructions dont ils peuvent être les matériaux, et aussi par les propositions concernant ces propriétés, éléments, constructions, relations, qu'on regarde tout d'abord comme vraies . Cette organisation portera dans la suite le nom de <u>structure</u> .

Une théorie mathématique nous apparait donc comme résultant de la considération simultanée de deux entités bien distinctes : D'une part, les ensembles fondamentaux qui sont l'<u>objet</u> de la théorie, d'autre part, la <u>structure</u> qui forme le <u>sujet</u> de la théorie et qui en est la partie vivante et essentielle .

Le lecteur constatera par la suite qu'il est toujours très aisé de laisser indéterminée la nature des éléments constituant les ensembles fondamentaux , et qu'il y a le plus souvent intérêt à adopter cette position . De là à penser que seule la structure importe et que le véritable but de la théorie mathématique est l'étude d'une structure indépendamment des ensembles auxquels il est loisible de l'appliquer, il n'y a qu'un pas ; de fait, il est sans doute possible d'étudier les structures en elles-mêmes, en s'interdisant de considérer les ensembles fondamentaux ; mais pour des raisons de commodité de langage, et pour ne pas dérouter d'invincibles habitudes d'esprit, nous adopterons résolument le point de vue dit "ontologique", c'est-à-dire que nous envisagerons effectivement les ensembles fondamentaux de chaque théorie, nous les désignerons nommément ainsi que leurs éléments, par des symboles convenables, mais nous laisserons presque toujours leur nature tout-à-fait indéterminée.

Les structures possibles sont d'une infinie diversité, mais toutes sont des perfectionnements, dans des directions extrêmement variées , de deux structures primitives qui, à dire le vrai, constituent le fond commun de toutes les cogitations humaines.

Ce chapitre est consacré à l'étude de ces deux structures. Chemin faisant, nous rencontrerons un certain nombre de procédés de définition de structure, procédés d'un usage constant, qui méritent le nom de procédés fondamentaux des mathématiques .

I.- 1.- Les ensembles fondamentaux: l'appartenance; la structure ε .

Pour que nous puissions parler d'un ensemble et de ses éléments, il faut que les trois conditions suivantes soient remplies :

1°) Il faut pouvoir distinguer l'ensemble,

2°) Il faut pouvoir dinstinguer un élément de l'ensemble,

3°) Il faut pouvoir établir entre l'élément et l'ensemble la relation d'appartenance, c'est-à-dire énoncer la proposition : l'élément a appartient à l'ensemble A , ce que nous écrirons

$$a \in A \qquad (1)$$

Quand il en sera ainsi nous dirons que l'ensemble A possède la structure ε ; par définition A sera alors un ensemble fondamental . Un ensemble qui n'est pas fondamental échappe donc à notre contemplation, à notre intelligence .

Dans la suite, les miniscules latines représenteront les éléments des ensembles fondamentaux; ces ensembles eux-mêmes seront indifféremment désignés, soit par des capitales latines, soit par la notation

$$\{a;\ b;\ c;\ldots\ldots\}$$

ou les quelques éléments entre accolades sont censés figurer tous les éléments de l'ensemble: il ne faut voir, dans ce schéma, aucune idée d'ordre .

Lorsque, par aventure, deux symboles distincts représenteront un même ensemble, on aura soin de préciser l'identité de ces deux symboles; c'est ainsi qu'on écrira

ce sera fait

$$A = \{a;\ b;\ c;\ldots\ldots\} \tag{2}$$

I.-2.- Propriétés d'un élément; Parties d'un fondamental.

Les ensembles fondamentaux que l'on considère dans les théories mathématiques sont en général très loins de posséder une homogénéité parfaite; leurs éléments présentent une certaine diversité et le fait qu'on puisse les distinguer les uns des autres est dû le plus souvent à ce que certains ont des propriétés dont les autres sont dépourvus . D'une manière absolument générale, de telles propriétés peuvent être regardées comme associant à chaque élément de l'ensemble une proposition qui peut être vraie ou fausse suivant l'élément considéré . Une telle proposition s'appelle un <u>prédicat</u> ; c'est une phrase où intervinnt un symbole x qui représente un élément <u>quelconque</u> de l'ensemble fondamental étudié A . En se donnant un prédicat il faut évidemment définir l'ensemble fondamental A qui contient l'élément x ; cet ensemble est le <u>type</u> du prédicat.

La considération d'une propriété éventuelle des éléments d'un ensemble fondamental A invite à envisager à part les éléments de A jouissant de cette propriété . Autrement dit, un prédicat quelconque de type A définit une <u>partie</u> de A pour les éléments de laquelle la proposition correspondant au prédicat est vraie . Il est évident que <u>cette partie est un nouvel ensemble fondamental</u>, puisque le prédicat nous donne justement le moyen de distinguer ses éléments parmi ceux de A.

Nous irons plus loin, nous admettrons qu'il est toujours possible de regarder une partie de l'ensemble fondamental A comme un nouveau fondamental B . et qu'il est aussi toujours possible de construire un prédicat de type A définissant la partie B, comme il vient d'être dit. Il y a là une difficulté philosophique qu'il serait vain de cher-

cher à minimiser, la construction de tels prédicats pour des parties B suffisamment compliquées serait un labeur surhumain Il faut donc s'entendre sur le sens du mot "possible" et ne pas le confondre avec celui de "réalisable". Nous ne nous attarderons pas à ces subtilités qui dépassent le cadre que nous nous sommes fixés et nous regarderons si l'on veut l'énoncé suivant comme un axiome :

<u>Tout prédicat de type A définit une partie de A</u> ; <u>toute partie de A peut être définie par un prédicat de type A.</u>

Il peut arriver que la proposition correspondant au prédicat de type A soit vraie pour tous les éléments de A; ou bien qu'elle soit fausse pour tous les éléments de A; ou bien encore qu'elle ne soit vraie que pour un seul élément a de A ; la définition générale des parties de A nous conduit donc à envisager :

A lui-même comme une partie de A; c'est la partie pleine;

la partie ne contenant aucun élément ; c'est la partie vide, on la notera $\bigcirc$;

la partie ne contenant qu'un seul élément a : on la notera

$$\{a\}$$

suivant nos conventions générales . Il est à peine besoin de dire qu'on doit la distinguer de l'élément a : c'est un être d'une autre espèce .

I.-3.- Parties complémentaires .

A toute proposition correspond la proposition contraire ; à tout prédicat de type A correspond le prédicat contraire, qui a le même type . Si E est la partie de A définie par un certain prédicat, le prédicat contraire définit la partie de A formée des éléments a qui ne sont pas dans E. Cette nouvelle partie se nomme le complémentaire de E et se désigne par $\complement(E)$. On évidemment :

$$A = \complement(O) \quad ; \quad O = \complement(A) \qquad (3)$$

c'est-à-dire en langage courant : le complémentaire de la partie vide est A ; le complémentaire de A est la partie vide.

Il est clair enfin, par définition même, que :

$$E = \complement\left(\complement(E)\right) \qquad (4)$$

I.-4.- Structures induites; induction des structures.

Nous avons fait remarquer que, toute partie E d'un fondamental A possède la structure $\mathcal{E}$; nous dirons que E possède la structure $\mathcal{E}$ induite par celle de A. Cette constatation semble tout-à-fait banale, il n'en est pas moins vrai que nous rencontrons ici pour lapremière fois un exemple d'application d'un procédé très général de définition des strctures, le procédé par induction : si un ensemble fondamental A possède une certaine structure, il est toujours possible d'en déduire une strueture pour une partie quelconque de A, structure plus ou moins précise, plus ou moins utilisable, suivant le cas, mais qui a le mérite de toujours exister. On trouvera dans la suite de nombreuses applications de cette méthode.

II.-1.- L'ensemble des parties d'un ensemble fondamental.

Les parties d'un ensemble fondamental A sont des éléments d'une espèce nouvelle ; nous nous donnons le droit de raisonner sur ces éléments et de considérer l'ensemble qu'ils forment, que l'on appelle l'ensemble des parties de A. Après avoir, comme nous l'avons fait, insister sur la difficulté que peut présenter la définition effective d'une partie de A, il semble inutile de faire remarquer qu'il est a fortiori plus difficile de concevoir une description réelle de l'ensemble des parties de A. Ici encore nous nous réfu-

11

gierons dans la consolante abstraction : il importe seulement de savoir désigner ces parties, ainsi que l'ensemble qu'elles constituent pour pouvoir en faire les matériaux de nouvelles constructions logiques .

L'ensemble des parties de A sera souvent désigné par $\mathfrak{P}$ (A) .

Le fait que A soit un ensemble fondamental, le droit que nous nous sommes donné de considérer les parties de A, de les distinguer les unes des autres, tout cela implique évidemment que $\mathfrak{P}$ (A) possède la structure $\mathcal{E}$, et est par suite un nouveau fondamental. Il y a beaucoup plus ; la seule possibilité de la considération de $\mathfrak{P}$ (A) entraine l'existence , dans cet ensemble d'une structure déjà sensiblement plus complexe, permettant de définir et d'effectuer un sertain nombre d'opérations applicables à ses éléments .

II.-2.- La réunion et l'intersection .

1°) Soit $\mathfrak{F}$ une partie de $\mathfrak{P}$ (A) . L'ensemble des éléments a de A tels qu'il existe un élément E de $\mathfrak{F}$ contenant a s'appelle la réunion des ensembles de $\mathfrak{F}$ et se note

$$F = \bigcup_{E \in \mathfrak{F}} E$$

C'est un nouvel élément de $\mathfrak{P}(A)$. Si $\mathcal{F}$ est la partie vide de $\mathfrak{P}(A)$, F est la partie vide de A . Si $\mathcal{F}$ contient un seul élément de $\mathfrak{P}(A)$, F se réduit à cet élément.

2°) L'ensemble des éléments a de A tels que, pour tout élément E de $\mathcal{F}$ on ait $a \in E$ s'appelle *l'intersection* des ensembles de $\mathcal{F}$ et se note

$$G = \bigcap_{E \in \mathcal{F}} E$$

C'est un nouvel élément de $\mathfrak{P}(A)$. Si $\mathcal{F}$ est la partie vide de $\mathfrak{P}(A)$, G est A ; si $\mathcal{F}$ contient un seul élément de $\mathfrak{P}(A)$, l'intersection se réduit à cet élément . Il arrive souvent que, pour définir la partie $\mathcal{F}$ on se donne un ensemble fondamental auxiliaire I , dit *ensemble d'indices* et qu'on fasse correspondre à tout élément i de I un élément E_i de $\mathfrak{P}(A)$; quand i décrit I, E_i décrit une partie $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{P}(A)$; la réunion et l'intersection se notent alors respectivement

$$F = \bigcup_{i \in I} E_i \quad , \quad G = \bigcap_{i \in I} E_i$$

Si la partie $\mathcal{F}$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{P}(A)$, tous explicitement désignés, la réunion et l'intersection se notent encore :

$$F = B \cup C \cup D \cup \ldots \cup K \; ; \qquad G = B \cap C \cap D \cap \ldots \cap K .$$

II.-2.1 - Associativité des opérations de réunion et d'intersection.

Revenons au cas où la partie $\mathcal{F}$ est définie à l'aide d'un ensemble d'indices I. Supposons que ce dernier ensemble soit lui-même la réunion des ensembles d'une partie $\mathcal{J}$ de $\mathcal{P}(I)$:

$$I = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J \qquad (5)$$

On a alors

$$F = \bigcup_{i \in I} E_i = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \left(\bigcup_{i \in J} E_i \right) \; ; \; G = \bigcap_{i \in I} E_i = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \left(\bigcap_{i \in J} E_i \right) \qquad (6)$$

En effet

1°) Soient

$$F = \bigcup_{i \in I} E_i \qquad \text{et} \qquad F' = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \left(\bigcup_{i \in J} E_i \right)$$

Soit a un élément de F, il existe un élément i de I tel que

$$a \in E_i$$

Mais

$$I = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$$

et il existe un élément J de $\mathcal{J}$ tel que

$$i \in J$$

alors

$$a \in \bigcup_{i \in J} E_i$$

donc

$$a \in F'$$

Soit inversement a un élément de F' : il existe un élément J de $\mathcal{J}$ tel que

$$a \in \bigcup_{i \in J} E_i$$

donc aussi un élément i de I tel que

$$a \in E_i$$

et par suite

$$a \in F$$

On voit donc que tout élément de F appartient à F' et que tout élément de F' appartient à F. Il en résulte

$$F = F'$$

2°) Soient

$$G = \bigcap_{\in} E_i \quad ; \qquad G' = \bigcap_{J \in \mathcal{J}} \left(\bigcap_{i \in J} E_i \right)$$

Soit a un élément de G ; il appartient à tous les E_i, donc

$$a \in \bigcap_{i \in J} E_i$$

quel que soit J de $\mathcal{J}$, donc

$$a \in G'$$

Soit inversement a un élément de G'; quel que soit J de $\mathcal{J}$ on a

$$a \in \bigcap_{i \in J} E_i$$

et aussi

$$a \in E_i$$

quels que soient i de J et J de $\mathcal{J}$, mais comme

$$I = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$$

a appartient à E_i quel que soit i de I , donc

$$a \in G$$

Tout élément de G appartient à G', tout élément de G' appartient à G, par suite

$$G = G'$$

Les résultats précédents expriment l'associativité des opérations de réunion et d'intersection . On a en particulier

$$B \cup C \cup D = (B \cup C) \cup D = B \cup (C \cup D) = (B \cup D) \cup C$$

$$B \cap C \cap D = (B \cap C) \cap D = B \cap (C \cap D) = (B \cap D) \cap C$$

Dans ces dernières formules, $(B \cup C) \cup D$, par exemple, doit être considéré comme la réunion de deux ensembles, dont l'un est $B \cup C$ et l'autre D , tandis que $B \cup C \cup D$ est la réunion de trois ensembles .

II.-2.2 - Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection, et de l'intersection par rapport à la réunion

Soient encore $\mathfrak{F}$ une partie, et B un élément de

$\mathcal{P}(A)$; on a

$$B \cup \left(\bigcap_{E \in \mathcal{F}} E \right) = \bigcap_{E \in \mathcal{F}} (B \cup E) \; ; \qquad B \cap \left(\bigcup_{E \in \mathcal{F}} E \right) = \bigcup_{E \in \mathcal{F}} (B \cap E) ; \quad (7)$$

En effet

1°) Soit un élément

$$a \in B \cup \left(\bigcap_{E \in \mathcal{F}} E \right)$$

il appartient soit à B, soit à tous les E, donc il appartient à tous les $B \cup E$. Inversement, si l'élément a appartient à tous les $B \cup E$, il appartient soit à B, soit à tous les E. La première formule est établie.

2°) Soit un élément

$$a \in B \cap \left(\bigcup_{E \in \mathcal{F}} E \right)$$

Il existe un E de $\mathcal{F}$ tel que a appartienne à la fois à B et à E, donc à $B \cap E$, et inversement. La seconde formule est établie.

II.-2.3.- L'opération complémentaire; formules en dualité.

Les deux opérations que nous venons de définir et dont nous avons indiqué les propriétés principales, s'appliquent aux éléments de $\mathcal{P}(A)$ et ont pour résultat des éléments de $\mathcal{P}(A)$; ce sont les deux opérations fondamentales d'un calcul connu sous le nom de calcul des réunions et intersections et dont l'importance n'a d'égale que la généralité.

Nous avons défini en I.3 ce qu'on entend par parties complémentaires de A. L'opération complémentaire

$$F = \complement(E)$$

est celle qui fait correspondre à l'élément E de $\mathcal{P}(A)$ l'élément F de $\mathcal{P}(A)$; cette correspondance est réciproque puisque

$$E = \complement(F)$$

C'est une nouvelle opération du calcul des réunions et intersections .

Si $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{P}(A)$, il y a lieu d'envisager les opérations suivantes :

$$\bigcup_{E \in \mathcal{F}} \complement(E) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{E \in \mathcal{F}} \complement(E)$$

On a, à ce propos, le résultat que voici:

$$\complement\Big(\bigcup_{E \in \mathcal{F}} E\Big) = \bigcap_{E \in \mathcal{F}} \complement(E) \; ; \quad \complement\Big(\bigcap_{E \in \mathcal{F}} E\Big) = \bigcup_{E \in \mathcal{F}} \complement(E) \tag{8}$$

En effet :

1°) Un élément a de $\complement\left(\bigcup_{E\in\mathcal{F}} E\right)$ est tel qu'il n'existe aucun élément E de $\mathcal{F}$ satisfaisant à

$$a \in E$$

donc, quel que soit E de $\mathcal{F}$, a appartient à $\complement E$; donc

$$a \in \bigcap_{E\in\mathcal{F}} \complement(E) \;;$$

et inversement.

2°) Un élément a de $\complement\left(\bigcap_{E\in\mathcal{F}} E\right)$ n'appartiendra pas simultanément à tous les E de $\mathcal{F}$, il existe un E de $\mathcal{F}$ tel que

$$a \in \complement(E)$$

donc

$$a \in \bigcap_{E\in\mathcal{F}} \complement(E)$$

et inversement.

De là résulte un <u>principe de dualité</u> : Lorsque l'on a obtenu par les procédés du calcul des réunions et intersections, une équation dans les deux membres de laquelle figurent les signes $\bigcap$ et $\bigcup$, en appliquant aux deux membres l'opération complémentaire, on obtient une nouvelle équation qui s'écrit immédiatement en remplaçant chaque ensemble par son complémentaire , chaque signe de réunion par un signe d'intersection, chaque signe d'intersection par un signe de réunion . Ces deux équations sont vraies ou fausses en même temps; on dit qu'elles sont en dualité .

II.-3.- La relation "contenu dans".

B et C étant deux éléments de $\mathfrak{P}(A)$, on dit que B est contenu dans C, ou que C contient B, lorsque, pour un élément a de A, $a \in B$ entraine $a \in C$, ou encore , si pour tout a de A, ou bien a n'est pas dans B, ou bien a est dans C . On écrit alors

$$B \subset C \qquad \text{ou} \qquad C \supset B$$

Ce fait peut encore s'exprimer en termes d'intersections; il est en effet équivalent de dire que $B \subset C$, ou de dire que $B \cap C = B$.

Par exemple, si $\mathfrak{F}$ est une partie de $\mathfrak{P}(A)$, toute partie de A qui est élément de $\mathfrak{F}$ est contenue dans

$$\bigcup_{E \in \mathfrak{F}} E$$

et contient

$$\bigcap_{E \in \mathfrak{F}} E$$

Si $\mathcal{F}$ n'est pas vide, l'intersection des ensembles de $\mathcal{F}$ est contenue dans la réunion des ensembles de $\mathcal{F}$.

Si B est une partie de A, l'ensemble des éléments E de $\mathcal{P}$(A) tels que

$$E \subset B$$

s'appelle <u>l'ensemble des parties de B</u> et se désigne par $\mathcal{P}$(B) C'est une partie de $\mathcal{P}$ (A).

<u>II.-3 1.- La différence</u> .

B et C étant deux éléments de $\mathcal{P}$ (A) tels que

$$B \subset C$$

l ensemble des éléments a de A , appartenant à C sans appartenir à B , est un nouvel élément de $\mathcal{P}$ (A) que l'on nomme <u>différence</u> de C et de B. On écrit

$$D = C - B$$

en désignant par D cet élément . Voici donc une nouvelle opération du calcul des réunions et intersection applicable à deux éléments B et C de $\mathcal{P}$ (A) et ayant pour résultat un élément de $\mathcal{P}$ (A) . Mais on doit remarquer que cette opération n'a de sens que pour $B \subset C$. Pour éviter cette condition supplémentaire nous généraliserons un peu la définition que nous venons de donner ; B et C étant deux éléments de $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des éléments de C n'appartenant pas à B est en tout cas un nouvel élément de $\mathcal{P}(A)$, soit D, que nous nommerons encore la différence de C et B ; on a

$$D = C - B = C - (B \cap C) \tag{9}$$

et la détermination de D se ramène toujours à celle de la différence de deux ensembles dont le premier contient le second

L'opération complémentaire se ramène à une différence ;

$$\complement(E) = A - E \tag{10}$$

Le lecteur notera encore les relations

$$\complement(C - B) = (B \cap C) \cup \complement(B) \tag{11}$$

$$E \cap (C - B) = (E \cap C) - (E \cap B) \tag{12}$$

dont l'une donne la partie complémentaire d'une différence, et dont l'autre montre la distributivité de l'intersection par rapport à la différence . La première est une conséquence immédiate de la définition; la seconde se démontre en remarquant que si l'élément a appartient à la fois à E et à C - B , il appartient à E et à C, sans appartenir à B . On peut écrire aussi bien

$$E \cap (C-B) = (E \cap C) - B = (E \cap C) - (E \cap B) = (E \cap C) - (E \cap B \cap C)$$

On a vu en II.23 qu'on pouvait ramener les réunions aux intersections, et les intersections aux réunions, en utilisant l'opération complémentaire; cette dernière étant une différence, on peut dire que toute réunion se ramène à des intersections et des différences, et que toute intersection se ramène à des réunions et des différences :

On a, si $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{P}(A)$

$$\bigcup_{E \in \mathcal{F}} E = A - \bigcap_{E \in F} (A-E) \ ; \qquad \bigcap_{E \in \mathcal{F}} E = A - \bigcup_{E \in \mathcal{F}} (A-E) \qquad (13)$$

Ce n'est là qu'une autre manière d'écrire les formules (8).

La réunion, l'intersection, l'opération complémentaire, d'une part, la réunion, l'intersection, la différence d'autre part, forment deux systèmes d'opérations équivalents. Tout calcul effectué dans l'un des systèmes peut être effectué dans l'autre, les formules (10) et (11) permettant de faire la transposition . On utilisera l'un ou l'autre de ces systèmes, suivant les cas .

II.-4.- La structure $\mathcal{E}$ et la structure U .

La réunion, l'intersection, l'opération complémentaire, la différence, la relation "contenu dans", tout cela établit dans l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ une structure assez poussée pour qu'elle puisse être le sujet d'une théorie mathématique particulière; les éléments qui viennent d'en être donnés suffiront largement pour la suite . Cette structure , que nous nommerons la "structure U", pour rappeler le symbole de l'opération réunion, résulte de l'existence de la structure $\mathcal{E}$ dans A . La relation d'appartenance

$$a \in A$$

se traduit, dans la structure U par

$$\{a\} \subset A$$

dont les deux membres sont des éléments de $\mathcal{P}(A)$, à savoir la partie contenant le seul élément a , et la partie pleine , de sorte qu'on peut dire que la structure U contient la structure $\mathcal{E}$, en entendant par là que toute relation de la seconde est traduisible en termes de la première .

De la même manière, si B est un élément de $\mathcal{P}(A)$ la structure $\mathcal{E}$ induite dans B par celle de A, permet de définir dans $\mathcal{P}(B)$ une structure U qui est aussi induite dans $\mathcal{P}(B)$ par celle de $\mathcal{P}(A)$.

Exercices

1°) Le lecteur illustrera les différentes identités du calcul des réunions et intersections par des exemples construits à l'aide d'ensembles plans.

2°) Montrer que

$$\bigcap_{i \in I} E_i = \bigcup_{i \in I} E_i - \bigcup_{i \in I} S_i$$

si

$$S_i = \bigcup_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \left[E_i - E_i \cap E_j \right]$$

III.-1.- Couple; produit; produit de structures.

Imaginons que nous ayons deux signes fixes, 1 et 2 par exemple; soient d'autre part A et B deux ensembles fondamentaux, qui peuvent n'avoir aucune relation l'un avec l'autre. Faisons correspondre A au signe 1, B au signe 2; ensuite, de toutes les manières possibles, attachons au signe 1 un élément a de A, au signe 2 un élément b de B. Nous avons ainsi formé tous les couples $\{a, b\}$ constitués par un élément de A et un élément de B. a s'appelle le premier élément du couple, b en est le second. Le couple est bien déterminé si on se donne son premier et son second élément .

Les couples $\{a, b\}$ forment un ensemble qu'on nomme le <u>produit</u> de A par B, et qui se note $A \times B$.

<u>Exemple</u>.- Si A et B sont les ensembles des points de deux droites sécantes d'un plan, les couples $\{a,b\}$ peuvent être représentés par les points du plan ayant respectivement pour coordonnées a et b par rapport au système d'axes formé par ces droites; le produit $A \times B$ est le plan lui-même .

D'après la définition même, l'ensemble produit $A \times B$ possède la structure $\mathcal{E}$ puisque les ensembles A et B la possèdent : pour que

$$\{a,b\} \in A \times B$$

il faut et il suffit que

$$a \in A \qquad b \in B$$

<u>$(A \times B)$ est donc un ensemble fondamental</u> .

Nous voyons que l'existence d'une structure dans A et d'une structure dans B nous permet de définir une structure dans l'ensemble produit $(A \times B)$; nous rencontrons ici un exemple d'application d'une seconde méthode générale de définition de structures, la méthode de la <u>structure produit</u> qui consiste précisément à construire une structure dans le produit $(A \times B)$, ce qui est toujours possible. Nous aurons bien souvent à utiliser cette méthode .

Considérons maintenant les ensembles des parties de A, B, $A \times B$, à savoir

$$\mathcal{P}(A) \ , \ \mathcal{P}(B) \ , \ \mathcal{P}(A \times B) \ ;$$

il est évident que

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \times B).$$

sauf dans le cas d'une parfaite banalité , il n'y a jamais identité des deux membres , comme le montre l'exemple simple du produit de deux droites .

Supposons que les E_i, $(i \in I)$, décrivent une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}(A)$ et que les F_j , $(j \in J)$, décrivent une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(B)$; on a

$$\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} F_j\right) = \bigcup_{[i,j] \in I \times J} \left(E_i \times F_j\right) \qquad (14)$$

formule aussi évidente qu'utile . Les deux membres sont des éléments de $\mathcal{P}(A \times B)$. On a de même

$$\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \times \left(\bigcap_{j \in J} F_j\right) = \bigcap_{[i,j] \in I \times J} E_i \times F_j \qquad (15)$$

Supposons enfin, avec les mêmes notations, que $A = B$. on notera la formule

$$\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} F_j\right) = \bigcup_{[i,j] \in I \times J} \left(E_i \cap F_j\right) \qquad (16)$$

où intervient le produit des ensembles d'indices ; les deux membres sont des éléments de $\mathcal{P}(A)$. A noter aussi la formule suivante, en dualité avec la précédente :

$$\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} F_j\right) = \bigcap_{[i,j] \in I \times J} \left(E_i \cup F_j\right) \qquad (17)$$

III.-2.- Relations

Affirmer qu'un point a est sur une droite d, ce n'est pas donner une propriété du point seul, ou de la droite seule, c'est exprimer une relation entre le point et la droite. De même, dire qu'un nombre a est plus grand qu'un nombre b, c'est dire qu'une certaine relation entre deux nombres est vraie ~~de~~ a et b. De pareilles relations peuvent être considérées comme des propriétés des couples formés par le point et la droite, par les deux nombres, respectivement. Plus généralement, une relation quelconque entre un élément a d'un ensemble A et un élément b d'un ensemble B peut être regardée comme une propriété du couple $\{a,b\}$ et se traduire par un prédicat ayant pour type le produit $A \times B$. Nous avons déjà rencontré dans ce qui précède des exemples de telles relations.

1/ L'identité.- L'identité de deux éléments a et b d'un même ensemble A signifie que toute propriété qui appartient à l'un de ces éléments, appartient aussi à l'autre. L'identité se traduit par le prédicat

$$x = y$$

de type $A \times A$. Une théorie mathématique comporte autant d'espèces d'identités qu'elle utilise d'ensembles fondamentaux. L'identité de deux éléments appartenant à des ensembles différents est inconcevable.

2/ L'appartenance.- La relation d'appartenance d'un élément a d'un ensemble A à une partie de A se traduit par le prédicat

$$x \in Y$$

dont le type est $A \times \mathcal{P}(A)$.

3/ Le premier et le second élément d'un couple.

Considérons deux ensembles A et B et leur produit $A \times B$; la relation entre un couple $z = \{x,y\}$ de $A \times B$ et son premier élément x se traduit par un prédicat de type $A \times (A \times B)$, qui s'énonce :" x est le premier élément du couple z". De même la relation entre un couple et son second élément se traduit par un prédicat de type $B \times (A \times B)$ qui s'énonce "y est le second élément du couple z".

4/ <u>La relation complémentaire</u> . La relation d'une partie d'un ensemble A à la partie complémentaire se traduit par le prédicat

$$X = \complement(Y)$$

dont le type est $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.

5/ <u>La relation "contenu dans"</u>. La relation d'une partie d'un ensemble A à une autre partie qui la contient, se traduit par le prédicat :

$$X \subset Y$$

de type $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.

D'après ce qui a été dit au I.2 à propos de la définition des parties d'un fondamental, nous voyons que la donnée d'une partie du produit $A \times B$ équivaut à celle d'une relation entre certains éléments de A et certains éléments de B, et inversement .

<u>III.-3.- Fonctions d'ensemble; correspondances.</u>

Reprenons deux ensembles fondamentaux A et B ; soit une relation entre éléments a de A et b de B, ou, ce qui revient au même, un élément $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{P}(A \times B)$. Soit encore E un élément de $\mathcal{P}(A)$; désignons par F l'ensemble des éléments b de B qui sont dans la relation $\mathcal{M}$ avec un élément a de E. Ce procédé nous permet de déduire de la relation $\mathcal{M}$ une relation entre éléments, tels que E et F, de $\mathcal{P}(A)$ et de $\mathcal{P}(B)$, c'est-à-dire une partie $\overline{\mathcal{M}}$ de $(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))$. Mais cette nouvelle relation n'est pas quelconque, car à tout élément E de $\mathcal{P}(A)$ est attaché un élément F <u>bien déterminé</u> de $\mathcal{P}(B)$. Nous dirons qu'une telle relation est une <u>correspondance</u> ou encore une <u>fonction d'ensemble</u> ; la partie F est qualifiée de <u>fonction</u> de la partie E; on écrit

$$F = f(E)$$

La fonction d'ensemble f est <u>définie</u> dans $\mathcal{P}(A)$ et prend ses <u>valeurs</u> dans $\mathcal{P}(B)$. $\mathcal{P}(A)$ est son <u>domaine de définition</u>.

Champ

D'une manière symétrique, soit F' un élément de $\mathcal{P}(B)$ désignons par E' l'ensemble des éléments a de A qui sont dans la relation $\mathcal{M}$ avec un élément b de F'. Nous faisons ainsi correspondre à tout élément F' de $\mathcal{P}(B)$ un élément bien déterminé E' de $\mathcal{P}(A)$ et nous définissons par suite une nouvelle fonction d'ensemble, qu'on note

$$E' = \overset{-1}{f}(F')$$

et qu'on appelle la <u>fonction inverse</u> de f. Cette fonction a $\mathcal{P}(B)$ comme domaine de définition et elle prend ses valeurs dans $\mathcal{P}(A)$. On notera que les égalités

$$F = f(E) \quad ; \quad E' = \overset{-1}{f}(F)$$

entrainent

$$E' \supset E$$

tandis que les égalités

$$E = \overset{-1}{f}(F) \quad ; \quad F' = f(E)$$

entrainent

$$F' \supset F$$

et symétriquement. La relation entre une fonction d'ensemble f et la fonction inverse $\overset{-1}{f}$ est réciproque, c'est-à-dire que f est la fonction inverse de $\overset{-1}{f}$; c'est là une conséquence immédiate des définitions. On dit parfois, lorsque

$$F = f(E) \quad ; \quad E' = \overset{-1}{f}(F')$$

que F est l'<u>image</u> de E, tandis que E' est l'<u>image inverse</u> de F'.

<u>Exemples</u>.- Les exemples de relations donnés en III.2 fournissent des exemples de fonctions d'ensemble. La relation complémentaire, pour fixer les idées, donne la fonction d'ensemble

$$F = \complement(E)$$

définie dans $\mathcal{P}(A)$ et prenant ses valeurs dans $\mathcal{P}(A)$.
De même, la notion de fonction a été implicitement utilisée en II.2, lorsque nous avons fait usage d'un ensemble d'indices I pour définir par exemple la réunion :

$$F = \bigcup_{i \in I} E_i$$

E_i est une fonction d'ensemble définie dans I, prenant ses valeurs dans A.

III.-3 1.- Applications; correspondances biunivoques.

Soient une relation entre éléments a de A, b de B et la fonction d'ensemble correspondante

$$F = f(E)$$

définie dans $\mathcal{P}(A)$; si on prend $E = \{a\}$, a étant un élément de A,

$$F = f(\{a\})$$

est une partie de B qui en général contient plus d'un seul élément. Lorsque, quel que soit l'élément a de A; F ne contient jamais qu'un seul élément b de B :

$$\{b\} = f(\{a\})$$

on dit que la fonction d'ensemble f est une <u>application</u> de A <u>dans</u> B , et on écrit , par abus de langage

$$b = f(a)$$

On remarquera, d'après ce qui précède, que toute relation entre éléments a de A et b de B, ou bien , toute partie de $A \times B$, définit une application de $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(B)$ à savoir

$$F = f(E)$$

et aussi une application de $\mathcal{P}(B)$ dans $\mathcal{P}(A)$, à savoir

$$E' = \overset{-1}{f}(F')$$

Donnons nous maintenant une application

$$b = f(a)$$

de A dans B; c'est une relation entre l'élément a et l'élément b; c'est d'ailleurs une relation assez particulière puisqu'il n'y a qu'<u>un seul</u> élément b de B qui soit dans cette relation avec a ; quoiqu'il en soit, on peut appliquer à cette relation ce qui a été dit en III.3 , et en déduire une fonction d'ensemble définie dans $\mathcal{P}(A)$, prenant ses valeurs dans $\mathcal{P}(B)$. Par abus de langage, nous désignerons cette fonction par f :

$$F = f(E)$$

Si

$$b = f(a)$$

on a évidemment

$$\{b\} = f(\{a\})$$

On dit que cette fonction d'ensemble est l'<u>extension</u> de l'application donnée de A dans B , à $\mathcal{P}(A)$ dans $\mathcal{P}(B)$.

Lorsque

$$B = f(A)$$

on dit que l'application donnée est une application de A <u>sur</u> B.

La fonction inverse

$$E' = \overset{-1}{f}(F')$$

est définie comme il a été dit; en général ce n'est pas une application de B dans A car l'élément a qui est dans la relation

$$b = f(a)$$

avec l'élément b ne sera pas en général unique . Lorsque cette circonstance se produit, on dit que la fonction f est <u>univalente</u> et que l'application correspondante est une <u>correspondance biunivoque</u> de A avec la partie B' de B définie par

$$B' = f(A)$$

Alors, 1/ Pour tout élément a de A, il existe un élément b de B' et un seul tel que a et b se correspondent,

2/ Pour tout élément b de B', il existe un élément a de A et un seul tel que a et b se correspondent,

3/ a et b ne peuvent se correspondre que si

$$a \in A \quad ; \quad b \in B'$$

On a évidemment

$$\{a\} = \overset{-1}{f} \left(\{b\} \right)$$

qu'on écrit, par abus de langage

$$a = \overset{-1}{f} (b)$$

en employant le symbole $\overset{-1}{f}$ pour marquer la correspondance entre B' et A, éléments à éléments .

D'après la définition même, pour que l'application $b = f(a)$ réalise une correspondance biunivoque entre A et $B' = f(A)$, il faut et il suffit que, a et a' étant des éléments de A, l'égalité

$$f(a) = f(a')$$

entraine $\quad a = a'$

Cette condition exprime l'univalence de la fonction f.
Lorsqu'elle est réalisée, il est clair que $\overset{-1}{f}$ est aussi univalente.

Exemples de correspondance biunivoque.

1/. L'ensemble des applications définies dans A prenant leurs valeurs dans B est en correspondance binnivoque avec une partie de $(A \times B)$.

2/. L'ensemble $\mathcal{P}(A)$ est en correspondance binnivoque avec lui-même par l'opération complémentaire

$$F = \complement(E)$$

Remarques.

1/. On se sert souvent de fonctions définies seulement sur une partie de A. Une telle fonction est une partie $\mathfrak{M}$ de $A \times B$ telle que pour tout élément a de A, il y ait au plus un élément b de B tel que

$$\{a, b\} \in \mathfrak{M}$$

L'ensemble A' des a pour lequel b existe effectivement s'appelle encore le domaine de définition de la fonction.
Tout ce que nous avons dit s'applique à ces fonctions en remplaçant A par A'.

2/. On rencontre souvent des couples de fonctions $f(a)$, $f'(a)$ telles que le domaine de définition A' de $f'(a)$ fasse partie du domaine de défintion de $f(a)$, et que, pour tout élément a de A' on ait

$$f'(a) = f(a)$$

On dit alors que $f(a)$ est un <u>prolongement</u> de $f'(a)$, ou encore que $f'(a)$ est la fonction $f(a)$ considérée seulement sur A'.

3/. Il arrive parfois que l'on note l'élément b correspondant à un élément a par une certaine fonction $f(a)$, à l'aide du symbole b_a. C'est la <u>notation indicielle</u> que nous avons utilisée en II.2.

<u>III.-3 2.- Compléments apportés à la structure U par la notion de fonction</u>.

On peut faire intervenir le symbole f dans la structure U, cela conduit à d'importantes identités. Reprenons une partie $\mathfrak{M}$ de $A \times B$ qui définit une relation entre éléments a de A, et b de B: soit

$$F = f(E)$$

la fonction d'ensemble correspondante; l'équation précédente se traduit ainsi : les éléments b de F sont tous ceux pour lesquels il existe un élément a de E tel que

$$\{a,b\} \in \mathfrak{M}$$

Ceci rappelé, on a, $\mathfrak{F}$ étant une partie de $\mathfrak{P}(A)$

$$f\left(\bigcup_{E\in\mathfrak{F}} E\right) = \bigcup_{E\in\mathfrak{F}} f(E) \qquad (18)$$

Soient en effet G et G' respectivement le premier et le second membre de (18) . Les éléments b de G sont tous ceux pour lesquels il existe un élément

$$a \in \bigcup_{E\in\mathfrak{F}} E$$

tel que $\{a,b\} \in \mathfrak{M}$; on peut dire aussi : les éléments b de G sont tous ceux pour lesquels il existe un E de $\mathfrak{F}$ et un élément a tels que

$$a \in E \quad ; \quad \{a,b\} \in \mathfrak{M}$$

D'autre part les éléments b de G' sont tous ceux pour lesquels il existe un élément E de $\mathfrak{F}$ tel que

$$b \in f(E)$$

ce sont aussi tous ceux pour lesquels il existe un élément E de $\mathfrak{F}$ et un élément a tels que

$$a \in E \quad ; \quad \{a,b\} \in \mathfrak{M}$$

Les ensembles G et G' ont donc exactement la même définition et ils sont identiques.

Voici une conséquence utile de (18) : si

$$E' \subset E''$$

on a

$$f(E') \subset f(E'') \tag{19}$$

En effet

$$f(E') \cup f(E'') = f(E' \cup E'') = f(E'')$$

ce qui prouve notre assertion.

Le lecteur notera que les deux ensembles

$$G = f\Big(\bigcap_{E \in \mathcal{F}} E\Big) \qquad G' = \bigcap_{E \in \mathcal{F}} f(E)$$

sont en général distincts. Pour le voir, prenons l'exemple de la relation d'appartenance ; la fonction d'ensemble correspondante est définie dans $\mathfrak{P}(A)$; elle prend ses valeurs dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))$; soit

$$\mathcal{G} = f(E)$$

$\mathcal{G}$ est la partie de $\mathfrak{P}(A)$ constituée par les parties de A contenant un élément de E; on peut dire aussi que tout élément F de $\mathcal{G}$ a une intersection non vide avec E. Soient alors

$$\mathcal{G} = f\Big(\bigcap_{E\in\mathcal{F}} E\Big) \quad ; \quad \mathcal{G}' = \bigcap_{E\in\mathcal{F}} f(E)$$

Un élément de $\mathcal{G}$ est assujetti à la condition d'avoir une intersection non vide avec l'intersection des E, tandis que un élément de $\mathcal{G}'$ a une intersection non vide avec chaque E de sorte que l'on peut seulement affirmer :

$$\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}$$

Si on revient au cas général, on peut dire que les éléments b de G sont ceux pour lesquels il existe un élément a de $\bigcap_{E\in\mathcal{F}} E$ tel que $\{a,b\} \in \mathfrak{M}$. ou bien encore que ce sont tous ceux pour lesquels il existe un élément a, appartenant à tous les E, tel que $\{a,b\} \in \mathfrak{M}$, ce ou ces éléments a ne dépendant que de b . Au contraire, les éléments b de G' appartiennent à tous les f(E) , on peut dire seulement que ce sont tous ceux pour lesquels il existe <u>dans chaque E</u> un élément a tel que $\{a,b\} \in \mathfrak{M}$, mais la détermination de ce ou ces éléments a pourra dépendre de la partie E que l'on considère . G et G' sont donc en général différents . Nous verrons dans la suite à quelles conditions ils sont identiques .

<u>III.-3 3.-</u> <u>Fonctions de fonctions</u>.

Soient A, B, C trois ensembles fondamentaux ; soit

$\mathcal{M}$ une partie de $A \times B$ définissant une relation entre éléments de A et éléments de B ; soit $\mathcal{N}$ une partie de $B \times C$ définissant une relation entre éléments de B et éléments de C; soient enfin

$$F = f(E) \quad ; \quad G = g(F')$$

les fonctions d'ensemble correspondant respectivement à des deux relations. f est définie dans $\mathcal{P}(A)$ et prend ses valeurs dans $\mathcal{P}(B)$; g est définie dans $\mathcal{P}(B)$ et prend ses valeurs dans $\mathcal{P}(C)$. A tout élément E de $\mathcal{P}(A)$, f fait correspondre un élément bien déterminé F de $\mathcal{P}(B)$, et à cet élément, g fait correspondre un élément bien déterminé

$$G = g(F)$$

de $\mathcal{P}(C)$. Nous écrirons par abus de langage

$$G = g\Big(f(E)\Big) = h(E)$$

Nous définirons ainsi une nouvelle fonction d'ensemble ayant $\mathcal{P}(A)$ comme domaine de définition et prenant ses valeurs dans $\mathcal{P}(C)$; nous dirons que c'est une fonction de fonction de E, par l'intermédiaire de f. Cette nouvelle fonction correspond évidemment à une relation $\mathcal{R}$ entre éléments de A et éléments de C ; a de A et c de C sont dans la relation $\mathcal{R}$ lorsqu'il existe un élément b de B, tel que

$$\{a,b\} \in \mathcal{M} \quad ; \qquad \{b,c\} \in \mathcal{N} \quad ;$$

Les éléments c de $G = h(E)$ sont tous ceux pour lesquels il existe un élément b de $F = f(E)$ tel que $\{b,c\} \in \mathcal{N}$ et par conséquent aussi, un élément a de E tel que $\{a,b\} \in \mathcal{M}$, de sorte que a et c sont bien dans la relation $\mathcal{R}$.

La fonction inverse $\overset{-1}{h}$ se définit aussi comme fonction de fonction ; soit G' un élément de $\mathcal{P}(C)$; les éléments b de B qui sont dans la relation $\mathcal{N}$ avec un élément c de G' forment un élément F' de $\mathcal{P}(B)$, on a par définition (III.3)

$$F' = \overset{-1}{g}(G') \quad ;$$

les éléments a de A qui sont dans la relation $\mathcal{M}$ avec un élément b de F' forment un élément E' de $\mathcal{P}(A)$, on a

$$E' = \overset{-1}{f}(F')$$

Il est clair que tout élément de E' est dans la relation $\mathcal{R}$ avec un élément de G' et que ce sont les seuls éléments de A satisfaisant à cette condition ; on a donc

$$E' = \overset{-1}{h}(G') = \overset{-1}{f}\left(\overset{-1}{g}(G')\right)$$

Si f définit une application de A dans B, et si g définit une application de B dans C, (ou d'une partie de B, contenant $f(A)$, dans C), il est clair que

$$c = h(a) = g\left(f(a)\right)$$

définit une application de A dans C.

Si f réalise une correspondance biunivoque de A avec B et si g réalise une correspondance biunivoque de B avec C, h réalise une correspondance biunivoque de A avec C. En particulier, dans ce dernier cas, la fonction

$$b' = h(b) = f\left(\overset{-1}{f}(b)\right)$$

réalise une correspondance biunivoque de B avec lui-même, qui se réduit à l'identité :

$$b' = b$$

et la fonction

$$a' = k(a) = \overset{-1}{f}\left(f(a)\right)$$

réalise une correspondance biunivoque de A avec lui-même, qui se réduit à l'identité.

IV.-1.- <u>L'échelle des types; la notion générale de structure</u>

Dans toute théorie mathématique, on part d'un certain nombre d'ensembles fondamentaux dont chacun est l'ensemble des éléments d'une certaine espèce que l'on a à considérer

On introduit ensuite de nouvelles espèces d'éléments à partir des espèces déjà connues -par exemple les parties d'un ensemble d'éléments, les couples d'éléments- et, pour chacune de ces nouvelles espèces d'éléments, on introduit l'ensemble des éléments de cette espèce .

On forme ainsi une famille d'ensembles, construits de proche en proche à partir des ensembles fondamentaux; ces constructions sont les suivantes :

1/ A étant un ensemble déjà construit, prendre l'ensemble $\mathfrak{P}(A)$ des parties de A;

2/ A et B étant des ensembles déjà construits, prendre le produit $A \times B$ de ces ensembles.

Les ensembles d'objets ainsi construits sont introduits au fur et à mesure des besoins dans la théorie. Chaque démonstration n'en fait intervenir qu'un nombre fini. Ce sont des ensembles que l'on appelle les <u>types</u> de la théorie; leur hiérarchie infinie constitue l'<u>échelle des types</u>.

Nous sommes maintenant en état de donner une définition suffisamment précise de la structure d'une théorie mathématique . Partons d'un certain nombre d'ensembles fondamentaux

A, B, C, ..., L ;

dits ensembles de base . Se donner une structure dans cette base, c'est :

un seul ensemble

1°) se donner des propriétés des éléments de ces ensembles

2°) se donner des relations entre les éléments de ces ensembles

Syntaxe

3°) se donner des propriétés des éléments d'un certain nombre de types de l'échelle des types construite sur la base donnée ,

4°) se donner des relations entre les éléments d'un certain nombre de types de l'échelle des types construite sur la base donnée,

noncontradictoire

axiomes

5°) admettre comme vraies un certain nombre de propositions non contradictoires concernant toutes ces propriétés et toutes ces relations .

Plus cet ensemble est complexe, plus la structure est <u>forte</u> ; nous dirons qu'une structure $\sum_1$ est plus forte qu'une structure $\sum_2$, lorsqu'elles ont les mêmes ensembles de base et que le complexe des propriétés, relations, propositions définissant $\sum_1$ contient toutes les propriétés, relations, propositions définissant $\sum_2$, et quelques autres encore .

riche

Pour une base donnée, la structure la plus faible de toutes est la structure $\mathcal{E}$ qui ne contient qu'une seule propriété : tous les ensembles de la base sont fondamentaux. D'après la définition même, cette structure est contenue dans toute structure de même base .

V.-1.- Isomorphie; transport de structure.

Soient d'abord deux ensembles fondamentaux A et B et supposons qu'il existe entre ces ensembles une correspondance biunivoque, que nous désignerons par α . Elle se traduit par l'existence de deux fonctions inverses l'une de l'autre : $f(a)$; $\overset{-1}{f}(b)$ dont la première est définie dans A et prend ses valeurs dans B, dont la seconde est définie dans B et prend ses valeurs dans A . Deux parties A' de A et B' de B se correspondent lorsque

$$B' = f(A') \quad ; \qquad A' = \overset{-1}{f}(B') \quad ;$$

On notera que, par définition

$$B = f(a) \quad ; \qquad A = \overset{-1}{f}(B)$$

Ainsi que nous l'avons dit, la correspondance ainsi obtenue entre les éléments de $\mathfrak{P}(A)$ et de $\mathfrak{P}(B)$ résulte de l'extension de la correspondance α entre A et B , aux parties de ces ensembles ; elle est évidemment biunivoque .

Soient maintenant quatre ensembles fondamentaux A, B, C, D , et soient données une correspondance biunivoque α entre A et B , et une correspondance biunivoque β entre C et D . Soient $\{a,c\}$ un élément de $A \times C$, et $\{b,d\}$ un élément de $B \times D$. Nous dirons que ces couples se correspondent si a et b se correspondent par α et si c et d se correspondent par β. Nous obtenons ainsi une correspondance biunivoque entre $A \times C$ et $B \times D$, que l'on peut appeler le produit des correspondances α et β. Ceci posé, partons de deux bases d'ensembles fondamentaux, comprenant le même nombre d'ensembles :

$$A;\ B;\ C;\ \ldots;\ L$$

et

$$\mathfrak{A};\ \mathfrak{B};\ \mathfrak{C};\ \ldots;\ \mathfrak{L}$$

et donnons-nous de plus autant de correspondances biunivoques α entre A et $\mathfrak{A}$, β entre B et $\mathfrak{B}$, γ entre C et $\mathfrak{C}$ etc.... , λ entre L et $\mathfrak{L}$. Sur chacune des deux bases, construisons l'échelle des types ; soit K un ensemble de l'échelle de base A; B; C; .... ; L ; soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble qui occupe la même place dans l'échelle de base $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; ....; $\mathfrak{L}$; c'est-à-dire qui est déduit des ensembles $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}$; ....; $\mathfrak{L}$; par la suite d'opérations (produits d'ensembles, prises d'ensembles des parties d'un ensemble déjà construit) qui a permis de déduire K des ensembles A; B; C; ...; L ; $\mathfrak{K}$ est appelé l'<u>homologue</u> de K. Or, nous venons d'indiquer comment, connaissant une correspondance biunivoque entre deux ensembles, on pourrait l'étendre aux ensembles de leurs parties, et comment, connaissant deux correspondances biunivoques entre les ensembles de deux couples d'ensembles, chacun à chacun, on pouvait en déduire une correspondance biunivoque entre les deux ensembles produits . La connaissance des correspondances biunivoques α ; β ; γ ; ... ; λ entre les ensembles des deux bases chacun à chacun, nous permettre donc de définir , par la combinaison et la répétition de ces deux procédés, une correspondance biunivoque $\varkappa$ entre les ensembles homologues K et $\mathcal{K}$.

Il sera commode en fait, de considérer toutes les correspondances biunivoques que l'on peut ainsi déterminer entre les ensembles homologues des deux échelles, comme une seule et même correspondance biunivoque Γ .

Soient maintenant k un élément de K et k^* une partie de K, si $k \in k^*$ il sera aussi vrai que $\bar{k} \in \bar{k}^*$ où $\bar{k}$ et $\bar{k}^*$ sont les éléments de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ qui correspondent à k et k^* par la correspondance Γ ; ceci est une conséquence de la formule (19) , démontrée pour une fonction d'ensembles quelconque.

Soit de même M un autre ensemble de la première échelle et $\mathcal{M}$ son homologue dans la seconde échelle; soit $\mathfrak{p}$ un élément de K×M ; s'il est vrai que p de K est premier élément de $\mathfrak{p}$, il sera aussi vrai que q est le premier élément de $\mathfrak{q}$, les éléments q et $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{K}$ et

$\mathfrak{K} \times \mathfrak{M}$ correspondant à p et $\mathfrak{p}$ par Γ. On peut en dire autant pour les seconds éléments des couples $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$. Il résulte de là que toutes les assertions vraies que l'on peut formuler sur les éléments des ensembles de la première échelle, pourvu que cette formulation soit possible au moyen des seules relations de la théorie des ensembles (et de celles qui sont définies à partir d'elles), resteront vraies si on remplace les éléments dont on y parle par leurs correspondants, par la correspondance Γ, dans les ensembles homologues de la seconde échelle.

Il revient au même de dire que la correspondance permet de déduire d'une structure organisant la première échelle, une structure organisant la seconde. On dit que Γ établit une <u>isomorphie</u> entre les ensembles des deux échelles <u>relativement à</u> ces deux structures. Il faut bien comprendre que l'idée d'isomorphie n'a de sens que si les deux échelles en correspondance biunivoque possèdent respectivement une structure, ces deux structures se déduisant l'une de l'autre par la correspondance . Si cette dernière condition vient à manquer, il n'y a plus isomorphie; c'est ainsi, par exemple, que, transportant par Γ une structure de la première à la seconde échelle, complètant ensuite la structure transportée par de nouvelles propriétés et de nouvelles propositions regardées comme vraies, de façon à obtenir une structure plus forte, on verra en général l'isomorphie disparaître.

Il est bien clair que les deux théories mathématiques étudiant les deux structures transportées l'une de l'autre dans deux échelles de types en correspondance biunivoque, sont logiquement identiques, bien qu'ayant des objets différents. Pour des raisons ~~[illegible]~~ évidentes. d'économie de pensée, il est indiqué de considérer comme identiques deux échelles de types isomorphes relativement à ces structures, quelles que puissent être d'ailleurs les origines respectives des ensembles de base de ces échelles . Comme nous le disions au début de ce chapitre, il y a presque toujours intérêt à laisser ces origines indéterminées, c'est-à-dire à regarder les ensembles de la théorie comme des ensembles abstraits. C'est cette position que nous adopterons le plus souvent .

VI.-1.- Relations d'équivalence; partage en classes .

Soit un ensemble fondamental A. Considérons une relation $\mathfrak{M}$ entre éléments a, a' de cet ensemble, c'est-à-dire une partie du produit $A \times A$ de A par lui-même. Cette relation ne sera pas quelconque, nous lui imposerons les conditions suivantes :

1°) Réflexivité : quel que soit l'élément a de A, le couple $\{a,a\}$ appartient à $\mathfrak{M}$;

2°) Symétrie : si le couple $\{a,a'\}$ appartient à $\mathfrak{M}$,il en est de même du couple $\{a',a\}$

3°) <u>Transitivité</u> : si les couples $\{a,a'\}$ et $\{a',a''\}$ appartiennent à $\mathcal{R}$, il en est de même du couple $\{a,a''\}$

Quand ces trois conditions sont remplies, on dit que la relation $\mathcal{R}$ est une <u>relation d'équivalence</u> et on exprime le fait que le couple $\{a,a'\}$ appartient à $\mathcal{R}$ en disant que a' est équivalent à a , et en écrivant

$$a \sim a'$$

La réflexivité traduit le fait que tout élément est équivalent à lui-même. la symétrie exprime la réciprocité de la relation d'équivalence : si a' est équivalent à a , a est équivalent à a' ; la transitivité se caractérise par l'énoncé : deux éléments équivalents à un troisième sont équivalents entre eux .

Etant donné une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ nous appellerons <u>classe</u> d'un élément a de A ,la partie de A formée des éléments équivalents à a . Si , comme en III.-3 nous introduisons la fonction d'ensemble f attachée à la relation $\mathcal{R}$, fonction définie dans $\mathcal{P}(A)$ et prenant ses valeurs dans $\mathcal{P}(A)$, et si nous désignons par a^* la classe de a , on a

$$a^* = f(\{a\})$$

La définition d'une relation d'équivalence entraine alors, relativement aux classes, les propriétés suivantes :

1°)
$$a \in a^*$$
par suite de la réflexivité.

2°) les classes de deux éléments équivalents sont identiques à cause de la symétrie et de la transitivité.

3°) les classes de deux éléments non équivalents n'ont aucun élément commun, à cause de la transitivité.

On peut dire brièvement qu'une relation d'équivalence définit un partage en classes de l'ensemble A, tout élément de A appartenant à une classe, deux classes différentes n'ayant aucun élément commun .

L'ensemble des classes a^* est une partie A^* de $\mathcal{P}(A)$; c'est donc un ensemble fondamental; pour savoir si un élément $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{P}(A)$ appartient à A^*, il suffit de regarder si $\overset{-1}{f}(\mathfrak{A})$ se réduit ou non à une partie de A contenant un seul élément.

Nous rencontrons ici un troisième procédé de définition de structure ; si un ensemble A possède une structure, et si on connait une relation d'équivalence dans A, il est possible d'en déduire une structure dans l'ensemble des classes A^* défini par cette relation d'équivalence . Ce troisième procédé est aussi d'un emploi très fréquent .

ça tombe

VI.-1 1.- Fonctions définies par un partage en classes ; fonction caractéristique.

La relation

$$a^* = f(\{a\})$$

peut être regardée comme définissant une application de A sur l'ensemble des classes A^* ; d'après nos conventions générales, nous écrirons maintenant

$$a^* = f(a) \tag{20}$$

cette fonction étant définie dans A et prenant ses valeurs dans A^*. On remarquera que si

$$a \sim a'$$

on a

$$f(a) = f(a')$$

Cette fonction est donc constante sur les classes.

Soit inversement

$$b = g(a)$$

une application de A sur un autre ensemble fondamental B. Considérons l'équation

$$f(a) = f(a')$$

comme définissant une relation entre a et a'; on constate immédiatement que cette relation est réflexive, symétrique, et transitive; c'est donc une relation d'équivalence; elle définit par suite un partage de A en classes a^*, ces classes étant définies par le fait que chacune d'elle contient tous les éléments de A pour lesquels $f(a)$ prend la même valeur ; il y a évidemment correspondance biunivoque entre l'ensemble A^* de ces classes et l'ensemble B .

Exemple . Le cas le plus simple est celui où A^* ne contient que deux éléments; A est alors partagé en deux classes ; les fonctions définissant ce partage en deux classes prennent deux valeurs seulement dans A, sur deux parties complémentaires de A . Soient E et F ces deux parties

$$F = \complement(E) \quad ; \quad E = \complement(F)$$

Parmi ces fonctions on considère particulièrement celle qui est nulle sur F, et égale à 1 sur E, et aussi celle qui est nulle sur E et égale à 1 sur F . On les appelle respectivement les fonctions caractéristiques de E et F .

Exercice. Si f_i ,$(i \in I)$, est la fonction caractéristique d'une partie E_i de A, montrer que les fonctions caractéristiques des ensembles

$$H = \bigcap_{i \in I} E_i \qquad K = \bigcup_{i \in I} E_i$$

sont respectivement h et $1-g$, en désignant par h le produit de toutes les fonctions f_i et par g le produit de toutes les fonctions

$$g_i = 1 - f_i$$

<u>Remarques</u>.-

1/. Il y a évidemment correspondance biunivoque entre (A^*) et l'ensemble ayant pour éléments toutes les réunions de classes dans A.

2/. Soit

$$b = g(a^*)$$

une fonction définie dans A^* et prenant ses valeurs dans un autre ensemble fondamental B ; introduisons, d'après (20) la fonction

$$a^* = f(a)$$

réalisant l'application de A sur A^*, et constante sur les classes ; la fonction

$$b = g\left(f(a)\right)$$

est définie dans A, prend ses valeurs dans B et reste constante sur les classes.

Soit inversement

$$b = h(a)$$

une fonction définie dans A, prenant ses valeurs dans B et constante sur les classes a^* ; soit $g(a^*)$ la valeur qu'elle prend sur la classe a^* , on a nécessairement

$$b = h(a) = g\big(f(a)\big)$$

il y a donc correspondance biunivoque entre les fonctions définies sur l'ensemble des classes, et les fonctions définies dans A et constantes sur les classes .

VI.-2.- Ensemble quotient: identification.

Soient A et B deux ensembles fondamentaux dans lesquels sont définies respectivement deux relations d'équivalence α et β . Soit C l'ensemble produit $A \times B$. Il est facile d'y définir, à l'aide de α et β , une relation d'équivalence γ : Nous dirons que deux éléments $\{a,b\}$ et $\{a',b'\}$ de C sont équivalents lorsque

$$a \sim a' \quad \text{par } \alpha$$

et

$$b \sim b' \quad \text{par } \beta$$

On vérifie sans peine que la relation γ est réflexive, symétrique, transitive; c'est donc une relation d'équivalence qu'on notera

$$\gamma = \alpha \times \beta$$

γ définit dans C un partage en classes ; une de ces classes c^* est constituée des éléments $\{a, b\}$ de C tels que les a appartiennent à l'une des classes a définies dans A par α, et que les b appartiennent à l'une des classes b définies dans B par β ; on a donc

$$c^* = a^* \times b^*$$

On peut dire aussi que c^* est complètement définie par le couple $\{a, b\}$ de sorte que l'ensemble des classes C définies dans C par γ n'est autre que

$$C^* = A^* \times B^*$$

par définition même du produit.

Ce résultat légitime une dénomination et une notation que nous allons maintenant indiquer : On dit que l'ensemble de classes A^*, par exemple, est un <u>ensemble-quotient</u> de A obtenu par <u>identification</u> des éléments de A qui sont dans une même classe relativement à la relation d'équivalence α, et on écrit

$$A^* = A / \alpha$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$(A \times B) / (\alpha \times \beta) = (A / \alpha) \times (B / \beta) \qquad (21)$$

VI.-3.- Nouveaux compléments à la structure U

En III.3 3, nous avons donné l'équation (18) exprimant la permutabilité des symboles f et $\bigcup$, f étant une fonction d'ensemble quelconque; nous avons de plus observé qu'il n'y avait pas en général permutabilité de f en $\bigcap$. Nous allons préciser ce dernier point .

Supposons d'abord que f réalise une correspondance biunivoque

$$b = f(a)$$

entre un ensemble fondamental A et une partie B' de l'ensemble fondamental B ; on en déduit facilement , par extension ainsi qu'il a été dit en V.1, une correspondance biunivoque entre $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B')$, que nous noterons

$$F = f(E)$$

Les relations

$$f\left(\complement E\right) = \complement f(E)$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(E_i)$$

sont des conséquences triviales de l'univocité de la correspondance établie par la fonction f entre $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B')$; il en est de même de l'équation

$$f(E'-E'') = f(E') - f(E'')$$

Tout cela se constate immédiatement en remarquant qu'à a de A correspond <u>un seul</u> élément b de B', et qu'à b de B' correspond <u>un seul</u> élément a de A.

Considérons en second lieu, une application

$$b = f(a)$$

de A sur une partie B' de B. Il en résulte, comme nous savons, un partage de A en classes d'éléments pour lesquels $f(a)$ prend la même valeur. Soit comme plus haut, A^* l'ensemble de ces classes, et soit

$$b = g(a^*)$$

la valeur prise par la fonction $f(a)$ sur la classe a^*. Cette fonction $g(a^*)$ établit une correspondance biunivoque entre A^* et B', de même pour la fonction inverse

$$a^* = \overset{-1}{g}(b)$$

il vient donc, après ce qui vient d'être dit

$$\overset{-1}{g}\left(\complement F\right) = \complement\,\overset{-1}{g}(F) \qquad (22)_1$$

$$\overset{-1}{g}\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcap_{i \in I}\overset{-1}{g}(F_i) \qquad (23)_1$$

$$\overset{-1}{g}(F' - F'') = \overset{-1}{g}(F') - \overset{-1}{g}(F'') \qquad (24)_1$$

où F, F', F'', F_i, sont des éléments de $\mathcal{P}(B')$, les deux membres de ces trois relations étant des éléments de $\mathcal{P}(A^*)$.

Soit d'autre part

$$a^* = \varphi(a)$$

la fonction définie dans A et faisant correspondre à chaque élément a de A l'élément a^* de A^* représentant la classe qui le contient . On a , comme on a dit

$$b = f(a) = g\left(\varphi(a)\right).$$

La fonction $\overset{-1}{\varphi}(a^*)$ fait correspondre à chaque élément de A^* une partie de A qui n'est autre que la classe appelée aussi a^* ; deux de ces parties n'ont aucun élément commun, si elles sont distinctes, par suite

$$\overset{-1}{\varphi}\left(\complement E^*\right) = \complement \overset{-1}{\varphi}(E^*) \qquad (22)_2$$

$$\overset{-1}{\varphi}\left(\bigcap_{i \in I} E_i^*\right) = \bigcap_{i \in I} \overset{-1}{\varphi}(E_i^*) \qquad (23)_2$$

$$\overset{-1}{\varphi}(E^* - \dot{E}^*) = \overset{-1}{\varphi}(E^*) - \overset{-1}{\varphi}(\dot{E}^*) \qquad (24)_2$$

où E^*, $\dot{E}^*$, E_i^*, sont des éléments de $\mathcal{P}(A^*)$, les deux membres de ces trois relations étant des éléments de $\mathcal{P}(A)$.

Or, on a, comme on sait, (III.3 3)

$$\overset{-1}{f}(b) = \overset{-1}{\varphi}\left(\overset{-1}{g}(b)\right)$$

et pour toute partie F de B'

$$\overset{-1}{f}(F) = \overset{-1}{\varphi}\left(\overset{-1}{g}(F)\right)$$

Ça remonte et se fonde

Calculant les $\overset{-1}{\varphi}$ des deux membres de $(22)_1$, $(23)_1$, $(24)_1$ et tenant compte de $(22)_2$, $(23)_2$, $(24)_2$, il vient

$$\overset{-1}{f}\left(\complement F\right) = \complement \overset{-1}{f}(F) \tag{22}$$

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f}(F_i) \tag{23}$$

$$\overset{-1}{f}(F' - F'') = \overset{-1}{f}(F') - \overset{-1}{f}(F'') \tag{24}$$

les deux membres de chacune de ces trois relations étant des éléments de $\mathcal{P}(A)$.

Les fonctions d'ensemble, inverses d'une application ont donc des propriétés spéciales relativement au calcul des des réunions et intersections; elles sont, à cet égard, plus commodes que les applications elles-mêmes, pour lesquelles ces équations sont inexactes -sauf dans les cas où l'application est une correspondance biunivoque . Cette remarque est importante, nous aurons à l'utiliser fréquemment .

VII.-1.- Produit quelconque d'ensembles .

Soit I un ensemble d'indices i et E_i une fonction de i définie dans I et prenant ses valeurs dans $\mathfrak{P}(A)$, A étant un ensemble fondamental.

Définition.- Le produit des ensembles E_i est l'ensemble des fonctions a_i définies dans I, prenant leurs valeurs dans A et telles que

$$a_i \in E_i$$

quel que soit i dans I.

Donnons immédiatement un exemple : soient d'abord deux ensembles fondamentaux H et K qui n'auront en général aucun rapport et dont les éléments seront de natures différentes ; donnons-nous le droit de considérer comme un nouveau fondamental A, la somme abstraite de H et de K, c'est-à-dire la juxtaposition pure et simple de ces deux ensembles. Ceci étant, prenons pour I un ensemble à deux éléments 1 et 2 ; et soient

$$E_1 = H \qquad E_2 = K$$

qui sont des parties de A. L'ensemble des fonctions à deux valeurs

$$a_1 \quad \text{et} \quad a_2$$

ces valeurs étant des éléments de A, tels que

$$a_1 \in E_1 \qquad a_2 \in E_2$$

est évidemment identique à l'ensemble des couples $\{h,k\}$ ayant pour premier élément, un élément de H, et pour second élément un élément de K ; cet ensemble est donc le produit $H \times K$ dont la définition rentre bien ainsi dans celle du produit quelconque .

A la lumière de ce qui précède on voit que la considération de la somme abstraite est seulement nécessitée ~~pour~~ par les commodités de langage, à seule fin de rendre la définition du produit quelconque tout-à-fait générale . Il n'y a donc pas lieu de s'attarder aux difficultés philosophiques que peut soulever cette notion . On peut d'ailleurs remarquer que la somme abstraite de H et K est isomorphe à une partie de $H \times K$, relativement à la structure ; en effet, soient h^o et k^o deux éléments particuliers de H et K; l'ensemble des éléments $\{h^o, k\}$ de $H \times K$, quand k décrit K, est évidemment isomorphe à K; de même l'ensemble des éléments $\{h, k^o\}$ quand h décrit H , est isomorphe à H ; nous désignerons ces deux parties de $H \times K$ par les notations

$$\{h^o, K\} \quad \text{et} \quad \{H, k^o\}$$

elles ont un seul élément commun qui est $\{h^o, k^o\}$; on peut donc dire que la partie

$$\{H, k^o\} \cup \{h^o, K\}$$

de $H \times K$ est isomorphe à la somme abstraite de H et K, pourvu que, dans cette somme, on identifie les éléments h^o et k^o.

VII.- 1 1.- Associativité du produit quelconque, produits partiels, coordonnées.

rédaction

a_i ? !

Reprenons un produit quelconque; soit a_i un de ses éléments; la valeur prise par cette fonction de i pour un élément i particulier de I est un élément a_i de A que nous nommerons coordonnée d'indice i de l'élément a_i.

Dans la suite, nous désignerons par $\prod_i$ le produit quelconque des E_i, i décrivant l'ensemble I, ou encore s'il est besoin de préciser, nous emploierons la notation

$$\prod_{i \in I} E_i$$

Soit J une partie de l'ensemble I. On définit de la même manière le produit partiel $\prod_J$ des E_i quand l'indice i décrit J ; on dira quelquefois que $\prod_J$ est le produit partiel relatif à la partie J.

On obtient aisément des ensembles isomorphes à $\prod_J$:

1°) soit K la partie complémentaire de J dans I; choisissons arbitrairement et une fois pour toutes des éléments a_i^o de E_i pour $i \in K$ et considérons dans $\prod_I$ l'ensemble des fonctions a_i dont les coordonnées d'indices $i \in K$ sont égales à a_i^o ; leurs autres coordonnées, définies dans

J prennent des valeurs

$$a_i \in E_i$$

on établit ainsi une correspondance biunivoque entre cette partie de $\prod_I$ et $\prod_J$.

2°) Nous allons maintenant définir dans $\prod_I$ une relation d'équivalence en identifiant deux éléments de cet ensemble lorsque toutes leurs coordonnées d'indice $i \in J$ sont les mêmes ; on vérifie sans peine que toutes les conditions d'équivalence sont satisfaites; considérons alors l'ensemble-quotient de $\prod_I$ par cette équivalence ; un élément de cet ensemble correspond biunivoquement à la partie de $\prod_I$ formée des éléments a_I ayant des coordonnées a_i quelconques dans E_i, pour $i \in K$, et ayant les mêmes coordonnées a_i, dans E_i, pour $i \in J$; on peut donc encore établir une correspondance biunivoque entre $\prod_J$ et l'ensemble-quotient que nous venons de définir.

Soient enfin N un nouvel ensemble d'indices ν et J_ν les ensembles d'une quelconque décomposition de I en classes; posons

$$P_\nu = \prod_{i \in J_\nu} E_i \tag{25}$$

$$P = \prod_{\nu \in N} P_\nu \tag{26}$$

Nous allons montrer qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre P et Π_I . En effet : P_ν est un produit partiel de Π_I ; on peut donc lui faire correspondre biunivoquement, ainsi que nous venons de le dire au 1°) , une partie $\widetilde{P}_\nu$ de Π_I. Précisons les choses de la manière suivante : fixons une fois pour toute un élément a_i^0 de Π_I et faisons correspondre à P_ν l'ensemble $\widetilde{P}_\nu$ des éléments de Π_I dont les coordonnées sont égales à celles de a_i^0 pour

$$i \in I - J_\nu$$

Le fait que les J_ν constituent un partage en classe de I, entraine deux conséquences :

a/ deux ensembles différents $\widetilde{P}_\nu$ et $\widetilde{P}_\mu$ ont un seul élément commun a_i^0 ;

b/ on peut faire correspondre biunivoquement à tout élément a_i de Π_I une fonction α_ν définie dans N, prenant ses valeurs dans Π_I , telle que α_ν soit l'élément de $\widetilde{P}_\nu$ égal à a_i pour $i \in J_\nu$; cet élément s'appelle la <u>projection</u> de a_i sur $\widetilde{P}_\nu$.

D'autre part, P est isomorphe à

$$\widetilde{P} = \prod_{\nu \in N} \widetilde{P}_\nu$$

et par définition même, l'ensemble des α_ν est $\widetilde{P}$, il y a donc correspondance biunivoque entre P et Π_I . Les formules (25) et (26) prouvent que le produit quelconque est associatif à une isomorphie près .

Les ensembles $\widetilde{P}_\nu$ peuvent être assimilés à un système d'axes coordonnés d'origine a_i^0 . Plus spécialement, on peut prendre pour $\widetilde{P}_\nu$ les ensembles E_i eux-mêmes, ou plutôt des ensembles isomorphes ; il suffit de poser

$$N = I$$

et

$$J_i = \{i\}$$

ce qui donne bien une décomposition de I en classes, alors le produit partiel correspondant à J_i est isomorphe à E_i.

VII.-1 2.- Exponentiation

Supposons que toutes les parties E_i soient identiques à l'ensemble A lui-même. Le produit quelconque correspondant prend le nom d'expenentielle de base A et d'exposant I ; on le note

$$A^I$$

C'est l'ensemble des fonctions définies dans I et prenant leurs valeurs dans A. Supposons , en particulier, que A soit un ensemble à deux éléments, les fonctions à deux valeurs définies dans I sont les fonctions caractéristiques des diverses parties de I, (VI.1 1) et l'ensemble $\mathfrak{P}(I)$ de ces parties peut être mis en correspondance biunivoque avec le produit quelconque

$$2^I = \prod_{i \in I} E_i \qquad (27)$$

où tous les E_i sont identiques à l'ensemble à deux éléments.

Remarque.- Nous venons de constater qu'il y avait isomorphie relativement à la structure $\mathcal{E}$, entre les ensembles $\mathfrak{P}(I)$ et 2^I, ce dernier étant défini par l'équation (27) ; de même, nous avons montré plus haut (VII.1), qu'il y avait isomorphie, relativement à la même structure, entre l'ensemble $(A \times B)$ des couples $\{a,b\}$ d'éléments a de A et b de B, tel qu'il a été défini en (III.1) et le produit quelconque de A par B. Conformément aux conventions générales sur l'isomorphie, que nous avons indiquées en (V.1), nous considérerons comme identiques les ensembles 2^I et $\mathfrak{P}(I)$, d'une part, $(A \times B)$ et le produit quelconque de A par B, d'autre part, et nous leur donnerons le même nom ; nous appliquerons fréquemment cette convention dans la suite ; après ce qui a été dit et répété à ce sujet dans le présent chapitre, il sera inutile de le signaler chaque fois.

VIII.-1.- Résumé .

Insistons encore une fois sur les différents procédés de définition de structure que nous avons rencontrés dans ce chapitre .

1°) Induction : une structure étant définie dans un ensemble fondamental, il en résulte une structure dans toute partie de cet ensemble .

2°) Identification : une structure étant définie dans un ensemble fondamental, et une relation d'équivalence étant donnée entre éléments de cet ensemble, on en déduit, par identification, un ensemble quotient et une structure dans cet ensemble quotient.

3°) Produit de structures : deux structures étant données dans deux ensembles fondamentaux, respectivement, on en déduit une structure dans l'ensemble produit .

4°) Transport de structures par isomorphie: une correspondance biunivoque étant donnée entre deux ensembles fondamentaux, il est possible de transporter, moyennant cette correspondance, la structure de l'un des ensembles à l'autre; on dit alors qu'ils sont isomorphes relativement à leur structure commune .