ALGEBRE LINEAIRE

Rédaction n° 034 bis

Nombre de pages : 52

Nombre de feuilles : 52

Algèbre linéaire

Ur Redaktion

34 bis

J. D 2

A. 34. bis

ALGÈBRE LINÉAIRE.

§ 1. Modules.

Soit $\mathcal{M}$ un groupe abélien, écrit sous forme additive ; soit Ω un système d'éléments, appelés opérateurs, et supposons donnée une loi de composition (multiplication) qui fasse correspondre à tout couple formé d'un élément X de $\mathcal{M}$ et d'un élément a de Ω un élément aX de $\mathcal{M}$, appelé produit, cette multiplication satisfaisant à la condition suivante :

I. $\quad a(X + Y) = aX + aY. \qquad X, Y \in \mathcal{M}$; $a \in \Omega$.

Un opérateur a détermine ainsi une homomorphie de $\mathcal{M}$ dans lui-même.

L'ensemble d'un groupe abélien $\mathcal{M}$ et d'un tel système d'opérateurs Ω sera appelé un module $\mathcal{M}(\Omega)$.

Si un sous-groupe $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ est invariant par les opérateurs de Ω, il définit avec ce système d'opérateurs un module $\mathcal{N}(\Omega)$ appelé sous-module de $\mathcal{M}(\Omega)$.

En particulier, comme la multiplication des éléments de $\mathcal{M}$ par un entier n (positif, négatif ou nul) a un sens et satisfait à la condition I, tout groupe abélien $\mathcal{M}$ peut être considéré comme un module par rapport à tout système d'entiers. Tout sous-groupe de $\mathcal{M}$ est un sous-module par rapport à ce système d'entiers.

L'intersection de deux sous-modules d'un module $\mathcal{M}(\Omega)$ est encore un sous-module $\mathcal{N}(\Omega)$.

Soient $\mathcal{N}(\Omega)$ et $\mathcal{N}'(\Omega)$ deux sous-modules de $\mathcal{M}(\Omega)$ et soit $\mathcal{N}''$ la somme $(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$ des deux sous-groupes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$

de $\mathfrak{M}$. On sait que $\mathfrak{N}''$ est un sous-groupe de $\mathfrak{M}$.
Un élément quelconque X'' de $\mathfrak{N}''$ est la somme de deux éléments X et X' appartenant respectivement à $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$. Si a est un opérateur de Ω, l'élément aX'' est encore un élément de $\mathfrak{N}''$, car on a :

$$aX'' = a(X + X') = aX + aX' .$$

Donc $\mathfrak{N}''$ définit avec Ω un sous-module $\mathfrak{N}''(\Omega)$ qu'on appellera la <u>somme</u> de $\mathfrak{N}(\Omega)$ et $\mathfrak{N}'(\Omega)$. En particulier si l'intersection de $\mathfrak{N}(\Omega)$ et $\mathfrak{N}'(\Omega)$ se réduit à l'élément 0, le sous-module $\mathfrak{N}''(\Omega)$ est appelé <u>somme directe</u> de $\mathfrak{N}(\Omega)$ et $\mathfrak{N}'(\Omega)$. On écrit alors : $\mathfrak{N}''(\Omega) = \mathfrak{N}(\Omega) + \mathfrak{N}'(\Omega)$.
Dans ce cas, tout élément de $\mathfrak{N}''(\Omega)$ peut être représenté d'une façon unique comme somme de deux éléments appartenant respectivement à $\mathfrak{N}$ et à $\mathfrak{N}'$. En effet, supposons qu'on ait :

$$X + X' = Y + Y' , \qquad X, Y \in \mathfrak{N}, \quad X', Y' \in \mathfrak{N}'$$

Il en résulte :

$$X - Y = Y' - X'$$

L'élément $X - Y$ appartient donc à la fois à $\mathfrak{N}$ et à $\mathfrak{N}'$ et se confond ainsi avec l'élément 0. Donc $X = Y$, $X' = Y'$.

Etant donnés h modules $\mathfrak{N}_1(\Omega), \ldots, \mathfrak{N}_h(\Omega)$, on peut toujours définir un module $\mathfrak{N}(\Omega)$ appelé somme directe $\mathfrak{N}_1(\Omega) + \ldots + \mathfrak{N}_h(\Omega)$. Un élément X de $\mathfrak{N}(\Omega)$ sera l'ensemble de h éléments $[X_1, X_2, \ldots, X_h]$, où $X_i \in \mathfrak{N}_i(\Omega)$.
La somme de deux éléments $[X_1, \ldots, X_h]$ et $[Y_1, \ldots, Y_h]$ sera par définition l'élément $[X_1 + Y_1, \ldots, X_h + Y_h]$. Le produit de $[X_1, \ldots, X_h]$ par un élément a de Ω sera par définition $[aX_1, \ldots aX_h]$

On peut identifier l'élément $\left[0,\dots,X_i,\dots,0\right]$ avec X_i. L'élément $\left[X_1,\dots, X_h\right]$ peut alors s'écrire $X_1+\dots+X_h$. Les modules $\mathcal{N}_i(\Omega)$ seront dans ces conditions des sous modules de $\mathcal{N}(\Omega)$.

Une <u>homomorphie</u> d'un module $\mathcal{M}(\Omega)$ <u>dans</u> un module $\overline{\mathcal{M}}(\Omega)$ est une correspondance associant à tout élément X de $\mathcal{M}(\Omega)$ un élément $f(X)$ de $\overline{\mathcal{M}}(\Omega)$ tel que :

$$f(X+Y) = f(X) + f(Y) \quad ; \qquad X, Y \in \mathcal{M}(\Omega) \; ;$$
$$f(aX) = af(X) \; . \qquad a \in \Omega \; .$$

Les relations précédentes montrent que l'ensemble des éléments $f(X)$ forme un sous-module $\overline{\overline{\mathcal{M}}}(\Omega)$ et que l'ensemble des éléments X de $\mathcal{M}(\Omega)$ tels que $f(X) = 0$ forme un sous-module $\mathcal{N}(\Omega)$ de $\mathcal{M}(\Omega)$. La correspondance considérée sera appelée une homomorphie de $\mathcal{M}(\Omega)$ <u>sur</u> $\overline{\overline{\mathcal{M}}}(\Omega)$. Nous dirons aussi que $\overline{\overline{\mathcal{M}}}(\Omega)$ est <u>homomorphe</u> à $\mathcal{M}(\Omega)$.

Pour que deux éléments X et X' de $\mathcal{M}(\Omega)$ aient la même image dans $\overline{\mathcal{M}}(\Omega)$ il faut et il suffit que leur différence $X'-X$ appartienne à $\mathcal{N}(\Omega)$. Pour que la correspondance entre $\mathcal{M}(\Omega)$ et $\overline{\overline{\mathcal{M}}}(\Omega)$ soit biunivoque il faut et il suffit que $\mathcal{N}(\Omega)$ se réduise à l'élément 0. Une homomorphie biunivoque s'appelle une <u>isomorphie</u>.

L'homomorphie f définit une répartition des éléments de $\mathcal{M}(\Omega)$ en classes de congruence, chaque classe étant l'image inverse dans $\mathcal{M}(\Omega)$ d'un élément de $\overline{\overline{\mathcal{M}}}(\Omega)$; deux éléments X et X' appartiennent à une même classe lorsque $(X'-X) \in \mathcal{N}(\Omega)$. Réciproquement, soit $\mathcal{N}(\Omega)$ un sous-module quelconque de $\mathcal{M}(\Omega)$. Deux éléments X et X' de $\mathcal{M}(\Omega)$ seront dits congrus modulo $\mathcal{N}$, ce qu'on écrira

5

$$X' \equiv X \pmod{\mathfrak{N}},$$

lorsque $X'-X \in \mathfrak{N}$. On définit ainsi dans $\mathfrak{M}(\Omega)$ une relation de congruence invariante par les opérateurs de Ω ; car les deux congruences :

$$X' \equiv X \qquad (\text{mod. } \mathfrak{N}),$$
$$Y' \equiv Y \qquad (\text{mod. } \mathfrak{N})$$

entraînent les congruences :

$$X' + Y' \equiv X + Y \qquad (\text{mod. } \mathfrak{N}),$$
$$a\,X' \equiv a\,X \qquad (\text{mod. } \mathfrak{N}).$$

La classe des éléments congrus à X modulo $\mathfrak{N}$ étant désignée par X^*, nous pouvons donc définir dans l'ensemble des classes X^* deux lois de composition par les formules :

$$X^* + Y^* = (X + Y)^*,$$
$$a\,X^* = (a\,X)^*$$

L'ensemble des classes X^* ainsi structuré est un module par rapport à Ω qu'on appellera le module quotient $\mathfrak{M}(\Omega)/\mathfrak{N}(\Omega)$. La correspondance définie par $X^* = f(X)$ est une homomorphie de $\mathfrak{M}/\Omega$ sur $\mathfrak{M}(\Omega)/\mathfrak{N}(\Omega)$. Ce qui précède permet d'énoncer le théorème suivant :

<u>Tout module</u> $\overline{\mathfrak{M}}(\Omega)$ <u>homomorphe à un module</u> $\mathfrak{M}(\Omega)$ <u>est isomorphe à un module quotient</u> $\mathfrak{M}(\Omega)/\mathfrak{N}(\Omega)$.

Dans une application homomorphe d'un module $\mathfrak{M}$ sur un module $\overline{\mathfrak{M}}$,[1] tout sous-module $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{M}$ est appliqué sur un sous-module $\overline{\mathfrak{H}}$ de $\overline{\mathfrak{M}}$, et réciproquement l'image inverse de tout sous module $\overline{\mathfrak{H}}$ de $\overline{\mathfrak{M}}$ est un sous-module de $\mathfrak{M}$. Si le sous-module $\mathfrak{H}$

---

[1] Nous considérons à partir d'ici des modules par rapport à un même système d'opérateurs.

est appliqué sur le sous-module $\overline{\mathcal{H}}$ de $\overline{\mathfrak{M}}$ l'image inverse de $\mathcal{H}$ est la somme $(\mathcal{H}, \mathfrak{N})$, en désignant par $\mathfrak{N}$ l'image inverse de l'élément 0 de $\overline{\mathfrak{M}}$. Les images inverses de l'élément 0 de $\overline{\mathfrak{M}}$ dans $(\mathcal{H}, \mathfrak{N})$ et dans $\mathcal{H}$ sont respectivement $\mathfrak{N}$ et $\mathcal{H} \cap \mathfrak{N}$.

On a donc le résultat suivant :

<u>$\mathcal{H}$ et $\mathfrak{N}$ étant deux sous-modules de $\mathfrak{M}$, on a</u>

$$(\mathcal{H}, \mathfrak{N})/_{\mathfrak{N}} \cong \mathcal{H}/_{(\mathcal{H} \cap \mathfrak{N})}.$$

(Le symbole $\cong$ désigne la relation d'isomorphie).

Considérons encore une application homomorphe de $\mathfrak{M}$ sur $\overline{\mathfrak{M}}$ suivie d'une application homomorphe de $\overline{\mathfrak{M}}$ sur $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$. Soit $\overline{\mathcal{H}}$ l'image inverse dans $\overline{\mathfrak{M}}$ de l'élément 0 de $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ et $\mathcal{H}$ l'image inverse de $\overline{\mathcal{H}}$ dans $\mathfrak{M}$. Le module $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ sera isomorphe à $\mathfrak{M}/\mathcal{H}$ et à $\overline{\mathfrak{M}}/\overline{\mathcal{H}}$. En appelant $\mathfrak{N}$ l'image inverse dans $\mathfrak{M}$ de l'élément 0 de $\overline{\mathfrak{M}}$, le module $\overline{\mathfrak{M}}$ est isomorphe à $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ tandis que $\overline{\mathcal{H}}$ est isomorphe à $\mathcal{H}/\mathfrak{N}$. Il en résulte l'énoncé suivant :

<u>Si $\mathcal{H}$ est un sous-module de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ un sous-module de $\mathcal{H}$, on a</u>

$$\mathfrak{M}/_{\mathcal{H}} \cong (\mathfrak{M}/\mathfrak{N})/(\mathcal{H}/\mathfrak{N})$$

§ 2. <u>Espace vectoriel par rapport à un corps.</u>

On appelle <u>espace vectoriel par rapport à un corps $\mathfrak{K}$</u>, supposé commutatif ou non commutatif, un module $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})$ dont les opérateurs sont les éléments de $\mathfrak{K}$ et dont les lois de composition satisfont en plus de l'axiome

I. $\quad a(X + Y) = a\,X + a\,Y$

aux axiomes suivants :

$$\text{II}_a.\quad (a+b)\, X = a\, X + b\, X$$

$$\text{II}_b.\quad a(b\, X) = (a\, b)X$$

$$\text{II}_c.\quad 1.X = X$$

$X, Y \in \mathfrak{M}(\mathfrak{K})$; $a, b \in \mathfrak{K}$; 1 = élément unité de $\mathfrak{K}$.

Les éléments de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})$ sont appelés vecteurs. Les axiomes II_a et II_b entraînent la loi générale de distributivité :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right).\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i,j} a_i\, X_j$$

En désignant par 0 l'élément nul de $\mathfrak{M}$ ainsi que celui de $\mathfrak{K}$, les axiomes I et II_a entraînent :

$$a.0 = 0 \quad ; \qquad 0.\, X = 0\ .$$

De plus l'équation $a\, X = 0$ entraîne au moins l'une des égalités $a = 0$ ou $X = 0$. En effet, supposons a différent de 0 et soit $\overset{-1}{a}$ l'élément inverse de a . On aura :

$$\overset{-1}{a}\,(a\, X) = (\overset{-1}{a}\, a)\, X = 1.X = X$$

Donc $a\, X = 0$ entraîne $X = 0$.

Exemple 1. Soit $\mathfrak{K}^*$ un surcorps du corps $\mathfrak{K}$. Ce surcorps peut être considéré comme un espace vectoriel par rapport à $\mathfrak{K}$, les lois de composition étant l'addition définie dans $\mathfrak{K}^*$ et la multiplication définie dans $\mathfrak{K}^*$ d'un élément de $\mathfrak{K}$ par un élément de $\mathfrak{K}^*$.

Exemple 2. Soit un corps $\mathfrak{K}$ et un ensemble I et soit $\mathfrak{K}^I$ l'ensemble des fonctions dont chacune est définie pour tous les éléments de I et prend ses valeurs dans $\mathfrak{K}$. Si f et φ sont deux fonctions de cet ensemble, soient f_i et φ_i leurs valeurs correspondans à l'élément i de I. La fonction ψ qui fait correspondre à tout élément i de I l'élément $f_i + \varphi_i$ de $\mathfrak{K}$ appartient à l'ensemble $\tilde{\mathcal{R}}^I$ et s'appelle la somme $f + \varphi$ des deux fonctions données. La fonction qui fait correspondre à tout élément i de I l'élément $c\, f_i$ de $\tilde{\mathcal{R}}$, où c est un élément de $\tilde{\mathcal{R}}$, s'appelle le produit $c\, f$. Nous avons ainsi définie une addition entre éléments de $\tilde{\mathcal{R}}^I$ et une multiplication entre éléments de $\tilde{\mathcal{R}}^I$ et éléments de $\tilde{\mathcal{R}}$. On vérifie facilement que l'ensemble $\tilde{\mathcal{R}}^I$ structuré par ces deux lois de composition est bien un espace vectoriel par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$. Le vecteur 0 est la fonction qui fait correspondre à tout élément i la valeur 0.

En particulier, si I est l'ensemble des nombres $1, 2, \ldots, n$, on a défini ainsi un espace vectoriel qu'on désignera par $\tilde{\mathcal{R}}^n$ et dont chaque élément peut être représenté par l'ensemble de n éléments $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ de $\tilde{\mathcal{R}}$.

Un sous-module $\mathcal{N}(\tilde{\mathcal{R}})$ d'un espace vectoriel $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{R}})$ est appelé <u>sous-espace</u>. Les lois de composition induites sur $\mathcal{N}(\tilde{\mathcal{R}})$ vérifient évidemment tous les axiomes I et II. Donc tout sous-espace de $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{R}})$ est un espace vectoriel par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$. L'intersection ainsi que la somme de deux sous-espaces sont également des sous-espaces. La somme directe de h espaces vectoriel par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$, définie comme dans le cas des modules quelconques, est encore un espace vectoriel par rapport à $\tilde{\mathcal{R}}$. Ainsi l'espace vectoriel $\tilde{\mathcal{R}}^n$ est la somme directe de n espaces vectoriels identiques à $\tilde{\mathcal{R}}$.

<u>Exemple 3</u>. L'espace vectoriel $\tilde{\mathcal{R}}^I$ contient un sous-espace $\tilde{\mathcal{R}}_I$ dont les éléments sont les fonctions telles que, pour chacune d'elles, il n'y ait qu'un nombre fini d'éléments de I correspondant

à des éléments de $\mathcal{K}$ différents de 0. Si I est un ensemble fini, $\mathcal{K}^I$ et $\mathcal{K}_I$ sont identiques.

<u>Exemple 4</u>. Plus généralement, si $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel par rapport à $\mathcal{K}$, on définit d'une façon analogue $\mathcal{M}^I$ et $\mathcal{M}_I$.

D'ailleurs, si $\mathcal{M}$ est un module quelconque, on peut définir de même des modules $\mathcal{M}^I$ et $\mathcal{M}_I$ par rapport au même système d'opérateurs.

Une <u>homomorphie</u> d'un espace vectoriel $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ dans un espace vectoriel $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$, telle qu'elle a été définie pour le cas des modules quelconques, s'appelle aussi une <u>transformation linéaire</u> ou <u>application linéaire</u> de $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ dans $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$, ou encore une <u>fonction linéaire</u> définie dans $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ et prenant ses valeurs dans $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$. L'image de $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ dans $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$ est un sous-espace $\overline{\overline{\mathcal{M}}}(\mathcal{K})$ de $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$. L'image inverse dans $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ de l'élément 0 de $\overline{\mathcal{M}}(\mathcal{K})$ est un sous-espace $\mathcal{N}(\mathcal{K})$. Si $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ est un sous-espace quelconque de $\mathcal{M}(\mathcal{K})$, on vérifie facilement que le module quotient $\mathcal{M}(\mathcal{K})/\mathcal{N}(\mathcal{K})$ défini dans le paragraphe précédent est un espace vectoriel par rapport à $\mathcal{K}$; on l'appelle espace quotient $\mathcal{M}(\mathcal{K})/\mathcal{N}(\mathcal{K})$.

<u>Tout espace vectoriel homomorphe à un espace vectoriel</u> $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ <u>est isomorphe à un espace quotient</u> $\mathcal{M}(\mathcal{K})/\mathcal{N}(\mathcal{K})$.

On est amené à considérer également une autre espèce d'homomorphie Nous appellerons <u>hyperhomomorphie</u> ou <u>transformation hyperlinéaire</u> d'un espace vectoriel $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ dans un espace vectoriel $\overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{K}})$ une correspondance associant à tout élément X de $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ un élément $\overline{X}$ de $\overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{K}})$ et à tout élément a de $\mathcal{K}$ un élément $\overline{a}$ de $\overline{\mathcal{K}}$ tel qu'on ait :

$$\overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y} \,,$$

$$\overline{aX} = \bar{a}\,\overline{X} \,.$$

En tenant compte des axiomes I et II, on obtient :

$$(\overline{a+b})\,\overline{X} = \overline{(a+b)X} = \overline{aX+bX} = \overline{aX} + \overline{bX} = \bar{a}\overline{X} + \bar{b}\overline{X} = (\bar{a} + \bar{b})\,\overline{X}$$

D'où l'on tire :

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$$

D'autre part :

$$\overline{ab}\,\overline{X} = \overline{(ab)X} = \overline{a(bX)} = \bar{a}\,\overline{bX} = \bar{a}\,(\bar{b}\,\overline{X}) = (\bar{a}\,\bar{b})\,\overline{X} \,;$$

d'où l'on tire :

$$\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}$$

La correspondance $a \longrightarrow \bar{a}$ est donc une homomorphie du corps $\mathcal{K}$ sur le corps $\overline{\mathcal{K}}$. En supposant que l'image de $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ ne se réduise pas à l'élément 0 de $\overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{K}})$, les élément a ne peuvent pas être tous nuls. Par suite la correspondance $a \longrightarrow \bar{a}$ est une isomorphie entre $\mathcal{K}$ et $\overline{\mathcal{K}}$. (Voir chapitre : Corps). Nous pouvons donc supposer que les deux espaces vectoriels aient le même domaine d'opérateurs $\mathcal{K}$. Une transformation hyperlinéaire de $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ dans $\overline{\mathfrak{M}}(\mathcal{K})$ entraîne alors une <u>automorphie</u> $a \rightleftarrows \bar{a}$ de $\mathcal{K}$ en lui-même.

On vérifie facilement que dans toute transformation linéaire ou hyperlinéaire les images directes ou inverses d'un sous-espace sont des sous-espaces.

(De préférence il faudrait faire l'étude des transformations de $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ dans $\overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{K}})$ telles que tout sous-espace de $\mathfrak{M}(\mathcal{K})$ ait pour image un sous-espace de $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{K}})$. On voit facilement que toute transformation de cette nature qui satisfait en outre à la condition $\overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

est une transformation hyperlinéaire, pourvu que les vecteurs images $\overline{X}$ ne soient pas tous des multiples de l'un d'entre eux).

<u>Espace vectoriel avec multiplication à droite</u>.

Soit $\mathfrak{K}$ un corps <u>non commutatif</u>. Un module $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})$ sera appelé <u>espace vectoriel par rapport à $\mathfrak{K}$ avec multiplication à droite</u> lorsque le produit d'un élément a de $\mathfrak{K}$ par un élément X de $\mathfrak{M}(\mathfrak{K})$ est représenté par Xa et satisfait aux conditions suivantes :

I'	$(X + X')a = Xa + X'a$
II'_a	$X(a + b) = Xa + Xb$
II'_b	$(Xa)b = X(ab)$
II'_c	$X.1 = X$

L'axiome II'_b ne se déduit pas de II_b par un simple changement de notation ; car si on écrit Xa à la place de aX, l'axiome II_b devient

$$(Xb)a = X(ab).$$

Donc un espace vectoriel avec multiplication à droite n'est pas équivalent à un espace vectoriel avec multiplication à gauche lorsque $\mathfrak{K}$ est non commutatif. Mais tous les théorèmes qu'on vient de démontrer sont valables dans les deux cas.

§ 3. <u>Base, dimension, équations linéaires</u>.

Soit $\mathfrak{M}$ un module par rapport à un système d'opérateurs Ω et S une partie de l'ensemble $\mathfrak{M}$. L'intersection de tous les sous-modules de $\mathfrak{M}$ qui contiennent S est un sous-module $\mathfrak{N}$ qui sera dit <u>engendré</u> par S ; l'ensemble S sera appelé un <u>système de générateurs de</u> S .

Supposons que $\mathfrak{M}$ soit un espace vectoriel par rapport à un corps $\mathfrak{K}$. On voit alors qu'on a la propriété suivante :

Le sous-espace engendré par le système générateurs S se compose de l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{i=1}^{r} a_i X_i$, où les X_i sont des éléments de S en nombre fini, les a_i étant éléments de $\mathfrak{K}$.

Un élément X est dit linéairement dépendant des éléments $X_1, \ldots, X_r$ lorsqu'il peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{r} a_i X_i$, ce qui équivaut à l'existence d'une relation linéaire

$$aX + \sum_{i=1}^{r} a_i X_i = 0$$

les éléments a et a_i de $\mathfrak{K}$ n'étant pas tous nuls. Si par contre il n'existe aucune relation de cette espèce, les éléments $X, X_1, \ldots, X_r$ sont dits linéairement indépendants. De même s'il n'existe aucune relation linéaire entre un nombre fini d'éléments appartenant à S, on dit que S est un système d'éléments linéairement indépendants.

Définition : Un système de générateurs S d'un espace vectoriel $\mathfrak{N}$ sera appelé une base de $\mathfrak{N}$, si toute partie de S qui ne contient pas tous les éléments de S n'est plus un système de générateurs de $\mathfrak{N}$.

Pour qu'un système de générateurs de $\mathfrak{N}$ soit une base de $\mathfrak{N}$, il faut et il suffit qu'il soit formé d'éléments linéairement indépendants.

En effet, soit S une base de $\mathfrak{N}$ et soit X un élément quelconque de S. L'ensemble S' formé de tous les éléments de S sauf X engendre un sous-espace $\mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{N}$. L'élément X n'appartient pas à $\mathfrak{N}'$, car $\mathfrak{N}'$ ne peut pas contenir toute la base S.

Donc X n'est pas une combinaison linéaire d'éléments appartenant à S', c'est-à-dire il n'y a aucune relation linéaire entre les éléments de S. Réciproquement, soit S un système d'éléments linéairement indépendants engendrant l'espace $\mathcal{H}$ et soit S' une partie de S. Un élément X de S qui n'appartient pas à S' ne peut pas appartenir au sous-espace $\mathcal{H}'$ engendré par S', car X n'est pas une combinaison linéaire d'éléments de S'. Donc S' n'est pas un système de générateurs de $\mathcal{H}$ et par suite S est une base de $\mathcal{H}$.

<u>Si l'espace vectoriel $\mathcal{H}$ admet une base B, tout élément de $\mathcal{H}$ s'exprime d'une façon et d'une seule comme une combinaison linéaire d'éléments appartenantuà B</u> .

En effet, soit I un ensemble dont les éléments correspondent d'une façon biunivoque aux éléments de B. Appelons e_i l'élément de B correspondant à l'élément i de I. Comme B est une base de $\mathcal{H}$, tout vecteur X de $\mathcal{H}$ se met sous la forme

$$X = \sum_{i \in I} x_i e_i \, , \qquad x_i \in \mathcal{R} \, ,$$

où tous les éléments x_i, à l'exception d'un nombre fini, sont égaux à 0. Comme les éléments de B sont linéairement indépendants, on ne peut pas avoir une égalité de la forme :

$$X = \sum_{i \in I} x_i e_i = \sum_{i \in I} x_i' e_i \, ,$$

sauf si $x_i' = x_i$ quel que soit i. On dit que les éléments x_i forment un système de coordonnées du vecteur X. Ceci montre aussi que les vecteurs X sont en correspondance biunivoque avec les éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{R}_I$ (§ 2, exemple 3). <u>L'espace $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathcal{R}_I$</u> . En particulier si B est une base finie, c'est-à-dire composée d'un nombre fini d'éléments $e_1, e_2, \dots, e_n$, tout vecteur X de $\mathcal{H}$ se met sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

et l'espace $\mathcal{N}$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{R}^n$.

<u>Il existe, à une isomorphie près, un espace vectoriel par rapport à $\mathcal{R}$ qui possède une base de même puissance qu'un ensemble donné</u> I.

En effet, l'espace $\mathcal{R}_I$ possède bien une base de même puissance que I. Soit e_i la fonction qui fait correspondre à l'élément i de I l'élément 1 de $\mathcal{R}$ et à tout autre élément de I l'élément 0 de $\mathcal{R}$. L'ensemble de ces fonctions e_i forme une base de $\mathcal{R}_I$. D'autre part, nous venons de montrer que tout espace vectoriel qui admet une base de même puissance que I est isomorphe à $\mathcal{R}_I$.

Les théorèmes qui suivent concernent les espaces vectoriels admettant un système fini de générateurs.

<u>De tout système fini de générateurs de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ on peut extraire une base de</u> $\mathcal{M}$.

Soient $e_1, \ldots, e_r$, les éléments d'un système de générateurs de $\mathcal{M}$. S'ils sont linéairement indépendants, ils forment une base de $\mathcal{M}$. Supposons qu'ils ne soient pas linéairement indépendants. Dans la suite des vecteurs $e_1, \ldots, e_r$ supposons les vecteurs $e_1, \ldots, e_i$ linéairement indépendants, le vecteur e_{i+1} étant supposé linéairement dépendant de $e_1, \ldots, e_i$. En supprimant e_{i+1} dans la suite des générateurs, on obtient un nouveau système de générateurs de $\mathcal{M}$. On répète le raisonnement précédent sur ce nouveau système de générateurs. Après un nombre fini de pas on arrive à un système de générateurs formé de n éléments linéairement indépendants. Ce sera une base de $\mathcal{M}$.

<u>Si</u> $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ <u>est une base de l'espace vectoriel</u> $\mathfrak{M}$ <u>et si</u> $X_1\ X_2, \dots, X_p$ <u>sont p vecteurs linéairement indépendants appartenant à</u> $\mathfrak{M}$, <u>on a forcément</u> $p \leqslant n$ <u>et on peut trouver une nouvelle base formée par</u> $X_1, X_2, \dots, X_p$ <u>et par</u> n-p <u>éléments de la base</u> $[e_1, e_2, \dots, e_n]$

Pour démontrer ce théorème, nous procédons par récurrence suivant p. Supposons $p \leqslant n$ et supposons qu'on ait trouvé une base formée par p-1 vecteurs linéairement indépendants $X_1, X_2, \dots, X_{p-1}$ et par n-p+1 vecteurs de la base donnée. Soit $[X_1, \dots, X_{p-1}, e_p, \dots, e_n]$ cette nouvelle base. Tout vecteur X_p peut se mettre sous la forme :

$$(1) \qquad X_p = \sum_{i=1}^{p-1} a_i X_i + \sum_{j=p}^{n} b_j e_j \ .$$

Si X_p est linéairement indépendant de $X_1, \dots, X_{p-1}$ les éléments b_j ne peuvent pas être tous différents de 0. Supposons $b_p \neq 0$. En multipliant la relation précédente par b_p^{-1}, on peut exprimer e_p sous forme de combinaison linéaire des vecteurs $X_1, \dots, X_{p-1}, X_p, e_{p+1}, \dots, e_n$. Ces derniers vecteurs forment donc un système de générateurs de $\mathfrak{M}$. De plus ils sont linéairement indépendants, sinon X_p serait une combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_{p-1}, e_{p+1}, \dots, e_n$; c'est-à-dire b_p serait nul, ce qui est contraire à notre hypothèse. Donc $[X_1, \dots, X_p, e_{p+1}, \dots, e_n]$ forme une base de $\mathfrak{M}$.

Il importe de remarquer que le changement de base peut se faire effectivement lorsque les vecteurs $X_1, \dots, X_p$ sont donnés sous forme de combinaisons linéaires de $e_1, \dots, e_n$; c'est-à-dire on pourra alors exprimer effectivement les éléments $e_1, \dots, e_p$ sous forme de combinaisons linéaires des éléments de la nouvelle base $[X_1, \dots, X_p\ , e_{p+1}, \dots, e_n]$. En effet, supposons $e_1, \dots, e_{p-1}$ déjà exprimés sous forme de combinaisons linéaires de $X_1\ X_2, \dots, X_{p-1}, e_p, \dots, e_n$.

Alors X_p peut se mettre sous la forme (1) et on pourra exprimer e_p, et par suite aussi $e_1,\dots,e_{p-1}$, sous forme de combinaisons linéaires des éléments de la nouvelle base $[X_1,\dots,X_p, e_{p+1},\dots,e_n]$.

En particulier, n vecteurs linéairement indépendants forme une nouvelle base de $\mathfrak{M}$ et il en résulte qu'on ne peut trouver plus de n vecteurs linéairement indépendants.

Le théorème qu'on vient de démontrer a de nombreuses applications. Enonçons d'abord le corollaire suivant :

Si l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$ admet une base finie formée de n éléments, toute base de $\mathfrak{M}$ est formée de n éléments.

Ce corollaire justifie la définition suivante : Si un espace vectoriel admet une base finie formée de n éléments, on dit qu'il est de dimension n ; si l'espace vectoriel n'admet pas de base finie on dit qu'il est de dimension infinie.

Tout sous-espace $\mathfrak{N}$ d'un espace vectoriel $\mathfrak{M}$ de dimension n est de dimension inférieure à n, à moins qu'il ne soit confondu avec $\mathfrak{M}$

En effet $\mathfrak{N}$ est évidemment engendré par un système fini d'éléments de $\mathfrak{M}$. On peut en extraire une base de $\mathfrak{N}$ formée de p éléments $X_1,\dots,X_p$ et on a $p \leqslant n$. Si $p = n$, $\mathfrak{N}$ est confondu avec $\mathfrak{M}$.

On peut adjoindre à $X_1,\dots,X_p$ des éléments $Y_1,\dots,Y_{n-p}$ tels que $[X_1,\dots,X_p, Y_1,\dots,Y_{n-p}]$ soit une base de $\mathfrak{M}$. Les vecteurs $Y_1,\dots,Y_{n-p}$ forment une base d'un sous-espace $\mathfrak{N}'$. L'espace $\mathfrak{M}$ est la somme directe des sous-espaces $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$. Donc :

Etant donné un espace vectoriel $\mathfrak{M}$ de dimension finie n, à tout sous-espace $\mathfrak{N}$ on peut adjoindre un sous-espace $\mathfrak{N}'$ tel que $\mathfrak{M}$ soit la somme directe $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$; de plus on a :

$$\text{dimension } \mathfrak{M} = \text{dimension } \mathfrak{N} + \text{dimension } \mathfrak{N}'.$$

L'espace-quotient $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ est évidemment isomorphe à $\mathfrak{N}'$. Donc :

$$\text{dimension } \mathfrak{N} + \text{dimension } \mathfrak{M}/\mathfrak{N} = \text{dimension } \mathfrak{M} .$$

Soient $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}_1$ deux sous-espaces quelconques de $\mathfrak{M}$ et considérons leur intersection $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1$ et leur somme $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_1$. En adjoignant à une base de $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1$ des vecteurs convenablement choisis de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}_1$, on obtient des bases pour $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$ et $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$. Par suite :

$$\text{dimension } \mathfrak{N} + \text{dimension } \mathfrak{N}' = \text{dimension } (\mathfrak{N}, \mathfrak{N}') + \text{dimension } (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}').$$

<u>Résolution d'un système d'équations linéaires.</u>

Considérons un système d'équations linéaires de la forme :

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i , \qquad i = 1,2,\ldots,p ,$$

où a_{ik} et b_i sont des éléments d'un corps $\mathcal{K}$. Ce système s'appelle système d'équations linéaires à n inconnues. Une solution du système est un ensemble de n éléments $x_1,\ldots,x_n$ de $\mathcal{K}$ qui vérifient les équations données. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{K}^p$, avec multiplication à droite, de base $[e_1, e_2, \ldots, e_p]$, et introduisons les vecteurs

$$A_k = \sum_{i=1}^{p} e_i \, a_{ik} , \qquad k = 1,2,\ldots,n .$$
$$B = \sum_{i=1}^{p} e_i \, b_i$$

Le système (2) équivaut alors à l'équation vectorielle :

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k \, x_k = B .$$

Trouver une solution revient à mettre le vecteur B sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $A_1,\ldots,A_n$. Ces derniers vecteurs engendrent un sous-espace $\mathcal{K}^r$. On effectuera des changements de base successifs, remplaçant d'abord par A_1 un des vecteurs de la base $\left[e_1, \ldots, e_p\right]$, par exemple e_1, et en exprimant ce vecteur e_1 ainsi que $A_2, \ldots, A_n$ en fonction linéaire des éléments de la nouvelle base $\left[A_1, e_2, \ldots, e_p\right]$. On remplacera de la même façon un deuxième vecteur, soit e_2, par un des vecteurs $A_2, \ldots, A_n$. On continuera de la même façon jusqu'à ce qu'on ait obtenu une base, par exemple $\left[A_1, \ldots, A_r, e_{r+1}, \ldots, e_p\right]$, telle que les vecteurs $A_{r+1}, \ldots, A_n$ soient des combinaisons linéaires de $A_1, \ldots, A_r$:

$$A_h = \sum_{i=1}^{r} A_i \, \alpha_{ki} \quad , \qquad h = r+1, \ldots, n .$$

Les vecteurs $A_1, \ldots, A_r$ forment alors une base de $\mathcal{A}^r$. On exprimera aussi le vecteur B en fonction linéaire de $\left[A_1, \ldots, A_r, e_{r+1}, \ldots e_p\right]$. Pour que l'équation (3) admette une solution, il faut que le vecteur B appartienne à $\mathcal{A}^r$, c'est-à-dire qu'il dépende linéairement de $A_1, \ldots, A_r$ seulement : $B = \sum_{i=1}^{r} A_i \, \beta_i$

Cette condition est suffisante.

Si elle est remplie, le vecteur $B - \sum_{h=r+1}^{n} A_h x_h$, où les éléments $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sont des éléments <u>arbitraires</u> de $\mathcal{A}$, pourra se mettre sous la forme $\sum_{i=1}^{r} A_i x_i$:

$$B - \sum_{h=r+1}^{n} A_h x_h = \sum_{i=1}^{r} A_i\Big(\beta_i - \sum_{h=r+1}^{n} \alpha_{hi} x_h\Big) = \sum_{i=1}^{r} A_i x_i \; ,$$

$$x_i = \beta_i - \sum_{h=r+1}^{n} \alpha_{hi} \, x_h .$$

Les éléments $x_1, \ldots, x_r$ ainsi déterminés formeront avec les éléments $x_{r+1}, \ldots, x_n$ donnés arbitrairement la solution générale du système (2) Le nombre r s'appelle le <u>rang</u> du système d'équations linéaires. La solution générale contient $n-r$ éléments arbitraires. Si $B = 0$, le système est toujours compatible ; mais si de plus $r = n$, il n'admet que la solution $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Une méthode de résolution un peu différente sera donnée au paragraphe suivant. Des formules de résolution explicites seront indiquées pour le cas d'un corps commutatif au paragraphe :Déterminant

§ 4. Espace dual, relations de dualité.

Soit $\mathfrak{M}$ un espace vectoriel par rapport à un corps $\mathfrak{K}$, avec multiplication à droite. Soit $\mathfrak{M}^*$ l'ensemble des fonctions linéaires définies dans $\mathfrak{M}$ et prenant leurs valeurs dans $\mathfrak{K}$. Une telle fonction linéaire s'appellera également une forme linéaire définie dans $\mathfrak{M}$. Soit x un élément de $\mathfrak{M}$ et u un élément de $\mathfrak{M}^*$. Nous désignons pas ux la valeur de la fonction linéaire u correspondant au vecteur x . Par hypothèse on a :

$$(1) \qquad \begin{aligned} u(x + x') &= ux + ux' \\ u(xa) &= (ux)\,a \end{aligned}$$

quel que soit l'élément a de $\mathfrak{K}$. Dans l'ensemble $\mathfrak{M}^*$ on peut définit une addition entre éléments de $\mathfrak{M}^*$ et une multiplication à gauche par un élément quelconque de $\mathfrak{K}$. En effet désignons par u + u' la fonction qui fait correspondre à tout élément x de $\mathfrak{M}$ l'élément ux + u'x et posons :

$$(2) \qquad ux + u'x = (u + u')\,x .$$

La fonction u + u' est bien un élément de $\mathfrak{M}^*$; car de (1) et (2) on déduit

$$(u+u')(x+x') = u(x+x')+u'(x+x') = ux+ux'+u'x+u'x' = (u+u')x+(u+u')x' ,$$

$$(u+u')(xa) = u(xa)+u'(xa) = (ux)a+(u'x)a = (ux+u'x)a = \big[(u+u')x\big]\,a .$$

De même désignons par a u la fonction qui fait correspondre à tout x l'élément a(ux) de $\mathfrak{K}$ et posons :

$$(3) \qquad (au)\,x = a(ux) .$$

La fonction a u est un élément de $\mathfrak{M}^*$, car on a les relations :

$$(au)(x+x') = a\big[u(x+x')\big] = a(ux+ux') = a(ux)+a(ux') = (au)x + (au)x' ,$$

$$(au)(x\,b) = a\big[u(xb)\big] = a\big[(ux)b\big] = \big[a(ux)\big]\,b = \big[(au)x\big]\,b .$$

l'ensemble $\mathcal{M}^*$ structuré par ces deux lois de composition est donc un espace vectoriel par rapport à $\mathcal{A}$ avec multiplication <u>à gauche</u>. Nous l'appellerons <u>l'espace dual</u> de $\mathcal{M}$. L'élément 0 de $\mathcal{M}^*$ est la forme linéaire u telle que $u\,x = 0$ quel que soit x.

Remarquons qu'il est impossible, si $\mathcal{A}$ n'est pas commutatif, de définir dans $\mathcal{M}^*$ une multiplication à <u>droite</u> satisfaisant à la condition : $(ua)x = (ux)\,a$.

Si $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel avec multiplication à <u>gauche</u>, on définit d'une façon analogue l'espace dual $\mathcal{M}^*$ qui sera un espace vectoriel avec multiplication à <u>droite</u>.

Supposons qu'une base de $\mathcal{M}$, avec une multiplication à droite, soit formée par les vecteurs e_i, où i est un élément quelconque d'un ensemble I. Tout vecteur x se met sous la forme

$$x = \sum_{i \in I} e_i\, x_i \,,$$

où il n'y a qu'un nombre fini d'éléments x_i différents de 0.

Une forme linéaire u fait correspondre à x la valeur :

$$ux = \sum_{i \in I} (u\, e_i)\, x_i$$

Posons : $\qquad ue_i = u_i \,.$

$$ux = \sum_{i \in I} u_i\, x_i$$

<u>Ceci montre qu'une forme linéaire u est complètement déterminée lorsqu'on se donne ses valeurs correspondant aux éléments d'une base de $\mathcal{M}$; ces valeurs peuvent être choisies arbitrairement.</u>

L'espace vectoriel donné est isomorphe à $\mathcal{A}_I$ avec multiplication à droite, et on voit que <u>l'espace dual</u> $\mathcal{M}^*$ <u>est isomorphe à $\mathcal{A}^I$ avec multiplication à gauche</u>.

Soit $\mathcal{M}^{**}$ l'espace dual de $\mathcal{M}^*$. A tout élément x de $\mathcal{M}$ correspond un élément x^{**} de $\mathcal{M}^{**}$; c'est la fonction linéaire qui fait correspondre à l'élément arbitraire u de $\mathcal{M}^*$ l'élément $u\,x$ de $\mathcal{Q}$. Comme il existe un élément e_i^* de $\mathcal{M}^*$ tel que

$$e_i^* x = x_i ,$$

on voit que le seul élément x tel que $u\,x = 0$, quel que soit u, est l'élément 0 de $\mathcal{M}$. Donc à deux éléments distincts x et x' de $\mathcal{M}$ correspondent deux éléments distincts de $\mathcal{M}^{**}$. Par suite nous pouvons identifier x et x^{**}, c'est-à-dire $\mathcal{M}$ peut être considéré comme un sous-espace de $\mathcal{M}^{**}$.

En particulier, considérons le cas important d'un espace vectoriel $\mathcal{M}$ de dimension finie n. L'espace dual $\mathcal{M}^*$ aura alors la même dimension n. Si $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{Q}^n$ avec multiplication à droite, $\mathcal{M}^{**}$ sera isomorphe à $\mathcal{Q}^n$ avec multiplication à gauche. Par suite $\mathcal{M}^{**}$ est isomorphe à $\mathcal{Q}^n$ avec multiplication à droite. En identifiant les éléments correspondants x et x^{**}, les espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^{**}$ sont identiques.

Soit $[e_1, \ldots, e_n]$ une base de $\mathcal{M}$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$$

Soit e_i^* l'élément de $\mathcal{M}^*$ tel que

$$e_i^* e_j = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$$

c'est-à-dire l'élément tel que :

$$e_i^* x = x_i$$

On a alors :

$$ux = \sum_{i=1}^{n} (u\, e_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i = \sum_{i=1}^{n} u_i (e_i^* x) = \sum_{i=1}^{n} (u_i\, e_i^*)\, x$$

Donc tout élément u de $\mathcal{M}^*$ se met sous la forme :

$$u = u_i\, e_i^*$$

22

où u est défini par :

$$u\, e_i = u_i .$$

De plus si $u = 0$ on a également $u\, e_i = u_i = 0$. Donc les éléments e_i^* forment une base de $\mathfrak{M}^*$; nous l'appelons la <u>base associée</u> de $[e_1, e_2, \dots, e_n]$.

<u>Relation de dualité</u>.

Soit $\mathfrak{M}$ un espace vectoriel par rapport à $\mathfrak{K}$ avec multiplication <u>à droite</u> et soit $\mathfrak{M}'$ un espace vectoriel par rapport à $\mathfrak{K}$ avec multiplication <u>à gauche</u>. Nous appelons <u>relation de dualité</u> entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ une fonction qui fait correspondre à tout couple (x, x'), où $x \in \mathfrak{M}$ et $x' \in \mathfrak{M}'$, un élément de $\mathfrak{K}$ que nous désignons par $x'x$, cette fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Si x' est fixe, $x'x$ est une fonction linéaire de x ; si x est fixe $x'x$ est une fonction linéaire de x'. Nous dirons aussi que $x'x$ est une fonction bilinéaire de x' et x .

2. Le seul élément x' de $\mathfrak{M}'$ tel que $x'x = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$ est 0 ; le seul élément x de $\mathfrak{M}$ tel que $x'x = 0$ tout $x' \in \mathfrak{M}'$ est 0 .

En particulier, nous venons d'étudier la relation de dualité qui existe entre un espace vectoriel $\mathfrak{M}$ et son dual $\mathfrak{M}^*$.

<u>S'il existe une relation de dualité entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ et si $\mathfrak{M}$ est de dimension finie n, l'espace $\mathfrak{M}'$ est isomorphe à l'espace dual $\mathfrak{M}^*$ de $\mathfrak{M}$</u> .

En effet, d'après la condition (1), à tout élément x' de $\mathfrak{M}'$ correspond un élément u de $\mathfrak{M}^*$ tel que $x'x = ux$, quel que soit $x \in \mathfrak{M}$.

D'après la condition (2), à deux éléments distincts de $\mathfrak{M}'$ correspondent de cette façon deux éléments distincts de $\mathfrak{M}^*$. Comme la correspondance entre x' et u est linéaire, $\mathfrak{M}'$ est isomorphe à un sous-espace de $\mathfrak{M}^*$. Donc la dimension n' de $\mathfrak{M}'$ est au plus égale à celle de $\mathfrak{M}^*$, c'est-à-dire $n' \leqslant n$. L'espace $\mathfrak{M}'$ ayant une dimension finie n', le même raisonnement montre que $n \leqslant n'$. Donc $n = n'$. La correspondance $x' \rightleftarrows u$ est donc une isomorphie entre $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}^*$.

Soit $\left[e_1, \ldots, e_n\right]$ une base de $\mathfrak{M}$. Comme il existe un élément e_i^* de $\mathfrak{M}^*$ tel que

$$e_i^* e_j = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j ; \\ 1, & \text{si } i = j ; \end{cases}$$

il existe un élément e_i' de $\mathfrak{M}'$ tel que

$$e_i' e_j = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1 ; & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Soit $\left[a_1, \ldots, a_n\right]$ une base de $\mathfrak{M}'$.

$$x' = \sum_{k=1}^{n} x'_k a_k ,$$

les coordonnées x_k' de vecteur e_i' s'obtiennent en cherchant la solution, nécessairement unique, du système d'équations linéaires ;

$$x_k' (a_k e_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq i , \\ 1, & \text{si } j = 1 . \end{cases}$$

On pourra ainsi déterminer les n vecteurs $e_1', \ldots, e_n'$ qui formeront une base de $\mathfrak{M}'$. Les deux bases $\left[e_1, \ldots, e_n\right]$ et $\left[e_1', \ldots, e_n'\right]$ seront dites associées. Si l'on pose :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i ,$$

$$x' = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' ,$$

la fonction bilinéaire $x'x$ prend la forme

$$x'x = \sum_{i=1}^{n} x_i' x_i .$$

Toute relation de dualité entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ entraîne une correspondance biunivoque entre les sous-espaces de $\mathcal{M}$ et ceux de $\mathcal{M}'$. $\mathcal{N}$ étant un sous-espace de $\mathcal{M}$, il est facile de voir que l'ensemble des éléments x' de $\mathcal{M}'$ tels que $x'x = 0$, pour tout $x \in \mathcal{N}$, forme un sous-espace $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ de $\mathcal{M}'$. De même si $\mathcal{N}'$ est un sous-espace de $\mathcal{M}'$, l'ensemble des éléments x tels que $x'x = 0$, pour tout $x' \in \mathcal{N}'$, forme un sous-espace $\mathcal{D}(\mathcal{N}')$ de $\mathcal{M}$. Nous pouvons prendre dans $\mathcal{M}$ une base $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ telle que $[e_1, \ldots, e_r]$ forme une base du sous-espace $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$.

Soit $[e'_1, \ldots, e'_n]$ une base <u>associée</u> à $[e_1, \ldots, e_n]$. Tout élément x' de $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ satisfait aux équations

$$x' e_i = 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots, r .$$

c'est-à-dire $x'_i = 0$. Par suite $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ est le sous-espace de $\mathcal{M}'$ de base $[e'_{r+1}, \ldots, e'_n]$. Donc :

$$\text{dimension } \mathcal{N} + \text{dimension } \mathcal{D}(\mathcal{N}) = n .$$

Le sous-espace $\mathcal{D}[\mathcal{D}(\mathcal{N})]$ qui correspond à $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ est formé par l'ensemble des éléments x de $\mathcal{M}$ tels que

$$e'_j x = 0 , \qquad\qquad j = r + 1, \ldots, n .$$

<u>Donc</u> $\mathcal{D}(\mathcal{D}\mathcal{N})$ <u>est identique à</u> $\mathcal{N}$. La correspondance $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{N})$ est donc une correspondance biunivoque entre les sous-espaces de $\mathcal{M}$ et ceux de $\mathcal{M}'$; nous l'appellerons <u>dualité</u>. Une dualité fait correspondre à tout théorème sur les sous-espaces de $\mathcal{M}$ un théorème, appelé <u>théorème dual</u>, sur les sous-espaces de $\mathcal{M}'$. (Exemples).

<u>Remarque</u> : Lorsque $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel par rapport à un corps <u>commutatif</u> $\mathcal{R}$, et dans ce cas seulement, on peut définir une relation de dualité dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire une fonction xy

de tout couple d'éléments (x, y) de $\mathfrak{M}$ prenant ses valeurs dans $\mathfrak{K}$ et satisfaisant encore aux conditions (1) et (2). L'étude de la structure ainsi définie dans $\mathfrak{M}$ sera l'objet de la <u>géométrie euclidienne</u>.

<u>Application à la résolution d'un système d'équations linéaires.</u>

Reprenons le système d'équations linéaires étudié à la fin du paragraphe précédent :

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = b_i \quad ; \qquad i = 1,\dots,p$$
$$a_{ik}\,,\ b_i \in \mathfrak{K}\,.$$

Soit l'espace vectoriel $\mathfrak{K}^n$ avec multiplication à droite. Tout vecteur x de $\mathfrak{K}^n$ se met sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{n} e_k\, x_k\,,$$

où $[e_1,\dots,e_n]$ est une base de $\mathfrak{K}^n$. Considérons la base associée $[e_1^*,\dots,e_n^*]$ de l'espace dual $(\mathfrak{K}^n)^*$ et les p formes linéaires

$$\ell_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, e_k^*\,.$$

Le système (4) s'écrit alors

$$(4)' \qquad \ell_i\, x = b_i \quad ; \qquad i = 1,\dots,p\,.$$

Les p formes ℓ_i engendrent un sous-espace $\mathfrak{N}$ de $(\mathfrak{K}^n)^*$. En suivant la méthode du paragraphe précédent, on peut effectuer un changement de base dans $(\mathfrak{K}^n)^*$, la nouvelle base étant formée d'une base de $\mathfrak{N}$, par exemple $\ell_1,\dots,\ell_s$, et de n-s éléments de l'ancienne base $[e_1^*,\dots,e_n^*]$. Soit $[\ell_1,\dots,\ell_s, e_{s+1}^*,\dots,e_n^*]$ cette nouvelle base. En effectuant ce changement de base, on arrive aux relations suivantes :

$$e_i^* = \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij}\, \ell_j + \sum_{h=1}^{n-s} \beta_{i\, s+h}\, e_{s+h}^* \quad ; \qquad i = 1,\dots,s\ ;$$
$$\ell_{s+k} = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{kj}\, \ell_j \qquad\qquad k = 1,\dots,p-s\,.$$

Multiplions les relations précédentes à droite par un vecteur x de $\mathcal{R}^n$ et supposons que x soit une solution de (4)'. On aura :

$$(5) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij}\, b_j + \sum_{h=1}^{n-s} \beta_{i\,s+h}\, x_{s+h}$$

$$(6) \qquad b_{s+k} = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{kj}\, b_j$$

Pour qu'il existe un vecteur x qui soit solution de (4)', il faut que les éléments b_i satisfassent aux relations (6). Supposons cette condition vérifiée. Un vecteur x est déterminé d'une façon biunivoque par l'ensemble des ses coordonnées relatives à une base de $\mathcal{R}^n$. Les coordonnées relatives à la base associée à $[\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_s, e^*_{s+1}, \ldots, e^*_n]$ sont les produits $\ell_1 x, \ell_2 x, \ldots, \ell_s x$, $e^*_{s+1} x = x_{s+1}, \ldots, e^*_n x = x_n$. Pour que x soit une solution de (4)', il faut et il suffit que $\ell_i x = b_i$ pour $i = 1, \ldots, s$. Les coordonnées $x_{s+1}, \ldots, x_n$ peuvent être données arbitrairement. Les s coordonnées $x_1, \ldots, x_s$ relatives à la base primitive $[e_1, \ldots, e_n]$ sont données ensuite par (5). Donc les conditions (6) sont les conditions de compatibilité du système donné, et, lorsque ces conditions sont vérifiées, la solution générale est donnée par (5), où les n-s éléments x_{s+h} sont des éléments arbitraires de $\mathcal{R}$. On voit que, si tous les b_i sont nuls, les vecteurs x cherchés forment un sous-espace de $\mathcal{R}^n$ à n-s dimensions ; si les éléments b_i ne sont pas tous nuls, les vecteurs x forment une classe de congruence modulo un sous-espace de dimension n-s.

Dans la méthode de résolution du paragraphe précédent, on pouvait donner à n-r des inconnues $x_1, \ldots, x_n$ des valeurs arbitraires dans $\mathcal{R}$. On en conclut que r = s. Le rang du système peut donc être défini soit comme la dimension de l'espace vectoriel engendré par les n vecteurs

J. D 27

$$A_k = \sum_{i=1}^{p} E_i\, a_{ik} \quad ; \qquad k = 1,\ldots, n ,$$

où les vecteurs $E_1,\ldots,E_p$ sont supposés linéairement indépendants, soit comme la dimension de l'espace vectoriel engendré par les p vecteurs :

$$\ell_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, e_k^* \quad , \quad i = 1,\ldots,p .$$

----

§ 5 . Matrices.

Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ deux espaces vectoriels par rapport à un corps $\mathfrak{K}$, avec multiplication à droite. Soit f une transformation linéaire de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ et désignons par $f(x)$ l'image de l'élément x de $\mathfrak{M}$. Toute transformation linéaire f est complétement déterminée lorsqu'on connaît les images des éléments d'une base de $\mathfrak{M}$. En supposant que $\mathfrak{M}$ ait une base finie $[e_1,\ldots,e_n]$, on a en effet :
$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i\, x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i \quad .$$
En se donnant arbitrairement les éléments $f(e_i)$, on obtient une transformation linéaire f arbitraire. Supposons $\mathfrak{M}'$ également de dimension finie et choisissons une base $[e'_1,\ldots, e'_p]$ de $\mathfrak{M}'$. La transformation f sera alors déterminée par les relations suivantes:

$$(1) \qquad f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} e'_j\, a_{ji} \quad , \qquad i = 1,2,\ldots, n .$$

Posons :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i\, x_i$$
$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} e'_j\, x_j .$$

On aura :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} e'_j\, a_{ji}\, x_i$$
$$(2) \qquad x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i .$$

La transformation linéaire f est déterminée soit par les formules (1) soit par les formules (2). Etant données une base de $\mathfrak{M}$ et une base de $\mathfrak{M}'$, à toute fonction linéaire f correspond d'une façon biunivoque un tableau rectangulaire de coefficients a_{ji}. Le tableau

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots\cdots & a_{pn} \end{Bmatrix}$$

s'appelle une matrice sur le corps Ω. Nous écrirons aussi $A = (a_{ji})$, en convenant d'appeler a_{ji} l'élément appartenant à la $j^{\text{ième}}$ ligne et à la $i^{\text{ième}}$ colonne. Associons à f la matrice A formé par le tableau des coefficients dans les formules (2).

A toute transformation linéaire f de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ correspond d'une façon biunivoque une transformation linéaire f^* de l'espace dual $\mathfrak{M}'^*$ de $\mathfrak{M}'$ dans l'espace dual $\mathfrak{M}^*$ de $\mathfrak{M}$. En effet, f^* est la transformation qui fait correspondre à tout élément u' de $\mathfrak{M}'^*$ l'élément $f^*(u')$ de $\mathfrak{M}^*$ tel que :

$$f^*(u')\, x = u'\, f(x)$$

quel que soit $x \in \mathfrak{M}$. Si $[e_1^*, \ldots, e_n^*]$ est la base de $\mathfrak{M}^*$ associée à $[e_1, \ldots, e_n]$ et $[e_1'^*, \ldots, e_p'^*]$ la base associée à $[e_1', \ldots, e_p']$, l'équation précédente entraîne :

$$f^*(e_j'^*)\, x = e_j'^*\, f(x)$$

En tenant compte des relations (2) :

$$e_j'^*\, f(x) = x_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, e_i^*\, x\ .$$

$$f^*(e_j'^*)\, x = \Big(\sum_{i=1} a_{ji}\, e_i^* \Big)\, x\ .$$

Donc :

$$(3) \qquad f^*(e_j'^*) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, e_i^*\ , \qquad j = 1, \ldots, p\ .$$

En posant

$$u' = \sum_{j=1}^{p} u'_j \, e'^*_j \quad ,$$

$$f(u') = \sum_{i=1}^{n} u_i \, e_i^* \quad ,$$

on obtient les relations suivantes analogues aux relations (2) :

$$(4) \qquad u_i = \sum_{j=1}^{p} u'_j \, a_{ji} \; .$$

Nous associons à f^* la matrice $A^* = (a_{ji})^*$ formé par le tableau des coefficients a_{ji} dans (4). Dans $(a_{ji})^*$ l'élément a_{ji} appartient à la $j^{\text{ième}}$ colonne et à la $i^{\text{ième}}$ ligne. La matrice A^* s'appelle la <u>matrice transposée</u> de A . La transposée de A^* est de nouveau A .

Une forme linéaire u définie dans $\mathcal{M}$ est une transformation linéaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{Q}$. Prenons une base de $\mathcal{M}$ et considérons l'élément 1 comme base de $\mathcal{Q}$. La forme linéaire u est alors définie par la matrice :

$$(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \; .$$

Un vecteur x de $\mathcal{M}$ peut être considéré comme définissant une transformation linéaire de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{M}$, en considérant x comme l'image de l'élément 1 de $\mathcal{Q}$. Nous associerons donc au vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} e_i \, x_i$ la matrice :

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

<u>Rang d'une matrice</u>.

Nous appellerons <u>rang droit</u> de la matrice A associée à f la dimension r de l'image de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$. C'est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les n vecteurs $f(e_i)$. Ce nombre r a déjà été appelé le rang du système d'équations linéaires :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j \quad , \qquad j = 1, \ldots, p \; .$$

A la fin du paragraphe précédent, nous avons vu que ce nombre est aussi la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot e_i^*$, c'est-à-dire par les p vecteurs $f^*(e_j^*)$. Il convient d'appeler la dimension de cet espace vectoriel le rang gauche de la matrice $(a_{ji})^*$. Donc :

Le rang droit de la matrice A est égal au rang gauche de la matrice transposée.

Cette propriété résulte encore du raisonnement suivant : Supposons que f applique $\mathfrak{M}$ sur le sous-espace $\mathfrak{N}'$ de $\mathfrak{M}'$ et que la transformation associée f^* applique $\mathfrak{M}'^*$ sur le sous-espace $\mathfrak{N}^*$ de $\mathfrak{M}^*$. Les éléments u' de $\mathfrak{M}'^*$ qui sont appliquées sur l'élément 0 de $\mathfrak{M}^*$ sont ceux pour lesquels on a :

$$u'\, f(x) = 0 \; ,$$

quel que soit $x \in \mathfrak{M}$. Donc ces éléments u' engendrent le sous-espace $\mathfrak{D}(\mathfrak{N}')$ de $\mathfrak{M}'^*$ qui correspond par dualité à $\mathfrak{N}'$. Donc $\mathfrak{N}^*$ est isomorphe à l'espace-quotient $\mathfrak{M}'^*/\mathfrak{D}(\mathfrak{N}')$. Si r est la dimension de $\mathfrak{N}'$, celle de $\mathfrak{D}(\mathfrak{N}')$ sera p-r et par suite la dimension de $\mathfrak{N}^*$ sera également r. On verrait d'ailleurs facilement que $\mathfrak{N}^*$ est isomorphe à l'espace dual de $\mathfrak{N}'$.

Opérations sur les matrices.

La somme de deux transformations linéaires f et φ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ est la transformation linéaire $f + \varphi$ définie par :

$$(f + \varphi)(x) = f(x) + \varphi(x) \quad ,$$

quel que soit $x \in \mathfrak{M}$. Si A et B sont les matrices représentatives de f et φ par rapport à des bases de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$, la somme A + B est la matrice représentative de $f + \varphi$. On voit que la somme des deux matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) est la matrice $(a_{ij} + b_{ij})$.

Dans l'ensemble $\mathcal{M}_p^n$ des matrices à p lignes et n colonnes se trouve donc définie une addition qui donne à cet ensemble la structure d'un groupe abélien.

Soit f une transformation linéaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}'$ et φ une transformation linéaire de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{M}''$. La transformation composée de f et φ, c'est-à-dire la transformation φf, est une transformation linéaire de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}''$. Avec des bases choisies dans $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$, les fonctions f et φ sont représentées par les matrices A et B. Par définition le <u>produit</u> BA est la matrice représentative de φf.

Posons :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \; ; \quad f(x) = \sum_{j=1}^{p} e'_j x'_j \; ; \quad \varphi\left[f(x)\right] = \sum_{k=1}^{q} e''_k x''_k .$$

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \; ; \qquad x''_k = \sum_{j=1}^{p} b_{kj} x'_j .$$

Nous aurons alors :

$$x''_k = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_{kj} a_{ji} x_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i ,$$

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{p} b_{kj} a_{ji} .$$

Le produit BA des matrices $A = (a_{ji})$ et $B = (b_{kj})$ sera donc la matrice $C = (c_{ki})$, qui aura q lignes et n colonnes. Le produit BA de deux matrices A et B est défini lorsque le nombre de lignes de A est égal au nombre de colonnes de B.

La multiplication des matrices n'est pas commutative, même si le corps $\mathcal{R}$ est commutatif. Mais les définitions précédentes entraînent l'associativité de la multiplication :

$$(5) \qquad A\,(BC) = (AB)\,C ,$$

ainsi que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$(6)\quad \begin{aligned} A\,(B + C) &= AB + AC\,,\\ (B + C)A &= BA + CA\,,\end{aligned}$$

pourvu que les opérations indiquées dans ces formules soient définies.

D'après les relations (2), la transformation linéaire $x' = f(x)$ s'exprime à l'aide des matrices (x), (x') et A de la façon suivante :

$$(x') = A(x)$$

La valeur ux d'une forme linéaire u correspondant à un vecteur x s'exprime par le produit :

$$(u)\,(x) = (u_1, \ldots, u_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i\ .$$

La transformation $u = f^*(u')$ s'exprime par l'équation :

$$(u) = (u')\,A\ .$$

<u>Le rang du produit BA de deux matrices A et B est au plus égal au plus grand des rangs de A et de B</u> .

En effet, l'image de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}''$ par la transformation linéaire φf correspondant à BA a une dimension au plus égale au rang de A ou de B .

<u>Remarque</u> : La multiplication des matrices qu'on vient de définir pourrait s'appeler multiplication lignes par colonnes. En partant d'espaces vectoriels avec multiplication à gauche, on serait amené à définir une multiplication colonnes par lignes. Mais il est inutile d'introduire cette deuxième espèce de multiplication, car, appliqué à deux matrices A et B, elle donnerait $(B^* A^*)^*$ à la place de BA .

Matrices carrées.

Soit $\mathfrak{M}_n^n$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. La somme et le produit de deux matrices de $\mathfrak{M}_n^n$ font encore partie de $\mathfrak{M}_n^n$. L'addition ainsi définie dans $\mathfrak{M}_n^n$ satisfait aux axiomes d'un groupe abélien. La multiplication satisfait aux conditions (5) et (6). Ces deux lois de composition définissent dans $\mathfrak{M}_n^n$ une structure d'anneau non commutatif (voir chapitre X, § X). Si l'on a choisi une base $[e_1, \dots, e_n]$ dans un espace vectoriel $\mathfrak{M}$ à n dimensions toute matrice (a_{ij}) de $\mathfrak{M}_n^n$ correspond d'une façon biunivoque à une transformation linéaire f de $\mathfrak{M}$ en lui-même :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \quad , \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i x'_i$$

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji}$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

La transformation identique correspond à la matrice E dont les élément sont :

$$a_{ij} = 0 \quad , \qquad \text{si } i \neq j \ ,$$

$$a_{ii} = 1 \ .$$

La matrice E s'appelle <u>matrice-unité</u>. Elle satisfait quelle que soit la matrice A, à la relation :

$$AE = EA = A \ .$$

Pour que la transformation linéaire f soit une isomorphie de $\mathfrak{M}$ sur lui-même, il faut et il suffit que les n vecteurs $f(e_i)$ soient linéairement indépendants, c'est-à-dire que le rang de la matrice $A = (a_{ij})$ soit égal à n. Une matrice de l'ensemble $\mathfrak{M}_n^n$ et de rang n sera appelée <u>régulière</u>. Si la matrice A est régulière, la fonction linéaire f admet une fonction inverse f^{-1}.

En posant :

$$e'_i = f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j \, a_{ji} \quad ,$$

on aura :

$$e_i = f^{-1} \, (e'_i).$$

On pourra exprimer les vecteurs e_i en fonction linéaire des vecteurs e'_i

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} e'_j \, b_{ji}$$

La transformation inverse f^{-1} correspond à la matrice $B = (b_{ji})$, car on a

$$f^{-1}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} f(e'_j) \, b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} e_j \, b_{ji}$$

Comme on a :

$$x = f^{-1}\left[f(x)\right] = f\left[f^{-1}\,(x)\right]$$

quel que soit $x \in \mathfrak{M}$, on conclut que :

$$BA = AB = E$$

La matrice B s'appelle la <u>matrice inverse</u> de A : nous écrirons $B = A^{-1}$. Remarquons que A^{-1} est aussi une matrice régulière.

Pour qu'il existe une matrice X telle que :

$$XA = E$$

il faut évidemment que A soit de rang n, car si A est de rang inférieur à n, le produit XA ne peut pas être une matrice de rang n. Si A est de rang n, la matrice X cherchée sera égale à la matrice A^{-1} que nous venons de déterminer ; en effet :

$$(XA)\, A^{-1} = X = EA^{-1} = A^{-1} \, .$$

La matrice-unité E est la seule matrice X telle que :

$$AX = A \, ,$$

quel que soit A . En effet, soit A une matrice régulière. On aura :

$$A^{-1}\,(AX) = A^{-1}\,A = E \quad ,$$

$$(A^{-1}\,A)\,X = X = E \, .$$

Si A est une matrice régulière et B une matrice quelconque, les produits AB ou BA ont le même rang que B .

En effet, comme A correspond à une isomorphie de $\mathcal{M}$ sur lui-même, la transformation linéaire correspondant à BA ou à AB applique $\mathcal{M}$ sur un sous-espace dont la dimension est égale au rang de B.

Il en résulte que, si A est une matrice régulière, toute matrice X qui vérifie l'une des équations :

$$AX = 0$$

$$XA = 0 \,,$$

est égale à la matrice 0 .

Supposons A de rang $p < n$. Sa transformation linéaire correspondante applique $\mathcal{M}$ sur un sous-espace $\mathcal{M}'$ de dimension p. Cherchons une matrice X telle que :

$$XA = 0 \,.$$

Il faut et il suffit que la transformation linéaire correspondant à X applique $\mathcal{M}'$ sur l'élément 0 de $\mathcal{M}$. Il existe donc une infinité de solutions du problème. Le rang d'une matrice X cherchée est au plus égal à $n-p$ et peut effectivement atteindre cette valeur. On trouvera les mêmes résultats pour l'équation $AX = 0$.

Groupe linéaire général.

L'ensemble des matrices régulières de $\mathcal{M}_n^n$ forme évidemment un groupe relativement à la multiplication, car cet ensemble contient avec deux éléments A, B leur produit et contient également l'inverse de chaque élément. Les transformations linéaires correspondantes définies dans $\mathcal{M}$ forment le groupe des automorphies de $\mathcal{M}$; ce groupe s'appelle le groupe linéaire général à n variables.

Matrices contragrédientes.

Si A est matrice carrée régulière, il en est de même de A^* et de $(A^{-1})^*$. En prenant dans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}^*$ deux bases associées $[e_1, \dots, e_n]$ et $[e_1^*, \dots, e_n^*]$ et en posant :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i \quad , \qquad u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i^* \quad ,$$

les matrices A et A^* correspondent aux deux transformations f et f^* définies par :

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad ,$$
$$u_i = u'_j a_{ji} \quad ,$$

ou encore sous forme matricielle :

$$(x') = A(x) \quad ,$$
$$(u) = (u') A \; .$$

La transformation f^* admet une transformation inverse $(f^*)^{-1}$ définie par :

$$(u') = (u) A^{-1}$$

La matrice des coefficients associée à $(f^*)^{-1}$ est $(A^{-1})^*$. Les deux matrices $A = (a_{ij})$ et $(A^{-1})^* = (b_{ij})$ sont dites contragrédientes. De même les transformations linéaires associées

$$x'_i = a_{ij} x_j$$
$$u'_i = u_j b_{ji}$$

sont dites contragrédientes. On a :

$$(u') (x') = (u) A^{-1} A(x) = (u) (x).$$

Deux transformations contragrédientes opérant sur $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}^*$ sont caractérisées par l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u'_i x'_i = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$

Changement de base.

Soit $[e_1, \dots, e_n]$ une base de $\mathfrak{M}$. Introduisons une nouvelle base $[e'_1, \dots, e'_n]$:

$$(7) \quad e'_i = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji}$$

La matrice $A = (a_{ji})$ est régulière. Posons :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i \, x_i = \sum_{i=1}^{n} e'_i \, x'_i$$

$$(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \quad (x') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Tout vecteur x est représenté par la matrice (x) par rapport à l'ancienne base et par la matrice (x') par rapport à la nouvelle base

Soit x' le point représenté par (x') par rapport à l'ancienne base :

$$x' = \sum_{i=1}^{n} e_i \, x'_i \quad .$$

Les formules (7) définissent une transformation linéaire f dans $\mathfrak{M}$: $\qquad f(e_i) = e'_i$

On a :

$$f(x') = \sum_{i=1}^{n} e'_i \, x'_i = x \quad .$$

On a donc :

$$(8) \qquad (x) = (A)\,(x') , \qquad (x') = (A^{-1})\,(x) ,$$

ou d'une façon plus explicite :

$$x_i = \sum_{j=1} a_{ij} \, x'_j \quad .$$

Ce sont les formules de <u>changement de coordonnées</u>. Donc les formules (7), où A est supposé régulier, définissent soit une transformation linéaire f, soit un changement de coordonnées (8).

<u>Matrices équivalentes</u>.

Soit φ une transformation linéaire de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$. Supposons données des bases $[e_1, \ldots, e_n]$ et $[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p]$ dans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$.

En posant $x = \sum_{i=1}^{n} e_i \, x_i$, $y = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j \, y_j$, la transformation φ est définie par la matrice A :

$$(y) = A\,(x)$$

Effectuons des changements de base dans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ conduisant aux formules de transformation de coordonnées suivantes : $\begin{matrix}(x) = B(x') \\ (y) = C(y')\end{matrix}$

Par rapport aux nouvelles bases, φ sera défini par :

$$C(y') = A\,B\,(x')$$

En multipliant à gauche par C^{-1} :

$$(y') = C^{-1}\,A\,B\,(x')$$

La transformation sera donc définie par la matrice :

$$A' = C^{-1}\,AB\ .$$

Deux matrices A et A' liées par la relation précédente, où B et C sont des matrices carrées régulières, sont dites <u>équivalentes</u>. Elles représentent une même transformation linéaire par rapport à deux couples de bases convenablement choisis. La relation d'équivalence ainsi définie est bien réflexive, symétrique et transitive.

Soit φ une transformation linéaire dans $\mathfrak{M}$ définie par rapport à une base donnée $[e_1, \dots, e_n]$ par la matrice carrée A :

$$(y) = A(x)$$

Un changement de base dans $\mathfrak{M}$ conduit aux formules de changements de coordonnées :

$$(x) = B\,(x')$$

$$(y) = B\,(y')$$

La transformation φ s'exprime par rapport à la nouvelle base sous la forme : $\quad (y') = B^{-1}\,AB\,(x') = A'(x')\quad ,$

$$A' = B^{-1}\,AB\ .$$

La relation précédente définit une nouvelle relation d'équivalence (symétrique, réflexive, transitive) entre matrices carrées. Nous dirons que A et A' sont équivalents dans le groupe linéaire général. Au lieu du changement de base nous pouvons considérer la transformation linéaire f définie par rapport à la base $[e_1, \dots, e_n]$ par : $(x') = B(x)$.

La transformation qui fait correspondre au point (x') le point $(y') = B(y)$ est une transformation linéaire :

$$(y') = BA\,(x) = BAB^{-1}\,(x')$$

Cette transformation φ' est dite transformée de φ par f. ON a $\varphi' = f\varphi f^{-1}$. De même BAB^{-1} s'appelle la matrice transformée de A par B .

<u>Exercice 1</u>. Soit A une matrice à p lignes et n colonnes. Si A est de rang r, elle est équivalente à la matrice (b_{ij}), où l'on a : $b_{ii} = 1$ pour $i = 1,\dots, r$, tous les autres éléments étant nuls

<u>Exercice 2</u>. Si l'on considère des matrices sur un <u>corps commutatif</u>, on a :

$$(AB)^* = B^* A^*$$
$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

<u>Matrices sur un corps commutatif</u>.

Dans l'ensemble $\mathfrak{M}_p^n$ des matrices à p lignes et n colonnes, sur un corps $\mathfrak{K}$, on peut définir une multiplication à gauche ou à droite par les éléments de $\mathfrak{K}$. La matrice $\alpha(a_{ij})$ sera la matrice (b_{ij}), où $b_{ij} = \alpha\, a_{ij}$. En ajoutant cette nouvelle loi de composition à la structure de $\mathfrak{M}_p^n$, l'ensemble $\mathfrak{M}_p^n$ pourra être considéré comme un espace vectoriel par rapport à $\mathfrak{K}$. Cette multiplication présente de l'intérêt lorsque $\mathfrak{K}$ est commutatif. Dans ce cas toute relation linéaire :

$$\sum_{h=1}^{s} \alpha_h A_h = 0$$

reste vérifiée lorsquêon remplace chacune des matrices A_h par la matrice équivalente $C^{-1} A_h B$, où B et C sont supposées indépendants de h. La dimension de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_p^n$ est égale à pn . Une base de $\mathfrak{M}_p^n$ est formée par les matrices e_{ij}, où e_{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf l'élément a_{ij} qui est égal à 1 :

$$(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_{ij} .$$

Considérons en particulier l'anneau des matrices carrées $\mathfrak{M}_n^n$. Si A et B sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n^n$ on a :

$$\alpha\, A.\ \beta\, B = (\alpha\, \beta)\ (A\, B) .$$

Ceci montre que les lois de composition dans $\mathfrak{M}_n^n$ vérifieent les axiomes définissant la structure d'un système hypercomplexe a base finie qui sera étudiée au ch. X § X .

41

ALGEBRE LINÉAIRE (Suite)

§ 6. Fonctions bilinéaires.

Soit $\mathfrak{K}$ un corps commutatif. Considérons deux espaces vectoriels $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ par rapport à $\mathfrak{K}$. Si X désigne l'élément générique de $\mathfrak{M}_1$ et Y l'élément générique de $\mathfrak{M}_2$, une fonction bilinéaire de X, Y est une fonction qui fait correspondre au couple (X, Y) un élément f(X, Y) d'un espace vectoriel $\mathfrak{N}$ par rapport à $\mathfrak{K}$ telle que $f(X, Y_0)$, où Y_0 est fixe, soit une fonction linéaire de X et telle que $f(X_0, Y)$, où X_0 est fixe, soit une fonction linéaire de Y .

Exercice : Si $\mathfrak{K}$ est non commutatif, on peut définir également la notion de fonction bilinéaire, mais il faut supposer que $\mathfrak{M}_1$, soit un espace vectoriel avec multiplication à gauche, $\mathfrak{M}_2$ un espace vectoriel avec multiplication à droite et $\mathfrak{N}$ un espace vectoriel avec multiplication à gauche et à droite. Faire la théorie de ces fonctions. (Comparer §4).

Supposons qu'on ait :

$$X = \sum_{i \in I} x_i A_i \quad , \quad Y = \sum_{j \in J} y_j B_j \quad , \quad (x_i, y_j \in \mathfrak{K}) ,$$

où I et J désignent deux ensembles d'indices et où il n'y a qu'un nombre fini d'éléments x_i, y_j qui soient différents de 0 ; la fonction bilinéaire f(X, Y) devient alors :

$$f(X, Y) = \sum x_i\, y_j\, f(A_i, B_j) .$$

Si les vecteurs A_i et B_j forment respectivement des bases de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, la fonction $f(X, Y)$ est complètement déterminée par les valeurs $f(A_i, B_j)$, qui peuvent d'ailleurs être données arbitrairement. Supposons que les éléments $f(X,Y)$ engendrent $\mathfrak{N}$; alors les éléments $f(A_i, B_j)$ forment déjà un système de générateurs de $\mathfrak{N}$. Supposons même que les éléments $f(A_i, B_j)$ forment une base de $\mathfrak{N}$. Pour que $f(X, Y)$ soit nul, il faut et il suffit alors que $X = 0$ ou que $Y = 0$. Soit un vecteur $X = \sum x_i A_i$ tel que $x_1 \neq 0$. Une nouvelle base de $\mathfrak{N}$ sera formée par les vecteurs $f(X, B_j)$, $f(A_{i'}, B_j)$, où $i' \neq 1$. En effet, $f(A_1, B_j)$ est une combinaison linéaire des vecteurs précédents ; d'autre part toute relation linéaire entre ces vecteurs entraînerait une relation linéaire entre les éléments $f(A_i, B_j)$. Si de plus Y est un vecteur $\sum y_j B_j$ tel que $y_1 \neq 0$, on voit que l'on obtient une nouvelle base de $\mathfrak{N}$ en remplaçant dans l'ancienne les éléments A_1 et B_1 respectivement par X et Y. Cherchons la condition pour qu'on ait $f(X,Y) = f(X', Y')$. Nous pouvons toujours supposer $X = \sum x_i A_i$, $Y = \sum y_j B_j$ avec $x_1 y_1 \neq 0$. On aura

$$X' = \lambda X + \sum \lambda_{i'} A_{i'}, \qquad i' \neq 1,$$

$$Y' = \mu Y + \sum \mu_{j'} B_{j'}, \qquad j' \neq 1,$$

$$f(X',Y') = \lambda\mu f(X,Y) + \sum \lambda \mu_{j'} f(X, B_{j'}) + \sum \lambda_{i'} \mu f(A_{i'}, Y) + \sum \lambda_{i'} \mu_{j'} f(A_{i'}, B_{j'})$$

La condition cherchée est donc : $\lambda\mu = 1$, $\lambda_{i'} = 0$, $\mu_{j'} = 0$; c'est-à-dire, si X et Y sont des vecteurs différents de 0, la classe des couples (X',Y') telle que $f(X',Y') = f(X,Y)$ est formée par $(\lambda X, \lambda^{-1} Y)$, où $\lambda \in \mathfrak{Q}$.

Soit $\varphi(X, Y)$ une autre fonction bilinéaire de (X, Y) prenant ses valeurs dans un espace vectoriel $\mathcal{N}'$. A la fonction φ correspond d'une façon biunivoque une fonction linéaire Φ définie dans $\mathcal{N}$, prenant ses valeurs dans $\mathcal{N}'$ et telle que :

$$\varphi(X, Y) = \Phi\left[f(X, Y)\right].$$

En effet, faisons correspondre à l'élément $f(X, Y)$ de $\mathcal{N}$ l'élément $\varphi(X, Y)$ de $\mathcal{N}'$. Comme $f(X', Y') = f(X, Y)$ entraîne $\varphi(X', Y') = \varphi(X, Y)$, à tout élément de $\mathcal{N}$ de la forme $f(X, Y)$ correspond ainsi un élément déterminé de $\mathcal{N}'$. A l'élément $f(X, Y) = \sum x_i y_j f(A_i, B_j)$ correspond l'élément $\varphi(X, Y) = \sum x_i y_j \varphi(A_i, B_j)$. Soit Φ la fonction linéaire bien définie qui fait correspondre à $f(A_i, B_j)$ l'élément $\varphi(A_i, B_j)$. On aura :

$$\varphi(X, Y) = \Phi\left[f(X, Y)\right].$$

Réciproquement à toute fonction linéaire Φ définie dans $\mathcal{N}$ et prenant ses valeurs dans $\mathcal{N}'$ correspond une fonction bilinéaire $\varphi(X, Y)$, à savoir la fonction $\Phi\left[f(X, Y)\right]$.

En particulier nous pouvons choisir $\mathcal{N}'$ et φ de telle façon que les vecteurs $\varphi(A_i', B_j')$ forment une base de $\mathcal{N}'$, en supposant que les vecteurs A_i' et B_j' forment respectivement des bases de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Il en résulte que les vecteurs $f(A_i', B_j')$ sont aussi linéairement indépendants, car la fonction linéaire Φ associée à φ fait correspondre aux vecteurs $f(A_i', B_j')$ les vecteurs $\varphi(A_i', B_j')$ qui sont linéairement indépendants.

Les vecteurs $f(A_i', B_j')$, qui engendrent évidemment tout l'espace $\mathcal{N}$, forment donc une base de $\mathcal{N}$. La fonction Φ définit une isomorphie entre $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$. Les résultats précédents justifient la définition suivante :

Le produit kroneckerien des deux espaces vectoriels $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ est un espace vectoriel $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ pour lequel on a défini une fonction bilinéaire faisant correspondre à l'ensemble de deux vecteurs $X \in \mathcal{M}_1$ et $Y \in \mathcal{M}_2$ un vecteur $X \times Y$ de $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ et telle que les vecteurs $A_i \times B_j$ forment une base de $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, en supposant que les vecteurs A_i et B_j forment respectivement des bases de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$.

Toute fonction bilinéaire $\varphi\ (X, Y)$ définie dans $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ est de la forme $\Phi\ (X \times Y)$, où Φ est une fonction linéaire définie dans $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$. Comme il y a une correspondance biunivoque entre φ et Φ , nous ne distinguerons pas, en général, entre ces deux fonctions et nous écrirons indifféremment $\varphi\ (X, Y)$ ou $\varphi\ (X \times Y)$.

Formes bilinéaires.

Une fonction bilinéaire $W\ (X, Y)$ définie dans $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ et prenant ses valeurs dans Ω sera appelée une forme bilinéaire. Elle peut être considérée comme une forme linéaire définie dans le produit kroneckerien $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, c'est-à-dire comme un élément du dual, $(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)^*$, de cet espace vectoriel. On a :

$$W\ (X, Y) = \sum x_i\, y_j\, W\ (A_i, B_j) = \sum w_{ij}\, x_i\, y_j\ .$$

Soit U une forme linéaire définie dans $\mathcal{M}_1$, c'est-à-dire $U \in \mathcal{M}_1^*$. Soit de même $V \in \mathcal{M}_2^*$. La valeur de U pour $X \in \mathcal{M}_1$

est désignée par UX (ou XU , comme $\mathcal{R}$ est commutatif). De même VY est la valeur correspondant à V et $Y \in \mathfrak{M}_2$. A l'ensemble de U et V nous pouvons faire correspondre la forme bilinéaire $W = f(U, V)$ définie par : $W(X \times Y) = (UX)(VY)$.

$f(U,V)$ est une fonction bilinéaire de U et V prenant ses valeurs dans $(\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2)^*$. Supposons à partir d'ici que $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ aient des bases <u>finies</u>. Soient A_i, A_i^* les éléments de deux bases associées de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_1^*$; soient de même B_j , B_j^* les éléments de deux bases associées de $\mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{M}_2^*$. On a :

$$A_i^* A_{i'} = \delta_i^{i'} \quad , \quad (i, i' = 1,2,\ldots,p)$$

$$B_j^* B_{j'} = \delta_j^{j'} \quad , \quad (j,j' = 1,2,\ldots,q)$$

$$f(A_i^*, B_j^*)(A_{i'} \times B_{j'}) = (A_i^* A_{i'})(B_j^* B_{j'}) = \delta_i^{i'} \delta_j^{j'}$$

Or on a :

$$\delta_i^{i'} \delta_j^{j'} = \delta_{i,j}^{i',j'} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i',\ j = j' \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Or les éléments $A_i \times B_j$ forment une base de $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$. Donc les éléments $f(A_i^*, B_j^*)$ forment la base associée dans le dual $(\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2)^*$. La fonction $f(U, V)$ définit par suite $(\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2)^*$ comme le produit kroneckerien de $\mathfrak{M}_1^* \times \mathfrak{M}_2^*$ et nous écrirons $f(U, V) = U \times V$.

$$(\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_1^* \times \mathfrak{M}_2^* ,$$

$$(U \times V)(X \times Y) = (UX)(VY).$$

Une forme bilinéaire quelconque se mettra sous la forme :

$$W = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} w_{ij} (A_i^* \times B_j^*)$$

$$W(X \times Y) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} w_{ij} (A_i^* X)(B_j^* Y) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} w_{ij} x_i y_j .$$

Formes bilinéaires et corrélations.

A l'ensemble de trois éléments $X \in \mathfrak{M}_1$, $Y \in \mathfrak{M}_2$, $W \in (\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2)^*$ correspond un élément $W(X \times Y)$ de $\mathfrak{K}$. Si deux des trois éléments X, Y, W sont supposés fixes, l'élément $W(X \times Y)$ est une fonction linéaire du troisième ; nous dirons que $W(X \times Y)$ est une fonction trilinéaire de X, Y, W. Si W et X sont donnés, $W(X \times Y)$ est une fonction linéaire de Y ; c'est-à-dire à l'ensemble des éléments W et X correspond un élément de $\mathfrak{M}_2^*$; désignons cet élément par WX. Par définition :

$$W(X \times Y) = (WX)\,Y \quad , \qquad WX \in \mathfrak{M}_2^* .$$

De même à l'ensemble des deux éléments W et Y correspond un élément de $\mathfrak{M}_1^*$ que nous désignons par (WY) et tel qu'on ait :

$$W(X \times Y) = (WY)\,X = X\,(WY) \quad , \qquad WY \in \mathfrak{M}_1^* .$$

L'élément WX est une fonction bilinéaire de W et X ; l'élément WY est une fonction bilinéaire de W et Y. A toute forme bilinéaire W de X, Y correspond donc une transformation linéaire de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2^*$; c'est la transformation $X \longrightarrow WX$. Réciproquement à toute transformation linéaire de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2^*$, soit $X \longrightarrow TX$, correspond une forme bilinéaire de X, Y ; c'est la forme W telle que $W(X, Y) = (TX)\,Y$. De même la transformation $Y \longrightarrow WY$ est une transformation linéaire de $\mathfrak{M}_2$ dans $\mathfrak{M}_1^*$ et il y a encore correspondance biunivoque entre les formes bilinéaires W et les transformations linéaires de $\mathfrak{M}_2$ dans $\mathfrak{M}_1^*$. Nous avons ainsi des isomorphies bien déterminées entre $\mathfrak{M}_1^* \times \mathfrak{M}_2^*$, l'espace vectoriel dont les éléments sont les transformations linéaires de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2^*$ et l'espace vectoriel dont les éléments sont les transformations linéaires de $\mathfrak{M}_2$ dans $\mathfrak{M}_1^*$. Remarquons

47

encore que la transformation $Y \longrightarrow WY$ est la transformation duale de $X \longrightarrow WX$, car on a identiquement :

$$(WX)\,Y = X(WY).$$

Une transformation linéaire de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2^*$ s'appelle aussi une <u>transformation corrélative</u> (ou corrélation) de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2$. La transformation duale sera une transformation corrélative de $\mathfrak{M}_2$ dans $\mathfrak{M}_1$. Soit la corrélation $X \longrightarrow WX$ et soit $W\mathcal{L}_1$ l'image dans $\mathfrak{M}_2^*$ d'un sous-espace $\mathcal{L}_1$ de $\mathfrak{M}_1$. Si $\mathcal{L}_2$ est le sous-espace de $\mathfrak{M}_2$ qui correspond par dualité à $W\mathcal{L}_1$, la corrélation fait ainsi correspondre à tout sous-espace $\mathcal{L}_1$ de $\mathfrak{M}_1$ un sous-espace $\mathcal{L}_2$ de $\mathfrak{M}_2$. $\mathcal{L}_2$ est encore l'ensemble des éléments Y tels que $W(X, Y) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{L}_1$. La corrélation duale de $\mathfrak{M}_2$ dans $\mathfrak{M}_1$ fait correspondre à $\mathcal{L}_2$ un sous-espace $\mathcal{L}_1'$ de $\mathfrak{M}_1$ qui contient $\mathcal{L}_1$. On voit que $\mathcal{L}_1'$ est l'image inverse de $W\mathcal{L}_1$ dans la transformation $X \longrightarrow WX$. Les sous-espaces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_1'$ ne sont pas nécessairement confondus; par contre $\mathcal{L}_1'$ et $\mathcal{L}_2$ se correspondent dans les deux corrélations duales. Pour que les deux corrélations duales établissent une correspondance biunivoque unique entre les ous-espaces de $\mathfrak{M}_1$ et ceux de $\mathfrak{M}_2$, il faut et il suffit que la transformation $X \longrightarrow WX$ soit un isomorphisme de $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{M}_2^*$. Dans ce cas, W définit une <u>relation de dualité</u> entre $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$.

Exprimons les transformations linéaires $X \longrightarrow WX$ et $Y \longrightarrow WY$ par rapport aux bases déjà considérées. Remarquons que l'on a :

$$(U \times V)\,X = (UX)\,V$$

$$(U \times V)\,Y = (VY)\,U$$

Soit : $W = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} w_{ij} (A_i^* \times B_j^*)$. On a donc :

$$W A_i = \sum_{j=1}^{q} w_{ij} B_j^*$$

$$W B_j = \sum_{i=1}^{p} w_{ij} A_i^*$$

La matrice de la transformation $Y \longrightarrow WY$ est $w = (w_{ij})$, celle de la transformation $X \longrightarrow WX$ est w^*.

Exercice. En représentant les vecteurs par des matrices, exprimer WX, WY, $W(X \times Y)$ et étudier l'effet d'un changement de base dans $\mathfrak{M}_1$ et dans $\mathfrak{M}_2$.

<u>Rang d'une forme bilinéaire</u>.

Le rang des transformations linéaires $X \longrightarrow WX$ ou $Y \longrightarrow WY$, c'est-à-dire la dimension de $W\mathfrak{M}_1$ ou celle de $W\mathfrak{M}_2$, s'appellera le rang de W. C'est aussi le rang de la matrice (w_{ij}). Si $\mathfrak{N}_1^*$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}_1^*$ et si $\mathfrak{N}_2^*$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}_2^*$, le produit kroneckerien $\mathfrak{N}_1^* \times \mathfrak{N}_2^*$ sera un sous-espace de $\mathfrak{M}_1^* \times \mathfrak{M}_2^*$. Montrons que W appartient au sous-espace $(W\mathfrak{M}_2) \times (W\mathfrak{M}_1)$ et que celui-ci est le plus petit sous-espace de la forme $\mathfrak{N}_1^* \times \mathfrak{N}_2^*$ contenant W. Nous pouvons toujours supposer que les r vecteurs $A_1^*, \ldots, A_r^*$ forment une base de $W\mathfrak{M}_2$ et que les r vecteurs $B_1^*, \ldots, B_r^*$ forment une base de $W\mathfrak{M}_1$.

Il en résulte immédiatement que w_{ij} est nul si $i > r$, ou si $j > r$, ce qui démontre que W appartient à $(W\mathfrak{M}_2) \times (W\mathfrak{M}_1)$. Supposons d'autre part que W appartienne à $\mathfrak{N}_1^* \times \mathfrak{N}_2^*$. Nous pourrons encore supposer que les p' premiers vecteurs de base de $\mathfrak{M}_1^*$ forment une base de $\mathfrak{N}_1^*$ et que les q' premiers vecteurs de base de $\mathfrak{M}_1^*$ forment une base de $\mathfrak{M}_2^*$. D'où $w_{ij} = 0$

si $i > p'$ ou $j > q'$. Donc $W\, A_i$ appartient à $\mathfrak{N}_2^*$ et $W\, B_j$ appartient à $\mathfrak{N}_1^*$; c'est-à-dire $W\,\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{N}_1^*$, $W\,\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{N}_2^*$.
Ce qui précède peut aussi s'énoncer de la façon suivante : Tout élément Z d'un produit kroneckerien $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ détermine un plus petit sous-espace $\mathfrak{N}_1$ de $\mathfrak{M}_1$ et un plus petit sous-espace $\mathfrak{N}_2$ de $\mathfrak{M}_2$ tels que Z appartienne à $\mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2$. La dimension de $\mathfrak{N}_1$ est égale à celle de $\mathfrak{N}_2$ et s'appelle le rang de Z.

<u>Expression canonique de W.</u>

En supposant que les r premiers vecteurs de la base de $\mathfrak{M}_1^*$ forment une base de $W\,\mathfrak{M}_2$ et que les r premiers vecteurs de la base de $\mathfrak{M}_2^*$ forment une base de $W\,\mathfrak{M}_1$, on voit que les vecteurs $W\,A_1, \ldots, W\,A_r$ sont linéairement indépendants ; nous pouvons donc supposer que ce soient les vecteurs $B_1, \ldots, B_r$.
On aura alors :

$$W = A_1^* \times B_1^* + A_2^* \times B_2^* + \ldots\ldots + A_r^* \times B_r^* ,$$

$$W\,(X \times Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots\ldots + x_r\, y_r .$$

§ 7. <u>Fonctions multilinéaires</u>.

Les résultats du paragraphe précédent admettent une généralisation immédiate. Soient $\overset{1}{\mathfrak{M}}, \overset{2}{\mathfrak{M}}, \ldots, \overset{n}{\mathfrak{M}}$ n espaces vectoriels par rapport au corps $\mathfrak{K}$, qui est toujours supposé commutatif, et soit $\overset{i}{X}$ un élément générique de $\overset{i}{\mathfrak{M}}$. Une <u>fonction multilinéaire</u> définie dans $\overset{1}{\mathfrak{M}}, \ldots, \overset{n}{\mathfrak{M}}$ est une fonction qui fait correspondre à tout ensemble $(\overset{1}{X}, \ldots, \overset{n}{X})$ un élément $f(\overset{1}{X}, \ldots, \overset{n}{X})$ d'un espace vectoriel $\mathfrak{N}$ par rapport à $\mathfrak{K}$ et qui se réduit à une fonction linéaire de $\overset{i}{X}$ lorsque $\overset{i}{X}$ varie seul.

Le <u>produit kroneckerien</u> de $\overset{1}{\mathfrak{M}}, \dots, \overset{n}{\mathfrak{M}}$ est un espace vectoriel $\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}} \times \dots \times \overset{n}{\mathfrak{M}}$ pour lequel on a défini une fonction multilinéaire faisant correspondre à $\overset{1}{X}, \overset{2}{X}, \dots, \overset{n}{X}$ un élément $\overset{1}{X} \times \overset{2}{X} \times \dots \times \overset{n}{X}$ de $\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}} \times \dots \times \overset{n}{\mathfrak{M}}$ et telle que les vecteurs $\overset{1}{A}_{i_1} \times \overset{2}{A}_{i_2} \times \dots \times \overset{n}{A}_{i_n}$ forment une base de cet espace vectoriel, en supposant que les éléments $\overset{h}{A}_{i_h}$, où $i_h \in I_h$, forment une base quelconque de $\overset{h}{\mathfrak{M}}$. La condition imposée à cette fonction multilinéaire est encore équivalente à la suivante : Si $\overset{1}{X}, \overset{2}{X}, \dots, \overset{n}{X}$ sont n vecteurs différents de 0, l'équation $\overset{1}{X} \times \overset{2}{X} \times \dots \times \overset{n}{X} = \overset{1}{Y} \times \overset{2}{Y} \times \dots \times \overset{n}{Y}$ entraîne $\overset{i}{Y} = \lambda_i \overset{i}{X}$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Le produit kroneckerien est défini à une isomorphie près. Toute fonction multilinéaire $\varphi(\overset{1}{X}, \overset{2}{X}, \dots, \overset{n}{X})$ est de la forme $\Phi(\overset{1}{X} \times \overset{2}{X} \times \dots \overset{n}{X})$, où Φ est une fonction linéaire définie dans $\overset{1}{\mathfrak{M}}_1 \times \overset{2}{\mathfrak{M}}_2 \times \dots \overset{n}{\mathfrak{M}}_n$.

En général, on ne distinguera pas entre φ et Φ qui se correspondent d'une façon biunivoque.

Etant donnés les produits kroneckeriens $(\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}})$, $(\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}}) \times \overset{3}{\mathfrak{M}}$, $(\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}} \times \overset{3}{\mathfrak{M}})$, la correspondance $(\overset{1}{X} \times \overset{2}{X}) \times \overset{3}{X} \longrightarrow \overset{1}{X} \times \overset{2}{X} \times \overset{3}{X}$ établit une isomorphie canonique entre les deux espaces vectoriels $(\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}}) \times \overset{3}{\mathfrak{M}}$ et $(\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}} \times \overset{3}{\mathfrak{M}})$. De même, si $\overset{1}{\mathfrak{M}}$ et $\overset{2}{\mathfrak{M}}$ sont distincts, la correspondance $(\overset{1}{X} \times \overset{2}{X}) \longrightarrow (\overset{2}{X} \times \overset{1}{X})$ établit une isomorphie canonique entre $(\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}})$ et $(\overset{2}{\mathfrak{M}} \times \overset{1}{\mathfrak{M}})$. Si l'on convient d'identifier les éléments qui se correspondent dans une telle isomorphie canonique, on peut dire que la loi de composition entre espaces vectoriels indiquée par le signe $\times$ est commutative et associative.

Une **forme multilinéaire** $U(\overset{1}{X}, \overset{2}{X}, \dots, \overset{n}{X})$, c'est-à-dire une fonction multilinéaire prenant ses valeurs dans $\mathcal{Q}$, peut être considérée comme une forme linéaire définie dans $\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}} \times \dots \overset{n}{\mathfrak{M}}$. Nous considérons donc U comme un élément du dual $[\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}} \times \dots \overset{n}{\mathfrak{M}}]^*$.

En posant $\overset{h}{X} = \sum_{i_h \in I_h} \overset{h}{x}_{i_h} A_{i_h}$, on a :

$$U(\overset{1}{X} \times \overset{2}{X} \times \dots \times \overset{n}{X}) = \sum u_{i_1 i_2 \dots i_n} \overset{1}{x}_{i_1} \overset{2}{x}_{i_2} \dots \overset{n}{x}_{i_n}.$$

Supposons à partir d'ici que les espaces vectoriels considérés aient des bases finies. Soit $\overset{h}{U}$ un élément de $\overset{h}{\mathfrak{M}}{}^*$, dual de $\overset{h}{\mathfrak{M}}$. A l'ensemble de n formes linéaires $\overset{1}{U}, \overset{2}{U}, \dots, \overset{n}{U}$ correspond une forme multilinéaire U que nous pouvons désigner par $\overset{1}{U} \times \overset{2}{U} \times \dots \times \overset{n}{U}$ et qui est définie par :

$$(\overset{1}{U} \times \overset{2}{U} \times \dots \times \overset{n}{U})(\overset{1}{X} \times \overset{2}{X} \times \dots \times \overset{n}{X}) = (\overset{1}{U}\ \overset{1}{X})(\overset{2}{U}\ \overset{2}{X}) \dots (\overset{n}{U}\ \overset{n}{X}),$$

quels que soient les éléments $\overset{1}{X}, \overset{2}{X}, \dots, \overset{n}{X}$. Les éléments $\overset{1}{A}{}^*_{i_1} \times \overset{2}{A}{}^*_{i_2} \times \dots \times \overset{n}{A}{}^*_{i_n}$ et $\overset{1}{A}_{i_1} \times \overset{2}{A}_{i_2} \times \dots \times \overset{n}{A}_{i_n}$ forment deux bases associées de $(\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}} \times \dots \times \overset{n}{\mathfrak{M}})^*$ et de $(\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}} \times \dots \times \overset{n}{\mathfrak{M}})$.

$$(\overset{1}{A}{}^*_{i_1} \times \overset{2}{A}{}^*_{i_2} \times \dots \times \overset{n}{A}{}^*_{i_n})(\overset{1}{A}_{j_1} \times \overset{2}{A}_{j_2} \times \dots \times \overset{n}{A}_{j_n}) = \delta^{j_1 j_2 \dots j_n}_{i_1 i_2 \dots i_n},$$

où $\delta^{j_1 j_2 \dots j_n}_{i_1 i_2 \dots i_n}$ est le symbole de Kronecker généralisé ; celui-ci représente le nombre 1 si $i_1 = j_1, \dots, i_n = j_n$, et le nombre 0 dans les autres cas. Nous avons ainsi identifié l'espace $(\overset{1}{\mathfrak{M}} \times \overset{2}{\mathfrak{M}} \times \dots \times \overset{n}{\mathfrak{M}})^*$ avec le produit kroneckerien $\overset{1}{\mathfrak{M}}{}^* \times \overset{2}{\mathfrak{M}}{}^* \times \dots \times \overset{n}{\mathfrak{M}}{}^*$.

L'élément $U(\overset{1}{X} \times \overset{2}{X} \times \dots \times \overset{n}{X})$ de $\mathcal{Q}$ est une fonction multilinéaire de $U, \overset{1}{X}, \dots, \overset{n}{X}$. A l'ensemble $U, \overset{\alpha_1}{X}, \dots, \overset{\alpha_k}{X}$ correspond donc une forme linéaire en $\overset{\alpha_{k+1}}{X}, \dots, \overset{\alpha_n}{X}$, c'est-à-dire un élément de $\overset{\alpha_{k+1}}{\mathfrak{M}}{}^* \times \dots \times \overset{\alpha_n}{\mathfrak{M}}{}^*$; $(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)$ désigne une permutation des nombres $(1,2,\dots,n)$. Désignons cet élément par $U(\overset{\alpha_1}{X} \times \overset{\alpha_2}{X} \times \dots \overset{\alpha_n}{X})$; c'est aussi une fonction multilinéaire de $U, \overset{\alpha_1}{X}, \dots, \overset{\alpha_n}{X}$. Supposons U donné. L'ensemble des éléments $U(\overset{1}{X} \times \overset{2}{X} \times \dots \times \overset{n}{X})$, où ne figure pas $\overset{i}{X}$, engendre un sous-espace $\overset{i}{\mathfrak{N}}{}^*$ de $\overset{i}{\mathfrak{M}}{}^*$. La dimension de $\overset{i}{\mathfrak{N}}{}^*$ s'appellera le rang de U par rapport à $\overset{i}{\mathfrak{M}}{}^*$. Le sous-espace $\overset{1}{\mathfrak{N}}{}^* \times \overset{2}{\mathfrak{N}}{}^* \times \dots \overset{n}{\mathfrak{N}}{}^*$ de $\overset{1}{\mathfrak{M}}{}^* \times \overset{2}{\mathfrak{M}}{}^* \times \dots \times \overset{n}{\mathfrak{M}}{}^*$ est le plus petit sous-espace qui contient U et qui soit un produit kroneckerien de la forme indiquée.

Remarquons encore qu'une fonction multilinéaire F définie dans $\overset{1}{\mathfrak{M}}, \overset{2}{\mathfrak{M}}, \dots, \overset{n}{\mathfrak{M}}$ et prenant ses valeurs dans l'espace vectoriel $\mathfrak{N}$ correspond d'une façon biunivoque à une forme multilinéaire définie dans $\overset{1}{\mathfrak{M}}, \overset{2}{\mathfrak{M}}, \dots, \overset{n}{\mathfrak{M}}, \mathfrak{N}^*$; c'est la forme W telle que :

$$W(\overset{1}{X}, \overset{2}{X}, \dots, V) = F(\overset{1}{X}, \overset{2}{X}, \dots, \overset{n}{X})\, V \quad , \qquad V \in \mathfrak{N}^* .$$

L'étude d'une fonction multilinéaire se ramène donc toujours à l'étude d'une forme multilinéaire.
