COTE : BKI 03-4.1

LIVRE III
TOPOLOGIE GENERALE
CHAPITRE VII (ETAT 3)
UTILISATION DES NOMBRES REELS EN TOPOLOGIE GENERALE

Rédaction n° 029

Nombre de pages : 109

Nombre de feuilles : 109

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Livre III Top. générale
Chap VII. $\boxed{\text{Etat 3.}}$
Nombres réels en topologie

$\boxed{29}$

Chapitre IX A 29

LIVRE III

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Ancien **CHAPITRE VII (Etat 3)**

UTILISATION DES NOMBRES RÉELS EN TOPOLOGIE GÉNÉRALE

§ 1. Génération d'une structure uniforme par une famille d'écarts. Espaces uniformisables.

1. Ecarts. Définition 1. Etant donné un ensemble E, on appelle écart sur E toute application f de $E \times E$ dans l'intervalle $[0, +\infty]$ de la droite achevée $\overline{R}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $f(x,x)=0$ quel que soit $x \in E$;

b) $f(x,y)=f(y,x)$ quels que soient $x \in E$ et $y \in E$;

c) $f(x,y) \leqslant f(x,z)+f(z,y)$ quels que soient $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$ (inégalité du triangle).

Exemples. 1) Sur l'espace numérique R^n, la distance euclidienne (chap.V, § 2) est un écart.

2) Etant donné un ensemble quelconque E, la fonction f définie sur $E \times E$ par les conditions : $f(x,x)=0$ pour tout $x \in E$, $f(x,y)=+\infty$ si $x \neq y$, est un écart sur E.

3) Etant donnée une fonction numérique finie g définie dans un ensemble quelconque E, la fonction f définie dans $E \times E$ par $f(x,y)=|g(x)-g(y)|$ est un écart sur E.

4) Soit E l'ensemble des applications continues de l'intervalle $[0,1]$ de R dans R. Si, pour tout couple d'éléments x, y de E, on pose $f(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt$, f est un écart sur E

Remarques.- 1) L'exemple 2) ci-dessus montre qu'un écart peut prendre la valeur $+\infty$ pour certains couples d'éléments de E.

2) On notera que si f est un écart sur E , on peut en général avoir $f(x,y)=0$ pour des couples (x,y) tels que $x\neq y$; c'est ce que montre l'exemple 3) ci-dessus.

De l'inégalité du triangle, on déduit que, si $f(x,z)$ et $f(y,z)$ sont __finis__, il en est de même de $f(x,y)$; en outre, on a $f(x,z)\leqslant f(y,z)+f(x,y)$ et $f(y,z)\leqslant f(x,z)+f(x,y)$, et par suite

$$|f(x,z)-f(y,z)|\leqslant f(x,y) \quad (1)$$

Si f est un écart sur E , il en est de même de a.f , quel que soit le nombre $a>0$. Si $(f_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille quelconque d'écarts sur E , la somme $\sum_{\iota\in I} f_\iota(x,y)$ est définie quel que soit $(x,y)\in E\times E$; si on désigne sa valeur par $f(x,y)$, f est un écart sur E . De même l'__enveloppe supérieure__ g de la famille (f_ι) (chap.IV, § 5, n°5) est un écart sur E , car des relations $f_\iota(x,y)\leqslant f_\iota(x,z)+f_\iota(z,y)$, on déduit

$$\sup_{\iota\in I} f_\iota(x,y)\leqslant \sup_{\iota\in I}(f_\iota(x,z)+f_\iota(z,y))\leqslant \sup_{\iota\in I} f_\iota(x,z)+\sup_{\iota\in I} f_\iota(z,y)$$

(chap. IV, § 5 , formule (17)).

__2. Définition d'une structure uniforme par une famille d'écarts__. Dans l'espace numérique R^n , on a vu que, si, pour tout nombre $a>0$ on désigne par U_a l'ensemble des couples (x,y) de points de R^n dont la distance euclidienne est $\leqslant a$, les U_a forment un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de R^n lorsque a parcourt l'ensemble des nombres >0 .

Plus généralement, soit f un écart sur un ensemble E ; pour tout $a>0$, posons $U_a=\overset{-1}{f}([0,a])$; montrons que, lorsque a parcourt l'ensemble des nombres >0 , les U_a forment un __système fondamental d'entourages__ d'une structure uniforme sur E . En effet, l'axiome (U'_I) est vérifié en vertu de la condition a) de la déf.1 ; si $a<b$, on a $U_a\subset U_b$, donc les U_a forment une base de filtre ; d'après la condition b), on a $\overset{-1}{U_a}=U_a$,

donc (U'_{II}) est vérifié ; enfin, d'après l'inégalité du triangle, on a $\overset{2}{U}_a \subset U_{2a}$, donc (U'_{III}) est vérifié. On peut donc poser la définition suivante :

Définition 2. *Etant donné un écart f sur un ensemble E , on appelle structure uniforme définie par f la structure uniforme sur E ayant pour système fondamental d'entourages la famille des ensembles* $\overset{-1}{f}([0,a])$, *où* a *parcourt l'ensemble des nombres* >0 .

On dit que deux écarts sur E sont équivalents s'ils définissent la même structure uniforme.

Remarques. 1) Pour toute suite (a_n) de nombres >0 , tendant vers 0, les U_{a_n} forment un système fondamental d'entourages de la structure uniforme définie par f .

2) La définition d'une structure uniforme par un écart f revient à prendre comme système fondamental d'entourages de cette structure, l'*image réciproque* par f du filtre des voisinages du point 0 dans le sous-espace $[0,+\infty]$ de $\overline{R}$. On notera que ce procédé est tout à fait analogue à celui qui nous a permis de définir les structures uniformes d'un groupe topologique (chap.III, § 3).

Soient f et g deux écarts sur E ; d'après la déf.2, pour que la structure uniforme définie par f soit *moins fine* que la structure uniforme définie par g , il faut et il suffit que, pour tout $a>0$, il existe $b>0$ tel que la relation $g(x,y) \leqslant b$ entraîne $f(x,y) \leqslant a$; pour que f et g soient des écarts *équivalents*, il faut et il suffit que, pour tout $a>0$, il existe $b>0$ tel que $g(x,y) \leqslant b$ entraîne $f(x,y) \leqslant a$, et que $f(x,y) \leqslant b$ entraîne $g(x,y) \leqslant a$.

En particulier, s'il existe une constante $k>0$ telle que $f \leqslant k.g$, la structure uniforme définie par f est moins fine que celle définie par g .

Soit φ une application de l'intervalle $[0,+\infty]$ dans lui-même, satisfaisant aux conditions suivantes : 1° $\varphi(0)=0$, et φ est continue au point 0 ; 2° φ est croissante dans $[0,+\infty]$, et strictement croissante dans un voisinage de 0 ; 3° quels que soient $u \geqslant 0$, et $v \geqslant 0$, $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u)+\varphi(v)$. D'après les déf.1 et 2, pour tout écart f sur un ensemble E , la fonction composée $g=\varphi \circ f$ est un écart <u>équivalent</u> à f .

Le lecteur vérifiera aisément qu'on peut par exemple prendre pour φ l'une des fonctions suivantes :

$$\sqrt{u}\ , \quad \log(1+u)\ , \quad u/(1+u)\ , \quad \inf(u,1)\ .$$

Les deux derniers exemples montrent qu'il existe toujours des écarts <u>bornés</u> équivalents à un écart quelconque donné (fini ou non).

<u>Définition 3</u>. <u>Etant donnée une famille</u> $(f_\iota)_{\iota \in I}$ <u>d'écarts sur un ensemble</u> E <u>on appelle structure uniforme définie par la famille</u> (f_ι) <u>sur l'ensemble</u> E <u>la borne supérieure de l'ensemble des structures uniformes définies sur</u> E <u>par chacun des écarts</u> f_ι .

<u>On dit que deux familles d'écarts sur E sont équivalentes si elles définissent la même structure uniforme sur E</u> .

D'après la définition de la borne supérieure d'un ensemble de structures uniformes (chap.II, § 1), le filtre d'entourages de la structure uniforme $\mathcal{U}$ définie sur E par une famille d'écarts $(f_\iota)_{\iota \in I}$ est le filtre <u>engendré</u> (chap.I, § 5) par la famille des ensembles $\overset{-1}{f_\iota}([0,a])$, où ι parcourt I et <u>a</u> l'ensemble des nombres >0 . En d'autres termes, pour avoir un système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}$, il faut procéder de la manière suivante :

prendre arbitrairement un nombre fini d'indices $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n$ et, pour chacun des ι_k, un nombre $a_k > 0$, puis considérer l'ensemble des couples $(x,y) \in E \times E$ tels que $f_{\iota_k}(x,y) \leq a_k$ pour $1 \leq k \leq n$; ces ensembles (pour tous les choix possibles des ι_k et des a_k) forment un système fondamental d'entourages de $\mathcal{U}$. On peut d'ailleurs se borner au cas où tous les a_k sont égaux à un <u>même</u> nombre $a > 0$, l'entourage formé des (x,y) tels que $\operatorname{Max}_k (f_{\iota_k}(x,y)) \leq \operatorname{Min}_k (a_k)$ étant évidemment contenu dans le précédent. Si on désigne par $(g_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ la famille des fonctions $\operatorname{Max}(f_\iota)_{\iota \in H}$, où H parcourt l'ensemble des parties <u>finies</u> de I, on voit que les ensembles $\overset{-1}{g_\varkappa}([0,a])$, où $\varkappa$ parcourt K et a l'ensemble des nombres > 0, forment un <u>système fondamental d'entourages</u> de la structure $\mathcal{U}$. Or, les $g_\varkappa$ sont des <u>écarts</u> sur E ($n^o 1$), et le maximum d'un nombre fini de fonctions de la famille $(g_\varkappa)$ appartient encore par définition à cette famille (propriété qu'on exprime en disant que la famille $(g_\varkappa)$ est <u>saturée</u>) ; il en résulte que $(g_\varkappa)$ est une famille d'écarts <u>équivalents</u> à (f_ι) ; on dit que c'est la famille d'écarts obtenue en <u>saturant</u> (f_ι), et ce qui précède prouve qu'on peut toujours se borner à considérer les structures uniformes définies par des familles d'écarts <u>saturées</u>.

Dans le cas particulier où I est un ensemble <u>fini</u>, ce raisonnement montre que la structure uniforme définie par la famille d'écarts $(f_\iota)_{\iota \in I}$ est aussi définie par le <u>seul</u> écart $g = \operatorname{Max}(f_\iota)_{\iota \in I}$.

Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ deux structures uniformes sur E, définies respectivement par deux familles d'écarts <u>saturées</u> $(f_\iota)_{\iota \in I}$, $(g_\varkappa)_{\varkappa \in K}$; pour que $\mathcal{U}$ soit <u>moins fine</u> que $\mathcal{U}'$, il faut et il suffit que, pour tout indice $\iota \in I$ et tout nombre $a > 0$, il existe un indice $\varkappa \in K$ et un nombre $b > 0$ tel que la relation $g_\varkappa(x,y) \leq b$ entraîne $f_\iota(x,y) \leq a$.

<u>Exemple de structure uniforme définie par une famille d'écarts.</u>

Soit $(f_\iota)_{\iota \in I}$ une famille quelconque de <u>fonctions numériques</u> (finies) définies sur un ensemble E . Soit $\mathcal{U}$ la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les f_ι (chap.II, § 5) ; $\mathcal{U}$ est identique à la structure uniforme définie sur E par les écarts $g_\iota(x,y) = |f_\iota(x)-f_\iota(y)|$, comme il résulte immédiatement de la définition des entourages de $\mathcal{U}$ (chapII, § 5).

3. <u>Propriétés des structures uniformes définies par des familles d'écarts.</u> Soit $\mathcal{U}$ une structure uniforme définie sur un ensemble E par une famille d'écarts (f_ι) ; si on munit $E \times E$ de la structure uniforme produit de $\mathcal{U}$ par elle-même, chacune des fonctions numériques f_ι est <u>uniformément continue</u> dans $E \times E$; on a en effet, d'après (1)

$$\left| f_\iota(x,y)-f_\iota(x',y') \right| \leq f_\iota(x,x')+ f_\iota(y,y')$$

donc les relations $f_\iota(x,x') \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $f_\iota(y,y') \leq \frac{\varepsilon}{2}$ entraînent $\left| f_\iota(x,y)-f_\iota(x',y') \right| \leq \varepsilon$.

Pour que $\mathcal{U}$ soit <u>séparée</u>, il faut et il suffit, d'après la définition de ses entourages, que pour tout couple de points <u>distincts</u> x,y de E , il existe un indice ι tel que $f_\iota(x,y) \neq 0$.

En particulier, si $\mathcal{U}$ est définie par <u>un seul</u> écart f , pour que $\mathcal{U}$ soit séparée, il faut et il suffit que la relation $f(x,y)=0$ entraîne $x=y$ (cf. § 2) .

Si A est un sous-ensemble non vide de E , la restriction à $A \times A$ d'un écart sur E est évidemment un écart sur A ; il est clair que la structure uniforme <u>induite</u> par $\mathcal{U}$ sur A est définie par la famille des restrictions à $A \times A$ des écarts f_ι .

Etudions maintenant le <u>complété</u> de l'espace uniforme E , lorsque $\mathcal{U}$ est séparée.

<u>Proposition 1</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace uniforme séparé, dont la structure uniforme</u> $\mathcal{U}$ <u>est définie par une famille d'écarts</u> (f_ι) ; <u>soit</u> $\hat{E}$ <u>le complété de</u> E . <u>Les fonctions</u> f_ι <u>se prolongent par continuité à</u> $\hat{E}\times\hat{E}$; <u>les fonctions prolongées</u> $\bar{f}_\iota$ <u>sont des écarts sur</u> $\hat{E}$, <u>et la structure uniforme de</u> $\hat{E}$ <u>est identique à la structure uniforme définie par la famille</u> $(\bar{f}_\iota)$.

Tout d'abord, les f_ι peuvent être prolongées par continuité à $\hat{E}\times\hat{E}$, puisqu'elles sont uniformément continues dans $E\times E$, et les fonctions prolongées $\bar{f}_\iota$ sont uniformément continues dans $\hat{E}\times\hat{E}$ (chap.II, § 3, th.1); en outre, ce sont des écarts sur $\hat{E}$, en vertu du principe de prolongement des inégalités (chap.IV, § 5, th.1). Désignons par $\mathcal{U}_1$ la structure uniforme sur $\hat{E}$ obtenue par complétion, par $\mathcal{U}_2$ la structure uniforme définie par la famille d'écarts $(\bar{f}_\iota)$, par $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les topologies définies sur $\hat{E}$ par les structures uniformes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ respectivement. Pour montrer que $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont identiques, remarquons d'abord que $\mathcal{U}_2$ est <u>moins fine</u> que $\mathcal{U}_1$, et par suite $\mathcal{C}_2$ <u>moins fine</u> que $\mathcal{C}_1$. En effet, chacune des fonctions $\bar{f}_\iota$ est uniformément continue dans $\hat{E}\times\hat{E}$, quand on munit $\hat{E}$ de la structure $\mathcal{U}_1$; pour tout $a>0$, il existe donc un entourage V de la structure $\mathcal{U}_1$ tel que, pour tout couple $(x,y)\in V$, on ait $|\bar{f}_\iota(x,y)-\bar{f}_\iota(x,x)|\leqslant a$, c'est-à-dire (puisque $\bar{f}_\iota(x,x)=0$) , $V\subset \overset{-1}{\bar{f}_\iota}([0,a])$; tout entourage de la structure $\mathcal{U}_2$ est donc un entourage de la structure $\mathcal{U}_1$.

En second lieu, il est clair que $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ induisent sur E la <u>même</u> structure uniforme $\mathcal{U}$.

Soit alors $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy <u>sur</u> E (pour la structure $\mathcal{U}$) ; il converge dans $\hat{E}$, munie la topologie $\mathcal{C}_1$, donc il converge aussi dans $\hat{E}$, muni de la topologie moins fine $\mathcal{C}_2$ (chap.I, § 6) .

D'autre part, E est partout dense dans $\hat{E}$, muni de la topologie $\mathcal{C}_1$; il est donc aussi partout dense dans $\hat{E}$, muni de la topologie moins fine $\mathcal{C}_2$ (chap.I, §2). Dans ces conditions, le lemme de la démonstration du th. de complétion (chap.II, §3,th.2) montre que $\mathcal{U}_2$ est une structure uniforme d'espace complet sur $\hat{E}$; mais alors, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont nécessairement identiques, d'après la prop.8 du chap.II, §3 .

4. Le théorème de Chittenden. L'intérêt du mode de définition d'une structure par une famille d'écarts réside dans le fait qu'il permet d'obtenir toutes les structures uniformes. De façon ~~smix~~ précise :

Théorème 1 (Chittenden). Etant donnée une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur un ensemble E , il existe une famille d'écarts sur E telle que la structure uniforme définie par cette famille soit identique à $\mathcal{U}$.

Pour tout entourage V de la structure uniforme $\mathcal{U}$, définissons par récurrence une suite d'entourages symétriques (U_n) telle que $U_1 \subset V$, et $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$ quel que soit $n \geqslant 1$; la suite (U_n) est un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme $\mathcal{U}_V$ moins fine que $\mathcal{U}$; en outre, il est clair que $\mathcal{U}$ est la borne supérieure de toutes les structures $\mathcal{U}_V$, lorsque V parcourt le filtre des entourages de $\mathcal{U}$. Le th.1 sera donc une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 2. Si une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur E possède un système fondamental dénombrable d'entourages symétriques (U_n) tel que $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$ pour tout n , il existe un écart f sur E tel que $\mathcal{U}$ soit identique à la structure uniforme définie par f .

Définissons comme suit une fonction numérique g dans $E \times E$: $g(x,y)=0$ si $(x,y) \in U_n$ quel que soit n ; $g(x,y)=2^{-k}$ si $(x,y) \in U_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant k$, et $(x,y) \notin U_{k+1}$; $g(x,y)=1$ si $(x,y) \notin U_1$.

La fonction g est symétrique, positive, et on a $g(x,x)=0$ pour tout $x \in E$. Nous allons en déduire un <u>écart</u> f en posant ~~pour tout x~~

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=1}^{p} g(z_i, z_{i+1})$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble de toutes les suites finies $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant p+1}$ (p arbitraire) telles que $z_1=x$, $z_{p+1}=y$. Il résulte en effet de cette définition que f satisfait à l'inégalité du triangle, et est symétrique et positive ; en outre on a identiquement

(2) $$f(x,y) \leqslant g(x,y)$$

ce qui montre d'abord que $f(x,x)=0$ pour tout $x \in E$, donc que f est un écart sur E . La relation (2) prouve de plus que, pour tout $a > 0$, l'ensemble $\overset{-1}{f}([0,a])$ est un entourage de la structure $\mathcal{U}$, car il contient U_k pour tout indice k tel que $2^{-k} < a$.

Il reste à montrer qu'inversement, tout entourage U_k contient un ensemble de la forme $\overset{-1}{f}([0,a])$; cela résultera de la relation

(3) $$f(x,y) \geqslant \frac{1}{2} g(x,y)$$

car on en déduit que U_k contient $\overset{-1}{f}([0,2^{-k-1}])$.

Pour démontrer (3), il suffit d'établir que, pour toute suite $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant p+1}$ de $p+1$ points de E , telle que $z_1=x$, $z_{p+1}=y$, on a

(4) $$\sum_{i=1}^{p} g(z_i, z_{i+1}) \geqslant \frac{1}{2} g(x,y)$$

C'est vrai pour $p=1$; montrons que, si c'est vrai pour $p<m$, c'est encore vrai pour $p=m$. Posons $\sum_{i=1}^{p} g(z_i, z_{i+1})=a$; comme $g(x,y) \leqslant 1$, il suffit de faire la démonstration lorsque $a < \frac{1}{2}$. Or il existe deux termes consécutifs z_h, z_{h+1} de la suite (z_i) tels que

$$\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{a}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{a}{2}$$

donc l'inégalité (4), supposée vraie pour les suites de $m-1$ points au plus, donne $g(x,z_h) \leqslant a$, $g(z_{h+1},y) \leqslant a$. D'autre part, on a évidemment

$g(z_h,z_{h+1}) \leqslant a$; si k est le plus petit entier >0 tel que $2^{-k} \leqslant a$, on a $k \geqslant 3$, et $(x,z_h) \in U_k$, $(z_h,z_{h+1}) \in U_k$, $(z_{h+1},y) \in U_k$; donc $(x,y) \in U_k \subset U_{k-1}$, ce qui entraîne $g(x,y) \leqslant 2^{1-k} \leqslant 2a$.

C.Q.F.D.

5. Espaces uniformisables. Nous avons posé au chap.II (§ 4) le problème de la caractérisation des espaces topologiques uniformisables ; la solution en est donnée par le th. suivant :

Théorème 2. Pour qu'un espace topologique E soit uniformisable, il faut et il suffit qu'il vérifie l'axiome suivant :

(O_{IV}) Quels que soient le point $x_o \in E$ et le voisinage V de x_o, il existe une fonction numérique continue dans E, prenant ses valeurs dans $[0,1]$, égale à 0 au point x_o et à 1 dans $\complement V$.

La condition est nécessaire. En effet, s'il existe une structure uniforme compatible avec la topologie de E, cette structure peut, d'après le th.1, être définie par une famille (f_ι) d'écarts sur E, et on peut toujours supposer que cette famille est saturée (n°2). D'après la définition des entourages de la structure uniforme définie par une telle famille d'écarts, il existe un écart f_α de la famille (f_ι), et un nombre $a>0$, tels que $f_\alpha(x_o,x) \geqslant a$ pour tout $x \in \complement V$; il en résulte que la fonction $f(x)=\mathrm{Min}(1, \frac{1}{a} f_\alpha(x_o,x))$ remplit bien toutes les conditions énoncées dans (O_{IV}).

La condition est suffisante ; soit en effet Φ l'ensemble des applications continues de E dans $[0,1]$. L'axiome (O_{IV}) prouve que la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les fonctions appartenant à Φ est compatible avec la topologie de E (chap.II, § 5).

Définition 4. On dit qu'un espace topologique est complètement régulier s'il est uniformisable et séparé.

Il revient au même, d'après le th.2, de dire qu'un espace est complètement régulier s'il satisfait aux axiomes (H) et (O_{IV}).

<u>Remarque</u>. L'axiome (O_{IV}) entraîne (O_{III}), car si V est un voisinage de x_o, et f une fonction numérique continue, à valeurs dans $[0,1]$, et telle que $f(x_o)=0$, $f(x)=1$ pour tout $x \in \complement V$, l'ensemble $\overset{-1}{f}([0, \frac{1}{2}])$ est un voisinage <u>fermé</u> de x_o contenu dans V. En particulier, tout espace <u>complètement régulier</u> est <u>régulier</u> (ce qui justifie la terminologie). On peut par contre donner des exemples d'espaces réguliers qui ne sont pas complètement réguliers (*), ce qui montre que (O_{III}) n'entraîne pas (O_{IV}).

On sait (chap.II, §4,th.1) que tout espace compact est complètement régulier, et par suite aussi tout sous-espace d'un espace compact. Nous pouvons maintenant compléter cette proposition en démontrant sa <u>réciproque</u>, autrement dit :

<u>Proposition 3</u>. <u>Pour qu'un espace topologique E soit complètement régulier il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un sous-espace d'un espace compact</u>.

Reprenons en effet la structure uniforme la moins fine sur E, rendant uniformément continues toutes les applications continues de E dans $[0,1]$ nous avons utilisé cette structure dans la démonstration du th.2, et vu qu'elle est compatible avec la topologie de E si E est uniformisable. Si en outre E est séparé, cette structure uniforme est une structure d'espace <u>précompact</u>, en vertu de la compacité de l'intervalle $[0,1]$ et de la prop.5 du chap.II, §5. Le complété de E pour cette structure est donc compact, d'où la proposition.

(*) Voir A. TYCHONOFF, <u>Math.Ann.</u>, t. CII (1930), p. 553.

On peut encore dire qu'un espace complètement régulier peut être plongé dans un espace compact ; il est souvent commode de présenter ce résultat de la façon suivante :

Appelons, de façon générale, cube un espace topologique K^I, produit topologique d'une famille d'espaces identiques à un intervalle compact K de $\mathbf{R}$, et ayant pour ensemble d'indices un ensemble I quelconque (si I est fini et a n éléments, on retrouve la notion de cube fermé à n dimensions définie au chap.V, §1) ; un cube est un espace compact (chap.I, § 10, th.2).

Proposition 4. Si un espace topologique E est complètement régulier, il est homéomorphe à un sous-espace d'un cube.

Désignons en effet par $(f_\iota)_{\iota\in I}$ la famille de toutes les applications continues de E dans $K=[0,1]$, et considérons l'application $x \to (f_\iota(x))$ de E dans K^I, que nous désignerons par g. D'après les axiomes (H) et (O_{IV}), pour tout couple de points distincts x, y de E, il existe un indice ι tel que $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$, donc g est une application biunivoque de E dans K^I. En outre, il est immédiat que g est un isomorphisme de la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les f_ι, sur la structure uniforme induite sur $g(E)$ par la structure uniforme (produit) de K^I ; a fortiori, g est un homéomorphisme de E sur $g(E)$.

Remarque. Un espace localement compact étant complètement régulier (ce qui peut se voir sans utiliser le th. d'Alexandroff, en remarquant qu'un espace est nécessairement uniformisable si chacun de ses points possède un voisinage fermé uniformisable), la prop.3 montre à nouveau qu'un tel espace E peut être plongé dans un espace compact F ; mais en général, l'espace compact F défini par le procédé de la prop.3 sera tel que le complémentaire de E dans F

aura plus d'un point (cf. exerc.7). On peut retrouver le th. d'Alexandroff en modifiant légèrement le procédé de la prop.3, de la façon suivante :

Soit (g_ι) la famille des fonctions numériques continues dans E , à valeurs dans $[0,1]$, et <u>nulles dans le complémentaire d'un ensemble compact</u> (ensemble qui dépend de g_ι). Soit $\mathcal{U}$ la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les g_ι ; cette structure est compatible avec la topologie de E , car tout voisinage U d'un point $x_0 \in E$ contient un voisinage compact V de x_0 , et d'après (O_{IV}) il existe une application continue de E dans $[0,1]$, égale à 1 au point x_0 , et à 0 dans $\complement V$; cette application appartient donc à la famille (g_ι). L'espace E , muni de la structure $\mathcal{U}$, est <u>précompact</u> d'après la prop.5 du chap.II, § 5 ; le th. d'Alexandroff sera démontré si nous établissons que le complémentaire de E dans son complété $\hat{E}$ (pour la structure $\mathcal{U}$) se compose d'un seul point. Or, soit $\mathfrak{G}$ le filtre des complémentaires des ensembles relativement compacts dans E ; $\mathfrak{G}$ est un <u>filtre de Cauchy</u> pour la structure $\mathcal{U}$, car si on prend un nombre fini quelconque d'indices $\iota_1, \ldots, \iota_n$ l'ensemble des points $x \in E$ où toutes les fonctions $g_{\iota_1}, \ldots, g_{\iota_n}$ s'annulent est le complémentaire d'un ensemble relativement compact. Ce filtre $\mathfrak{G}$, qui ne converge pas dans E , a donc pour limite un point $\omega \in \hat{E}$; si maintenant $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy quelconque sur E (pour la structure $\mathcal{U}$), ou bien il a un point adhérent, et est alors convergent dans E (chap.II, § 3, prop.4), ou bien il est <u>plus fin</u> que $\mathfrak{G}$ (chap.I, § 10, th.3), et a pour limite ω , ce qui prouve que ω est le seul point de $\hat{E}$ n'appartenant pas à E .

6. Fonctions semi-continues dans un espace uniformisable. Au chap. IV (§ 6, cor. du th. 4) on a vu que, dans un espace topologique, l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions numériques continues est une fonction semi-continue inférieurement. Dans un espace uniformisable, on a en outre une réciproque de cette proposition :

Proposition 5. Pour que toute fonction numérique f semi-continue inférieurement dans un espace topologique E soit l'enveloppe supérieure des fonctions numériques continues dans E et $\leqslant f$, il faut et il suffit que E soit uniformisable.

La condition est nécessaire : en effet, soit x_0 un point quelconque de E, V un voisinage ouvert quelconque de x_0 ; la fonction caractéristique φ_V de l'ensemble V est semi-continue inférieurement (chap. IV, § 6, cor. de la prop. 1) ; par hypothèse, il existe donc une fonction numérique g continue dans E, telle que $g \leqslant \varphi_V$, et $g(x_0)=a>0$; la fonction continue $\frac{1}{a} g^+$ prend ses valeurs dans $[0,1]$, est égale à 0 dans $\complement V$ et à 1 au point x_0 ; donc (th. 2), E est uniformisable.

La condition est suffisante. Considérons d'abord le cas où f prend ses valeurs dans $[-1,+1]$. Il faut montrer que, pour tout $x_0 \in E$ et tout nombre $a < f(x_0)$, il existe une fonction numérique g, continue dans E, telle que $g \leqslant f$ et $g(x_0) \geqslant a$. Si $f(x_0)=-1$, il suffit de prendre pour g la constante -1. Si $f(x_0)>-1$, on peut se borner au cas où on a $-1 \leqslant a < f(x_0)$; d'après l'hypothèse, il existe un voisnage V de x_0 tel que $f(x) \geqslant a$ pour tout $x \in V$. Comme E est uniformisable, il existe une fonction numérique h, continue dans E, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $h(x_0)=0$ et $h(x)=1$ dans $\complement V$. Il suffit alors de prendre $g(x)=a-(a+1)h(x)$ pour avoir une fonction continue répondant aux conditions posées.

Si maintenant f est une fonction quelconque semi-continue inférieurement dans E , il en est de même de la fonction $f_1 = \frac{f}{1+|f|}$, et cette dernière prend ses valeurs dans $[-1,+1]$. Soit x_0 un point quelconque de E ; si $f(x_0)=-\infty$, la fonction g égale à la constante $-\infty$ est continue dans E et telle que $g \leqslant f$, $g(x_0)=f(x_0)$. Si $f(x_0) > -\infty$, soit a un nombre réel quelconque $< f(x_0)$; il existe une fonction continue numérique g_1 prenant ses valeurs dans $[-1,+1]$, telle que $g_1 \leqslant f_1$ et $g_1(x_0) \geqslant \frac{a}{1+|a|}$ par suite, la fonction $g = \frac{g_1}{1-|g_1|}$ (prolongée de sorte que $g(x)=-\infty$ si $g_1(x)=-1$ $g(x)=+\infty$ si $g_1(x)=+1$) est continue dans E , telle que $g \leqslant f$ et $g(x_0) \geqslant a$, d'où la proposition.

Exercices. 1) Pour qu'une fonction numérique positive f définie sur un ensemble E soit un écart sur E , il faut et il suffit que $f(x,x)=0$ pour tout $x \in E$, et que

$$f(x,y) \leqslant f(x,z)+f(y,z)$$

quels que soient x,y,z dans E .

2) Soit f une application de $E \times E$ dans $[0,+\infty]$; pour que la famille des ensembles $\overset{-1}{f}([0,a])$, où a parcourt l'ensemble des nombres >0, constitue un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur E , il faut et il suffit que f satisfasse aux conditions suivantes : a) quel que soit $x \in E$, $f(x,x)=0$; b) quel que soit $a>0$, il existe $b>0$ tel que la relation $f(x,y) \leqslant b$ entraîne $f(x,y) \leqslant a$; c) quel que soit $a>0$, il existe $c>0$ tel que les relations $f(x,z) \leqslant c$ et $f(z,y) \leqslant c$ entraînent $f(x,y) \leqslant a$.

Les conditions b) et c) sont en particulier remplies s'il existe une application φ de $I=[0,+\infty]$ dans lui-même, continue et nulle au point 0 , et une application ψ de $I \times I$ dans I , continue et nulle au point $(0,0)$, telles que l'on ait identiquement $f(y,x) \leqslant \varphi(f(x,y))$ et $f(x,y) \leqslant \psi(f(x,z),f(z,y))$ quels que soient x,y,z dans E.

3) Soit (f_ι) une famille d'écarts sur un ensemble E. Montrer que la structure uniforme définie par cette famille est la moins fine des structures uniformes sur E telles que toutes les fonctions f_ι soient uniformément continues dans l'espace produit $E \times E$.

4) Soient E un espace topologique, $\mathcal{C}$ sa topologie, (f_ι) une famille <u>saturée</u> d'écarts sur E, $\mathcal{U}$ la structure uniforme définie par la famille (f_ι).

a) Pour que la topologie déduite de $\mathcal{U}$ soit <u>moins fine</u> que $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que les f_ι soient continues dans $E \times E$ (pour la topologie produit de $\mathcal{C}$ par elle-même).

b) Pour que la topologie déduite de $\mathcal{U}$ soit <u>plus fine</u> que $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que, pour tout $x_0 \in E$ et tout voisinage V de x_0 (pour la topologie $\mathcal{C}$), il existe un indice ι et un nombre $a > 0$ tels que, pour tout $x \in \complement V$, on ait $f(x_0,x) \geqslant a$.

5) Soit E un espace uniformisable non séparé, R la relation : $y \in \overline{\{x\}}$ entre deux points génériques x,y de E.

a) Montrer que R est une relation d'équivalence dans E, que toute fonction continue dans E est compatible avec la relation R (<u>Ens</u>.R, § 5, n°7), et que l'espace quotient E/R est complètement régulier.

b) Pour toute structure uniforme $\mathcal{U}$ compatible avec la topologie de E, la structure uniforme <u>associée</u> à $\mathcal{U}$ (chap.II, § 1) est définie sur l'espace quotient E/R et est compatible avec la topologie de cet espace ; on dit que l'espace topologique E/R est l'espace complètement régulier <u>associé</u> à l'espace uniformisable E.

6) Soit E un espace uniformisable ; montrer que la famille de <u>tous</u> les écarts sur E , <u>continus</u> dans $E \times E$, définit sur E une structure uniforme compatible avec la topologie de E . Cette structure uniforme (dite structure uniforme <u>universelle</u> sur E) est la plus fine de toutes les structures uniformes compatibles avec la topologie de E . Si F est un espace uniforme quelconque, f une application continue de E dans F , f est uniformément continue quand on munit E de sa structure universelle ; cette proposition est inexacte pour toute autre structure uniforme compatible avec la topologie de E .

7) Soit E un espace complètement régulier, $\widetilde{E}$ le complété de E lorsqu'on munit de ce dernier de la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues toutes les applications continues de E dans $[0,1]$; $\widetilde{E}$ est compact (prop. 3).

a) $\widetilde{E}$ est <u>la plus grande extension compacte</u> de E : s'il existe un homéomorphisme f de E sur une partie partout dense E' d'un espace compact K , f se prolonge en une application continue de $\widetilde{E}$ sur K (montrer que f est uniformément continue dans E , en remarquant que la structure uniforme (unique) sur K est la moins fine rendant uniformément continues les applications continues de K dans $[0,1]$).

b) On dit qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur E est <u>complètement régulier</u> s'il existe une base $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{F}$ formée d'ensembles ouverts, telle que, pour tout ensemble $A \in \mathfrak{B}$, il existe un ensemble $B \in \mathfrak{B}$, contenu dans A , et une application continue f de E dans $[0,1]$, égale à 0 dans B et à 1 dans $\complement A$. Un filtre complètement régulier est dit <u>maximal</u> s'il n'existe aucun filtre complètement régulier strictement plus fin que lui. Montrer que pour tout filtre complètement régulier $\mathfrak{F}$, il existe un filtre complètement régulier maximal plus fin que $\mathfrak{F}$ (utiliser le th. de Zorn).

c) Pour qu'un filtre complètement régulier $\mathfrak{F}$ soit maximal, il faut et il suffit que, pour tout couple d'ensembles ouverts A,B de E tels que $B \subset A$ et tels qu'il existe une application continue f de E dans $[0,1]$, égale à 0 dans B et à 1 dans $\complement A$, ou bien $A \in \mathfrak{F}$, ou bien il existe un ensemble de $\mathfrak{F}$ ne rencontrant pas B (si tous les ensembles de $\mathfrak{F}$ rencontrent B, considérer le filtre engendré par les ensembles de $\mathfrak{F}$ et les ensembles $\overset{-1}{f}([0,a])$, où a parcourt l'intervalle <u>ouvert</u> $]0,1[$)

d) Montrer que tout filtre complètement régulier maximal $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur E (pour toute application continue f de E dans $[0,1]$, montrer que f a une limite suivant $\mathfrak{F}$, en utilisant c)).

e) Deux filtres complètement réguliers maximaux distincts $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, ne peuvent converger vers le même point de $\tilde{E}$ (remarquer que, d'après c), il existe un ensemble ouvert $A \in \mathfrak{F}$ et un ensemble ouvert $A' \in \mathfrak{F}'$ tels que $A \cap A' = \emptyset$; puis raisonner par l'absurde)

f) La trace sur E du filtre des voisinages d'un point quelconque $x_0 \in \tilde{E}$ est un filtre complètement régulier maximal $\mathfrak{V}$ (raisonner par l'absurde : s'il existait un filtre complètement régulier maximal $\mathfrak{F}$ strictement plus fin que $\mathfrak{V}$, montrer, à l'aide de c), qu'il existerait un filtre complètement régulier maximal distinct de $\mathfrak{F}$, et convergeant vers x_0) .

8) Soit $(f_\iota)_{\iota \in I}$ une famille d'applications continues d'un espace uniformisable E dans $K=[0,1]$. Montrer que, si la famille des ensembles $\overset{-1}{f_\iota}([0,a[)$, où ι parcourt I, et <u>a</u> l'intervalle ouvert

$]0,1[$, constitue un <u>système de générateurs</u> de la topologie de E (chap.I, § 2), la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les f_ι est compatible avec la topologie de E . En particulier, si E est séparé, E est homéomorphe à un sous-espace du cube K^I .

9) Soit E un espace complètement régulier, K une partie compacte de E , V un voisinage de K dans E .

a) Montrer qu'il existe une application continue de E dans $[0,1]$, égale à 1 dans K , à 0 dans $\complement V$ (à l'aide de (O_{IV}), et en recouvrant K par un nombre fini de voisinages convenables, prouver qu'il existe une application continue de E dans $[0,1]$, égale à 0 dans $\complement V$, et dont la borne inférieure dans K soit $\geqslant \frac{1}{2}$) .

b) Soit E' l'espace quotient obtenu en identifiant dans E tous les points de K . Montrer que E' est complètement régulier.

10) On dit qu'un espace localement compact E est <u>dénombrable à l'infini</u> s'il est réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles compacts.

a) Montrer que E est réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts relativement compacts U_n , tels que $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$. En déduire qu'il existe une fonction numérique f continue dans E , telle que $f(x) \leqslant n$ pour $x \in \overline{U}_n$, et $f(x) \geqslant n$ pour $x \in \complement \overline{U}_n$ (utiliser l'ex.9a)).

b) On considère sur E la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues la fonction f et les applications continues de E dans $[0,1]$, nulles hors d'un ensemble compact ($n^o 5$) ; cette structure est compatible avec la topologie de E . Montrer que pour cette structure il existe un entourage V tel que , pour tout $x \in E$, $V(x)$ soit compact (cf. chap.II, § 4, exerc.8) .

montrer que E , muni de la structure uniforme précédente, est complet (remarquer qu'aucun filtre plus fin que le filtre des complémentaires des ensembles compacts ne peut être un filtre de Cauchy).

11) Soit E un espace topologique tel que pour tout $x \in E$, les voisinages à la fois ouverts et fermés de x forment un système fondamental de voisinages de x . Montrer que E est uniformisable.

12) Soit E un espace dénombrable complètement régulier. Montrer que, pour tout $x \in E$, les voisinages à la fois ouverts et fermés de x forment un système fondamental de voisinages de x .

13) Soit E un espace localement compact. Montrer que toute fonction $f \geqslant 0$, semi-continue inférieurement dans E , est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues $\geqslant 0$, dont chacune est nulle dans le complémentaire d'un ensemble compact.

§ 2. Espaces métriques ; espaces métrisables.

1. <u>Distances et espaces métriques</u>. <u>Définition 1. On appelle distance sur un ensemble</u> E <u>un écart fini</u> d <u>sur</u> E <u>tel que la relation</u> $d(x,y)=0$ <u>entraîne</u> $x=y$. <u>On appelle espace métrique un ensemble</u> E <u>muni de la structure définie par la donnée d'une distance sur</u> E .

Un espace métrique E est toujours considéré comme muni de la structure uniforme et de la topologie définies par la distance donnée sur E .

<u>Exemples</u>. 1) La distance euclidienne $d(x,y)$ (chap. V, § 2) est une distance sur l'espace numérique R^n ; il en est de même des fonctions $\operatorname{Max}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$, et $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Toutes ces distances sont <u>équivalentes</u> (§ 1, n°2) .

2) Sur un ensemble quelconque E, l'écart d défini par les relations $d(x,x)=0$, $d(x,y)=1$ pour $x \neq y$, est une distance ; la structure uniforme qu'elle définit sur E est la structure uniforme discrète.

On a une définition équivalente à la déf.1 en disant qu'une distance est un écart <u>fini</u> tel que la structure uniforme définie par cet écart soit <u>séparée</u> ; un écart équivalent à une distance est donc une distance.

On peut rattacher aux espaces métriques les espaces uniformes définis par la donnée d'<u>un seul écart</u> (qu'on peut supposer <u>fini</u>), lorsque cet écart n'est pas une distance. Soit f un tel écart sur un ensemble E, $\mathcal{U}$ la structure uniforme qu'il définit ; cette structure n'est pas séparée, et l'intersection des entourages de $\mathcal{U}$ est la partie de $E \times E$ définie par la relation d'équivalence $f(x,y)=0$, relation que nous désignerons par R. Si $x \equiv x'$ (mod.R), on a, d'après l'inégalité du triangle, $f(x,y) \leqslant f(x,x')+f(x',y)=f(x',y)$, et de même $f(x',y) \leqslant f(x,y)$, donc $f(x,y)=f(x',y)$; autrement dit, f est une fonction <u>compatible</u> (en x et y) avec la relation d'équivalence R (<u>Ens</u>.R, § 5, n°7). Soit $\bar{f}$ la fonction obtenue par passage au quotient (pour x et y) à partir de f ; elle est définie sur $(E/R) \times (E/R)$, et si x et y sont deux points de E, $\mathring{x}$ et $\mathring{y}$ les classes (mod.R) de x et de y respectivement, on a $\bar{f}(\mathring{x},\mathring{y}) = f(x,y)$. Il en résulte aussitôt que $\bar{f}$ est une <u>distance</u> sur E/R qu'on appelle distance <u>associée</u> à l'écart f ; en outre, la structure uniforme qu'elle définit sur E/R n'est autre que la structure séparée <u>associée</u> à $\mathcal{U}$, d'après la définition de cette structure (chap.II, § 1). En passant à un espace quotient, la structure uniforme définie par un seul écart se ramène donc à une structure d'espace métrique.

2. Structure d'espace métrique. Soient E et E' deux espaces métriques, d la distance sur E, d' la distance sur E'. Conformément aux définitions générales (Ens.R, § 8), une application biunivoque f de E sur E' est un isomorphisme de la structure d'espace métrique de E sur celle de E', si, quels que soient $x \in E$ et $y \in E$, on a

$$d(x,y) = d'(f(x),f(y)) \tag{1}$$

On remarquera que, si f est une application de E sur E' satisfaisant à l'identité (1), elle est nécessairement biunivoque, et par suite est un isomorphisme de E sur E' ; un tel isomorphisme est encore appelé isométrie (ou application isométrique) de E sur E'.

Une isométrie de E sur E' est bien entendu un isomorphisme de la structure uniforme (resp. topologie) de E sur la structure uniforme (resp. topologie) de E' ; les réciproques sont inexactes, comme le prouve l'existence de distances équivalentes (§ 1, n°2).

Soit E un espace métrique, d la distance qui le définit. Pour tout $a > 0$, on désignera par V_a la partie de $E \times E$ formée des couples (x,y) tels que $d(x,y) \leq a$, par W_a la partie formée des couples (x,y) tels que $d(x,y) \leq a$; lorsquae a parcourt l'ensemble des nombres > 0, (ou seulement une suite de nombres > 0 tendant vers 0), les ensembles V_a (resp. W_a) constituent, d'après la continuité de d (§ 1, n°3), un système fondamental d'entourages ouverts (resp. fermés) de la structure uniforme de E ; on a d'ailleurs $\overline{V}_a \subset W_a$, mais ces deux ensembles ne sont pas nécessairement identiques.

Par analogie avec le cas de la distance euclidienne, l'ensemble $V_a(x)$ (resp. $W_a(x)$) est appelé boule ouverte (resp. boule fermée) de centre x et de rayon a ; c'est un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E

de même, on appelle <u>sphère</u> de centre x et de rayon a l'ensemble des points y tels que $d(x,y)=a$; c'est un ensemble <u>fermé</u> . D'après ce qui précède, les boules ouvertes (resp. fermées) de centre x et de rayon a forment un système fondamental de voisinages de x , lorsque a parcourt l'ensemble des nombres > 0 , ou une suite de nombres >0 tendant vers 0 .

Il ne faut pas se laisser abuser par la terminologie précédente, à croire que, dans un espace métrique quelconque, les boules et sphères jouissent des mêmes propriétés topologiques que les boules et sphères euclidiennes étudiées au chap.V (§ 2). C'est ainsi que l'adhérence d'une boule ouverte peut être distincte de la boule fermée de même centre et même rayon, que la frontière d'une boule fermée peut être distincte de la sphère de même centre et même rayon, qu'une boule ouverte (ou fermée) peut ne pas être connexe(*) .

Soient A et B deux parties non vides quelconques de l'espace métrique E . On appelle <u>distance des ensembles A et B</u> le nombre $d(A,B)=\inf\limits_{x\in A,\, y\in B} d(x,y)$. En particulier, on note $d(x,A)$ la distance de l'ensemble $\{x\}$ réduit au point x , et de l'ensemble A ; on l'appelle <u>distance du point x à l'ensemble A</u> ; on a donc $d(x,A) = \inf\limits_{y\in B} d(x,y)$, d'où $d(A,B) = \inf\limits_{x\in A} d(x,B)$ chap.IV, §5,prop.9).

<u>Proposition 1</u>. <u>Les propriétés</u> $x\in\overline{A}$ <u>et</u> $d(x,A)=0$ <u>sont équivalentes</u>.

En effet, la propriété $d(x,A)=0$ exprime que la boule $V_a(x)$ rencontre A quel que soit $a>0$, ce qui équivaut à $x\in\overline{A}$.

On peut par contre avoir $d(A,B)=0$ pour deux parties A,B de E telles que $\overline{A}\cap\overline{B}=\emptyset$, lorsqu'aucune de ces deux parties n'est réduite à un point. Par exemple, sur la droite numérique $\mathbb{R}$, l'ensemble des entiers >0 et l'ensemble des points de la suite $(n+\frac{1}{2n})_{n\geqslant 1}$ sont fermés, sans point commun, et ont une distance nulle.

<u>Proposition 2</u>. <u>La fonction</u> $d(x,A)$ <u>est uniformément continue dans</u> E .

Soient en effet x,y deux points quelconques de E ; quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $z\in A$ tel que $d(y,z)\leqslant d(y,A)+\varepsilon$, d'où, en vertu de l'inégalité du triangle

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)\ \leqslant d(x,y)+d(y,A)+\varepsilon$$

A fortiori $d(x,A)\leqslant d(x,y)+d(y,A)+\varepsilon$, et comme ε est arbitraire, $d(x,A)\leqslant d(x,y)+d(y,A)$. De la même manière, on a $d(y,A)\leqslant d(x,y)+d(x,A)$, c'est-à-dire

(2) $$\left|d(x,A)-d(y,A)\right|\leqslant d(x,y)$$

d'où la proposition.

D'après la définition de $d(x,A)$, l'ensemble des points $x\in E$ tels que $d(x,A)<a$ est identique à l'ensemble $V_a(A)$; la continuité de $d(x,A)$ nous montre à nouveau que cet ensemble est un voisinage <u>ouvert</u> de A . De même, l'ensemble des points $x\in E$ tels que $d(x,A)\leqslant a$ est un voisinage <u>fermé</u> de A , qui contient $W_a(A)$, mais n'est pas nécessairement identique à cet ensemble.

Il peut en effet exister des points x dont la distance à A soit égale à a , sans qu'il existe des points de A dont la distance à x soit égale à a . Toutefois, cette circonstance ne peut se présenter si A est <u>compact</u>, car alors, en vertu du th. de Weierstrass (chap.IV, §6, th.1), il existe $y\in A$ tel que $d(x,A)=d(x,y)$. De même, si A est compact et B fermé, la relation $d(A,B)=0$ entraîne $A\cap B\neq\emptyset$, car en vertu de la relation $d(A,B)=\inf_{x\in A} d(x,B$ de la prop.2 et du th. de Weierstrass, il existe $x_0\in A$ tel que $d(x_0,B)=d(A,B)=0$, donc (prop.1), on a $x_0\in B$.

On appelle <u>diamètre</u> d'une partie non vide A de E le nombre (fini ou égal à $+\infty$) $\delta(A)=\sup_{x\in A,y\in A} d(x,y)$. La notion d'ensemble "petit d'ordre W_a" (chap.II §3) est identique à celle d'ensemble de diamètre $\leqslant a$.

Pour qu'un ensemble non vide A soit réduit à un point, il faut et il suffit que $\delta(A)=0$.

A la notion de diamètre se rattache celle *d'oscillation* d'une fonction f définie dans un ensemble quelconque E , et prenant ses valeurs dans un *espace métrique* E' ; si A est une partie non vide quelconque de E , on appelle *oscillation de* f *dans* A le diamètre $\delta(f(A))$.

Si en outre E est une partie d'un *espace topologique* F , on appelle *oscillation de* f *en un point* $x \in \overline{E}$ le nombre $\omega(x;f)=\inf \delta(f(V \cap E))$, V parcourant le filtre des voisinages de x dans F .

Proposition 3. *L'oscillation* $\omega(x;f)$ *d'une fonction quelconque f définie dans une partie* E *d'un espace topologique* F , *et prenant ses valeurs dans un espace métrique* E' , *est une fonction semi-continue supérieurement dans* $\overline{E}$.

Soit en effet a un point quelconque de $\overline{E}$; pour tout $k > \omega(a;f)$, il existe un voisinage ouvert V de a tel que $\delta(f(V \cap E)) \leqslant k$; pour tout $x \in V \cap \overline{E}$, V est un voisinage de x , donc $\omega(x,f) \leqslant \delta(f(V \cap E)) \leqslant k$, ce qui prouve que ω est semi-continue supérieurement en a .

Pour qu'on ait $\omega(x;f)=0$ en un point $x \in \overline{E}$, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que $f(V \cap E)$ soit contenu dans une boule de rayon ε ; si $x \in E$, cette condition exprime que f est *continue* au point x (par rapport à E) ; si $x \in \overline{E} \cap \complement E$, que l'image par f de la trace sur E du filtre de voisinages de x dans F , est une *base de filtre de Cauchy* sur E' ; en particulier :

Proposition 4. *Soit* f *une fonction définie dans une partie* E *d'un espace topologique* F , *prenant ses valeurs dans un espace métrique complet* E' ; *pour qu'en un point* $x \in \overline{E}$, f *ait une limite relativement à* E , *il faut et il suffit que l'oscillation de* f *au point* x *soit nulle*.

Enfin, la prop.1 du § 1 détermine la structure du complété d'un espace métrique :

Proposition 5. Soit E un espace métrique, d la distance sur E. Si $\hat{E}$ est le complété de E (pour la structure uniforme définie par d), la fonction d se prolonge par continuité à $\hat{E}\times\hat{E}$; la fonction prolongée $\bar{d}$ est une distance sur $\hat{E}$, et la structure uniforme de $\hat{E}$ est identique à la structure uniforme définie par la distance $\bar{d}$.

La prop.1 du § 1 montre en effet que $\bar{d}$ est un écart sur $\hat{E}$, et y définit la structure uniforme obtenue par complétion ; comme cette dernière structure est séparée, $\bar{d}$ est une distance. Lorsqu'on considère le complété d'un espace métrique E comme un espace métrique, on sous-entend toujours que la distance sur $\hat{E}$ est obtenue en prolongeant par continuité la distance sur E.

3. Espaces uniformes métrisables. Définition 2. On dit qu'une distance sur un ensemble E est compatible avec une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur E si la structure uniforme définie par cette distance est identique à $\mathcal{U}$.

On dit qu'une structure uniforme sur un ensemble E est métrisable s'il existe une distance sur E compatible avec cette structure. Un espace uniforme est dit métrisable si sa structure uniforme est métrisable.

Des distances distinctes peuvent être compatibles avec une même structure uniforme ; elles sont alors équivalentes (§ 1, déf.2).

Théorème 1. Pour qu'une structure uniforme soit métrisable, il faut et il suffit qu'elle soit séparée et que le filtre des entourages de cette structure ait une base dénombrable.

La condition est évidemment **nécessaire**, car (avec les notations du n°2) les entourages $V_{1/n}$ ($n=1,2,..$) forment une base du filtre des entourages de la structure uniforme d'un espace métrique.

Pour voir que la condition est suffisante, remarquons d'abord que, si (X_n) est une base dénombrable du filtre d'entourages d'une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur E , on peut trouver une base équivalente (U_n) formée d'entourages symétriques tels que $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$ quel que soit n ; il suffit de définir par récurrence U_{n+1} comme un entourage symétrique tel que $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n \cap \bigcap_{p=1}^{n} X_p$. La prop.2 du § 1 prouve alors que $\mathcal{U}$ est identique à la structure uniforme définie par un seul écart f sur E ; comme est séparée par hypothèse, f est une distance compatible avec $\mathcal{U}$.

Le même raisonnement montre que, pour qu'une structure uniforme puisse être définie par un seul écart, il faut et il suffit que son filtre d'entourages ait une base dénombrable.

Corollaire. Une structure uniforme séparée définie par une famille dénombrable d'écarts est métrisable.

En effet, si (f_n) est une suite d'écarts définissant une telle structure, le filtre des entourages est engendré par la famille dénombrable des ensembles $\overset{-1}{f_n}([0, \frac{1}{m}])$, où m et n parcourent l'ensemble des entiers > 0 .

4. Espaces topologiques métrisables. Définition 3. On dit qu'une distance sur un ensemble E est compatible avec une topologie $\mathcal{C}$ sur E si la topologie définie par cette distance est identique à $\mathcal{C}$. On dit qu'un espace topologique E est métrisable s'il existe une distance sur E compatible avec la topologie de E .

2 Deux distances sur un ensemble E , compatibles avec une même topologie $\mathcal{C}$, peuvent être non équivalentes.

Un exemple de ce fait est fourni par le sous-espace R_+^* de R formé des nombres réels >0 ; la structure uniforme induite par la structure uniforme additive de R, et la structure induite par la structure uniforme multiplicative de R^* sont toutes deux métrisables et compatibles avec la topologie de R_+^*, mais elles ne sont pas comparables.

On remarquera aussi qu'il peut exister des structures uniformes <u>non métrisables</u> compatibles avec la topologie d'un espace topologique <u>métrisable</u> (exerc. 9).

Nous nous contenterons dans ce qui suit de donner des conditions <u>nécessaires</u> pour qu'un espace topologique soit métrisable (voir § 4, exerc.7). En premier lieu, un espace métrisable est évidemment <u>complètement régulier</u>. Une seconde condition est donnée par la proposition suivante :

<u>Proposition 6</u>. <u>Dans un espace métrisable, tout ensemble fermé est intersection d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts ; tout ensemble ouvert est réunion d'une famille dénombrable d'ensembles fermés</u>.

En effet, soit d une distance compatible avec la topologie d'un espace métrisable E . Si A est fermé dans E , il est l'intersection des ensembles ouverts $V_{1/n}(A)$ (ensemble des x tels que $d(x,A) < 1/n$; cf.prop.1). La seconde partie de la proposition résulte de la première par passage aux complémentaires.

<u>Corollaire</u>. <u>Tout point d'un espace métrisable possède un système fondamental dénombrable de voisinages</u>.

<u>Remarques</u>. 1) Les conditions nécessaires qui précèdent ne sont pas suffisantes (cf. exerc. 16).

2) On peut donner des exemples d'espaces où tout point a un système fondamental dénombrable de voisinages, mais où il existe des ensembles fermés qui ne sont pas des intersections dénombrables d'ensembles ouverts (exerc.18) ; de tels espaces ne sont pas métrisables.

<u>5. Emploi des suites dénombrables</u>. Le cor. de la prop.6 est à l'origine du rôle qu'on peut faire jouer aux <u>suites dénombrables de points</u> dans un espace métrisable ; dans beaucoup de questions, leur emploi peut se substituer à celui des <u>filtres</u>. En effet, l'ensemble des <u>filtres convergents</u> sur un espace métrisable est déterminé par l'ensemble des <u>suites convergentes</u> de points de cet espace : car tout filtre convergent est <u>plus fin</u> qu'un <u>filtre convergent à base dénombrable</u> (savoir le filtre des voisinages du point limite) ; et d'autre part, tout filtre à base dénombrable étant l'intersection des <u>filtres élémentaires</u> plus fins que lui (chap.I, § 5,prop.10), le filtre des voisinages d'un point est l'intersection des filtres élémentaires associés aux suites convergeant vers ce point.

La notion de suite convergente est par contre tout à fait inadaptée à l'étude des espaces topologiques où il existe des points dont le filtre des voisinages n'admet pas de base dénombrable. On peut former en particulier des espaces topologiques séparés et non discrets, dans lesquels, en chaque point x , l'intersection d'une famille dénombrables de voisinages de x est encore un voisinage de x (*) ; dans un tel espace, il n'y a pas d'autres suites convergentes que celles dont tous les termes sont égaux à partir d'un certain rang.

(*) Voir J.DIEUDONNÉ , Notes de Tératopologie (I), <u>Revue Scientifique</u> (Revue rose), 1939, p. 39.

A titre d'exemple d'emploi des suites dénombrables, nous donnerons la proposition suivante (qui est bien entendu valable, non seulement pour un espace métrisable, mais plus généralement pour un espace où tout point a un système fondamental dénombrable de voisinages) :

Proposition 7. Dans un espace métrisable E , pour qu'un point x soit adhérent à une partie non vide A de E , il faut et il suffit qu'il existe une suite de points de A qui converge vers x .

Nous savons déjà que la condition est suffisante (chap.I, § 6). Pour voir qu'elle est nécessaire, considérons un système fondamental dénombrable (V_n) de voisinages de x . Si x est adhérent à A , chacun des ensembles $V_n \cap A$ est non vide ; si x_n est un point de $V_n \cap A$, la suite (x_n) converge vers x .

La prop.7 entraîne la suivante :

Proposition 8. Pour qu'un espace métrique E soit complet, il faut et il suffit que toute suite de Cauchy dans E soit convergente.

En effet, soit $\hat{E}$ le complété de E ; s'il existe un point $x \in \hat{E}$ n'appartenant pas à E , il existe une suite (x_n) de points de E qui converge vers x ; c'est une suite de Cauchy non convergente dans E .

6. Espaces métriques compacts ; espaces métrisables compacts. Le critère de précompacité des espaces uniformes (chap.II, § 4, th.4), donne, pour les espaces métriques, la proposition suivante :

Proposition 9. Pour qu'un espace métrique E soit précompact, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E dont tous les ensembles aient un diamètre $\leqslant \varepsilon$.

Si on ajoute l'hypothèse que E est complet, on obtient un critère de compacité des espaces métriques.

Remarque. On déduit de la prop.9 qu'un espace métrique précompact E possède une base dénombrable : en effet, pour tout entier $n>0$, soit $\mathfrak{R}_n$ un recouvrement fini de E formé d'ensembles ouverts de diamètre $1/n$; la réunion $\mathfrak{B}$ des $\mathfrak{R}_n$ est une base (dénombrable) de E . En effet, soit U un ensemble ouvert quelconque dans E , x un point quelconque de U ; soit $a>0$ la distance de x à l'ensemble fermé $\complement U$; si $\frac{1}{n}<a$, tout ensemble de $\mathfrak{R}_n$ contenant x est contenu dans U , ce qui montre que U est réunion d'ensembles appartenant à $\mathfrak{B}$.

On déduit de la prop.9 un critère topologique de compacité, applicable aux espaces métrisables :

Proposition 10. Pour qu'un espace topologique métrisable E soit compact, il faut et il suffit que toute suite de points de E ait une valeur d'adhérence dans E .

D'après l'axiome (C) (chap.I, § 10), la condition est nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, considérons une distance d compatible avec la topologie de E . Montrons d'abord que l'espace métrique E ainsi défini est complet : en effet, toute suite de Cauchy dans E a alors une valeur d'adhérence, et par suite est convergente (chap.II, § 3, prop.4); la prop.8 montre donc que E est complet. En second lieu, montrons que E est précompact ; dans le cas contraire, en vertu de la prop.9, il existerait un nombre $\alpha>0$ tel qu'il n'y ait aucun recouvrement fini de E par des parties de E de diamètre $\leqslant \alpha$. On pourrait alors définir par récurrence une suite infinie (x_n) de points de E par la condition que $d(x_p, x_n) \geqslant \alpha$ pour tout $p<n$; or, une telle suite ne peut avoir de valeur d'adhérence, puisque toute boule de rayon $<\frac{\alpha}{2}$ contient au plus un point de la suite.

<u>Corollaire</u>. <u>Pour qu'une partie A d'un espace topologique métrisable E soit relativement compacte, il faut et il suffit que toute suite de points de A ait une valeur d'adhérence dans E</u> .

Soit d une distance compatible avec la topologie de E . Montrons que l'espace $\bar{A}$ est compact, en appliquant le critère de la prop.10 : soit (x_n) une suite de points de $\bar{A}$; pour chaque indice n , il existe $y_n \in A$ tel que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$; la suite (y_n) admet par hypothèse une valeur d'adhérence $a \in E$, et a est aussi valeur d'adhérence de la suite (x_n) , car si y_m appartient à la boule de centre a et de rayon 1/n pour $m > n$, x_m appartient à la boule de centre a et de rayon 2/n .

Il faut remarquer que la prop.10 n'est pas une conséquence de l'existence, en tout point de E , d'un système fondamental dénombrable de voisinages ; on peut donner des exemples d'espaces non métrisables et non compacts, dans lesquels tout point a un système fondamental dénombrable de voisinages, et toute suite de points une valeur d'adhérence (exerc. 18).

<u>Exercices</u>. 1) Soit E un espace uniforme séparé, (f_ι) une famille d'écarts sur E définissant la structure uniforme de E . Soit E_ι l'espace uniforme séparé associé à l'espace uniforme obtenu en munissant E de la structure définie par le seul écart f_ι ; on sait que E_ι est un espace métrique. Montrer que E est isomorphe à un sous-espace de l'espace uniforme produit $\prod_\iota E_\iota$ (faire correspondre à tout $x \in E$ la famille des images canoniques de x dans les espaces E_ι).

2) Dans un espace métrique connexe E , pour lequel la distance n'est pas bornée sur $E \times E$, montrer qu'une sphère quelconque n'est jamais vide.

3) Soit E un espace métrique compact ; si, dans E, l'adhérence de toute boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon, toute boule dans E est un ensemble connexe (si x et y sont deux points de E, S la boule fermée de centre x et de rayon $d(x,y)$, montrer que pour tout $\varepsilon>0$ l'ensemble $A_{y,\varepsilon}$ des points de S pouvant être joints à y par une V_ε-chaîne contenue dans S (chap.II, § 4) contient des points z tels que $d(x,z)<d(x,y)$; en déduire que $x\in A_{y,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon>0$, en raisonnant par l'absurde et utilisant le th. de Weierstrass (chap.IV, § 5, th.1)).

4) Soit E un espace métrique dont la distance d satisfait à l'inégalité

(1) $$d(x,y) \leqslant \mathrm{Max}(d(x,z),d(y,z))$$

quels que soient x,y,z (inégalité qui entraîne l'inégalité du triangle).

a) Si $d(x,z)\neq d(y,z)$, montrer que $d(x,y)=\mathrm{Max}(d(x,z),d(y,z))$

b) Soit $V_r(x)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r ; montrer que $V_r(x)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé (et par suite que E est <u>totalement discontinu</u>), et que pour tout $y\in V_r(x)$, $V_r(y)=V_r(x)$.

c) Montrer que la boule fermée $W_r(x)$ de centre x et de rayon r est un ensemble à la fois ouvert et fermé ; pour tout $y\in W_r(x)$, on a $W_r(y)=W_r(x)$. Les boules ouvertes distinctes de rayon r forment une <u>partition</u> de $W_r(x)$; la distance de deux quelconques d'entre elles est égale à r.

d) Si deux boules (ouvertes ou fermées) de E ont un point commun, l'une est contenue dans l'autre.

e) Pour qu'une suite (x_n) de points de E soit une suite de Cauchy, il faut et il suffit que $d(x_n,x_{n+1})$ tende vers 0 lorsque n croit indéfiniment.

f) Si E est compact, montrer que, pour tout $x_0 \in E$, l'image de E par l'application $x \to d(x_0,x)$ est une partie dénombrable (finie ou infinie) de $[0,+\infty]$ dont tous les points, à l'exception éventuelle de 0, sont des points <u>isolés</u> (pour toute valeur r prise par $d(x_0,x)$, considérer la borne supérieure de $d(x_0,x)$ sur l'ensemble des points où $d(x_0,x) < r$, sa borne inférieure sur l'ensemble des points où $d(x_0,x) > r$).

5) Soit E l'ensemble produit d'une famille (F_n) d'ensembles quelconques. Pour tout couple $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ d'éléments de E, on désigne par $k(x,y)$ le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $x_n \neq y_n$, et on pose $d(x,y)=1/k(x,y)$. Montrer que d est une <u>distance</u> sur E, satisfaisant à l'inégalité (1) de l'exerc.4, et que, muni de cette distance, E est un espace métrique <u>complet</u>.

Pour que E soit compact, il faut et il suffit que tous les F_n soient finis ; pour que E soit localement compact, il faut et il suffit que les F_n soient finis, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

5 bis) Soit E un espace métrique, d sa distance. Pour tout couple de points (x,y) de E, on désigne par $d_0(x,y)$ la borne inférieure des nombres $\alpha > 0$ tels que x et y puissent être joints par une V_α-chaîne (chap.II, §4). Montrer que d_0 est un <u>écart</u> sur E, et que la distance associée à d_0 satisfait à l'inégalité (1) de l'exerc.4.

6) Soit E un espace métrique ; si A et B sont deux parties non vides de E, on pose $\rho(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B)$, puis $\sigma(A,B)=\operatorname{Max}(\rho(A,B),\rho(B,A))$; on pose en outre $\sigma(\emptyset,\emptyset)=0$, $\sigma(\emptyset,A)=\sigma(A,\emptyset)=+\infty$ pour toute partie non vide A de E. Montrer que, sur l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$

des parties de E , σ est un écart, et que la structure uniforme qu'il définit est identique à la structure uniforme déduite de celle de E par le procédé de l'exerc.7 du chap.II, § 2 .

Sur l'ensemble $\mathfrak{F}(E)$ des parties fermées non vides de E , σ est une <u>distance</u>. Si E est <u>complet</u>, montrer que $\mathfrak{F}(E)$ est un espace métrique <u>complet</u> (soit Φ un filtre de Cauchy sur $\mathfrak{F}(E)$; pour tout ensemble $\mathfrak{X} \in \Phi$, soit $S(\mathfrak{X})$ la réunion des parties X de E appartenant à $\mathfrak{X}$; montrer que les ensembles $S(\mathfrak{X})$ forment une base de filtre sur E , que cette base de filtre a une adhérence A non vide, et que Φ converge vers A).

7) Soit (E_n) une suite dénombrable d'espaces uniformes métrisables. Montrer que l'espace uniforme produit $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ est métrisable. Si d_n est une distance sur E_n , compatible avec la structure uniforme de E_n , et de borne supérieure $\leqslant 1$ dans $E \times E$ (cf. § 1, n°2), montrer que si, pour deux points quelconques $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ de E , on pose

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n,y_n)$$

d est une distance compatible avec la structure uniforme de E .

8) Soit E un espace métrique complet, d sa distance, A une partie non vide de E , intersection d'une suite dénombrable (A_n) d'ensembles ouverts dans E . Montrer qu'il existe une distance sur le A , compatible avec la topologie induite par celle de E , et définissant sur A une structure d'espace métrique <u>complet</u> (définir sur A une structure uniforme par la famille d'écarts formée de d et des écarts f_n définis par $f_n(x,y) = \left| \frac{1}{d(x,B_n)} - \frac{1}{d(y,B_n)} \right|$, B_n désignant le complémentaire de A_n dans E).

9) Soit E un espace discret non dénombrable. Montrer que la structure uniforme des partitions finies (chap. II, § 1) sur E, qui est compatible avec la topologie de E, n'est pas métrisable (montrer que dans le cas contraire, il existerait une suite $(\mathfrak{P}_n)$ de partitions finies de E, telle que toute partition finie de E soit formée d'ensembles dont chacun serait réunion d'ensembles de l'une des partitions $\mathfrak{P}_n$; en déduire que l'ensemble des partitions finies de E serait dénombrable).

10) Soit (E_ι) une famille non dénombrable d'espaces topologiques séparés, dont chacun contient plus d'un point. Montrer que, dans l'espace produit $\prod_\iota E_\iota$, aucun point n'admet un système fondamental dénombrable de voisinages.

11) Soit E un espace topologique dont chaque point possède un système fondamental dénombrable de voisinages.

a) Pour que E soit séparé, il suffit que toute suite convergente dans E ait une seule limite.

b) Si a est valeur d'adhérence d'une suite infinie (x_n) de points de E, il existe une suite infinie extraite de (x_n) et qui converge vers a.

c) Soit A une partie non vide de E, x_0 un point de $\overline{A}$, f une application de A dans un espace topologique séparé E'. Pour que $a \in E'$ soit limite de f au point x_0, relativement à A, il suffit que, pour toute suite (x_n) de points de A qui converge vers x_0, la suite $(f(x_n))$ converge vers a.

d) Avec les notations de c), on suppose en outre que tout point de E' ait un système fondamental dénombrable de voisinages.

Si $a \in E'$ est valeur d'adhérence de f au point x_o, relativement à A, il existe une suite (x_n) de points de A qui converge vers x_o, telle que la suite $(f(x_n))$ converge vers a.

12) Pour que la topologie d'un espace métrisable E admette une base dénombrable, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble dénombrable partout dense dans E.

13) Si un espace compact a une base dénombrable, il est métrisable (utiliser le th.1 et la définition des entourages de la structure uniforme d'un espace compact (chap.II, § 4, th.1)).

13 bis) Un espace compact métrisable E est homéomorphe à un sous-espace du cube $K^{\mathbb{N}}$ (K étant l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$) (soit (U_n) une base dénombrable de E ; pour tout couple (U_m,U_n) d'ensembles de cette base tels que $\overline{U}_m \subset U_n$, il existe une application continue f_{mn} de E dans K, telle que $f_{mn}(x)=1$ pour $x \in \overline{U}_m$, $f_{mn}(x)=0$ pour $x \in \complement U_n$ (§ 1, exerc.9) ; utiliser ensuite l'exerc.8 du § 1).

14) Soit E un espace compact. S'il existe une fonction numérique f définie et continue dans $E \times E$, et telle que la relation $f(x,y)=0$ soit équivalente à $x=y$, E est métrisable (montrer que, si V parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$, les ensembles $\overset{-1}{f}(V)$ forment un système fondamental de voisinages de la diagonale Δ dans $E \times E$).

14 bis) Soit E un espace compact métrique, d la distance dans E. Montrer que, si f est une application de E dans E telle que, quels que soient $x \in E, y \in E$, $d(f(x),f(y)) \geqslant d(x,y)$ f est une <u>isométrie</u> de E <u>sur</u> E (soient a et b deux points quelconques de E ; on pose $f^n = f^{n-1} \circ f$, $a_n = f^n(a)$, $b_n = f^n(b)$; montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un indice k tel que $d(a,a_k) \leqslant \varepsilon$ et $d(b,b_k) \leqslant \varepsilon$;

en extrayant de (a_n) et (b_n) deux suites convergentes convenables ; en déduire que $d(a_1,b_1)=d(a,b)$ et que $f(E)$ est partout dense dans E.

15) Soit E un espace compact métrisable.

a) Montrer qu'il existe une application continue de l'ensemble triadique de Cantor K sur A .

b) Si en outre E est totalement discontinu et n'a pas de points isolés, il est homéomorphe à K (raisonner comme dans l'exerc.12 du chap.IV, § 8 , en utilisant le fait que tout voisinage d'un point $x \in E$ contient alors un voisinage de x à la fois ouvert et fermé (chap.II, § 4, exerc.10)).

16) On considère, sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, la topologie $\mathcal{C}$ définie de la manière suivante : pour tout $y \in 0$, $U_y(x)$ désignera la réunion des intervalles, $[x,x+y[$ et $]-x-y,-x[$; $\mathcal{C}$ est la topologie dans laquelle un système fondamental de voisinages d'un point quelconque x est formé des ensembles U_y , où y parcourt l'ensemble des nombres >0 . Soit E l'espace obtenu en munissant l'intervalle $[-1,+1]$ de la topologie induite par $\mathcal{C}$.

Montrer que E est compact, que tout point de E admet un système fondamental dénombrable de voisinages, mais que E n'est pas métrisable (pour voir que E est compact, considérer un filtre $\mathfrak{F}$ sur E ; si $x \in E$ est adhérent à $\mathfrak{F}$ pour la topologie de la droite numérique, montrer que x ou -x est adhérent à $\mathfrak{F}$ pour la topologie $\mathcal{C}$. Pour voir que E n'est pas métrisable, montrer que sa topologie n'admet pas de base dénombrable).

Soit A une partie ouverte de E ; montrer que A est réunion d'une famille dénombrable (I_n) d'intervalles ouverts contenus dans $[0,1]$, des intervalles $-I_n$, d'une partie de l'ensemble des origines des intervalles I_n et $-I_n$, et éventuellement du point +1. En déduire que A est réunion d'une famille dénombrable d'ensembles fermés dans E.

17) On dit qu'un espace topologique E est <u>semi-compact</u> s'il est séparé et si toute suite (x_n) de points de E possède une valeur d'adhérence. Tout espace compact est semi-compact ; d'après la prop.10, tout espace semi-compact et <u>métrisable</u> est compact.

a) Pour qu'une suite de points d'un espace semi-compact soit convergente, il faut et il suffit qu'elle ait une seule valeur d'adhérence.

b) Dans un espace semi-compact, tout sous-espace fermé est semi-compact. Réciproquement, si E est semi-compact et si tout point de E a un système fondamental dénombrable de voisinages, tout sous-espace semi-compact de E est fermé dans E.

c) Soit f une application continue d'un espace semi-compact E dans un espace séparé E' ; l'image f(E) est un sous-espace semi-compact de E'.

d) Si E est un espace semi-compact, dont tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages ; pour toute suite (x_n) de points de E, il existe une suite convergente (x_{n_k}) extraite de (x_n).

e) Soit (E_n) une suite dénombrable d'espaces topologiques dans chacun desquels tout point admet un système fondamental dénombrables de voisinages. Pour que l'espace produit $\prod_n E_n$ soit semi-compact, il faut et il suffit que chacun des espaces E_n soit semi-compact (utiliser d), et l'exerc.15 du chap.I, § 5).

f) Un espace semi-compact dont tout point admet un système fondamental dénombrable de voisinages est régulier.

g) Dans un espace semi-compact E, soit (F_n) une suite dénombrable décroissante d'ensembles fermés. Montrer que si l'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

est vide, un des F_n est vide (considérer dans chacun des F_n un point x_n et les valeurs d'adhérence de la suite (x_n)). En déduire que, si un espace semi-compact a une <u>base dénombrable</u>, il est <u>compact</u>, et par suite (exerc.13) métrisable).

18) Soit F un ensemble <u>bien ordonné</u> non dénombrable, <u>a</u> son plus petit élément, b le plus petit des éléments $x \in F$ tels que l'intervalle $[a,x]$ soit non dénombrable. On désigne par E l'intervalle $[a,b[$, muni de la topologie $\mathcal{C}(E)$ (chap.I, §1,exerc.3) ; il est localement compact et non compact (chap.I, §10, exerc.20).

a) Pour qu'une partie de E soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée. En déduire que E est semi-compact, et par suite (prop.10) non métrisable (remarquer que toute partie dénombrable de E est bornée).

b) Montrer que tout point de E admet un voisinage métrisable (utiliser l'exerc. 13).

c) Si A et B sont deux ensembles fermés et non compacts dans E, ils ont une intersection non vide (former une suite croissante dont les termes de rang pair sont des points de A, ceux de rang impair des points de B). En déduire que tout voisinage d'un ensemble fermé non compact est le complémentaire d'un ensemble relativement compact. Si A est l'ensemble des points non isolés de E, montrer que A n'est pas intersection d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts.

d) On désigne par E' l'intervalle $[a,b]$ de F, qu'on munit de la topologie suivante : pour tout $x \in E$, un système fondamental de voisinages est formé des intervalles $]y,x]$, où y parcourt l'ensemble des éléments $< x$; un système fondamental de voisinages de b est formé des ensembles V_x, où pour tout $x \in E$, V_x désigne la réunion de b et de l'ensemble des points de $\left[x,b\right]$ qui ont un antécédent (autrement dit, qui sont isolés dans E). Montrer que E' est semi-compact, mais <u>non régulier</u> (cf. exerc. 17 f)) ; dans E' , le sous-espace E est semi-compact, mais <u>non fermé</u> (cf. exerc. 17 b)).

19) Soit E un espace localement compact, E' l'espace compact obtenu par adjonction à E d'un "point à l'infini" (chap. I, § 10, th. 3). Pour que E' soit métrisable, il faut et il suffit que E ait une base dénombrable (pour montrer que la condition est suffisante, remarquer que toute partie compacte de E peut être recouverte par un nombre fini d'ensembles U_n , et utiliser l'exerc. 13).

19 bis) Soit E un espace métrique tel que, pour tout $x \in E$ il existe une boule ouverte de centre x qui, considérée comme sous-espace de E , admette une base dénombrable ; soit r_x la borne supérieure des rayons des boules de centre x qui possèdent cette propriété.

a) Montrer (à l'aide du th. de Zorn) qu'il existe une famille <u>maximale</u> (B_α) de boules ouvertes de E , deux à deux sans point commun, telles que, si x_α est le centre de B_α , le rayon de B_α soit $< r_{x_\alpha}$. Montrer que tout point de E est adhérent à une boule B_α au moins ; en déduire qu'il existe une partie partout dense M de E telle que toute boule ouverte de centre quelconque $x \in E$ et de rayon $< r_x$ ne contienne qu'une infinité <u>dénombrable</u> de points de M (remarquer qu'une telle boule ne peut rencontrer qu'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts deux à deux sans point commun).

b) Pour tout point $x \in M$, on désigne par S_x la boule ouverte de centre x et de rayon $\frac{1}{3} r_x$; montrer que les S_x constituent un recouvrement de E , et qu'un point quelconque de E ne peut appartenir qu'à une infinité <u>dénombrable</u> de S_x (remarquer que, si $y \in S_x$, on a $d(x,y) \leqslant \frac{1}{2} r_y$).

c) On définit dans E la relation d'équivalence R suivante entre deux points x,y : il existe une suite finie $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de points de M, telle que $x\in S_{z_1}$, $y\in S_{z_n}$, et que l'intersection de S_{z_i} et $S_{z_{i+1}}$ ne soit pas vide pour $1\leqslant i\leqslant n-1$. Montrer que les classes d'équivalence suivant R sont des sous-espaces ouverts et fermés de E, dont chacun admet une base dénombrable ; en d'autres termes, E est <u>somme topologique</u> d'espaces métriques admettant une base dénombrable.

d) Déduire de c) et de l'exerc.15 qu'un espace localement compact métrisable est somme topologique d'espaces localement compacts à base dénombrable.

20) Dans un espace métrique, on dit qu'un ensemble A est <u>borné</u> si son diamètre est fini ; tout ensemble relativement compact est borné. Montrer que pour qu'un espace métrisable E soit tel qu'il existe une distance compatible avec la topologie de E, et pour laquelle tout ensemble borné soit relativement compact, il faut et il suffit que E soit localement compact et admette une base dénombrable (pour voir que la condition est nécessaire, montrer que si tout ensemble borné est relativement compact, E est localement compact et dénombrable à l'infini, et utiliser l'exerc. 10 a) du § 1 ; pour voir que la condition est suffisante, remarquer que E est métrisable en vertu de l'exerc.19 ; si d est une distance compatible avec la topologie de E, f la fonction définie dans l'exerc.10a) du § 1, prendre sur E la structure uniforme définie par les écarts $d(x,y)$ et $|f(x)-f(y)|$).

21) Tout espace quotient séparé d'un espace compact métrisable E est métrisable. (E/R étant un espace quotient séparé de E, Δ la diagonale de $(E/R)\times(E/R)$, montrer que le filtre des voisinages de Δ dans $(E/R)\times(E/R)$ a une base dénombrable ; remarquer pour cela que,

si C est la partie de $E\times E$ définie par la relation R , tout voisinage de C dans $E\times E$ contient un voisinage saturé pour la relation $R\times R$, en utilisant l'exerc.14 du chap.I, § 10).

22) Soit A un ensemble compact dans un espace métrique E , E' l'espace quotient obtenu en identifiant tous les points de A . Si d est la distance dans E , montrer qu'on définit dans E' une distance d' compatible avec la topologie de E', en posant, lorsque x et y sont deux points de E n'appartenant pas à A , $d'(x,y)=\inf(d(x,y),d(x,A)+d(y,A))$, et $d'(x,A)=d(x,A)$ (utiliser la prop.1 du chap.II, § 4).

23) Soit E l'espace quotient de la droite numérique $\mathbb{R}$ obtenu en identifiant tous les points de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers rationnels. Montrer que E est un espace complètement régulier non métrisable (montrer que le filtre des voisinages de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ n'a pas de base dénombrable).

23) Soit E le complémentaire, dans $\mathbb{R}$, de l'ensemble des points de la forme $1/n$, où n parcourt l'ensemble des entiers rationnels $\neq 0$. On considère, dans l'espace métrisable E , la relation d'équivalence R pour laquelle la classe d'équivalence de tout x tel que $|x|<1$ est formée des points x et $1/x$, la classe d'équivalence de 0 et de chacun des points n , où n est un entier de valeur absolue >1 , se réduisant à ce point. Montrer que l'espace quotient E/R est séparé et non régulier.

§ 3. Groupes et anneaux métriques.

1. Ecarts glissants sur un groupe topologique. Définition 1. Sur un groupe G (noté multiplicativement), on dit qu'un écart f est un écart glissant à gauche (resp. glissant à droite) si, quels que soient x,y,z dans G , on a $f(zx,zy)=f(x,y)$ (resp. $f(xz,yz)=f(x,y)$) .

Soit e l'élément neutre de G. Si f est un écart glissant à gauche sur G, on a $f(x,y)=f(e,x^{-1}y)=f(y^{-1}x,e)=f(e,y^{-1}x)$, en vertu de la symétrie de f ; en particulier, $f(e,x)=f(e,x^{-1})$ pour tout $x\in G$. On en déduit $f(e,xy)=f(x^{-1},y)\leqslant f(e,x^{-1})+f(e,y)=f(e,x)+f(e,y)$. On voit donc que la fonction numérique $g(x)=f(e,x)$ vérifie les trois conditions :

a) $g(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in G$ et $g(e)=0$;

b) $g(x^{-1})=g(x)$;

c) $g(xy)\leqslant g(x)+g(y)$.

Inversement, si g est une fonction numérique vérifiant ces trois conditions, $f(x,y)=g(x^{-1}y)$ est un écart glissant à gauche sur G ; en effet, on a $f(x,y)\geqslant 0$, et $f(x,x)=g(e)=0$; on a $f(y,x)=g(y^{-1}x)=g(x^{-1}y)=f(x,y)$ d'après b) ; enfin, on a $f(x,z)=g(x^{-1}z)=g(x^{-1}y.y^{-1}z)\leqslant g(x^{-1}y)+g(y^{-1}z)=f(x,y)+f(y,z)$ d'après c); donc f est un écart sur G, et il est visiblement glissant à gauche.

—Une famille (f_ι) d'écarts glissants à gauche sur un groupe G définit sur ce groupe une structure uniforme, et par suite une topologie ; proposons-nous de chercher à quelle condition cette topologie est <u>compatible</u> avec la structure du groupe G. On peut évidemment se borner au cas où la famille (f_ι) est <u>saturée</u> (§ 1, n°2), la borne supérieure d'un nombre fini d'écarts glissants étant un écart glissant :

<u>Proposition 1. Pour que la topologie $\mathcal{C}$ définie sur un groupe G par une famille saturée d'écarts glissants à gauche (f_ι), soit compatible avec la structure de groupe de G, il faut et il suffit que, pour tout $a\in G$, tout indice ι et tout $\alpha>0$, il existe un indice $\varkappa$ et un $\beta>0$ tels que la relation $f_\varkappa(e,x)\leqslant\beta$ entraîne $f_\iota(e,axa^{-1})\leqslant\alpha$. Si cette condition est remplie, la structure uniforme définie sur G par la famille (f_ι) est identique à la structure uniforme gauche du groupe topologique obtenu en munissant G de la topologie $\mathcal{C}$.</u>

En effet, soit $V_{a,\iota}$ l'ensemble des $x \in G$ tels que $f_\iota(e,x) \leqslant a$; les $V_{a,\iota}$ forment un système fondamental $\mathfrak{S}$ de voisinages de e dans la topologie $\mathcal{C}$, et pour tout $a \in G$, $a.\mathfrak{S}$ est un système fondamental de voisinages de a , les écarts f_ι étant glissants. Or, les $V_{a,\iota}$ sont des ensembles symétriques en raison de l'identité $f_\iota(e,x^{-1})=f_\iota(e,x)$; on a $V_{a,\iota}.V_{a,\iota} \subset V_{2a,\iota}$ d'après la relation $f_\iota(e,xy) \leqslant f_\iota(e,x)+f_\iota(e,y)$; donc (chap.III, § 1, prop.1), il suffit que la base de filtre $\mathfrak{S}$ satisfasse à (GV'_{IV}) pour que $\mathcal{C}$ soit compatible avec la structure de groupe de G ; or en exprimant que pour tout $a \in G$, tout indice ι et tout $a > 0$, il existe un indice $\varkappa$ et un $\beta > 0$ tels que $V_{\beta,\varkappa} \subset a^{-1}.V_{a,\iota}.a$, on obtient la condition de l'énoncé. La seconde partie de la proposition est immédiate.

Corollaire. Si G est un groupe abélien, toute famille d'écarts glissants sur G définit une topologie compatible avec la structure de groupe de G.

En effet, la condition de la prop.1 est alors toujours vérifiée.

Proposition 2. Sur tout groupe topologique G , il existe une famille d'écarts glissants à gauche (resp. à droite) telle que la structure uniforme définie par cette famille d'écarts soit identique à la structure uniforme gauche (resp. droite) de G .

En effet, soit V un voisinage symétrique quelconque de e (élément neutre de G), V_s l'entourage de la structure uniforme gauche de G formé des couples (x,y) tels que $x^{-1}y \in V$; déterminons une suite (V_n) de voisinages symétriques de e tels que $V_1=V$, $V^3_{n+1} \subset V_n$; si U_n est l'entourage formé des couples (x,y) tels que $x^{-1}y \in V_n$, U_n est un entourage symétrique tel que $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$. D'après la prop.2 du § 1, il existe un écart f tel que la structure uniforme définie par f soit identique à la structure $\mathcal{U}_V$ ayant un système fondamental d'entourages est formé des U_n ; en outre, comme l'application $(x,y) \longrightarrow (zx,zy)$ laisse invariant chacun des U_n, la démonstration de la prop.2 du § 1 montre que f est un <u>écart glissant à gauche</u>. Comme la structure uniforme gauche de G est la borne supérieure des structures $\mathcal{U}_V$ lorsque V parcourt un système fondamental de voisinages symétriques de e, la proposition est démontrée.

Si le groupe G admet un groupe complété $\hat{G}$, et si la structure uniforme gauche de G est définie par une famille (f_ι) d'écarts glissants à gauche, les f_ι se prolongent par continuité à $\hat{G} \times \hat{G}$ et sont des écarts sur $\hat{G}$ définissant la structure uniforme gauche de ce groupe (§ 1, prop.1) ; en outre (principe de prolongement des identités), ce sont des écarts glissants à gauche sur $\hat{G}$.

2. <u>Groupes métrisables</u>. <u>Proposition 3</u>. <u>Pour que la topologie d'un groupe topologique</u> G <u>soit métrisable, il faut et il suffit que</u> G <u>soit séparé et que l'élément neutre</u> e <u>possède un système fondamental dénombrable de voisinages</u>.

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si elle est remplie, soit (V_n) est un système fondamental dénombrable de voisinages de e ; si U_n désigne l'ensemble des couples (x,y) tels que $x^{-1}y \in V_n$, les U_n forment un système fondamental dénombrable d'entourages de la structure uniforme gauche de G ; comme cette structure est en outre séparée, elle est métrisable d'après le th.1 du § 2.

On voit de la même manière que la structure uniforme droite de G est métrisable. En outre, on peut supposer que le système fondamental (V_n) soit formé de voisinages symétriques tels que $V_{n+1}^3 \subset V_n$. La prop.2 montre alors que la structure uniforme gauche (resp. droite) de G est définie par une <u>distance glissante à gauche</u> d_s (resp. une <u>distance glissante à droite</u> d_d).

On notera que, si les deux structures uniformes de G sont distinctes, la distance d_s n'est pas glissante à droite, et par suite $d_s(x^{-1},y^{-1})$ est en général $\neq d_s(x,y)$ (cf. exerc.1).

En particulier, si G est un groupe abélien métrisable, sa structure uniforme est définie par une distance glissante d ; si G est noté additivement, on a $d(x,y)=d(0,y-x)=d(0,x-y)$; on pose souvent $d(0,x)=|x|$ (ou $d(0,x)=\|x\|$); on a donc $d(x,y)=|x-y|$. La fonction $|x|$ satisfait aux identités suivantes : 1° $|-x|=|x|$; 2° $|x+y|\leqslant|x|+|y|$; en outre, la relation $|x|=0$ entraîne $x=0$. Réciproquement, la donnée d'une application $x\rightarrow|x|$ d'un groupe abélien additif G dans $\mathbb{R}_+$, satisfaisant aux trois conditions précédentes, définit sur G une distance glissante $d(x,y)=|x-y|$, et par suite (prop.1) une topologie métrisable compatible avec la structure de groupe de G .

<u>Proposition 4</u>. <u>Si</u> G <u>est un groupe métrisable, tout groupe quotient séparé</u> G/H <u>de</u> G <u>est métrisable ; si en outre</u> G <u>est complet</u>, G/H <u>est complet</u>.(*)

La première partie de la proposition résulte de ce que dans G/H , l'élément neutre admet un système fondamental dénombrable de voisinages : si (V_n) est un système fondamental de voisinages de e dans G , les images canoniques $\dot{V}_n$ des ensembles V_n dans G/H forment un système fondamental de voisinages de l'élément neutre de G/H (chap.III, § 2, cor. du th.1).

Pour montrer que, si G est complet, il en est de même de G/H , il suffit de voir (§ 1,prop.8) qu'une suite de Cauchy $(\dot{x}_n)$ pour la structure uniforme gauche de G/H , est convergente ; on peut toujours supposer

---

(*) <u>On ignore</u> si, lorsque G est un groupe topologique complet <u>quelconque</u>, tout groupe quotient séparé de G est complet ou non.

(en extrayant au besoin une suite partielle de $(\dot{x}_n)$) que, pour tout couple d'indices p,q tels que $p \geqslant n$, $q \geqslant n$, on a $\dot{x}_p^{-1}\dot{x}_q \in \dot{V}_n$; cela signifie que, pour tout couple de points $y \in \dot{x}_p$, $z \in \dot{x}_q$, on a $y^{-1}z \in HV_n = V_nH$; il en résulte que, pour tout $y \in \dot{x}_p$ l'intersection de $\dot{x}_q$ et du voisinage yV_n de y n'est pas vide. Supposons alors la suite (V_n) choisie de sorte que $V_{n+1}^2 \subset V_n$ et définissons par récurrence une suite (x_n) de points de G de sorte que $x_n \in \dot{x}_n$ et $x_{n+1} \in x_nV_n$, ce qui est possible d'après ce qui précède ; on en conclut que pour $p > 0$, $x_{n+p} \in x_nV_nV_{n+1}\dots V_{n+p-1} \subset x_nV_{n-1}$, comme on le voit aussitôt par récurrence. La suite (x_n) est donc une suite de Cauchy dans G, et converge par suite vers un point a ; on en conclut aussitôt que l'image canonique $\dot{a}$ de a dans G/H est limite de la suite $(\dot{x}_n)$.

3. Corps valués. Définition 2. Un appelle valeur absolue ou valuation multiplicative sur un corps K une application $x \to |x|$ de K dans $\mathbb{R}_+$, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) $|x| = 0$ est équivalent à $x=0$;

b) $|xy| = |x|.|y|$ quels que soient x et y ;

c) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ quels que soient x et y.

D'après b), on a $|x| = |1|.|x|$, et comme il existe par hypothèse un x au moins tel que $|x| \neq 0$, on a $|1| = 1$; on en tire $1 = |-1|^2$ d'où également $|-1| = 1$, et par suite $|-x| = |-1|.|x| = |x|$ on en conclut $|x-y| \leqslant |x| + |y|$ quels que soient x et y. On peut encore dire que $d(x,y) = |x-y|$ est une distance glissante sur le groupe additif de K, et l'application $x \to |x|$ une représentation du groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ de K, dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$.

La distance glissante $|x-y|$ définit sur K une topologie d'espace métrique compatible avec la structure de groupe additif de K ; mais en outre, cette topologie est compatible avec la <u>structure de corps</u> de K . En effet, la continuité de xy dans K résulte de la relation

$$xy-x_0y_0 =(x-x_0)(y-y_0)+(x-x_0)y_0+x_0(y-y_0)$$

qui donne

$$|xy-x_0y_0| \leqslant |x-x_0|.|y-y_0|+|x_0|.|y-y_0|+|y_0|.|x-x_0|$$

De même, la continuité de x^{-1} en tout point $x_0 \neq 0$ résulte de l'identité $x^{-1}-x_0^{-1}= x^{-1}.(x_0-x)x_0^{-1}$, qui donne, d'après b)

$$|x^{-1}-x_0^{-1}| = \frac{|x-x_0|}{|x_0|.|x|}$$

Or, si $\varepsilon > 0$ est tel que $\varepsilon < |x_0|$, la relation $|x-x_0| \leqslant \varepsilon$ entraîne $|x| \geqslant |x_0| - \varepsilon$, d'où $|x^{-1}-x_0^{-1}| \leqslant \frac{\varepsilon}{|x_0|(|x_0|-\varepsilon)}$, ce qui établit la continuité de x^{-1} au point x_0 .

<u>Définition 3</u>. <u>On appelle corps valué un corps</u> K <u>muni de la structure définie par la donnée d'une valeur absolue sur</u> K .

Un corps valué sera toujours considéré comme muni de la topologie définie par sa valeur absolue, qui en fait un <u>corps topologique</u>.

<u>Exemples</u>. 1) La valeur absolue d'un nombre réel est une valuation multiplicative sur le corps $\mathbb{R}$, qui définit sur ce corps la topologie de la droite numérique. Sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (identifié à $\mathbb{R}^2$) et le corps des quaternions $\mathbb{K}$ (identifié à $\mathbb{R}^4$) la norme euclidienne est de même une valuation multiplicative définissant respectivement la topologie de chacun de ces corps.

2) Lorsque, sur un corps K , on a défini une <u>valuation additive</u> v , à valeurs dans $\mathbb{R}$ (<u>Alg</u>.,chap.V), on définit sur K une <u>valuation multiplicative</u> en posant $|x| = 2^{-v(x)}$ pour $x \neq 0$, et $|0|=0$.
En effet, de la relation $v(xy)=v(x)+v(y)$ pour $x\neq 0$ et $y \neq 0$,

on déduit $|xy| = |x|.|y|$ pour ces valeurs de x et y, et cette relation est trivialement vérifiée si l'un des éléments x, y est nul ; de même de $v(x+y) \geqslant \mathrm{Min}(v(x), v(y))$ pour $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x+y \neq 0$, on déduit $|x+y| \leqslant \mathrm{Max}\,(|x|, |y|) \leqslant |x|+|y|$ et ces inégalités sont encore vérifiées si l'un des éléments $x, y, x+y$ est nul. En particulier, si $v_p(x)$ est la valuation additive p-adique sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, la valuation multiplicative correspondante $|x|_p = 2^{-v_p(x)}$ est dite <u>valuation</u> <u>p-adique multiplicative</u> (ou <u>valeur absolue</u> p-<u>adique</u>) sur le corps $\mathbb{Q}$.

5) Si, sur un corps quelconque K, on pose $|x| = 1$ pour $x \neq 0$, et $|0| = 0$, on définit sur K une valeur absolue, dite valeur absolue <u>impropre</u> sur K ; la topologie qu'elle définit sur K est la topologie discrète.

<u>Remarque</u>. Si, dans un corps valué, x est une racine de l'unité, on a $|x| = 1$, car si $x^n = 1$ pour un entier $n > 0$, on en tire $|x|^n = 1$, d'où $|x| = 1$. En particulier, la seule valuation multiplicative sur un corps fini est la valuation <u>impropre</u>, puisque tout élément $\neq 0$ du corps est racine de l'unité.

<u>Proposition 5</u>. <u>L'anneau complété</u> $\hat{K}$ <u>d'un corps</u> K <u>valué par une valeur absolue</u> $|x|$ <u>est un corps, et la fonction</u> $|x|$ <u>se prolonge par continuité en une valeur absolue sur</u> $\hat{K}$, <u>qui définit la topologie</u> de $\hat{K}$.

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur K (pour la structure uniforme additive) tel que 0 ne soit pas adhérent à $\mathfrak{F}$; pour voir que $\hat{K}$ est un corps, il suffit d'établir que l'image de $\mathfrak{F}$ par l'application $x \to x^{-1}$, est un filtre de Cauchy. Or, il existe par hypothèse un nombre $a > 0$ et un ensemble $A \in \mathfrak{F}$ tel que $|x| \geqslant a$ pour tout $x \in A$;

d'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $B \in \mathfrak{F}$ tel que $B \subset A$ et, pour tout couple d'éléments x,y de B, $|x-y| \leqslant \varepsilon$; on en conclut $|x^{-1}-y^{-1}| = \dfrac{|x-y|}{|x|.|y|} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{a^2}$, d'où la première partie de la proposition. La distance glissante $|x-y| = d(x,y)$ se prolonge par continuité à $(\hat{K}) \times (\hat{K})$ en une distance glissante sur $\hat{K}$, que nous désignerons encore par $d(x,y)$, et cette distance définit la topologie de $\hat{K}$; si on pose $|x| = d(0,x)$ pour $x \in \hat{K}$, il est clair que $|x|$ est le prolongement par continuité de la fonction $|x|$ dans K, et est donc une valeur absolue sur $\hat{K}$ d'après le principe de prolongement des identités.

4. <u>Espaces normés sur un corps valué</u>. <u>Définition 4</u>. <u>Etant donné un espace vectoriel</u> E (à gauche, par exemple) <u>sur un corps valué</u> K (dans lequel la valeur absolue de x est notée $|x|$ et est distincte de la valeur absolue impropre sur K), <u>on appelle norme sur</u> E <u>une application</u> $x \to p(x)$ <u>de</u> E <u>dans</u> R_+, <u>satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

a) $p(x)=0$ <u>est équivalente à</u> $x=0$;

b) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ <u>quels que soient</u> x <u>et</u> y <u>dans</u> E ;

c) $p(tx)=|t|p(x)$ <u>quels que soient</u> $t \in K$ <u>et</u> $x \in E$.

De la condition c) on déduit en particulier que $p(-x)=p(x)$; par suite, si on pose $d(x,y)=p(x-y)$, d est une <u>distance glissante</u> sur le groupe additif E ($n^o 2$), donc y définit ~~d~~ une topologie d'espace métrique compatible avec la structure de groupe additif de E ; en outre, l'application $(t,x) \to tx$ de $K \times E$ dans E est <u>continue</u> dans $K \times E$: en effet, on a

$$tx - t_o x_o = (t-t_o)(x-x_o) + t-t_o) x_o + t_o(x-x_o)$$

et par suite

$$p(tx - t_o x_o) \leqslant |t-t_o| p(x-x_o) + |t-t_o| p(x_o) + |t_o| p(x-x_o)$$

ce qui montre que le premier membre peut être rendu aussi petit qu'on veut en prenant $|t-t_0|$ et $p(x - x_0)$ assez ptits.

Définition 5. On appelle espace normé sur un corps valué K un espace vectoriel E sur le corps K , muni de la structure définie par la donnée d'une norme sur E .

Un espace normé sera toujours considéré comme muni de la topologie définie par sa norme.

Exemples. 1) Sur un corps valué K , considéré comme espace vectoriel (à droite ou à gauche) par rapport à lui-même, la valeur absolue $|x|$ est une norme.

2) L'expression que nous avons appelée norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ (chap.V, §2), $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, est évidemment une norme au sens de la définition 4. Il en est de même des fonctions $\sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$ et $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

3) Soit $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des fonctions f définies dans un ensemble E , prenant leurs valeurs dans un corps valué K , et telles que la fonction numérique $x \to |f(x)|$ soit bornée dans E .
Cet ensemble est évidemment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel K^E (à droite et à gauche) des applications de E dans K .
Si on pose $p(f) = \sup_{x\in E} |f(x)|$, p est une norme sur l'espace vectorie $\mathcal{B}(E)$ (cf. chap.VIII).

4) Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues numériques définies dans l'intervalle $I = [0,1]$, la fonction $p(x) = \int_0^1 |x(t)|\,dt$ est une norme . *

Définition 6. On dit que deux normes sur un espace vectoriel E (sur un corps valué K) sont équivalentes si elles définissent la même topologie sur E .

<u>Proposition 6</u>. <u>Pour que deux normes</u> p,q <u>sur un espace vectoriel</u> E <u>soient équivalentes, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres</u> $a>0, b>0$, <u>tels que, pour tout</u> $x \in E$, <u>on ait</u>

$$(1) \qquad a.p(x) \leq q(x) \leq b.p(x)$$

Désignons par S_α la boule fermée de centre 0 et de rayon $\alpha>0$ relative à la norme p , c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $p(x) \leq \alpha$; soit de même T_α la boule fermée de centre 0 et de rayon α relative à q , c'est-à-dire l'ensemble des x tels que $q(x) \leq \alpha$. Si p et q sont équivalentes, il existe un nombre $\beta>0$ tel que la boule T_1 contienne la boule S_β , autrement dit, la relation $p(x) \leq \beta$ entraîne $q(x) \leq 1$. Comme la valeur absolue de K n'est pas impropre, il existe $t_0 \in K$ tel que $0<|t_0|<1$; pour tout $x \neq 0$ dans E , il existe un entier (positif ou négatif) k et un seul tel que $\beta|t_0|<p(t_0^k x) \leq \beta$; on a par suite $q(t_0^k x) \leq 1$ d'où $q(x) \leq \frac{1}{|t_0|^k}$; mais $\frac{1}{|t_0|^k} < \frac{1}{\beta|t_0|}\,p(x)$, et en posant $b = \frac{1}{\beta|t_0|}$, on voit que pour tout $x \neq 0$ on a $q(x) \leq bp(x)$, relation qui est encore valable pour $x=0$. En exprimant de le même manière que S_1 contient une boule T_α , on obtient la première des inégalités (1), ce qui démontre que ces conditions sont <u>nécessaires</u> pour que p et q soient équivalentes ; il est évident qu'elles sont aussi <u>suffisantes</u>, car elles entraînent que T_{ar} est contenue dans S_r , et $S_{r/b}$ dans T_r , quel que soit $r>0$.

<u>Exemple</u>. Dans l'espace R^n , les trois normes $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $\sup_{1\leq i\leq n}|x_i|$ et $\sum_{i=1}^n |x_i|$ sont équivalentes, car on a

$$(2) \qquad \sup_{1\leq i\leq n}|x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n.\sup_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

<u>Remarque</u>. La démonstration de la prop.6 établit, plus généralement, que, pour que la topologie définie par la norme p soit <u>plus fine</u> que celle définie par la norme q , il faut et il suffit qu'il existe un nombre $b>0$ tel que $q(x) \leq b.p(x)$ pour tout $x \in E$.

<u>Proposition 7</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace normé sur un corps valué</u> K , p <u>sa norme</u>, $\hat{E}$ <u>le groupe topologique additif complété du groupe additif</u> E . <u>La fonction</u> $(t, x) \longrightarrow tx$ <u>se prolonge par continuité à</u> $\hat{K}\times\hat{E}$, <u>et définit sur</u> $\hat{E}$ <u>une structure d'espace vectoriel par rapport à</u> $\hat{K}$; <u>la norme</u> p <u>se prolonge par continuité à</u> $\hat{E}$ <u>en une norme</u> $\overline{p}$ <u>qui définit la topologie de</u> $\hat{E}$.

Le prolongement par continuité de tx est un cas particulier du théorème de prolongement d'une application bilinéaire continue d'un produit $E\times F$ de deux groupes abéliens dans un troisième G (chap.III, § 5,th.1) ; on a $1.x = x$ et $t(ux)=(tu)x$ pour $t\in\hat{K}$, $u\in\hat{K}$, $x\in\hat{E}$, d'après le principe de prolongement des identités ; donc la loi externe $(t, x) \longrightarrow tx$ définit bien sur $\hat{E}$ une structure d'espace vectoriel par rapport à $\hat{K}$. D'autre part, la distance glissante $d(x,y)=p(x-y)$ se prolonge à $\hat{E}\times\hat{E}$ en une distance glissante $\overline{d}$ sur $\hat{E}$, qui définit la topologie de $\hat{E}$ (n°1) ; si on pose $\overline{p}(x)=d(0,x)$, $\overline{p}$ est le prolongement de p à $\hat{E}$ par continuité, et satisfait aux conditions a) et b) de la déf.4 ; en vertu de la continuité de tx dans $\hat{K}\times\hat{E}$, elle satisfait aussi à la condition c) (principe de prolongement des identités) donc est bien une <u>norme</u> sur $\hat{E}$.

Lorsqu'on considère sur un espace vectoriel E une structure bien déterminée d'espace normé, on désigne le plus souvent la norme d'un vecteur x par la notation $\|x\|$, si cette notation ne peut prêter à confusion.

<u>5. Espaces quotients et espaces produits d'espaces normés</u>. <u>Proposition 8</u>. <u>Soit</u> E <u>un espace normé sur un corps valué</u> K , H <u>un sous-espace vectoriel fermé de</u> E ; <u>si, pour toute classe</u> $\dot{x}\in E/H$, <u>on pose</u> $\|\dot{x}\| = \inf \|x\|$, <u>on définit sur l'espace vectoriel</u> E/H <u>une norme, qui définit sur cet espace la topologie quotient de celle de</u> E <u>par</u> H .

En effet, si $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont deux points de E/H , l'ensemble $\dot{x}+\dot{y}$ est identique à l'ensemble des $z = x+y$, où x parcourt $\dot{x}$ et y parcourt $\dot{y}$; comme $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$, on a (chap.IV, § 5, formule (24))

$$\inf_{z \in \dot{x}+\dot{y}} \|z\| \leqslant \inf_{z \in \dot{x}+\dot{y}} (\|x\|+\|y\|) = \inf_{x \in \dot{x}} \|x\| + \inf_{y \in \dot{y}} \|y\| = \|\dot{x}\|+\|\dot{y}\|$$

autrement dit $\|\dot{x}+\dot{y}\| \leqslant \|\dot{x}\|+\|\dot{y}\|$. On démontre de la même manière que $\|t\dot{x}\| = |t|.\|\dot{x}\|$; enfin, la relation $\inf_{x \in \dot{x}} \|x\| = 0$ signifie que la distance de 0 à la classe $\dot{x}$ est nulle, et comme $\dot{x}$ est un ensemble fermé, $0 \in \dot{x}$, donc $\dot{x}$ est identique à H , autrement dit à l'origine $\dot{0}$ de E/H . D'autre part, la boule $\|x\| \leqslant a$ a pour image canonique dans E/H la boule $\|\dot{x}\| < a$; car la relation $\|x\| < a$ entraîne évidemment $\|\dot{x}\| < a$, et réciproquement, si $\|\dot{x}\| < a$, il existe $x \in \dot{x}$ tel que $\|x\| < a$ d'après la définition de $\|\dot{x}\|$. Les boules $\|\dot{x}\| < a$ forment donc bien un système fondamental de voisinages de l'origine dans E/H (chap.III, §2, cor. du th.1).

La norme $\|\dot{x}\|$ peut aussi s'interpréter de la manière suivante : c'est la <u>distance de tout point</u> $x \in \dot{x}$ <u>au sous-espace</u> H , car l'ensemble des points de $\dot{x}$ est identique à l'ensemble des $x - z$, où z parcourt H .

<u>Proposition 9</u>. <u>Soit</u> $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ <u>une famille finie d'espaces normés sur un corps valué</u> K ; <u>si, dans l'espace vectoriel produit</u> $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ <u>on pose, pour tout</u> $x = (x_i)$, $\|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|$, <u>on définit sur</u> E <u>une norme qui définit sur</u> E <u>la topologie produit de celles des</u> E_i .

En effet, si $x = (x_i)$, $y = (y_i)$, on a $x+y = (x_i+y_i)$, donc $\|x+y\| = \sup_i \|x_i+y_i\| \leqslant \sup_i (\|x_i\|+\|y_i\|) \leqslant \sup_i \|x_i\| + \sup_i \|y_i\| = \|x\|+\|y\|$. Il est clair par ailleurs que $\|tx\| = |t|.\|x\|$, et que $\|x\| = 0$ entraîne $\|x_i\| = 0$, donc $x_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, c'est-à-dire $x = 0$; donc $\|x\|$ est bien une norme sur E . D'autre part, la relation $\|x\| \leqslant a$ équivaut aux n relations $\|x_i\| \leqslant a$, donc la ~~xx~~ norme $\|x\|$ définit bien sur E la topologie produit.

On montrerait de même que les fonctions $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ et $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}$ sont des normes sur E ; en vertu des inégalités (2), ces trois normes sont d'ailleurs <u>équivalentes</u>.

En particulier, sur l'espace vectoriel K^n (à gauche ou à droite) sur K , si, pour $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on pose $p_1(x) = \sup_i |x_i|$, $p_2(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $p_3(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, les trois fonctions p_1, p_2, p_3 sont des normes équivalentes qui définissent sur K^n la topologie produit de celles des facteurs K (cf. exerc. 10).

6. <u>Fonctions multilinéaires continues</u>. <u>Théorème 1</u>. <u>Soient</u> E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>et</u> F n+1 <u>espaces normés sur un corps valué</u> K , <u>et</u> f <u>une application multilinéaire de</u> $\prod_{i=1}^{n} E_i$ <u>dans</u> F . <u>Pour que</u> f <u>soit continue dans</u> $\prod_{i=1}^{n} E_i$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un nombre</u> $a > 0$ <u>tel que, quels que soient les points</u> $x_i \in E_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, <u>on ait</u>

$$(3) \qquad \|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \leqslant a . \|x_1\| . \|x_2\| \ldots \|x_n\| .$$

La condition est <u>nécessaire</u>. En effet, si f est continue au point $(0,0,..,0)$, il existe un nombre $b > 0$ tel que les conditions $\|x_i\| \leqslant b$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ entraînent $\|f(x_1, .., x_n)\| \leqslant 1$. Soit $t_0 \in K$ tel que $0 < |t_0| < 1$; pour tout point $(x_i) \in \prod_i E_i$, il existe n entiers k_i tels que $b|t_0| \leqslant \|t_0^{k_i} x_i\| \leqslant b$; par suite on a $|t_0|^{k_1+k_2+..+k_n}$ $\|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \leqslant b$; d'autre part on a $\frac{1}{|t_0|^{k_i}} \leqslant \frac{1}{b|t_0|} \|x_i\|$, donc $\|f(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant a . \|x_1\| . \|x_2\| \ldots . \|x_n\|$, avec $a = \frac{1}{b^{n-1}|t_0|^n}$

La condition est <u>suffisante</u>. Montrons en effet que, si elle est remplie, f est continue en tout point (a_i) de $\prod_{i=1}^{n} E_i$. On peut écrire

$$f(x_1,\dots,x_n)-f(a_1,\dots,a_n)=\sum_{i=1}^{n} f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i-a_i,x_{i+1},\dots,x_n)$$

donc les conditions $\|x_i - a_i\| \leqslant r$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ entraînent

$$\|f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i-a_i,x_{i+1},\dots,x_n)\| \leqslant$$
$$\leqslant ar\|a_1\|\dots\|a_{i-1}\|(\|a_{i+1}\|+r)\dots(\|a_n\|+r)$$

et a fortiori

$$\|f(x_1,\dots,x_n)-f(a_1\dots,a_n)\|\leqslant nar\prod_{i=1}^{n}(\|a_i\|+r)$$

Comme le second membre est un polynome en r sans terme constant, il tend vers 0 avec r , ce qui prouve la continuité de f .

Remarque. Ce théorème entraîne deux propositions démontrées plus haut : d'une part, la continuité de la fonction bilinéaire tx , en vertu de la relation $\|tx\| = |t|.\|x\|$; d'autre part, la prop.6, en appliquant le th.1 à l'application identique de E , considérée comme application linéaire de l'espace E muni de la norme p dans l'espace E muni de la norme q (et vice-versa).

7. Familles absolument sommables dans un espace normé. Définition 7. Dans un espace normé E , on dit qu'une famille (x_ι) de points de E est absolu-sommable, si la famille $(\|x_\iota\|)$ des normes des x_ι est sommable dans $\mathbf{R}$.

Cette notion ne dépend qu'en apparence de la norme choisie sur E ; en vertu de la prop.6 , et du principe de comparaison des familles sommables de nombres réels, une famille absolument sommable pour une norme p sur E reste absolument sommable pour toute norme équivalente à p.

Si $(x_\iota)_{\iota\in I}$ est une famille de points de E sommable et absolument sommable, on a

$$\Big\|\sum_{\iota\in I} x_\iota\Big\| \leqslant \sum_{\iota\in I}\|x_\iota\|$$

En effet, pour toute partie finie J de I , on a $\left\| \sum_{\iota \in J} x_\iota \right\| \leqslant \sum_{\iota \in J} \| x_\iota \|$ l'inégalité précédente en résulte en passant à la limite suivant l'ordonné filtrant des parties finies de I (principe de prolongement des inégalités).

<u>Proposition 10.</u> <u>Dans un espace normé complet</u> E , <u>toute famille absolument sommable est sommable</u>.

En effet, si (x_ι) est une famille absolument sommable dans E , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de l'ensemble d'indices telle que, pour toute partie finie H ne rencontrant pas J , on ait $\sum_{\iota \in H} \| x_\iota \| \leqslant \varepsilon$; on en conclut a fortiori $\left\| \sum_{\iota \in H} x_\iota \right\| \leqslant \varepsilon$ ce qui démontre la propositon, puisque E est complet.

On dit qu'une <u>série</u> de terme général x_n est <u>absolument convergente</u> dans E si la série de terme général $\| x_n \|$ est convergente dans $\mathbb{R}$; il revient au même de dire que la famille (x_n) est absolument sommable ; par suite :

<u>Corollaire.</u> <u>Dans un espace normé complet</u> E , <u>toute série absolument convergente est commutativement convergente</u>.

La réciproque de la prop.10 est en général <u>inexacte</u>.

Considérons par exemple l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ des suites bornées $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, avec la norme $\|x\| = \sup_n | x_n |$. Soit x_m la suite $(x_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{mn} = 0$ pour $n \neq m$, et $x_{mm} = 1/m$ si $m \geqslant 1$, $x_{mm} = 0$ si $m = 0$. On vérifie aussitôt que dans $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est sommable et a pour somme l'élément $y = (y_n)$ tel que $y_n = 1/n$ si $n \geqslant 1$, $y_0 = 0$; mais comme $\| x_m \| = 1/m$, la suite des normes des x_m n'est pas sommable dans $\mathbb{R}$.

On a vu toutefois (chap.VI) que dans $\mathbb{R}^n$, toute famille sommable est absolument sommable. Plus généralement :

Proposition 11. Pour que, dans un espace normé complet E , toute famille sommable soit absolument sommable, il faut et il suffit qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que, pour toute famille finie $(x_\iota)_{\iota \in I}$ de points de E , on ait

(4) $$\sum_{\iota \in I} \|x_\iota\| \leq a . \sup_{J \subset I} \Big\| \sum_{\iota \in J} x_\iota \Big\|$$

La condition est suffisante. En effet, si elle est vérifiée, et si $(x_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille sommable dans E , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_0 de I telle que, pour toute partie finie H de I ne rencontrant pas J_0 , on ait $\| \sum_{\iota \in H} x_\iota \| \leq \varepsilon$; a fortiori, pour une telle partie H , on a $\sup_{J \subset H} \| \sum_{\iota \in J} x_\iota \| \leq \varepsilon$, donc, d'après (4), $\sum_{\iota \in H} \|x_\iota\| \leq a\varepsilon$, ce qui prouve que la famille $(\|x_\iota\|)$ est sommable dans R .

La condition est nécessaire. Supposons en effet qu'elle ne soit pas remplie, et soit t_0 un scalaire tel que $0 < |t_0| < 1$. Pour tout entier $n \geq 0$, il existe alors une famille finie $(x_{n,\iota})_{\iota \in I_n}$ telle que $\sum_{\iota \in I_n} \|x_{n,\iota}\| \geq |t_0|^{-2n} \sup_{J \subset I_n} \| \sum_{\iota \in J} x_{n,\iota} \|$; en multipliant tous les termes de cette famille par un même scalaire (puissance de t_0), on peut en outre supposer que

(5) $$|t_0|^{n+1} < \sup_{J \subset I_n} \Big\| \sum_{\iota \in J} x_{n,\iota} \Big\| \leq |t_0|^n$$

Considérons alors dans E la famille "double" $(x_{n,\iota})_{n \in N, \iota \in I_n}$; elle est sommable, car pour toute partie finie de l'ensemble d'indices formée des couples d'indices (n,ι) tels que $n \geq m$, la somme des $x_{n,\iota}$ correspondants a une norme $\leq \sum_{q=m}^{\infty} |t_0|^q = \frac{|t_0|^m}{1-|t_0|}$ d'après (5), donc arbitrairement petite ; mais la famille $(x_{n,\iota})$ n'est pas absolument sommable, puisque $\sum_{\iota \in I_n} \|x_{n,\iota}\| \geq |t_0|^{-n+1}$ croit indéfiniment avec n .

8. Algèbres normées sur un corps valué. Définition 8. Etant donné une algèbre sur un corps valué commutatif K (dont la valuation, notée $|x|$, n'est pas la valuation impropre), on dit qu'une norme $p(x)$ sur A (A étant considéré comme espace vectoriel sur K) est compatible avec la structure d'algèbre de A si la topologie qu'elle définit sur A est compatible avec la structure d'anneau de A. Une algèbre sur K munie de la structure définie par une norme compatible avec sa structure d'algèbre, est appelée algèbre normée.

Exemples. 1) Soit K un corps valué, K' un sous-corps du centre de K tel que la valuation $|x|$ de K ne se réduise pas à la valuation impropre lorsqu'on la restreint à K' ; K, muni de la norme $|x|$ est alors une algèbre normée sur K'.

2) Soit K un corps valué (dont la valuation $|x|$ n'est pas impropre), $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n sur K ; on sait que, en tant qu'espace vectoriel sur K, $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ est isomorphe à K^{n^2} ; si, pour toute matrice carrée d'ordre n sur K, $\underline{X} = (x_{ij})$, on pose $\|\underline{X}\| = \sup_{i,j} |x_{ij}|$, on définit donc une norme sur $\mathcal{M}_{n,n}(K)$; en outre la topologie définie par cette norme est identique à la topologie produit sur K^{n^2} ; il en résulte (vu la continuité des polynomes à un nombre quelconque de variables dans K) que la norme précédente est bien compatible avec la structure d'algèbre de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$.

3) L'ensemble $\mathcal{B}(E)$ des fonctions f définies dans un ensemble E, prenant leurs valeurs dans un corps valué commutatif K, et telles que $x \rightarrow |f(x)|$ soit bornée dans E, est une algèbre sur K ; la norme $p(f) = \sup_{x \in E} |f(x)|$ est compatible avec la structure d'anneau de $\mathcal{B}(E)$, car on a $p(fg) \leqslant p(f)p(g)$, et par suite (th. 1), la fonction bilinéaire $(f,g) \rightarrow fg$ est continue dans $\mathcal{B}(E)$.

62

Si A est une algèbre normée sur K , $p(x)$ la norme dans A , l'application bilinéaire $(x, y) \longrightarrow xy$ de $A \times A$ dans A est continue par hypothèse; il existe donc un nombre $a > 0$ tel que (th.1) $p(xy) \leqslant a.p(x)p(y)$. En remplaçant $p(x)$ par la norme équivalente $a.p(x)$, on peut donc toujours supposer que la norme $\|x\|$ sur une algèbre normée A est telle que

(6) $$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

On en conclut par récurrence que, pour tout n entier >0, $\|x^n\| \leqslant \|x\|^n$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère fermé dans l'algèbre normée A ; si, dans l'algèbre quotient $A/\mathfrak{a}$, on pose $\|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}} \|x\|$, on obtient sur $A/\mathfrak{a}$ une norme qui définit la topologie quotient de celle de A par $\mathfrak{a}$ (prop.8); comme cette topologie quotient est compatible avec la structure d'anneau quotient de $A/\mathfrak{a}$ (chap.III, § 5,n°2), l'algèbre quotient $A/\mathfrak{a}$, muni de la norme $\|\dot{x}\|$, est une algèbre normée.

De même, si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de n algèbres normées sur un corps valué K , et si, dans l'algèbre produit $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, on pose, pour $x = (x_i)$, $\|x\| = \sup_i \|x_i\|$, on obtient sur A une norme qui définit la topologie produit des A_i (prop.9) ; comme cette dernière est compatible avec la structure d'anneau de A (chap.III, § 5,n°3), l'algèbre produit A , munie de la norme $\|x\|$, est une algèbre normée .

Soit A une algèbre normée sur un corps valué K . L'anneau complété $\hat{A}$ de A (chap.III, § 5,prop.2) est aussi muni d'une structure d'espace vectoriel par rapport à $\hat{K}$ (prop.7), et on a évidemment, pour $t \in \hat{K}$, $x \in \hat{A}$, $y \in \hat{A}$; $t(xy) = (tx)y = x(ty)$ d'après le principe de prolongement des identités ; c'est donc une algèbre sur $\hat{K}$; comme d'autre part (prop.7) la norme sur A se prolonge par continuité en une norme qui définit la topologie de $\hat{A}$, on voit que $\hat{A}$, munie de cette norme, est une algèbre normée sur le corps $\hat{K}$.

Lorsque l'algèbre normée A possède un <u>élément unité</u> e, l'application $t \rightarrow te$ est un isomorphisme de la structure de corps de K sur un sous-corps Ke de A ; cet isomorphisme est aussi un isomorphisme de la structure de <u>corps topologique</u> de K sur celle de Ke (la topologie sur ce corps étant induite par celle de A), car la restriction $\|te\|$ de la norme de A à K est une norme équivalente à la valuation $|t| = \|te\|/\|e\|$. Lorsque $\|e\| = 1$, on a $\|te\| = |t|$; on peut alors <u>identifier</u> le corps valué K au sous-corps normé Ke de A, et en particulier écrire 1 l'élément unité de A. Il ne sera plus question, dans ce qui suit, que d'algèbres normées A ayant un élément unité e, et dans lesquelles la norme satisfait à l'inégalité (6) ; en y faisant $x = y = e$, on en conclut que $\|e\| \geqslant 1$.

<u>Proposition 12. Soit</u> G <u>le groupe des éléments inversibles d'une algèbre normée</u> A ; <u>la topologie induite sur G par celle de A est compatible avec la structure de groupe de</u> G.

<u>Lemme. Si, dans</u> A, x <u>est inversible, et</u> $\|x - e\| \leqslant 1$, <u>la série de terme général</u> $(e - x)^n$ <u>est convergente, et on a</u>

(7)
$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n$$

<u>Réciproquement, si la série de terme général</u> $(e - x)^n$ <u>est convergente,</u> x <u>est inversible, et on a la formule</u> (7).

On a en effet, en posant $e - x = u$,

(8)
$$(e - u) \sum_{n=0}^{p} u^n = e - u^{p+1}$$

On a $\|u^{p+1}\| \leqslant \|u\|^{p+1}$, donc, si $\|u\| < 1$, u^{p+1} tend vers 0 ; en multipliant les deux membres de (8) par $x^{-1} = (e - u)^{-1}$ et faisant croître p indéfiniment, on voit que la série de terme général $(e - x)^n$ converge vers x^{-1}. Reciproquement, si cette série est convergente, et si y est sa somme, u^n tend vers 0 quand n croît indéfiniment, donc en passant à la limite dans (8), on voit que $xy = e$, et on montre de même que $yx = e$, c'est-à-dire que $y = x^{-1}$ (cette partie du raisonnement est d'ailleurs valable dans un anneau topologique quelconque ayant un élément unité e).

Ce lemme étant établi, la prop.12 sera démontrée si on prouve que la fonction x^{-1} est <u>continue</u> dans G. Soit $x_0 \in G$; pour tout $x \in G$, posons $x = x_0(e+u)$, c'est-à-dire $u = x_0^{-1}(x-x_0)$; on a donc $\|u\| \leq \|x_0^{-1}\| \cdot \|x-x_0\|$, et par suite, si $\|x-x_0\| \leq \frac{1}{2\|x_0^{-1}\|}$, $\|u\| \leq \frac{1}{2}$; comme $e+u = x_0^{-1}x$ est inversible, et que la série de terme général u^n est absolument convergente, on a, d'après (7),

$\|(e+u)^{-1}\| \leq \|e\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|u\|^n \leq \|e\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2\|e\|$ d'où

$\|x^{-1}\| \leq \|(e+u)^{-1}\| \cdot \|x_0^{-1}\| \leq 2\|e\| \cdot \|x_0^{-1}\|$. Cela étant, on peut écrire $x^{-1} - x_0^{-1} = x_0^{-1}(x_0 - x)x^{-1}$; si $\|x - x_0\| \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2\|x_0^{-1}\|}$, on aura donc $\|x^{-1} - x_0^{-1}\| \leq 2\varepsilon\|e\| \cdot \|x_0^{-1}\|^2$, ce qui prouve la continuité de x^{-1} au point x_0.

<u>Proposition 13</u>. <u>Si</u> A <u>est une algèbre normée complète, le groupe</u> G <u>des éléments inversibles de</u> A <u>est un ensemble ouvert dans</u> A ; <u>en outre</u> G <u>est un groupe complet</u> (pour chacune de ses structures uniformes).

Pour montrer que G est ouvert dans A, il suffit de prouver que G contient un voisinage V de e dans A ; car alors, pour tout $x_0 \in G$ les éléments de x_0V sont inversibles, et x_0V est un voisinage de x_0, puisque $x \to x_0x$ est un homéomorphisme de A sur lui-même. Or, la boule V des x tels que $\|x-e\| < 1$ est contenue dans G, car pour ces points, la série de terme général $(e-x)^n$ est absolument convergente, donc convergente puisque A est supposé complet (prop.10). Le lemme de la prop.12 prouve alors que x est inversible.

Pour voir que la structure uniforme gauche (par exemple) de G est une structure d'espace complet, montrons que si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy pour cette structure, $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme additive de A , et converge vers un point $x_0 \in G$. Pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, il existe un ensemble $M \in \mathfrak{F}$ tel que, pour $x \in M$, $y \in M$, on ait $\|x^{-1}y - e\| \leqslant \varepsilon$, ce qui entraîne $\|y-x\| \leqslant \varepsilon \|x\|$, donc $\|x\| \leqslant (1+\varepsilon)\|a\|$. D'autre part, il existe un ensemble $N \subset M$, appartenant à $\mathfrak{F}$, et tel que $\|x^{-1}y - e\| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)\|a\|}$ pour $x \in N$, $y \in N$; on en conclut que $\|y - x\| \leqslant \frac{\varepsilon\|x\|}{(1+\varepsilon)\|a\|} \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy pour la structure additive de A , et par suite converge vers un point x_0 , puisque A est supposé complet. Comme x_0 est limite de $\mathfrak{F}$, on a, d'après le principe de prolongement des inégalités $\|x^{-1}x_0 - e\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in M$; comme $\varepsilon < 1$, on en conclut que $x^{-1}x_0$ est inversible, donc qu'il en est de même de x_0 , c'est-à-dire que $x_0 \in G$.

<u>Corollaire</u>. <u>Dans un corps valué complet, le groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ est un groupe complet.</u>

<u>Remarque</u>. La prop.13 est inexacte dans une algèbre normée non complète. Par exemple, dans l'algèbre $\mathcal{B}(I)$ des fonctions numériques continues dans $I=[0,1]$, (où la norme est $\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|$) , la sous-algèbre P formée des <u>polynomes</u> en t (pour $t \in I$) n'est pas complète ; si $x(t)$ est un polynome non constant quelconque, $1+\varepsilon x$ est arbitrairement voisin de l'élément unité 1 de P lorsque ε est arbitrairement petit, mais $1+\varepsilon x$ n'est pas inversible <u>dans</u> P .

9. <u>Familles multipliables dans une algèbre normée</u>. Dans une algèbre normée A , comme plus généralement dans un anneau topologique quelconque, on sait (chap.III, Appendice) qu'on peut définir la notion de <u>famille multipliable</u>

si I est un ensemble d'indices **totalement ordonné**, $(x_\iota)_{\iota\in I}$ une famille de points de A ayant I pour ensemble d'indices, et, pour toute partie finie J de I, totalement ordonnée par l'ordre induit, p_J le produit de la séquence $(x_\iota)_{\iota\in J}$, la famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ est multipliable et a pour produit p si l'application $J \to p_J$ tend vers p suivant l'ordonné filtrant $\mathfrak{F}(I)$ des parties finies de I. Le produit de la famille $(x_\iota)_{\iota\in I}$ se note alors $\prod_{\iota\in I} x_\iota$.

Proposition 14. *Soit A une algèbre normée complète, ayant un élément unité e, I un ensemble totalement ordonné quelconque ; si la famille $(u_\iota)_{\iota\in I}$ de points de A est absolument sommable, la famille $(e+u_\iota)_{\iota\in I}$ est multipliable dans A. En outre, si tous les éléments $(e+u_\iota)$ sont inversibles, il en est de même de leur produit $\prod_{\iota\in I}(e+u_\iota)$.*

Comme A est une algèbre **complète**, le critère de Cauchy montre que, pour établir que la famille $(e+u_\iota)$ est multipliable, il suffit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_0 de I telle que pour toute partie finie $J \supset J_0$ de I, on ait $\|p_J - p_{J_0}\| \leq \varepsilon$. Or, on peut écrire

$$p_J - p_{J_0} = \prod_{\iota\in J}(e+u_\iota) - \prod_{\iota\in J_0}(e+u_\iota) = \sum_H \Big(\prod_{\iota\in H} u_\iota\Big)$$

H parcourant l'ensemble des parties finies de J qui contiennent au moins un indice n'appartenant pas à J_0. Comme $\|\prod_{\iota\in H} u_\iota\| \leq \prod_{\iota\in H}\|u_\iota\|$, on peut donc écrire

$$\|p_J - p_{J_0}\| \leq \prod_{\iota\in J}(1+\|u_\iota\|) - \prod_{\iota\in J_0}(1+\|u_\iota\|) \tag{9}$$

Or, comme la famille $(\|u_\iota\|)$ est sommable par hypothèse, la famille $(1+\|u_\iota\|)$ est multipliable dans R_+^* (chap. IV, § 7, th. 4). On peut donc trouver J_0 telle que, pour $J \supset J_0$, le second membre de (9) soit $\leq \varepsilon$, ce qui démontre que la famille $(e+u_\iota)$ est multipliable.

Si chacun des éléments $e + u_\iota$ est inversible, posons $(e+u_\iota)^{-1} = e + v_\iota$, d'où $v_\iota = - u_\iota(e+u_\iota)^{-1}$. Il n'y a qu'un nombre fini d'indices ι tels que $\|u_\iota\| > 1/2$; pour les autres, on a, d'après (7), $\|(e+u_\iota)^{-1}\| \leqslant 2\|e\|$, donc $\|v_\iota\| \leqslant 2\|e\|\cdot\|u_\iota\|$; cela prouve que la famille (v_ι) est absolument sommable, et par suite que la famille $(e+v_\iota)_{\iota\in I'}$, est multipliable, I' désignant l'ensemble I , totalement ordonné par l'ordre <u>opposé</u> de l'ordre de I : il est clair alors que le produit de cette famille est l'inverse de $\prod_{\iota\in I}(e+u_\iota)$.

<u>Corollaire</u>. <u>Si la famille</u> ~~xxx~~ (u_ι) <u>est absolument sommable, et si aucun des éléments</u> $e+u_\iota$ <u>n'est diviseur de</u> 0 <u>dans</u> A , <u>le produit</u> $\prod_{\iota\in I}(e+u_\iota)$ <u>n'est pas diviseur de</u> 0 .

En effet, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les indices ι (en nombre fini) tels que $\|u_\iota\| \geqslant 1$; chacune des sous-familles de $(e+u_\iota)_{\iota\in I}$ dont lensemble d'indices est un des intervalles $]\leftarrow, a_1[$, $]a_i, a_{i+1}[$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$, $]a_n, \rightarrow[$, est une famille multipliable dont le produit est inversible d'après la prop.14, puisque pour tout indice ι distinct des a_i , $e+u_\iota$ est inversible d'après la prop.13 . Le produit $\prod_{\iota\in I}(e+u_\iota)$ est donc égal au produit d'un nombre <u>fini</u> d'éléments non diviseurs de 0 dans A , et par suite n'est pas non plus diviseur de 0 .

La réciproque de la prop.14 est inexacte en général (cf. exerc.14) . Mais on a la proposition suivante :

<u>Proposition 15</u>. <u>Soit</u> A <u>une algèbre normée complète, dans laquelle toute famille sommable est absolument sommable</u>. <u>Si</u> $(e+u_n)_{n\in N}$ <u>est une suite d'éléments inversibles de</u> A , <u>multipliable dans le groupe</u> G <u>des éléments inversibles de</u> A , <u>la suite</u> (u_n) <u>est absolument sommable dans</u> A .

D'après la prop.11, l'hypothèse entraîne qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que, pour toute famille finie $(x_\iota)_{\iota\in I}$ de points de A, on a la relation (4).

Nous allons en déduire la proposition en généralisant le raisonnement fait pour le cas où A est le corps des nombres complexes (chap. VI, § 6, th. 2).

Lemme 1. Si $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une suite finie d'éléments de A tels que $\sum_{i=1}^{p} \|a_i\| \leqslant h < 1$, on a

$$(10) \qquad \Big\| \prod_{i=1}^{p} (e + a_i) - e - \sum_{i=1}^{p} a_i \Big\| \leqslant \frac{h^2}{1-h}$$

En effet,

$$\prod_{i=1}^{p} (e + a_i) = e + \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i<j} a_i a_j + \dots + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} + \dots + a_1 a_2 \dots a_p$$

Or, on a

$$\Big\| \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \Big\| \leqslant \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \|a_{i_1}\| \cdot \|a_{i_2}\| \dots \|a_{i_k}\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{p} \|a_i\| \Big)^k \leqslant h^k$$

donc

$$\Big\| \prod_{i=1}^{p} (e + a_i) - e - \sum_{i=1}^{p} a_i \Big\| \leqslant h^2 + h^3 + \dots + h^p \leqslant h^2 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} h^n \Big) = \frac{h^2}{1-h}$$

Lemme 2. Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'éléments de A telle que, pour toute partie finie J de I, $\Big\| \prod_{i \in J} (e + a_i) - e \Big\| \leqslant \frac{1}{(2a+1)^2}$, on a $\sum_{i \in I} \|a_i\| \leqslant \frac{2a}{(2a+1)^2}$.

Posons $s = \sum_{i \in J} \|a_i\|$; d'après (10), on a, pour toute partie H de J, $\Big\| \prod_{i \in H} (e + a_i) - e - \sum_{i \in H} a_i \Big\| \leqslant \frac{s^2}{1-s}$ pourvu que $s < 1$; en supposant cette condition vérifiée, l'hypothèse du lemme 2 entraîne $\Big\| \sum_{i \in H} a_i \Big\| \leqslant \frac{1}{(2a+1)^2} + \frac{s^2}{1-s}$, donc, en vertu de (4), on a aussi

$$s \leqslant \Big(\frac{1}{(2a+1)^2} + \frac{s^2}{1-s} \Big) a, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{s(1-(a+1)s)}{1-s} \leqslant \frac{a}{(2a+1)^2}.$$

Si on a en outre $\frac{1-(a+1)s}{1-s} \geqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $s \leqslant \frac{1}{2a+1}$, on en conclut $s \leqslant \frac{2a}{(2a+1)^2}$. Nous avons donc prouvé que, si $\sum_{i \in J} \|a_i\| \leqslant \frac{1}{2a+1}$, on a $\sum_{i \in J} \|a_i\| \leqslant \frac{2a}{(2a+1)^2}$. Reste à montrer, par récurrence sur le nombre m d'éléments de J, qu'on a bien $\sum_{i \in J} \|a_i\| \leqslant \frac{1}{2a+1}$ pour toute partie finie J de I. Pour m=1, l'hypothèse donne $\|a_i\| \leqslant \frac{1}{(2a+1)^2}$ pour tout $i \in I$. Supposons la propriété démontrée pour $m < n$; si J a n éléments, on peut l'écrire $J = H \cup \{k\}$, où H a n-1 éléments.

Par hypothèse, $\sum_{i \in H} \|a_i\| \leqslant \frac{1}{2a+1}$, donc $\sum_{i \in H} \|a_i\| \leqslant \frac{2a}{(2a+1)^2}$; comme $\|a_i\| \leqslant \frac{1}{(2a+1)^2}$ on a $\sum_{i \in J} \|a_i\| \leqslant \frac{2a}{(2a+1)^2} + \frac{1}{(2a+1)^2} = \frac{1}{2a+1}$.

Ces lemmes étant démontrés, si $(e+u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite multipliable dans le groupe G , ~~ilaxi~~ existe une partie finie J de $\mathbb{N}$ telle que, pour toute partie finie H de $\mathbb{N}$ ne rencontrant pas J , on ait $\left\|\prod_{i \in H}(e+u_i) - e\right\| \leqslant \frac{1}{(2a+1)^2}$ (chap.III, Appendice, th.2). D'après le lemme 2, on en déduit $\sum_{i \in H} \|u_i\| \leqslant \frac{2a}{(2a+1)^2}$ pour toute partie finie H de $\mathbb{N}$ ne rencontrant pas J , ce qui entraîne que la famille $(\|u_n\|)$ est sommable dans $\mathbb{R}$ (chap.IV, § 7, th.1).

<u>Exercices</u>. 1) Soit G un groupe topologique dont les structures uniformes droite et gauche sont identiques. Montrer que cette unique structure uniforme peut être définie par une famille d'écarts sur G , glissants <u>à la fois</u> à droite et à gauche (en utilisant l'exerc.3 du chap.III, § 3, montrer que pour tout voisinage V de l'élément neutre de G , $V_0 = \bigcap_{x \in G} xVx^{-1}$ est un voisinage de e).

2) Soit G un groupe topologique, (f_ι) une famille saturée d'écarts glissants à gauche, définissant la structure uniforme gauche de G ; on pose $g_\iota(x) = f_\iota(e,x)$. Soit H un sous-groupe distingué fermé de G ; pour toute classe $\overline{x} \in G/H$, on pose $h_\iota(\overline{x}) = \inf_{x \in \overline{x}} g_\iota(x)$; montrer que si $\overline{f}_\iota(\overline{x},\overline{y}) = h_\iota(\overline{x}^{-1}\overline{y})$, les $\overline{f}_\iota$ forment une famille d'écarts glissants à gauche définissant la structure uniforme gauche de G/H (raisonner comme dans la prop.8).

3) Montrer que la topologie d'un corps valué satisfait à la condition (KT_a) de l'exerc.13 du chap.III, § 5 .

4) On dit qu'une application w d'un anneau A dans $\mathbb{R}_+$ est une <u>pseudo-valuation</u> sur A si elle satisfait aux conditions :

1^o $w(0)=0$; 2^o $w(x-y)\leqslant w(x)+w(y)$; 3^o $w(xy)\leqslant w(x)w(y)$. La pseudo-valuation w est dite <u>séparée</u> si $w(x)=0$ entraîne $x=0$. Si w est une pseudo-valuation séparée sur A , $w(x-y)$ est une distance glissante sur le groupe additif de A , et définit par suite une topologie compatible avec la structure de groupe additif de A ; montrer que cette topologie est compatible avec la structure d'anneau de A . Généraliser aux anneaux munis d'une pseudo-valuation séparée les principales propriétés des algèbres normées, notamment les prop. 12, 13 et 14.

Si w est une pseudo-valuation non séparée sur A , l'ensemble $\overset{-1}{w}(0)$ est un idéal bilatère $\mathfrak{a}$ dans A ; si on munit A de la topologie définie par l'écart $w(x-y)$, elle est compatible avec la structure d'anneau de A , et l'anneau séparé associé à A n'est autre que l'anneau quotient $A/\mathfrak{a}$, sur lequel la fonction $\overline{w}(\overline{x})$, égale pour toute classe $\overline{x}$ à la valeur commune de $w(x)$ pour tous les $x\in\overline{x}$, est une pseudo-valuation séparée, dite <u>associée</u> à w .

5) a) Sur un anneau A , on dit que deux pseudo-valuations w_1, w_2 sont équivalentes, si les écarts $w_1(x-y)$ et $w_2(x-y)$ sont équivalents. Montrer que, si w est une pseudo-valuation sur A , aw et $w^{1/a}$ sont des pseudo-valuations équivalentes à w pour tout nombre $a\geqslant 1$.

b) Si w_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont n pseudo-valuations sur un anneau A , les fonctions $w=\sum_{i=1}^{n} w_i$ et $w'=\sup_i w_i$ sont deux pseudo-valuations équivalentes sur A . Si $\mathfrak{a}_i=\overset{-1}{w_i}(0)$, et $\mathfrak{a}=\overset{-1}{w}(0)$, on a $\mathfrak{a}=\bigcap_i \mathfrak{a}_i$ Si A_i désigne le complété de l'anneau quotient $A/\mathfrak{a}_i$, muni de la pseudo-valuation séparée associée à w_i , montrer que $A/\mathfrak{a}$, muni de la pseudo-valuation séparée associée à w , est isomorphe à un un sous-anneau de l'anneau produit $\prod_i A_i$; pour que ce sous-anneau soit partout dense dans $\prod_i A_i$, il faut et il suffit (en supposant que A possède un élément unité 1) que les valuations w_i satisfassent à la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, et pour chacun des indices i, il existe un élément $x \in A$ tel que $w_i(1-x) \leqslant \varepsilon$ et $w_k(x) \leqslant \varepsilon$ pour tous les indices $k \neq i$.

6) Soit A un anneau muni d'une pseudo-valuation séparée, complet pour la topologie définie par cette pseudo-valuation, et admettant un élément unité. Montrer que, dans A, tout idéal maximal est <u>fermé</u> (utiliser la prop.13).

7) Soit E un espace vectoriel à gauche sur un corps K, admettant une base dénombrable (a_n). Soit (r_n) une suite décroissante de nombres >0, tendant vers 0 ; on pose $\|0\| = 0$, et pour tout élément $x = \sum_k t_k a_k \neq 0$, on pose $\|x\| = r_h$, si h est le plus petit indice tel que $t_h \neq 0$. Montrer que $\|x-y\|$ est une distance glissante sur le groupe additif E, et que la topologie qu'elle définit sur E ne dépend pas de la suite (r_n) (décroissante et tendant vers 0) choisie. En déduire que si on étend la définition d'une norme et d'un espace normé (déf. 4 et 5) au cas où la valeur absolue considérée sur le corps des scalaires est la valuation impropre, la prop.6 et le th.1 ne sont plus valables.

8) Soit E un espace vectoriel sur un corps valué K, p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n normes sur E ; montrer que $p = \sup_i p_i$ est une norme sur E.

9) Dans un espace normé sur un corps valué, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

10) Soit E un espace vectoriel normé sur un corps valué K.

a) Soit H un sous-espace vectoriel <u>maximal</u> de E , supposé <u>fermé</u> dans E , et x_0 un point de E n'appartenant pas à H ; on sait que E est somme directe de H et du sous-espace à une dimension Kx_0 . Montrer que E est isomorphe à l'espace normé produit des sous-espaces normés H et Kx_0 (si, pour tout $x \in E$, on pose $x = t(x)x_0 + y(x)$, avec $t(x) \in K$, $y(x) \in H$, montrer que l'application $x \longrightarrow t(x)$ est continue, en raisonnant par l'absurde : on prouvera que, dans le cas contraire, la distance du point x_0 à H serait nulle).

b) Montrer que tout sous-espace de E à une dimension est isomorphe à K (considéré comme espace normé par rapport à lui-même).

c) Si le corps K est <u>complet</u>, montrer que tout sous-espace normé à n dimensions de E est isomorphe à K^n (raisonner par récurrence sur n , en utilisant a) et b)).

d) Si le corps K n'est pas complet, donner un exemple d'espace normé à n dimensions sur K , non isomorphe à K^n (considérer un sous-espace à n dimensions dans le complété $\hat{K}$ de K , envisagé comme espace normé par rapport à K).

e) Soit H un sous-espace vectoriel <u>fermé</u> d'un espace normé E sur un corps <u>complet</u> K , tel que H admette un supplémentaire F ayant un nombre fini de dimensions. Montrer que E est isomorphe à l'espace normé produit des espaces normés H et F (raisonner par récurrence sur le nombre de dimensions de F).

11) Soit E un espace normé sur un corps valué <u>complet</u> K . Montrer que si E est <u>localement compact</u>, il a un nombre de dimensions <u>fini</u> par rapport à K , et est par suite isomorphe à un espace K^n (supposant par exemple la boule V : $\|x\| \leqslant 1$ <u>compacte</u> dans E , montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace H de E, de dimension finie,

tel que tout point de V soit à une distance $\leqslant \varepsilon$ de H ; en déduire que si $t_0 \in K$ est tel que $0 < |t_0| < 1$, et si ε est $< |t_0|$, E est nécessairement identique à H, en prouvant que, dans le cas contraire, il existerait un point de V dont la distance à H serait $\geqslant |t_0|$).

12) Soit E un espace normé sur un corps valué. Montrer que si toute famille absolument sommable dans E est sommable dans E, E est complet (si (x_n) est une suite de Cauchy dans E, considérer une suite (x_{n_k}) extraite de la suite (x_n) et telle que la série de terme général $x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ soit absolument convergente).

13) Donner un exemple de famille sommable mais non absolument sommable, dans le corps Q_p des nombres p-adiques (utiliser l'exerc.28 du chap.III, § 5).

14) Dans l'algèbre $\mathcal{B}(N)$, donner un exemple de famille multipliable $(e + u_\iota)$ telle que la famille (u_ι) ne soit pas absolument sommable.

§ 4. Espaces normaux.

1. <u>Définition des espaces normaux</u>. L'axiome (O_{IV}) des espaces uniformisables peut s'énoncer de la façon suivante : <u>quels que soient l'ensemble fermé</u> A <u>et le point</u> $x \in \complement A$, <u>il existe une application continue de</u> E <u>dans</u> $[0,1]$, <u>égale à</u> 0 <u>au point</u> x, <u>et à 1 en tout point de</u> A ; on exprime encore cette propriété en disant que, dans un espace uniformisable, on peut <u>séparer un point et un ensemble fermé</u> (ne contenant pas le point) <u>par une fonction continue numérique</u>.

Nous allons maintenant étudier les espaces dans lesquels on peut de la même manière <u>séparer deux ensembles fermés sans point commun par une fonction continue numérique</u> ; de façon précise :

<u>Définition 1</u>. <u>On dit qu'un espace topologique E est normal s'il est séparé, et s'il vérifie l'axiome suivant</u> :

(O_V). *Quels que soient les ensembles fermés sans point commun* A *et* B *dans* E , *il existe une application continue de* E *dans* $[0,1]$ *égale à* 0 *en tout point de* A *et à 1 en tout point de* B .

Il est clair que tout espace normal est complètement régulier ; mais il existe des espaces complètement réguliers et non normaux (cf. ex 12 et §5, exerc. 7).

L'énoncé de l'axiome (O_V), comme celui de l'axiome (O_{IV}), fait intervenir la droite numérique $\mathbb{R}$ comme ensemble auxiliaire. Mais on peut donner un énoncé équivalent à (O_V), et dans lequel n'intervient plus aucun ensemble auxiliaire :

Théorème 1 (Urysohn). *L'axiome* (O_V) *est équivalent au suivant* :

(O'_V) *Quels que soient les ensembles fermés sans point commun* A *et* B *dans* E , *il existe deux ensembles ouverts sans point commun* U *et* V *tels que* $A \subset U$ *et* $B \subset V$.

Il est immédiat que (O_V) entraîne (O'_V), car si f est une application continue de E dans $[0,1]$, égale à 0 dans A , à 1 dans B , les ensembles ouverts $\overset{-1}{f}([0,\frac{1}{2}[)$ et $\overset{-1}{f}(]\frac{1}{2},1])$ contiennent respectivement A et B et sont sans point commun.

Pour démontrer la réciproque, remarquons d'abord que (O'_V) est équivalent à l'axiome suivant :

(O''_V) *Quel que soit l'ensemble fermé* A , *et le voisinage ouvert* V *de* A , *il existe un voisinage ouvert* W *de* A *tel que* $\overline{W} \subset V$.

S'il existe une application continue f de E dans $[-1,+1]$ égale à -1 dans A , à 1 dans B , et si, pour tout $t \in [0,1]$ on pose $U_t = \overset{-1}{f}([-1,t[)$, on définit une famille d'ensembles ouverts dans E , ayant $[0,1]$ pour ensemble d'indices, telle que $A \subset U_0$, $B \subset \complement U_1$, et pour tout couple de nombres réels t, t' tels que $0 \leq t < t' \leq 1$

(1) $$\overline{U}_t \subset U_{t'}$$

puisque $\overline{U}_t$ est contenu dans l'ensemble fermé $\overset{-1}{f}([-1,t])$. Inversement, supposons qu'on ait défini une famille $(U_t)_{0\leq t\leq 1}$ d'ensembles ouverts ayant ces trois propriétés, et pour tout $x\in E$, posons $g(x)=1$ si $x\in \complement U_1$, et sinon prenons pour $g(x)$ la borne inférieure des t tels que $x\in U_t$. On a évidemment $0\leq g(x)\leq 1$ pour tout $x\in E$, et $g(x)=0$ dans A, $g(x)=1$ dans B ; enfin, g est <u>continue</u> dans E : en effet, si on pose $g(x)=a$, on a $|g(y)-g(x)|<\varepsilon$ pour tout y appartenant à l'ensemble $U_{a+\varepsilon}\cap \complement(\overline{U}_{a-\varepsilon})$, qui est un voisinage de x d'après (1) (en convenant de prendre $U_{a+\varepsilon}=E$ si $a+\varepsilon>1$, et $U_{a-\varepsilon}=\emptyset$ si $a-\varepsilon<0$).

Tout revient donc à définir une famille (U_t) d'ensembles ouverts du type précédent, en s'appuyant sur l'axiome (O''_V). Prenons $U_1=\complement B$; comme $A\subset U_1$, il existe d'après (O''_V) un ensemble ouvert U_0 tel que $A\subset U_0$ et $\overline{U}_0\subset U_1$. Supposons ensuite que, pour chaque nombre <u>dyadique</u> $k/2^n$ $(k=0,1,..,2^n)$, il existe un ensemble ouvert $U_{k/2^n}$, ces ensembles étant tels que $\overline{U}_{k/2^n}\subset U_{(k+1)/2^n}$ pour $0\leq k\leq 2^n-1$. Posons $U_{2k/2^{n+1}}=U_{k/2^n}$ $(0\leq k\leq 2^n)$; d'autre part, en vertu de (O''_V), il existe, pour chaque nombre dyadique $(2k+1)/2^{n+1}$ $(0\leq k\leq 2^n-1)$ un ensemble ouvert $U_{(2k+1)/2^{n+1}}$, tel que $\overline{U}_{k/2^n}\subset U_{(2k+1)/2^{n+1}}$ et $\overline{U}_{(2k+1)/2^{n+1}}\subset U_{(k+1)/2^n}$. Il existe donc, pour tout nombre dyadique r tel que $0\leq r\leq 1$, un ensemble ouvert U_r, ces ensembles étant tels que $A\subset U_0$, $B\subset \complement U_1$, et

(2) $$\overline{U}_r\subset U_{r'}$$

pour tout couple de nombres dyadiques tels que $0\leq r<r'\leq 1$.

Posons maintenant, pour tout nombre réel $t\in[0,1]$, $U_t=\bigcup_{r\leq t} U_r$ (r dyadique) ; d'après (2), cette définition coïncide bien avec la précédente pour t dyadique ; d'autre part, si $0\leq t<t'\leq 1$, il existe deux nombres dyadiques r,r' tels que $t\leq r<r'\leq t'$; comme $U_t\subset U_r$, on a, d'après (2), $\overline{U}_t\subset\overline{U}_r\subset U_{r'}\subset U_{t'}$, ce qui établit la relation (1) et achève la démonstration.

Le th.1 va nous permettre de démontrer que deux catégories importantes d'espaces topologiques sont des espaces normaux. En premier lieu :

<u>Proposition 1</u>. <u>Un espace compact est normal</u>.

En effet, un tel espace vérifie l'axiome (O'_V), d'après la prop.2 du chap.II, § 4 .

En ce qui concerne les espaces <u>localement compacts</u>, tout point d'un tel espace possède un voisinage compact, qui est un sous-espace normal ; mais on peut donner des exemples d'espaces localement compacts <u>non normaux</u> (cf. exerc. 13).

<u>Proposition 2</u>. <u>Un espace métrisable est normal</u>.

Soit E un espace métrisable, d une distance compatible avec sa topologie , A et B deux ensembles fermés sans point commun dans E ; comme les fonctions $d(x,A)$ et $d(x,B)$ sont continues, l'ensemble U des points x tels que $d(x,A) < d(x,B)$ est ouvert ; de même l'ensemble V des points x tels que $d(x,B) < d(x,A)$ est ouvert ; il est clair que $A \subset U$, $B \subset V$ et que U et V ne se rencontrent pas, donc l'axiome (O'_V) est vérifié.

<u>Remarques</u>. 1) La prop.2 donne une nouvelle condition <u>nécessaire</u> pour qu'un espace topologique E soit métrisable ; mais cette condition, même jointe à toutes les conditions nécessaires données au § 2 , ne donne pas un système de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace topologique soit métrisable (cf. exerc. 12, et § 5, exerc. 8)

2) On peut donner des exemples d'espaces normaux qui ne sont ni métrisables ni localement compacts (voir § 5, exerc. 8) .

D'après (O'_V), tout ensemble <u>fermé</u> dans un espace normal est un <u>sous-espace normal</u> ; mais cette propriété n'est plus exacte pour une partie quelconque d'un espace normal.

Par exemple, un espace complètement régulier et non normal est homéomorphe à un sous-espace d'un espace compact, donc normal (§ 1, prop. 3).

Signalons enfin que le produit de deux espaces normaux peut ne pas être normal (voir exerc. 13).

2. Prolongement d'une fonction numérique continue. Soient E et F deux espaces topologiques, A une partie fermée de E (distincte de E) ; si f est une application continue de A dans F , il n'est pas toujours possible de prolonger f en une application continue de E tout entier dans F . Lorsque $F = \overline{R}$, la condition de possibilité d'un tel prolongement est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2 (Urysohn). L'axiome (O_V) est équivalent à la propriété suivante :

(O_V''') Quels que soient l'ensemble A fermé dans E , et la fonction numérique (finie ou non) f, définie et continue dans A , il existe un prolongement g de f à l'espace tout entier E , qui est une application continue de E dans $\overline{R}$.

Il est immédiat que (O_V''') entraîne (O_V) ; car, si B et C sont deux ensembles fermés sans point commun dans E , la fonction égale à 0 dans B , à 1 dans C , est définie et continue dans l'ensemble fermé $B \cup C$. Si f en est un prolongement continu dans E , et si on pose $g = \mathrm{Min}(f^+, 1)$, g est continue dans E , prend ses valeurs dans $[0,1]$, et est égale à 0 dans B , à 1 dans C .

Montrons inversement que (O_V) entraîne (O_V''') ; comme $\overline{R}$ et l'intervalle $[-1,+1]$ sont homéomorphes, on peut se borner au cas où l'application continue f de A dans $\overline{R}$ prend ses valeurs dans $[-1,+1]$. Nous définirons le prolongement g de f en formant une suite (g_n) de fonctions continues dans E , telle que la suite $(g_n(x))$ soit convergente en tout point vers un nombre de l'intervalle $[-1,+1]$; cette limite sera par définition la valeur de $g(x)$ et il résultera du choix des g_n que la fonction g remplira les conditions voulues.

La définition des g_n repose sur le lemme suivant :

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> u <u>une application continue de</u> A <u>dans</u> $[-1,+1]$; <u>il existe une application continue</u> v <u>de</u> E <u>dans</u> $\left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right]$, <u>telle que</u> $|u(x)-v(x)| \leqslant \frac{2}{3}$ <u>pour tout</u> $x \in A$.

En effet, soit H l'ensemble des $x \in A$ tels que $-1 \leqslant u(x) \leqslant -\frac{1}{3}$, K l'ensemble des $x \in A$ tels que $\frac{1}{3} \leqslant u(x) \leqslant 1$; H et K sont fermés dans A , donc dans E , et sont sans point commun ; d'après (O_V), il existe une application continue v de E dans $\left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right]$, égale à $-\frac{1}{3}$ dans H , à $+\frac{1}{3}$ dans K ; elle satisfait aux conditions du lemme. Ce lemme étant démontré, définissons les g_n par récurrence. Appliquant le lemme pour $u=f$, on définit g_o comme une application continue de E dans $\left[-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right]$ telle que $|f(x)-g_o(x)| \leqslant \frac{2}{3}$ dans A . Supposons ensuite définie l'application continue g_n de E dans l'intervalle $\left[-1+(\frac{2}{3})^{n+1}, 1-(\frac{2}{3})^{n+1}\right]$, telle que $|f(x)-g_n(x)| \leqslant (\frac{2}{3})^{n+1}$ dans A . Appliquant le lemme à la fonction $u(x)=(\frac{3}{2})^{n+1}(f(x)-g_n(x))$, on voit qu'il existe une application continue h_{n+1} de E dans l'intervalle $\left[-\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}, \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right]$ telle que $|f(x)-g_n(x)-h_{n+1}(x)| \leqslant (\frac{2}{3})^{n+2}$ dans A ; la récurrence se poursuit en posant $g_{n+1}=g_n+h_{n+1}$, cette fonction satisfaisant bien à l'inégalité $|g_{n+1}(x)| \leqslant 1-(\frac{2}{3})^{n+2}$ dans E , en vertu de la définition de h_{n+1} .

De cette définition, on conclut que, pour $m \geqslant p$, $n \geqslant p$, on a $|g_m(x)-g_n(x)| \leqslant \frac{2^{p+1}}{3^{p+2}} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^k = (\frac{2}{3})^{p+1}$ en tout point $x \in E$; on en déduit d'abord que la suite $(g_n(x))$ est une suite de Cauchy, donc converge vers un point $g(x)$ de l'intervalle $[-1,+1]$) ; comme $f(x)-g_n(x)$

tend vers 0 en tout point de A lorsque n croît indéfiniment, g est bien un prolongement de f à E . Reste à voir que g est *continue* dans E .

Soit donc x un point quelconque de E ; quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour $m \geqslant n_0$ et $n \geqslant n_0$, on ait $|g_m(y)-g_n(y)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $y \in E$, donc aussi, en faisant tendre m vers $+\infty$ $|g(y)-g_n(y)| \leqslant \varepsilon$; si V est un voisinage de x tel que $|g_n(y)-g_n(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $y \in V$, on aura aussi, pour tout $y \in V$

$$|g(y)-g(x)| \leqslant |g(y)-g_n(y)| + |g_n(y)-g_n(x)| + |g(x)-g_n(x)| \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui montre la continuité de g au point x et achève la démonstration (cette dernière partie du raisonnement utilise, dans un cas particulier, la notion de *convergence uniforme*, que nous définirons de manière générale au chap. VIII).

Corollaire. *Si* f *est une fonction numérique* finie, *définie et continue dans* A , *il existe une fonction numérique* finie g , *définie et continue dans* E , *et qui prolonge* f .

Démontrons-le d'abord lorsque $f(x) \geqslant 0$ dans A ; il existe alors un prolongement continu g_1 de f à E , prenant ses valeurs dans $[0,+\infty]$. Si on pose $B = \overset{-1}{g_1}(+\infty)$, B est fermé, et ne rencontre pas A par hypothèse; la fonction h , égale à f dans A , à 0 dans B , est donc continue dans l'ensemble fermé $A \cup B$. Soit g_2 un prolongement continu de h à E , prenant encore ses valeurs dans $[0,+\infty]$; la fonction $g = \mathrm{Min}(g_1, g_2)$ est un prolongement continu de f à E , à valeurs $\geqslant 0$ et *finies* en tout point de E .

Pour passer de là au cas général, il suffit de remarquer que, si f est finie et continue dans A , il en est de même de f^+ et f^- ; en prolongeant f^+ et f^- à E par des fonctions continues et finies, g_1 , g_2 respectivement, la fonction $g_1 - g_2$ est un prolongement de f , finie et continue dans E .

<u>Remarque</u>. Si E est un espace normal, A une partie fermée de E, on peut aussi trouver un prolongement, continu dans E, de toute application continue f de A dans un <u>cube</u> K^I (§ 1, n°5) ; en effet, on a alors $f=(f_\iota)_{\iota\in I}$, f_ι étant une application continue de A dans l'intervalle compact K ; comme il existe une application continue g_ι de E dans K, qui prolonge f_ι, l'application $g=(g_\iota)$ est un prolongement continu de f.

3. Recouvrements ouverts finis d'un ensemble fermé dans un espace normal.

<u>Proposition 3. Soit</u> $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ <u>un recouvrement ouvert fini d'un ensemble fermé</u> F <u>dans un espace normal</u> E. <u>Il existe un recouvrement ouvert fini</u> $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ <u>de</u> F <u>tel que</u> $\overline{B}_i\subset A_i$ <u>pour</u> $1\leqslant i\leqslant n$.

Montrons qu'il existe un ensemble ouvert B_1 tel que $B_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un recouvrement de F, et que $\overline{B}_1\subset A_1$; une fois ce point établi, la proposition se démontre aussitôt par récurrence. Posons $C_1=(\complement F)\cup(\bigcup_{i=2}^{n} A_i)$; C_1 est ouvert, et on a par hypothèse $\complement A_1\subset C_1$; il existe donc, d'après (O''_V), un ensemble ouvert V tel que $\complement A_1\subset V$ et $\overline{V}\subset C_1$. Si on pose $B_1=\complement\overline{V}$, on a $\overline{B}_1\subset\complement V\subset A_1$, et $B_1\cup C_1=E$, donc B_1 et les A_i d'indice $n\geqslant 2$ forment un recouvrement de F.

<u>Définition 2. Etant donné un espace topologique</u> E, <u>on appelle partition continue de l'unité définie sur</u> E, <u>toute famille finie</u> $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ <u>de fonctions numériques</u> $\geqslant 0$, <u>définies et continues dans</u> E, <u>et telles que</u> $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=1$ <u>pour tout</u> $x\in E$.

La prop.3 entraîne la suivante :

<u>Proposition 4. Quel que soit le recouvrement ouvert fini</u> $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ <u>d'un espace normal</u> E, <u>il existe une partition continue de l'unité</u> $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ <u>définie sur</u> E, <u>telle que pour tout indice</u> i, $f_i(x)=0$ <u>dans</u> $\complement A_i$.

En appliquant la prop.3, considérons un recouvrement ouvert fini $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, tel que $\overline{B}_i \subset A_i$ pour tout indice i. D'après (O_V), il existe une application continue g_i de E dans $[0,1]$, telle que $g_i(x)=0$ dans $\complement A_i$, et $g_i(x)=1$ dans $\overline{B}_i$; comme les B_i forment un recouvrement de E, on a $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) > 0$ pour tout $x \in E$; si on pose $f_i(x) = \dfrac{g_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)}$ pour tout $x \in E$, les f_i forment une partition continue de l'unité sur E, telle que $f_i(x)=0$ dans $\complement A_i$, pour tout indice i.

<u>Corollaire</u>. <u>Quel que soit le recouvrement ouvert fini</u> $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ <u>d'un ensemble fermé</u> F <u>dans un espace normal</u> E, <u>il existe une famille</u> $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ <u>de fonctions numériques</u> $\geqslant 0$, <u>définies et continues dans</u> E, <u>telles que</u> $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=1$ <u>en tout point de</u> F, <u>et</u> $f_i(x)=0$ <u>en tout point de</u> $\complement A_i$, <u>pour</u> $1 \leqslant i \leqslant n$.

En effet, la famille d'ensembles formée des A_i et de $\complement F$ est un recouvrement ouvert fini de E ; il existe donc une partition continue de l'unité sur E, formée de n fonctions f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et d'une fonction g, telles que $f_i(x)=0$ dans $\complement A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et $g(x)=0$ dans F, les n fonctions f_i répondent à la question.

<u>Exercices</u>. 1) Un espace topologique satisfaisant aux axiomes (Q) et (O_V) est normal.

2) Former un espace topologique comprenant quatre points, vérifiant l'axiome (O_V), mais non l'axiome (O_{III}).

3) Pour qu'un espace topologique E vérifiant l'axiome (O_V) vérifie aussi l'axiome (O_{III}), il faut et il suffit qu'il possède la propriété suivante : toute partie fermée de E est l'intersection de ses voisinages. E est alors uniformisable et l'espace complètement régulier associé à E est normal.

4) Si un espace topologique vérifie les axiomes (C) et (O_{III}), il vérifie (O_V), et l'espace complètement régulier associé est compact.

5) Soient A et B deux ensembles sans point commun dans un espace topologique E, tels qu'il existe deux suites (V_n), (W_n) d'ensembles ouverts dans E, jouissant des propriétés suivantes : 1° quel que soi $x \in A$, il existe un V_n tel que $x \in V_n$ et $B \cap \overline{V}_n = \emptyset$; 2° quel que soit $y \in B$, il existe un W_n tel que $y \in W_n$ et $A \cap \overline{W}_n = \emptyset$. Montrer qu'il existe deux ensembles ouverts sans point commun, G et H, tels que $A \subset G$ et $B \subset H$ (Définir G comme réunion d'une suite (G_n) d'ensembles ouverts, H comme réunion d'une autre suite (H_n) d'ensembles ouverts, ces suites étant définies par récurrence de sorte que $G_n \subset V_n$, $H_n \subset W_n$, et $G_p \cap H_q = \emptyset$ quels que soient p et q).

6) Déduire de l'exerc.5 qu'un espace __régulier__ E est __normal__ s'il possède en outre une des deux propriétés suivantes :

a) E est réunion dénombrable d'ensembles compacts ;

b) la topologie de E possède une base dénombrable.

7) Tout espace régulier E ayant une base dénombrable est homéomorphe à un sous-espace du cube $K^{\mathbb{N}}$ (où K est l'intervalle compact $[0,1]$ de $\mathbb{R}$), et est par suite __métrisable__ (utiliser l'exerc.6, puis la méthode de l'exerc.13 bis du §2).

8) Montrer qu'un espace dénombrable E, métrisable et sans point isolé, est homéomorphe à la droite rationnelle $\mathbb{Q}$ (remarquer d'abord que E a une base dénombrable, et peut être plongé dans $K^{\mathbb{N}}$, d'après l'exerc.7 ; utiliser ensuite l'exerc.13 du chap.IV, §8).

9) On dit qu'un espace topologique E est __complètement normal__, si tout sous-espace de E est normal. Un espace métrisable est complètement normal ; tout sous-espace d'un espace complètement normal est complètement normal.

Pour qu'un espace E soit complètement normal, il faut et il suffit que, pour tout couple d'ensembles A,B de E tels que $A\cap\overline{B}=B\cap\overline{A}=\emptyset$, il existe deux ensembles ouverts sans point commun U,V , tels que $A\subset U$ et $B\subset V$.

10) Tout ensemble totalement ordonné E , muni de l'une des deux topologies $\mathcal{C}_-(E)$, $\mathcal{C}_+(E)$ (chap.I, §1,exerc.3) est complètement normal. (Si A et B sont deux parties de E telles que $A\cap\overline{B}=B\cap\overline{A}=\emptyset$, définir, pour tout point $x\in A$, un voisinage V_x , et pour tout $y\in B$ un voisinage W_y , de sorte que $V_x\cap W_y=\emptyset$, quels que soient $x\in A$ et $y\in B$)

11) Tout ensemble totalement ordonné E , muni de la topologie $\mathcal{C}_0(E)$, est complètement normal. (Considérer en premier lieu le cas où E est compact : montrer d'abord que tout ensemble ouvert dans E est réunion d'un ensemble d'intervalles ouverts deux à deux sans point commun , à l'aide de l'exerc.6 du chap.IV, §2 ; utiliser ce résultat pour démontrer la proposition, en considérant le complémentaire de l'ensemble fermé $\overline{A}\cap\overline{B}$; pour passer au cas général où E est quelconque, utiliser l'exerc.7 du chap.IV, §4).

12) Montrer que l'espace compact non métrisable E défini dans l'exerc.16 du §2 est complètement normal (même méthode que dans l'exerc.11).

13) Soit E_0 un ensemble bien ordonné non dénombrable ayant un plus grand élément b , tel que pour tout $x<b$, l'ensemble des éléments $\leqslant x$ soit dénombrable (§2,exerc.18) ; soit E l'ensemble des éléments $<b$ de E_0 . Quand on munit E_0 de la topologie $\mathcal{C}_-(E_0)$, E_0 est compact E localement compact.

a) Si f est une application de E dans E telle que, pour tout x, $f(x) < x$, montrer qu'il existe $c \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $y \geqslant x$ tel que $f(y) \leqslant c$ (raisonner par l'absurde en construisant une suite (z_n) de points de E telle que z_{n+1} soit le plus petit élément z' de E tel que, pour tout $x \geqslant z'$, on ait $f(x) \geqslant z_n$).

b) Déduire de a) que tout voisinage de la diagonale Δ dans l'espace produit $E \times E$, contient un ensemble de la forme $]x,b[\times]x,b[$.

c) Montrer que l'espace produit $E_0 \times E$ (produit de deux espaces complètement normaux, d'après l'exerc.10) n'est pas normal (considérer les ensembles fermés Δ et $\{b\} \times E$, et utiliser b)).

d) Montrer que la seule structure uniforme compatible avec la topologie de E, est la structure uniforme induite par la structure uniforme (unique) de l'espace compact E_0 (utiliser b)).

14) Etant donné un espace topologique E et un sous-espace A de E, on dit que A est un <u>rétracte</u> de E si l'application identique de A sur lui-même peut être prolongée en une application continue de E dans A. Pour que A soit rétracte de E, il faut et il suffit que toute application continue de A dans un espace topologique quelconque F puisse être prolongée en une application continue de E dans F.

15) On dit qu'un espace topologique compact A est un <u>rétracte absolu</u>, si, pour tout espace normal E' contenant un sous-espace A' homéomorphe à A, A' est rétracte de E'. Montrer que, pour que A soit un rétracte absolu, il faut et il suffit que A soit homéomorphe à un rétracte d'un cube K^I (K intervalle compact de $\mathbf{R}$) ; si A est rétracte absolu, F un espace normal quelconque, B une partie fermée quelconque de F, toute application continue de B dans A se prolonge en une application continue de F dans A (utiliser le th.2).

15 bis) Soit E un espace compact totalement discontinu, E' un espace métrique, f une application continue d'une partie fermée A de E dans E'. Montrer qu'il existe une application continue g de E dans E' qui prolonge f (utilisant l'exerc.10 du chap.II, § 4, montrer d'abord que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une <u>partition</u> finie (U_i) de E en ensembles à la fois ouverts et fermés, tels que, dans chacun des ensembles non vides $A \in U_i$, l'oscillation de f soit $\leqslant \varepsilon$; en déduire la définition de g par récurrence comme limite d'une suite de fonctions continues dont chacune ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans E').

16) a) Etant donné un espace topologique E, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{R} = (A_\alpha)$ de E, la réunion des ensembles $A_\alpha \times A_\alpha$ dans l'espace produit $E \times E$ est un voisinage $V_{\mathcal{R}}$ de la diagonale Δ. Lorsque $\mathcal{R}$ parcourt l'ensemble de tous les recouvrements ouverts <u>finis</u> de E, les $V_{\mathcal{R}}$ forment une base de filtre $\mathfrak{S}$; pour que $\mathfrak{S}$ soit un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme, il est nécessaire que E satisfasse à l'axiome (O'_V) (si A et B sont deux parties fermées de E sans point commun, considérer le recouvrement ouvert de E formé des deux ensembles $\complement A$ et $\complement B$).

b) On suppose réciproquement E <u>normal</u> ; soit $\mathcal{U}$ la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues toutes les applications continues de E dans $[0,1]$ (§ 1, prop. 3). La base de filtre $\mathfrak{S}$ est un système fondamental d'entourages de la structure uniforme $\mathcal{U}$ (pour voir que tout entourage de la structure $\mathcal{U}$ contient un ensemble de $\mathfrak{S}$, remarques qu'un tel entourage est la trace sur $E \times E$ d'un entourage de la structure uniforme du complété $\check{E}$ de E pour la structure $\mathcal{U}$, et que $\tilde{E}$ est compact ; pour montrer inversement que tout ensemble de $\mathfrak{S}$ est un entourage de la structure $\mathcal{U}$, utiliser la prop. 3 et l'axiome (O_V)).

c) On dit qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur E est <u>fermé</u> s'il existe une base $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{B}^{\mathfrak{F}}$ formée d'ensembles fermés. Un filtre fermé est dit <u>maximal</u> s'il n'existe aucun filtre fermé strictement plus fin que lui ; pour tout filtre fermé $\mathfrak{F}$, il existe un filtre fermé maximal plus fin que $\mathfrak{F}$ (th. de Zorn). Pour qu'un filtre fermé $\mathfrak{F}$ soit maximal, il faut et il suffit que, pour toute partie fermée A de E , ou bien $A \in \mathfrak{F}$, ou bien il existe un ensemble de $\mathfrak{F}$ ne rencontrant pas A .

d) Montrer que tout filtre fermé maximal $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme $\mathcal{U}$ (si (A_i) est un recouvrement ouvert fini de E , (B_i) un recouvrement ouvert fini tel que $\overline{B}_i \subset A_i$ pour tout indice i , montrer qu'un au moins des $\overline{B}_i$ appartient à $\mathfrak{F}$).

e) Deux filtres fermés maximaux distincts $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, ne peuvent converger vers le même point de $\tilde{E}$ (remarquer qu'il existe deux ensembles fermés sans point commun $A \in \mathfrak{F}$, $A' \in \mathfrak{F}'$, puis former un recouvrement ouvert fini $\mathfrak{K}$ tel que pour $x \in A$, $x' \in A'$, x et x' ne soient pas voisins d'ordre $V_{\mathfrak{K}}$).

f) Si $\mathfrak{F}$ est un filtre fermé sur E , le filtre $\mathfrak{G}$ formé de tous les voisinages de tous les ensembles de $\mathfrak{F}$ est un filtre <u>complètement régulier</u> (§1, exerc. 7b)). Si $\mathfrak{F}$ est un filtre fermé maximal, $\mathfrak{G}$ est un filtre complètement régulier maximal (utiliser d), et l'exerc.7f) du § 1) ; inversement, tout filtre complètement régulier maximal s'obtient de cette manière à partir d'un filtre fermé maximal et un seul.

§5. Espaces de Baire.

<u>1. Ensembles rares. Définition 1. On dit qu'une partie A d'un espace topologiqu E est un ensemble rare si l'extérieur de A est partout dense dans E</u> .

Il revient au même de dire que l'adhérence de A n'a pas de point intérieur (ou ne contient aucun ensemble ouvert non vide). Pour qu'un ensemble soit rare, il faut et il suffit donc que son adhérence soit rare ; toute partie d'un ensemble rare est un ensemble rare.

Exemples. 1) La partie vide de E est un ensemble rare. Un ensemble réduit à un point est rare lorsque ce point n'est pas isolé sur E . Un ensemble partout dense n'est jamais rare.

2) Si A est un ensemble fermé non vide, l'ensemble $A \cap \complement \mathring{A}$ des points non intérieurs de A est un ensemble rare ; a fortiori, la frontière de A est rare. De même, la frontière d'un ensemble ouvert non vide est rare.

3) Dans l'espace numérique $\mathbf{R}^n$, toute variété linéaire à $p<n$ dimensions est un ensemble rare (chap.V, § 1).

Remarque. Tout point d'un ensemble rare A est point frontière de A . Réciproquement, si un ensemble fermé est contenu dans sa frontière, il ne possède aucun point intérieur, donc il est rare. Mais un ensemble non fermé peut être contenu dans sa frontière sans être rare, comme le montre l'exemple de l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels dans la droite numérique $\mathbf{R}$.

Proposition 1. Dans un espace topologique E , la réunion d'un nombre fini d'ensembles rares est un ensemble rare.

Il suffit de le démontrer pour la réunion de deux ensembles rares A et B ; on peut évidemment se borner au cas où A et B sont fermés . La proposition équivaut alors à dire que l'intersection de deux ensembles ouverts partout denses $\complement A$, $\complement B$, est partout dense. Or, si U est un ensemble ouvert non vide, $U \cap \complement A$ est un ensemble ouvert non vide, donc $(U \cap \complement A) \cap \complement B$ est un ensemble ouvert non vide.

Si A est une partie non vide d'un espace topologique E , une partie B de A est dite *rare relativement à* A (ou *rare dans* A) si B est un ensemble rare quand on le considère comme partie du *sous-espace* A de E . Tout ensemble B rare relativement à une partie A de E , est aussi rare *dans* E : car si l'adhérence de B dans E contenait un ensemble ouvert non vide U , $U \cap A$ serait un ensemble ouvert par rapport à A , non vide et contenu dans l'adhérence de B par rapport à A . La réciproque de cette proposition est évidemment inexacte.

Toutefois, si A est *ouvert* dans E , tout ensemble $B \subset A$ rare *dans* E est aussi rare *dans* A , car si U est un ensemble ouvert dans A , il est ouvert dans E , et contient par suite un ensemble V ouvert dans E (donc aussi dans A) et ne rencontrant pas B .

2. Ensembles maigres. *Définition 2*. *On dit qu'une partie A d'un espace topologique E est un ensemble maigre si A est réunion d'une famille dénombrable d'ensembles rares dans E* .

Un ensemble *maigre* dans E peut fort bien être *partout dense* dans E ; en particulier, l'espace tout entier E peut être un ensemble maigre.

Un exemple de ce dernier fait est fourni par tout espace E *dénombrable* et *sans point isolé* : la droite rationnelle $\mathbf{Q}$ est un espace de cette nature. Un espace topologique qui est un ensemble maigre par rapport à lui-même n'est d'ailleurs pas nécessairement dénombrable (voir exerc. 3).

Toute partie d'un ensemble maigre dans un espace E est encore un ensemble maigre dans E ; la réunion d'une famille *dénombrable* d'ensemble maigres dans E est encore un ensemble maigre dans E .

Si A est une partie non vide d'un espace topologique E , une partie B de A est ~~[illegible]~~ dite *maigre relativement à* A (ou *maigre dans* A) si B est un ensemble maigre quand on le considère comme partie du sous-espace A de E . Tout ensemble B maigre relativement à une partie A de E est aussi maigre dans E ; ici encore, la réciproque est inexacte.

Toutefois, si A est ouvert dans E , tout ensemble $B \subset A$ maigre dans E est aussi maigre dans A .

3. Espaces inépuisables. Définition 3. On dit qu'un espace topologique E est inépuisable s'il n'est pas maigre dans lui-même (autrement dit, s'il n'est pas réunion d'une famille dénombrable d'ensembles rares dans E).

Cette définition se transforme de la façon suivante :

Proposition 2. Pour qu'un espace topologique E soit inépuisable il faut et il suffit que toute famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses dans E ait une intersection non vide.

En effet, cette condition exprime que E n'est pas réunion d'une famille dénombrable d'ensembles rares fermés ; si E ne peut être réunion d'une famille dénombrable d'ensembles rares quelconques, il satisfait donc à cette condition a fortiori ; inversement, si cette condition est remplie. E ne peut être réunion d'une famille dénombrable d'ensembles rares, car il serait réunion de leurs adhérences, qui sont des ensembles rares fermés.

Comme tout ensemble maigre relativement à une partie d'un espace E est maigre dans E , un ensemble non maigre dans un espace inépuisable est un sous-espace inépuisable ; en particulier, dans un espace inépuisable, le complémentaire d'un ensemble maigre est un sous-espace inépuisable.

Il faut noter par contre que, dans un espace inépuisable E , un sous-espace inépuisable A n'est pas nécessairement non maigre dans E ; il peut même être rare dans E . Un exemple de ce dernier fait est fourni par les variétés linéaires de dimension $p<n$ dans R^n, comme il résulte du th.1 démontré ci-dessous

On notera aussi que, dans un espace E , il peut exister des sous-espaces inépuisables sans que E soit lui-même un espace inépuisable (voir exerc.3).

<u>4. Espaces de Baire</u>. <u>Définition 4</u>. <u>On dit qu'un espace topologique</u> E <u>est un espace de Baire si tout sous-espace ouvert de</u> E <u>est un espace inépuisable</u>

<u>Proposition 3</u>. <u>Pour qu'un espace topologique</u> E <u>soit un espace de Baire, il faut et il suffit que toute famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses dans E ait une intersection partout dense dans</u> E .

En effet, si E est un espace de Baire, et U un ensemble ouvert non vide quelconque dans E , les traces sur U d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses dans E forment une famille dénombrable d'ensembles ouverts partout denses <u>par rapport au sous-espace</u> U ; comme ce dernier est inépuisable l'intersection de ces traces n'est pas vide (prop.2).

Inversement, si E satisfait à la condition de l'énoncé, un sous-espace ouvert non vide U de E est nécessairement inépuisable : en effet, s'il était réunion d'une famille dénombrable (A_n) d'ensembles maigres dans U les A_n seraient aussi maigres <u>dans</u> E , donc aussi leurs adhérences $\overline{A}_n$ dans E . Les ensembles ouverts partout denses $\complement \overline{A}_n$ auraient donc une intersection ne rencontrant pas U , contrairement à l'hypothèse.

La condition exprimée dans la prop.3 équivaut à la suivante : <u>tout ensemble maigre dans</u> E <u>a un intérieur vide</u> (autrement dit, <u>le complémentaire d'un ensemble maigre dans</u> E <u>est partout dense</u>).

<u>Remarque</u>. Il est clair que tout sous-espace <u>ouvert</u> d'un espace de Baire est un espace de Baire ; tout point d'un espace de Baire admet donc un système fondamental de voisinages formé de sous-espaces de Baire. Inversement, si tout point d'un espace E possède <u>un</u> voisinage qui soit un sous-espace de Baire, E est un espace de Baire

en effet, si (U_n) est une suite d'ensembles ouverts partout denses dans E , x un point quelconque de E , V un voisinage de x qui soit un sous-espace de Baire, les ensembles $U_n \cap V$ sont des ensembles ouverts partout denses dans le sous-espace V , donc leur intersection est partout dense dans V , d'où résulte que tout voisinage de x contenu dans V rencontre $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$; comme x est arbitraire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ est partout dense dans E .

Proposition 4. Dans un espace de Baire E , le complémentaire de tout ensemble maigre est un sous-espace de Baire.

En effet, soit A un ensemble maigre dans E , et B un ensemble maigre dans le sous-espace $\complement A$; B est aussi maigre dans E , donc $A \cup B$ est maigre dans E ; le complémentaire de $A \cup B$ par rapport à E , qui est aussi le complémentaire de B par rapport à $\complement A$, est donc partout dense dans E , et a fortiori partout dense dans $\complement A$; la proposition résulte alors de la prop.3 .

Théorème 1 (Baire). Un espace topologique E est un espace de Baire lorsqu'il possède l'une des deux propriétés suivantes :

1° E est localement compact ;

2° il existe une distance sur E , compatible avec la topologie de E , et définissant sur E une structure d'espace métrique complet .

Nous allons appliquer la prop.3 dans chacun des deux cas. Soit (A_n) une suite d'ensembles ouverts partout denses dans E , et G un ensemble ouvert non vide quelconque. On peut définir par récurrence une suite (G_n) d'ensembles ouverts non vides tels que $G_1=G$, et $\overline{G}_{n+1} \subset G_n \cap A_n$; en effet, G_n n'étant pas vide par hypothèse, $G_n \cap A_n$ est un ensemble ouvert non vide ; comme E est régulier dans les deux cas envisagés, il existe bien un ensemble ouvert non vide G_{n+1} tel que $\overline{G}_{n+1} \subset G_n \cap A_n$. Cela étant, l'ensemble $G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ contient l'intersection des G_n, et cette dernière est identique à l'intersection des $\overline{G}_n$; tout revient à montrer que les ensembles $\overline{G}_n$ ont une intersection non vide. Or, lorsque E est localement compact, on peut supposer $\overline{G}_2$ compact ; dans l'espace compact $\overline{G}_2$, les $\overline{G}_n$ $(n \geqslant 2)$ forment une suite décroissante d'ensembles fermés non vides, et ont donc au moins un point commun d'après l'axiome (C"). Lorsque E est un espace métrique complet (pour une distance compatible avec sa topologie), on peut supposer $\overline{G}_n$ choisi de sorte que son diamètre (relatif à cette distance) tende vers 0 lorsque n croît indéfiniment ; les $\overline{G}_n$ ~~xxxxxxx~~ forment alors une base de filtre de Cauchy, qui converge vers un point appartenant nécessairement à tous les $\overline{G}_n$.

C.Q.F.D.

Remarque. Il y a des espaces de Baire qui ne rentrent dans aucune des deux catégories précédentes, en particulier des espaces de Baire qui ne sont ni métrisables, ni localement compacts (exerc. 7 et 8) ; il y a aussi des espaces de Baire métrisables, mais pour lesquels il n'existe aucune structure d'espace métrique complet compatible avec leur topologie (exerc.6).

5. Fonctions semi-continues dans un espace inépuisable. Proposition 5. Soit E un espace inépuisable, f une fonction numérique semi-continue inférieurement dans E. Si $f(x) < +\infty$ en tout point $x \in E$, il existe un nombre fini k et un ensemble ouvert non vide A tel que $f(x) < k$ pour tout $x \in A$.

En effet, pour tout entier $p > 0$, soit G_p l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \leqslant p$; G_p est fermé (chap.IV, § 6, prop.1), et l'hypothèse entraîne que $E = \bigcup_{p=1}^{\infty} G_p$; comme E est inépuisable, il existe au moins un entier p tel que G_p ne soit pas un ensemble rare ; comme G_p est fermé, cela signifie que son intérieur n'est pas vide, d'où la proposition.

La proposition est inexacte lorsque E n'est pas inépuisable. Par exemple, si pour tout nombre rationnel irréductible p/q on pose $f(p/q)=q$, on définit sur la droite rationnelle Q une fonction semi-continue inférieurement et finie en tout point (cf. chap.IV, §6,n°2) ; mais il n'existe aucun ensemble ouvert non vide dans Q dans lequel f soit majorée.

La prop.5 s'applique le plus souvent sous la forme de l'énoncé suivant, qui en est un corollaire immédiat :

Théorème 2. *Soit E un espace inépuisable, (f_a) une famille de fonctions continues numériques définies dans E , telle que pour tout $x \in E$, $\sup_a f_a(x) < +\infty$. Il existe alors une partie ouverte non vide A de E dans laquelle la famille (f_a) est uniformément majorée.*

Il suffit en effet d'appliquer la prop.5 à l'enveloppe supérieure de la famille (f_a), qui est semi-continue inférieurement (chap.IV, § 6,th.4

On notera que le th.2 est encore valable lorsqu'on suppose seulement les f_a semi-continues inférieurement dans E .

Exercices. 1) Soit X une partie d'un espace topologique E ; on désigne par D(X) la partie de E formée des points x tels que, pour tout voisinage V de x , l'ensemble $V \cap X$ soit non maigre dans E . On a $D(X) \subset \overline{X}$.

a) Montrer que, si Y est un ensemble tel que $D(Y)=\emptyset$, on a $D(X \cup Y)=D(X)$ pour toute partie X de E .

b) Pour que $D(X)=\emptyset$, il faut et il suffit que X soit un ensemble maigre dans E . (On commencera par montrer que, si (A_ι) est une famille d'ensembles ouverts dans E , deux à deux sans point commun, et si, pour chaque ι , B_ι est un ensemble rare dans E et contenu dans A_ι , l'ensemble $\bigcup_\iota B_\iota$ est rare dans E .

On considèrera ensuite un ensemble <u>maximal</u> $\mathfrak{M}$ d'ensembles ouverts dans E, deux à deux sans point commun, et tels que, pour tout ensemble $A \in \mathfrak{M}$, $X \cap A$ soit maigre dans E ; l'existence d'un tel ensemble maximal s'établira par le théorème de Zorn. On montrera enfin que la relation $D(X)=\emptyset$ entraîne que, si G est la réunion des ensembles de $\mathfrak{M}$, l'ensemble $X \cap \complement G$ est rare dans E, et on en conclura que X est maigre dans E).

c) Montrer que l'ensemble $D(X)$ est fermé, et que $X \cap \complement D(X)$ est maigre dans E (établir, à l'aide de b), que $X \cap \complement D(X)$ est maigre dans le sous-espace ouvert $\complement D(X)$).

d) Montrer que $D(X)$ est identique à l'adhérence de son intérieur (si $D'(X)$ est l'adhérence de l'intérieur de $D(X)$, montrer que $X \cap \complement D'(X)$ est maigre dans E, en observant que cet ensemble est réunion de $X \cap \complement D(X)$ et de $X \cap D(X) \cap \complement D'(X)$).

1 bis) a) Soient E et F deux espaces topologiques, A un ensemble rare dans l'espace produit $E \times F$. Si la topologie de F admet une base dénombrable, montrer que l'ensemble des $x \in E$ tels que la coupe $A \cap (\{x\} \times F)$ de A suivant x ne soit pas rare dans $\{x\} \times F$, est un ensemble maigre dans E (pour tout ensemble ouvert non vide U dans F, montrer que l'ensemble des $x \in E$ tels que $\{x\} \times U$ soit contenu dans l'adhérence de la coupe de A suivant x, est un ensemble rare dans E).

b) Montrer par un exemple que le résultat de a) peut être en défaut si la topologie de F n'a pas une base dénombrable (prendre pour E un espace séparé non discret, pour F l'espace discret ayant même support que E, pour A la diagonale de $E \times F$).

c) Si $B \subset E$, $C \subset F$ et si l'un des ensembles B, C est maigre (dans E et F respectivement), le produit $B \times C$ est maigre dans $E \times F$. Réciproquement, si $B \times C$ est maigre dans $E \times F$ et si la topologie de E ou de F a une base dénombrable, l'un des ensembles B, C est maigre.

2) Soit A un ensemble ouvert non vide dans un espace E . Si le sous-espace A est inépuisable, l'ensemble A est non maigre dans E .

3) Soit E le sous-espace de $\mathbf{R}^2$ réunion de $\mathbf{Q}^2$ et de la droite $y=0$; montrer que E est maigre dans lui-même.

4) On dit qu'un espace topologique E est <u>totalement inépuisable</u> si tout sous-espace <u>fermé</u> non vide de E est inépuisable. Un espace localement compact, ou un espace métrique complet, est totalement inépuisable.

a) Montrer qu'un espace totalement inépuisable est un espace de Baire.

b) Dans un espace totalement inépuisable, un ensemble fermé dénombrable non vide a au moins un point isolé.

c) Dans un espace totalement inépuisable E , tout sous-espace A , intersection d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts dans E , est totalement inépuisable (si F est un sous-ensemble de A , fermé par rapport à A , et $\overline{F}$ son adhérence dans $\overline{A}$, montrer que $\overline{F} \cap \complement F$ est maigre par rapport à $\overline{F}$).

5) Soit E un espace totalement inépuisable, connexe et localement connexe. Montrer que E ne peut être réunion d'une suite (F_n) d'ensembles fermés non vides, deux à deux sans point commun. (Soit H la réunion des frontières H_n des F_n dans E ; montrer que H est fermé dans E , puis que chacun des ensembles H_n est rare par rapport à H ; pour établir ce dernier point, considérer un système fondamental de voisinages connexes d'un point de H_n , et utiliser l'exerc. 1 du chap. I, § 11).

6) Soit E le sous-espace de R^2 formé des points $(r,0)$, où r parcourt l'ensemble Q des nombres rationnels, et des points $(k/n, 1/n)$, où n parcourt l'ensemble des entiers $\geqslant 1$, k l'ensemble de tous les entiers rationnels. Montrer que E est un espace de Baire, mais n'est pas totalement inépuisable. En déduire qu'il n'existe pas de structure d'espace métrique complet compatible avec la topologie de E .

7) On considère le demi-plan E de R^2 formé des points (x,y) tels que $y \geqslant 0$; on munit E de la topologie $\mathcal{C}$ suivante : pour tout point (x,y) tel que $y>0$, un système fondamental de voisinages est formé des disques fermés de centre (x,y) et de rayon r prenant toutes les valeurs telles que $0<r\leqslant y$; pour tout point $(x,0)$, un système fondamental de voisinages est formé des disques fermés de centre (x,z) et de rayon z , z parcourant l'ensemble des nombres >0 .

a) Montrer que E , muni de la topologie $\mathcal{C}$, est un espace complètement régulier et non normal. (Soit A l'ensemble des $(x,0)$, où x est rationnel, B l'ensemble des $(x,0)$, où x est irrationnel ; montrer que, dans E , A et B sont fermés et que tout voisinage de A rencontre tout voisinage de B ; pour établir ce dernier point, on considèrera l'intersection d'un voisinage de A et d'un voisinage de B par les droites $y=1/n$ (n entier >0), et on utilisera le fait que, dans la droite numérique R , l'ensemble des nombres rationnels ne peut être intersection d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts, d'après l'exerc. 4c)).

b) Montrer que, dans E , tout point possède un voisinage homéomorphe à un espace métrique complet, et par suite que E est un espace totalement inépuisable (montrer qu'un voisinage de $(x,0)$ formé d'un disque fermé de centre (x,z) et de rayon z est homéomorphe au sous-espace du plan numérique $\mathbf{R}^2$ formé des points (x,y) tels que $x^2+y^2 \leqslant 1$, $y>0$, et du point $(0,0)$; pour voir que ce sous-espace de $\mathbf{R}^2$ peut être muni d'une structure d'espace métrique complet compatible avec sa topologie, utiliser l'exerc. 8 du § 2).

8) On désigne par R_- l'espace topologique obtenu en munissant l'ensemble totalement ordonné R des nombres réels, de la topologie $\mathcal{C}_-(\mathrm{R})$ (chap.I, § 1,exerc.3). L'espace R_- est complètement normal (§4,exerc.10).

a) Montrer que tout ensemble ouvert dans R_- est réunion d'une famille dénombrable d'intervalles semi-ouverts à gauche ou ouverts, deux à deux sans point commun. En déduire que tout ensemble ouvert est réunion dénombrable d'ensembles fermés, et que R_- est un espace totalement inépuisable (exerc.4).

b) Montrer que R_- n'est pas métrisable : supposant qu'il existe une distance $d(x,y)$ compatible avec la topologie de R_- , montrer que, si $S_x =]x,+\infty[$, on a, en tout point x, R_- $d(x,S_x) > 0$, et que l'ensemble A_n des points x tels que $d(x,S_x) < 1/n$ est ouvert et partout dense ; en déduire une contradiction avec les résultats de a) .

c) Montrer que tout sous-ensemble compact de R_- est dénombrable (si A est un ensemble compact dans R_- , montrer qu'il existe une extrémité b d'intervalle contigu à A , telle que l'intersection de A et de tout intervalle $[a,x[$ d'origine a soit non dénombrable ; en tirer une contradiction).

9) Soit A un sous-espace partout dense dans un espace topologique E , f une application continue de A dans un espace métrique complet F ; montrer que l'ensemble des points de E où f n'a pas de limite (relativement à A) est un ensemble maigre dans E (considérer pour tout entier $n>0$ l'ensemble des $x\in E$ où l'oscillation $\omega(x;f)$ de f est $<1/n$

10) Soit f un homéomorphisme d'une partie A d'un espace métrique complet E sur une partie A' d'un espace métrique complet E' ; montrer qu'il existe un prolongement $\bar{f}$ de f à un ensemble B , intersection dénombrable d'ensembles ouverts dans E , qui est un homéomorphisme de B sur un ensemble B' intersection dénombrable d'ensembles ouverts dans E' (appliquer l'exerc.9 à f et à l'homéomorphisme réciproque g).

11) Soit E un espace de Baire, E' un espace métrique, (f_n) une suite d'applications de E dans E' , telle que pour chacune des f_n , il existe un ensemble A_n maigre dans E tel que f_n soit continue <u>relativement au sous-espace</u> $\complement A_n$. Si, pour tout $x\in E$, la suite $(f_n(x))$ tend vers une limite f(x), montrer qu'il existe un ensemble A maigre dans E , tel que f soit continue <u>relativement au sous-espace</u> $\complement A$ (à l'aide de la prop.4, se ramener au cas où les f_n sont <u>continues</u> dans E ; prouver alors que l'ensemble des points où l'oscillation $\omega(x;f)$ est $\leqslant 1/n$ contient un ensemble ouvert partout dense ; on établira pour cela que pour tout n , il existe un entier $p>n$ tel que l'ensemble des $x\in E$ pour lesquels la distance de $f_p(x)$ et de $f_q(x)$ est $\leqslant 1/2n$ pour <u>tout</u> $q\geqslant p$ contienne un ensemble ouvert partout dense).

12) Soient G et G' deux groupes métrisables et complets.
Si la topologie de G admet une base dénombrable, toute représentation f

de G <u>sur</u> G' est un <u>homomorphisme</u> (*)(En utilisant le fait que pour tout voisinage U de l'élément neutre dans G , G est réunion d'une suite d'ensembles de la forme $x_n U$, et que G' est un espace de Baire, montrer que pour tout ensemble ouvert A dans G , f(A) est partout dense dans un ensemble ouvert A' dans G' . Considérer ensuite un système fondamental (U_n) de voisinages symétriques de e dans G , tel que $\overline{U}^2_{n+1} \subset U_n$; pour montrer que $f(U_p)$ est identique à l'ensemble ouvert U'_p dans G' , dans lequel il est partout dense, prendre un point $a' \in U'_{p+1}$, puis construire par récurrence une suite (b_n) de points de G telle que $b_n \in U_{p+n}$, et que $f(b_1 b_2 \ldots b_n)$ tende vers a' ; on remarquera pour cela que, si $x' \in U'_k$, il existe $y \in U_k$ tel que $f(y) \in x'U'_{k+1}$).

13) Soit G un groupe métrisable complet, dont la topologie admet une base dénombrable. Soit H un sous-groupe distingué fermé de G , A un sous-groupe fermé de G . Pour que le groupe quotient $A/(A \cap H)$ soit isomorphe à AH/H , il faut et il suffit que AH soit un sous-groupe fermé de G (pour voir que la condition est nécessaire, remarquer que $A/(A \cap H)$ est complet, d'après la prop.4 du §2 ; pour voir que la condition est suffisante, utiliser l'exerc. 12).

14) Soit G un groupe dénombrable complet. Si G est métrisable ou localement compact, G est discret.

15) Si un sous-groupe H d'un groupe topologique G est non maigre dans G , $\overline{H}$ est un sous-groupe ouvert et fermé dans G (avec les notations de l'exerc.1, montrer que l'intérieur de D(H) contient H , en utilisant l'exerc.1d), puis remarquer que $D(H) \subset \overline{H}$).

(*) La proposition est inexacte lorsque la topologie de G n'admet pas de base dénombrable, comme le montre l'exemple où G' est le groupe $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la droite numérique, G le groupe $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète, f l'application identique de G sur G').

16) Soient E, F, G trois groupes abéliens additifs métrisables et f une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. On suppose que, pour tout $x_0 \in E$, $y \to f(x_0, y)$ est continue dans F, et que, pour tout $y_0 \in F$, $x \to f(x, y_0)$ est continue dans E.

Montrer que, si un des deux groupes E, F est <u>complet</u>, f est <u>continue</u> dans le produit $E \times F$. (E étant supposé complet, considérer, pour un $\varepsilon > 0$ donné, et pour chaque $x_0 \in E$, la borne supérieure $g(x_0)$ des nombres $\alpha > 0$ tels que, pour tout $y \in F$ dont la distance à l'origine soit $\leqslant \alpha$, la distance à l'origine de $f(x_0, y)$ soit $\leqslant \varepsilon$; montrer, en utilisant la prop.5, qu'il existe, dans E, un ensemble ouvert non vide A dans lequel la borne inférieure de $g(x)$ soit > 0, et en déduire la proposition).

17) Soit E l'espace vectoriel normé sur le corps $\mathbf{R}$, formé des suites (x_n) de nombres réels dont les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux, la norme de $x = (x_n)$ étant $\|x\| = \sup_n |x_n|$. Montrer que l'application bilinéaire f de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$, définie par $f(x, y) = \sum_n x_n y_n$ si $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ est telle que $f(x_0, y)$ soit continue pour tout $x_0 \in E$, $f(x, y_0)$ continue pour tout $y_0 \in E$, mais n'est pas continue dans $E \times E$.

18) Soient $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n espaces normés complets sur un corps valué K, F un espace normé sur K. Soit f une application multilinéaire de $\prod_i E_i$ dans F ; montrer que, si l'application $(x_i) \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est semi-continue inférieurement f est continue dans $\prod_i E_i$ (utiliser le th.2 du § 5 et le th.1 du § 3).

19) Soient E et F deux espaces normés complets sur un corps valué K Montrer que tout application linéaire de E <u>sur</u> F est un <u>homomorphisme</u>

(si $t_o \in K$ est tel que $|t_o| > 1$, remarquer que pour toute boule S de centre l'origine dans E, E est réunion des boules $t_o^n S$ (n entier >0), puis procéder comme dans l'exerc.12).

20) Soit E un espace normé complet sur un corps valué K. Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, pour que E soit isomorphe à l'espace normé $A \times B$, il faut et il suffit que A et B soient fermés (appliquer l'exerc. 19).

APPENDICE

Valuations archimédiennes

1. Valuations sur le corps $\mathbb{Q}$. Soit K un corps commutatif ou non, $x \to \omega(x)$ une valuation multiplicative (§ 2, n°3) sur K. Si P est le corps premier (Alg., chap.VI, § 1) contenu dans K la restriction de ω à P est une valuation sur P ; on est ainsi conduit à étudier tout d'abord les valuations sur un corps premier P.

Si P est un corps fini $\mathbb{Z}/(p)$, la seule valuation sur P est la valuation impropre, puisque tout élément $\neq 0$ de $\mathbb{Z}/(p)$ est racine (p-1)-ème de l'unité dans ce corps. Il reste donc à étudier le cas où le corps premier P est identique au corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Remarquons d'abord qu'une valuation ω sur $\mathbb{Q}$ est déterminée par ses valeurs $\omega(p)$ pour les nombres premiers distincts, puisque tout nombre rationnel $r \neq 0$ s'écrit sous la forme $r = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, avec des exposants α_k entiers rationnels, ce qui donne

$$\omega(r) = (\omega(p_1))^{\alpha_1} (\omega(p_2))^{\alpha_2} \dots (\omega(p_k))^{\alpha_k}$$

Nous allons comparer les valeurs $\omega(p)$ et $\omega(q)$ pour deux nombres premiers distincts p et q. Nous distinguerons deux cas :

1° $\omega(p) \leq 1$. Pour tout entier $n > 0$ on peut écrire

(1) $$q^n = a_o p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_{m-1} p + a_m$$

les a_i étant des entiers tels que $0 \leq a_i < p-1$, avec $a_0 \neq 0$, et m un entier tel que

(2) $$p^m \leqslant q^n < p^{m+1}$$

Soit α la plus grande des valeurs de $\omega(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant p-1$; on déduit de (1) qu'on a

(3) $$(\omega(q))^n \leqslant m\alpha$$

Or, d'après (2), on a $m \leqslant n \dfrac{\log q}{\log p}$, donc on déduit de (3) que

$$\omega(q) \leqslant (bn)^{1/n} \qquad \text{avec} \qquad b = \alpha \frac{\log q}{\log p}$$

quel que soit n , ce qui donne à la limite $\omega(q) \leqslant 1$ (*). Autrement dit si $\omega(p) \leqslant 1$ pour <u>un</u> nombre premier, on a $\omega(q) \leqslant 1$ pour <u>tout</u> nombre premier.

Cela étant, si $\omega(p)=1$ pour tout nombre premier p , ω est la valuation impropre. Si on n'est pas dans ce cas, soit p un nombre premier tel que $\omega(p) < 1$. Comme $\omega(q) \leqslant 1$ pour tout autre nombre premier q , on a aussi $\omega(n) \leqslant 1$ pour tout entier n . Or, si q est un nombre premier distinct de p , p^n et q^n sont premiers entre eux, donc il existe deux entiers r et s tels que

$$rp^n + sq^n = 1$$

d'où on déduit

$$1 = \omega(1) \leqslant \omega(r)(\omega(p))^n + \omega(s)(\omega(q))^n \leqslant (\omega(p))^n + (\omega(q))^n$$

Si on avait $\omega(q) < 1$, le second membre de cette inégalité tendrait vers 0 lorsque n croit indéfiniment, ce qui conduirait à une contradiction ; on a donc $\omega(q)=1$ pour tout nombre premier distinct de p .

(*) Nous utilisons ici la relation $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ (cf. chap.VI, § , exerc. , et Livre IV, chap.III).

Posons alors $\omega(p)=1/c$, où $c>1$; pour tout nombre rationnel x , si $v(x)$ est l'exposant (positif ou négatif) de p dans la décomposition de x en facteurs premiers, on a $\omega(x)=c^{-v(x)}$; autrement dit la valuation ω se ramène à la <u>valuation additive</u> p-<u>adique</u> v (<u>Alg</u>., chap.V, Appendice).

2° $\omega(p)>1$. D'après ce qui précède, on a nécessairement $\omega(q)>1$ pour tout autre nombre premier q . La relation (1) donne cette fois, en posant $\beta = \dfrac{a}{\omega(p)-1}$

$$(\omega(q))^n \leqslant \beta(\omega(p))^m$$

d'où

$$\log \omega(q) \leqslant \frac{m}{n} \log \omega(p) + \frac{1}{n} \log \beta$$

et d'après (2)

$$\log \omega(q) \leqslant \frac{\log q}{\log p} \log \omega(p) + \frac{1}{n} \log \beta$$

et en faisant croître n indéfiniment

$$\frac{\log \omega(q)}{\log q} \leqslant \frac{\log \omega(p)}{\log p}$$

Mais comme $\omega(q)>1$, on peut recommencer le raisonnement en permutant les rôles de p et q , et par suite

$$\frac{\log \omega(p)}{\log p} = \frac{\log \omega(q)}{\log q} = \rho$$

Autrement dit, on a $\omega(p)=p^\rho$, où ρ est un nombre fixe indépendant du nombre premier p considéré ; d'ailleurs, comme p est la somme de p termes égaux à 1 , on a $\omega(p) \leqslant p$, donc $\rho \leqslant 1$. Il en résulte aussitôt que, pour tout nombre rationnel x , on a nécessairement $\omega(x)=|x|^\rho$.

Inversement, pour tout $\rho \leqslant 1$, $\omega(x)=|x|^\rho$ est bien une valuation multiplicative sur $\mathbb{Q}$. Il suffit pour le voir de démontrer l'inégalité $|x+y|^\rho \leqslant |x|^\rho + |y|^\rho$, et on peut évidemment se borner au cas où $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, en vertu de l'inégalité du triangle. Or, cette inégalité s'écrit alors

$$(4) \qquad 1 \leqslant \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\rho} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{\rho}$$

et comme $\rho \leqslant 1$, on a $\frac{x}{x+y} \leqslant \left(\frac{x}{x+y}\right)^{\rho}$, $\frac{y}{x+y} \leqslant \left(\frac{y}{x+y}\right)^{\rho}$, d'où en ajoutant ces deux inégalités, l'inégalité (4) .

2. __Valuations archimédiennes et valuations non-archimédiennes__. D'après ce qui précède, si K est un corps quelconque, ω une valuation sur K , e l'élément unité de K , on a $\omega(n.e) \leqslant 1$ pour tout entier n si K est de caractéristique $\neq 0$, ou si K est de caractéristique 0 et si la restriction de ω au corps $\mathbb{Q}$ est de la forme $c^{-v(x)}$, où v est une valuation additive p-adique. Dans ces deux cas, on dit que ω est une valuation __non-archimédienne__ sur K . Si x et y sont deux éléments __permutables__ quelconques de K , on a

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p}$$

et comme $\omega(qx) \leqslant \omega(x)$ pour tout entier q , on a

$$(\omega(x+y))^n \leqslant \sum_{p=0}^{n} (\omega(x))^p (\omega(y))^{n-p} \leqslant (n+1) \operatorname{Max}((\omega(x))^n, (\omega(y))^n$$

et par suite

$$\omega(x+y) \leqslant (n+1)^{1/n} \operatorname{Max}(\omega(x), \omega(y))$$

d'où lorsque n croit indéfiniment

$$\omega(x+y) \leqslant \operatorname{Max}(\omega(x), \omega(y))$$

On dit au contraire que ω est une valuation __archimédienne__ sur K si K est de caractéristique 0 et si la restriction de ω au corps premier $\mathbb{Q}$ est de la forme $|x|^{\rho}$ $(0 < \rho \leqslant 1$).

Il est clair que si ω est une valuation archimédienne (resp. non-archimédienne) sur K , son prolongement au complété $\hat{K}$ est encore une valuation archimédienne (resp. non-archimédienne) sur $\hat{K}$.

3. Corps à valuation archimédienne. Nous nous proposons dans ce qui suit de déterminer tous les corps munis d'une valuation archimédienne. Comme tout corps valué peut être considéré comme un sous-corps de son complété, il nous suffira de déterminer tous les corps possédant une valuation archimédienne et complets pour cette valuation.

Nous démontrerons au préalable le lemme suivant :

Lemme. Soit K un corps valué complet commutatif, K' une extension quadratique de K . Il existe une seule valuation sur K' prolongeant la valuation de K , savoir la valuation $|N(x)|^{\frac{1}{2}}$, où $N(x)$ désigne la norme d'un élément $x \in K'$ par rapport à K .

Montrons d'abord que s'il existe une valuation sur K' prolongeant celle de K , elle est nécessairement égale à $|N(x)|^{\frac{1}{2}}$. En effet, soit $\bar{x}$ le conjugué d'un élément $x \in K'$ par rapport à K . On a par définition $x\bar{x} = N(x)$, donc $|x|.|\bar{x}|=|N(x)|$; tout revient à montrer que $|x| = |\bar{x}|$. Supposons le contraire, et que par exemple $|x| < |\bar{x}|$; alors $|x/\bar{x}| < 1$, donc $(\frac{x}{\bar{x}})^n$ tend vers 0 lorsque n croit indéfiniment. Mais $x^n+\bar{x}^n$ appartient à K quel que soit n , donc il en est de même des éléments

$$u_n = \frac{x^n+\bar{x}^n}{x^{n-1}+\bar{x}^{n-1}} = \bar{x} \frac{1+(\frac{x}{\bar{x}})^n}{1+(\frac{x}{\bar{x}})^{n-1}}$$

La suite (u_n) a donc pour limite $\bar{x}$ dans K' ; mais comme K est supposé complet, donc fermé dans K' , et que $u_n \in K$ pour tout indice n , on a aussi $\bar{x} \in K$ d'où $x \in K$, ce qui contredit l'hypothèse que K' est une extension quadratique de K .

Reste à prouver que $|N(x)|^{\frac{1}{2}}$ est bien une valuation sur K' . Comme $N(xy)=N(x)N(y)$ pour deux éléments quelconques x,y de K' , on a $|N(xy)|^{\frac{1}{2}}=|N(x)|^{\frac{1}{2}}|N(y)|^{\frac{1}{2}}$; tout revient donc à démontrer l'inégalité

$$|N(x+y)|^{\frac{1}{2}} \leqslant |N(x)|^{\frac{1}{2}}+|N(y)|^{\frac{1}{2}}$$

ou, ce qui revient au même, en posant $y/x = z$

(5) $$|N(1+z)|^{\frac{1}{2}} \leqslant 1+|N(z)|^{\frac{1}{2}}$$

Il suffit naturellement de considérer le cas où $z \notin K$; alors z est racine d'une équation <u>irréductible</u>

(6) $$z^2 + bz + c = 0$$

avec $b \in K$, $c \in K$, et on a $N(z)=c$, $N(1+z)=(1+z)(1+\bar{z})=1-b+c$; l'inégalité (5) s'écrit donc

$$|1-b+c| \leqslant 1+2|c|^{\frac{1}{2}}+|c|$$

et comme $|1-b+c| \leqslant 1+|b|+|c|$, elle sera démontrée si on montre que $|b| \leqslant 2|c|^{\frac{1}{2}}$, ou $|b|^2 \leqslant 4|c|$. Cette dernière inégalité va être elle-même une conséquence de la proposition suivante : <u>si, dans une équation</u> (5), <u>on a</u> $|b|^2 > 4|c|$, <u>les racines de</u> (5) <u>appartiennent à</u> K.

Pour démontrer cette proposition, considérons une suite (v_n) d'éléments de K définie par récurrence par la relation

(7) $$v_n+bv_{n-1}+cv_{n-2} = 0$$

v_0 et v_1 étant pris arbitrairement dans K. Si on démontre que pour un choix convenable de v_0 et v_1, on a $v_n \neq 0$ pour tout n, et que la suite des éléments $w_n=v_n/v_{n-1}$ a une limite x dans K, il en résultera que x est racine de (5), par passage à la limite dans la relation $w_nw_{n-1}+bw_{n-1}+c=0$ équivalente à (7). L'existence de la limite de la suite (w_n) sera d'ailleurs démontrée si on établit que (w_n) est une <u>suite de Cauchy</u>, K étant complet par hypothèse.

Prouvons d'abord que si v_0 et v_1 sont pris de sorte que $|v_1| \geqslant \frac{|b|}{2}|v_0|$ on a pour tout indice n

(8) $$|v_n| \geqslant \frac{|b|}{2}|v_{n-1}|$$

En effet, on déduit de (7) que

$$|v_n| \geqslant |b|.|v_{n-1}| - |c|.|v_{n-2}|$$

d'où

$$|v_n| - \frac{|b|}{2}|v_{n-1}| \geqslant \frac{|b|}{2}|v_{n-1}| - |c|\cdot|v_{n-2}|$$

et comme $|c| < \frac{|b|^2}{4}$

$$|v_n| - \frac{|b|}{2}|v_{n-1}| \geqslant \frac{|b|}{2}\left(|v_{n-1}| - \frac{|b|}{2} v_{n-2}\right)$$

d'où (8) en supposant v_0 et v_1 tels que $|v_1| \geqslant \frac{|b|}{2}|v_0|$; or, $v_0 \neq 0$ étant pris arbitrairement, on peut toujours trouver dans K un élément v_1 de valeur absolue arbitrairement grande (si la valuation de K n'est pas impropre ; mais dans ce dernier cas, tout $v_1 \neq 0$ satisfait à l'inégalité $|v_1| > \frac{|b|}{2}|v_0|$).

L'inégalité (8) entraîne $v_n \neq 0$ pour tout n, puisque $|b| > 0$ et $v_0 \neq 0$; elle s'écrit par suite aussi $|w_n| \geqslant \frac{|b|}{2}$; d'autre part, on déduit de (7) que

$$|w_n| \leqslant |b| + |c| \frac{1}{|w_{n-1}|} \leqslant |b| + 2\frac{|c|}{|b|} = a$$

Enfin, on tire aussi de (7) que

$$w_{n+p} - w_n = c\,\frac{w_{n+p-1} - w_{n-1}}{w_{n+p-1}\,w_{n-1}}$$

et par suite

$$|w_{n+p} - w_n| \leqslant \frac{4|c|}{|b|^2}\,|w_{n+p-1} - w_{n-1}|$$

d'où par récurrence, et en posant $\frac{4|c|}{|b|^2} = q < 1$

$$|w_{n+p} - w_n| \leqslant q^{n-1}\,|w_{p+1} - w_1| \leqslant 2aq^{n-1}$$

Comme p est arbitraire, cette dernière inégalité prouve que (w_n) est une suite de Cauchy, d'où le lemme.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> (Ostrowski) . <u>Si</u> K <u>est un corps muni d'une valuation archimédienne, et complet pour cette valuation, la structure de corps topologique de</u> K <u>est isomorphe à celle d'un des trois corps</u> $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ <u>ou</u> $\mathbb{K}$.

L'hypothèse entraîne que K contient le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, et que la valuation ω donnée sur K , est un prolongement d'une fonction $|x|^\rho$ sur $\mathbb{Q}$ ($\rho \leqslant 1$) . La topologie définie sur $\mathbb{Q}$ par $|x|^\rho$ est évidemment celle de la droite rationnelle ; le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette valuation est donc un corps topologique isomorphe à $\mathbb{R}$; comme K est complet par hypothèse, il contient donc un sous-corps isomorphe à $\mathbb{R}$, que nous identifierons à $\mathbb{R}$ pour simplifier ; en outre, la restriction de ω au sous-corps $\mathbb{R}$ est la fonction $|x|^\rho$.

Dans ce qui suit, nous n'aurons plus besoin de supposer que K est <u>complet</u>, mais simplement que K contient un sous-corps identifié à $\mathbb{R}$, tel que la restriction de ω à $\mathbb{R}$ soit $|x|^\rho$.

Nous distinguerons en outre deux cas, suivant que K est ou non commutatif :

1° K <u>commutatif</u>. Supposons d'abord que l'équation $x^2+1=0$ ait une racine i dans K ; K contient alors le sous-corps obtenu par adjonction de i à $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un corps dont la structure de corps est isomorphe à celle de $\mathbb{C}$; en outre, d'après le lemme, la restriction de la valuation ω à ce sous-corps est nécessairement de la forme $(\omega(N(z))^{\frac{1}{2}}$, et comme $N(z) = |z|^2$ et $\omega(x) = |x|^\rho$ pour $x \in \mathbb{R}$, la restriction de ω au sous-corps considéré est identique à $|z|^\rho$; la topologie de ce sous-corps est donc également isomorphe à celle de $\mathbb{C}$, et par suite on peut l'identifier avec $\mathbb{C}$.

Dans ces conditions, nous allons montrer que le corps K est nécessairement <u>identique à</u> $\mathbb{C}$. Supposons en effet qu'il existe $x \in K$ n'appartenant pas à $\mathbb{C}$; lorsque z parcourt $\mathbb{C}$, soit m la borne inférieure de $\omega(x-z)$; l'ensemble H des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\omega(x-z) \leqslant 2m$ est compact, car on en tire $|z|^\rho = \omega(z) \leqslant \omega(x)+\omega(x-z) \leqslant \omega(x) + 2m$;

comme ω est continue, il existe donc un $z_0 \in H$, tel que $\omega(x-z_0)=m$, ce qui, d'après l'hypothèse, entraîne $m > 0$.

Montrons maintenant que l'ensemble U des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\omega(x-z)=m$ est <u>ouvert</u>. Soit en effet z un tel point, et posons $y=x-z$. Pour tout $u \in \mathbb{C}$, on a

$$\omega(y- e^{\frac{2ki\pi}{n}} u) \geqslant m = \omega(y)$$

d'où en multipliant membre à membre ces inégalités pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\omega \left(\frac{y^n-u^n}{y-u}\right) \geqslant (\omega(y))^{n-1}$$

ce qui donne

$$(9) \qquad \omega(y-u) \leqslant \frac{1}{m^{n-1}} ((\omega(y))^n + (\omega(u))^n) \leqslant m\left(1+\left(\frac{\omega(u)}{m}\right)^n \right)$$

Comme $m > 0$, l'ensemble V des $u \in \mathbb{C}$ tels que $\omega(u)=|u|^\rho < m$ est un voisinage de 0 ; pour tout $u \in V$, on tire de (9), en faisant croître indéfiniment n , que $\omega(y-u) \leqslant m$, d'où $\omega(y-u)=m$ par définition de m , ce qui prouve que $z+V \subset U$.

D'autre part, U est <u>fermé</u> d'après la continuité de ω ; U n'étant pas vide, serait donc nécessairement égal à $\mathbb{C}$. Mais cette conclusion est absurde, car de $\omega(x-z)=m$ on tire $\omega(z)=|z|^\rho \leqslant m+\omega(x)$. Donc l'hypothèse initiale est absurde et $K = \mathbb{C}$.

Supposons en second lieu que x^2+1 soit irréductible dans K ; soit K' l'extension quadratique de K obtenue par adjonction à K d'une racine de ce polynome. D'après le lemme, la valuation ω se prolonge d'une seule manière en une valuation ω de K' ; les raisonnements qui précèdent prouvent alors que K' est identique à $\mathbb{C}$; comme K contient $\mathbb{R}$ et est contenu dans $\mathbb{C}$ sans lui être identique, on a nécessairement $K = \mathbb{R}$.

2° <u>K non commutatif</u>. Alors, si x est un élément de K n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, le sous-corps commutatif $\mathbb{R}\langle x \rangle$ de K obtenu par adjonction de x à $\mathbb{R}$ est nécessairement isomorphe à $\mathbb{C}$ d'après ce qui précède ;

autrement dit, x est racine d'une équation du <u>second degré</u> à coefficients dans $\mathbf{R}$. On conclut aussitôt de là, en considérant deux élément x, y de K , que les éléments xy , yx , x, y et 1 sont liés par une relation linéaire à coefficients dans $\mathbf{R}$, et par suite que le sous-corps de K engendré par la réunion de $\mathbf{R}$ et d'un nombre fini d'éléments de K est de rang <u>fini</u> sur $\mathbf{R}$; comme le seul corps non commutatif de rang fini sur $\mathbf{R}$ est le corps des quaternions $\mathbf{K}$ (<u>Alg.</u>, chap. VII), on a nécessairement $K = \mathbf{K}$. Il résulte d'ailleurs du lemme, appliqué au corps commutatif $\mathbf{R}\langle x\rangle$, que la valuation $\omega(x)$ est nécessairement égale à $|N(x)|^{\frac{1}{2}}$, où $N(x)$ est la <u>norme</u> du quaternion x .

<u>Corollaire</u>. <u>Tout corps muni d'une valuation archimédienne est isomorphe</u> (en tant que corps topologique) <u>à un sous-corps partout dense de</u> $\mathbf{R}$, <u>de</u> $\mathbf{C}$ <u>ou de</u> $\mathbf{K}$.

Il est facile d'ailleurs de déterminer <u>toutes</u> les valuations archimédiennes compatibles avec la structure de corps d'un tel sous-corps. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un corps K isomorphe à un sous-corps partout dense de $\mathbf{K}$. Si ω est une valuation archimédienne sur K , il existe un isomorphisme φ du complété $\hat{K}$ de K pour cette valuation sur le corps des quaternions $\mathbf{K}$, et un nombre $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ tels que $\omega(x) = (N(\varphi(x)))^{\alpha}$ pour tout $x \in K$. Inversement pour tout isomorphisme φ de K dans $\mathbf{K}$, $(N(\varphi(x)))^{\alpha}$ est une valuation archimédienne sur K . Pour que deux isomorphismes φ_1, φ_2 de K dans $\mathbf{K}$ donnent ainsi la même valuation sur K , il faut et il suffit que $\varphi_2 = \theta\circ\varphi_1$, où φ est un isomorphisme d'un sous-corps partout dense K_1 de $\mathbf{K}$ sur un sous-corps partout dense K_2 de $\mathbf{K}$, tel que $N(\theta(x)) = N(x)$. On déduit aussitôt ~~que~~ de cette condition que θ est <u>bicontinu</u>, et par suite se prolonge en un <u>automorphisme</u> du corps topologique $\mathbf{K}$ (noté encore θ) .

Or θ laisse invariant chaque élément de Q , donc aussi tout point de K adhérent à Q , c'est-à-dire chaque nombre réel ; on en conclut (Alg., chap.VII) que est un <u>automorphisme intérieur</u> $x \to axa^{-1}$ de K .

On raisonnerait de même lorsque K est isomorphe à un sous-corps partout dense de C ; toute valuation de K est de la forme $\omega(x) = |\varphi(x)|^{\rho}$ où $\rho \leqslant 1$, et φ est un isomorphisme de K dans C . Pour que deux isomorphismes φ_1 , φ_2 de K dans C donnent la même valuation, il faut et il suffit que $\varphi_2(x) = \overline{\varphi_1(x)}$ pour tout $x \in K$.
