COTE : BKI 03-2.9

CHAPITRE III GROUPES TOPOLOGIQUES
CHAPITRE IV NOMBRES REELS

Rédaction n° 023

Nombre de pages : 94

Nombre de feuilles : 94

Université Henri Poincaré - Nancy I
INSTITUT ÉLIE CARTAN - UMR 7502
Bibliothèque de mathématiques
B.P. 239
54506 Vandoeuvre-Lès-Nancy

Topologie générale

Chap III. Groupes topologiques

Chap IV Nombres réels

23

A 23
Etat 1

CHAPITRE III - GROUPES TOPOLOGIQUES.

Introduction

Nous avons étudié jusqu'ici deux types généraux de structures mathématiques dont un ensemble peut être revêtu : les structures algèbriques (groupes, espaces vectoriels, corps,...) et les structures topologiques et uniformes. Or, un même ensemble peut posséder en même temps des structures de ces deux espèces différentes. Si ces deux structures coexistent l'une à côté de l'autre sans entretenir entre elles de rapports, il n'y a évidemment rien de plus à dire que ce que nous avons dit jusqu'ici en étudiant chacune d'elles indépendamment des autres. Si au contraire les structures topologique et algèbrique se compènètrent dans une certaine mesure, il naîtra de cet accouplement des propriétés nouvelles, dont l'étude fait l'objet de l'algèbre topologique, que nous allons considérer maintenant.

§ 1. GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES TOPOLOGIQUES.

Soit un fondamental E qui possède une structure de groupe définie par une loi de composition $\top$ entre éléments de E et une structure topologique. La structure de groupe peut être définie par la donnée de la fonction $x \top y^{-1}$, considérée comme application de $E \times E$ sur E. D'autre part, la structure topologique de E nous fournit une structure topologique dans $E \times E$. Nous pouvons établir un lien entre les deux structures en ajoutant aux axiomes des groupes et de la topologie l'axiome suivant :

A. <u>La fonction</u> $x \top y^{-1}$ <u>est continue sur</u> $E \times E$.

Désignons par e l'élément unité de E. Il résulte de A., en faisant $x = e$, que :

A'. *L'application* $y \longrightarrow y^{-1}$ *de* E *sur* E *est continue*.

Comme cette application est bi-univoque et coïncide avec son application réciproque, on en déduit que :

A'_1. *L'application* $y \longrightarrow y^{-1}$ *de* E *sur* E *est topologique*.

En remplaçant dans A . y par z^{-1} et tenant compte de A', on voit que :

A". *La fonction* $x \top z$ *est continue sur* $E \times E$.

Pour chaque $a \in E$, l'application $X_a(x) = a \top x$ est donc une

flèche application continue de E sur E. Comme $X_a^{-1} = X_{a^{-1}}$, on en déduit que :

A''_1. *Pour chaque* $a \in E$, *l'application* $x \longrightarrow a \top x$ *de* E *sur* E *est topologique* ;

de même :

A''_2. *Pour chaque* $a \in E$, *l'application* $x \longrightarrow x \top a$ *de* E *sur* E *est topologique*.

A''_3. *Pour chaque* $a \in E$, *l'application* $x \longrightarrow a \top x \top a^{-1}$ *de* E *sur* E *est topologique*.

Remarquons d'ailleurs que A' et A" entraînent A .

Définition. *Si on a dans un fondamental* E *une structure de groupe et une structure topologique liées par l'axiome* A , *on dit qu'on a un groupe topologique*.

Si par exemple dans un groupe quelconque on introduit la structure topologique discrète, il est évident qu'on obtient un groupe topologique, dit alors *groupe discret*. On obtient encore un groupe topologique en prenant comme structure topologique dans le groupe la plus grossière des structures topologiques.

Système fondamentaux de voisinages de e.

Soit, dans un groupe topologique E, $\mathcal{S}$ un système fondamental de voisinages de l'élément unité e. La famille $\mathcal{S}$ possède les propriétés suivantes :

V.1. Les ensembles de $\mathcal{S}$ contiennent e ;

V.2. Si $U \in \mathcal{S}$, $V \in \mathcal{S}$, il existe un $W \in \mathcal{S}$ tel que $W \subset U \cap V$

V.3. Si $U \in \mathcal{S}$, il existe un $V \in \mathcal{S}$ tel que $V \top V^{-1} \subset U$

V.4. Si $U \in \mathcal{S}$, $x_0 \in E$, il existe un $V \in \mathcal{S}$ tel que $x_0 \top V \top x_0^{-1} \subset U$.

De plus, en vertu de A_1'', si a est un élément de E, les ensembles $a \top U$, pour $U \in \mathcal{S}$, constituent un système fondamental de voisinages de a, et il en est de même des ensembles $U \top a$, en vertu de A_2''. Il en résulte que la structure topologique de E est entièrement déterminée par la donnée de $\mathcal{S}$.

L'ensemble $\mathcal{S}$, ordonné par la relation d'inclusion, possède une structure de filtre. V étant un élément générique de $\mathcal{S}$, soit x_V une application de $\mathcal{S}$ dans E. Dire que cette application converge vers x_0, c'est-à-dire que, si A est un voisinage de x_0, il existe un élément $U \in \mathcal{S}$ tel que l'inclusion $V \subset U$ entraîne $x_V \in A$. Si des applications x_V, y_V convergent vers x_0, y_0, les applications $x_V \top y_V$ et x_V^{-1} convergent respectivement vers $x_0 \top y_0$ et x_0^{-1}. M étant une partie de E, si un élément x_0 est limite d'une application convergente de $\mathcal{S}$ dans M, on a $x_0 \in \overline{M}$. Mais il importe surtout de remarquer que la réciproque est vraie ; soit x_0 un élément de $\overline{M}$; donc, pour tout $V \in \mathcal{S}$, on a $(x_0 \top V) \cap M \neq 0$. Il existe donc, en vertu de l'axiome de choix, une application x_V de $\mathcal{S}$ dans M telle que, pour tout $V \in \mathcal{S}$, on ait $x_V \in (x_0 \top V) \cap M$. Cette application converge évidemment vers x_0.

<u>Définition 2</u>. <u>Un filtre isomorphe à celui formé des éléments d'un système fondamental de voisinages de l'unité est appelé un filtre de définition du groupe</u> E.

<u>Remarque</u> : Si l'espace E satisfait à l'axiome..... (chap. I, § 1), le filtre dénombrable typique (chap. I, § ....) est un filtre de définition de E.

Supposons maintenant donné, dans un groupe ne possédant pas encore de structure topologique, une famille $\mathcal{S}$ d'ensembles satisfaisant aux conditions V.1,2,3,4. x étant un élément du groupe, désignons par $\mathcal{S}_x$ la famille des ensembles $x \top V$ ($V \in \mathcal{S}$). Montrons d'abord qu'il existe dans E une topologie pour laquelle $\mathcal{S}_x$ soit, pour tout x, un système fondamental de voisinages de x. En effet 1) les ensembles de $\mathcal{S}_x$ contiennent x (d'après V.1) 2) l'intersection de deux ensembles de $\mathcal{S}_x$ contient un ensemble de $\mathcal{S}_x$ (d'après V.2) 3) $x \top V$ étant un élément de $\mathcal{S}_x$, il existe un $W \in \mathcal{S}$ tel que $W \top W \subset V$ (d'après V.3). $x \top W$ est un élément de $\mathcal{S}_x$ et si y est un élément de $x \top W$, il existe un élément $y \top W$ de $\mathcal{S}_y$ tel que $y \top W \subset x \top V$. Montrons ensuite que la topologie ainsi obtenue vérifie l'axiome A . Soit (x_0, y_0) un élément de $E \times E$, et soit $(x_0 \top y_0^{-1}) \top V$ un voisinage de $x_0 \top y_0^{-1}$ (avec $V \in \mathcal{S}$). Il suffira de montrer qu'il existe un $W \in \mathcal{S}$ tel que les conditions $x \in x_0 \top W$, $y \in y_0 \top W$ entraînent

$x \top y^{-1} \in (x_0 \top y_0^{-1}) \top V$. Or choisissons dans $\mathfrak{S}$ un W_1 tel que $y_0 \top W_1 \top y_0^{-1} \subset V$ (en vertu de V.4) : il suffira, comme on voit tout de suite, de choisir W tel que $W \top W^{-1} \subset W_1$, ce qui est possible d'après V.3 . Donc :

Proposition 1. E étant un groupe, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $\mathfrak{S}$ d'ensembles constitue un système fondamental de voisinages de l'unité dans une structure de groupe topologique de E est qu'elle satisfasse à V.1,2,3,4.

Remarques. 1) La condition V.3 est équivalente à la conjonction de deux suivantes :

V.3'. Si $U \in \mathfrak{S}$, il existe un $V \in \mathfrak{S}$ tel que $V^{-1} \subset U$;

V.3". Si $U \in \mathfrak{S}$, il existe un $V \in \mathfrak{S}$ tel que $V \top V \subset U$.

D'autre part, en tenant compte de V.3' et de V.2, on voit que la famille des $V \top V^{-1}$ (pour $V \in \mathfrak{S}$) constitue, en même temps que $\mathfrak{S}$, un système fondamental de voisinages de l'unité. Donc : dans un groupe topologique, il existe toujours des systèmes fondamentaux de voisinages de l'unité composés d'ensembles W tels que $W = W^{-1}$.

2) La condition V.4 est automatiquement vérifiée si le groupe est commutatif. On peut montrer par des exemples que, dans le cas général, elle n'est pas conséquence de V.1,2,3.

3) Si M est un ensemble, et si V est un voisinage de e, les ensembles $M \top V$ et $V \top M$ sont des voisinages de M. Si V est ouvert il en est de même de ces ensembles. Si M est compact tout voisinage de M contient un ensemble de la forme $M \top V$. Soit en effet dans ce cas U un voisinage de M . Pour chaque $x \in M$ on peut choisir un voisinage V_x de e tel que $x \top (V_x \top V_x) \subset U$. On peut recouvrir

M au moyen d'un nombre fini d'ensembles de la forme $x \top V_x$: $M \subset \bigcup_{x \in N} (x \top V_x)$, N étant une partie finie de M. Soit $V = \bigcap_{x \in N} V_x$: V est un voisinage de e. y étant un élément de M, il existe un $x \in N$ tel que $y \in x \top V_x$, d'où $y \top V \subset x \top (V_x \top V_x) \subset U$: on a $M \top V \subset U$. On verrait de même qu'il existe un voisinage V' de e tel que $V' \top M \subset U$.

<u>Exercices</u>. 1) Chercher dans un groupe fini quelles sont les structures topologiques qui satisfont à l'axiome A .

2) On considère dans un groupe E un système $\mathcal{S}$ d'ensemble satisfaisant seulement aux conditions V.1,2,3. Montrer qu'on peut en déduire deux topologies T_g et T_d (topologie gauche et topologie droite) de E, un système fondamental de voisinages de x étant formé dans l'une des $V \top x$ ($V \in \mathcal{S}$), et dans l'autre des $x \top V$. Montrer que la condition V.4 est équivalente au fait que ces topologies soient identiques. Etudier les propriétés de continuité de la fonction $x \top y$ dans ces topologies. Montrer que si, dans l'une d'elles, elle est continue par rapport à chacun de ses arguments, elles se confondent et que par suite $x \top y$ est alors continue par rapport à l'ensemble de ses arguments. Montrer que la fonction x^{-1} est une homéomorphie entre les deux espaces topologiques qui sont définis par les topologies T_g et T_d. En déduire que si cette fonction est continue dans l'une de ces topologies, elles se confondent.

§ 2. EXEMPLES DE GROUPES TOPOLOGIQUES.

I. GROUPES ORDONNÉS.

Soit E un groupe commutatif, écrit additivement, dans lequel existe une relation d'ordre " $\leqslant$ " satisfaisant aux conditions suivantes :

0.1 E <u>est totalement ordonné par cette relation</u>

0.2 <u>Les conditions</u> $y \leqslant x$, $y-x \leqslant 0$ <u>sont équivalentes</u>.

On dit alors que E est un groupe <u>ordonné</u>. On notera que 0.2 joue un rôle analogue à celui de la condition A, § 1 : elle établit un lien entre la structure d'ordre et la structure de groupe. Ce lien est tel que l'on connait complètement la relation d'ordre dès que l'on sait comparer un élément à 0. Les éléments d'un groupe ordonné qui sont $\geqslant 0$ sont appelés <u>positifs</u>, ceux qui sont $\leqslant 0$, <u>négatifs</u>. Les éléments positifs (resp. négatifs) qui sont $\neq 0$ sont appelés <u>strictement positifs</u> (resp. strictement négatifs).

On notera que le groupe additif des rationnels, avec la relation d'ordre qu'on y a introduite, est un groupe ordonné.

En faisant $y = 0$ dans la condition 0.2, on voit que les conditions $x \geqslant 0$, $-x \leqslant 0$ sont équivalentes. En tenant compte de 0.1 , on voit que les conditions $y \geqslant x$, $y-x \geqslant 0$ sont équivalentes. De plus les conditions $x \leqslant y$, $-x \geqslant -y$ sont équivalentes.

Les conditions $x \leqslant y$, $z \leqslant t$ entraînent $x + z \leqslant y + t$, en effet, $(x + z)-(y + t) = (x-y) + (z-t) \geqslant x-y \geqslant 0$. On voit de même que les conditions $x > y$, $z \geqslant t$ entraînent $x + z > y + t$.

Nous allons maintenant voir comment on peut, dans un groupe commutatif ordonné, introduire une structure de groupe topologique.

Nous supposerons que le groupe ne se réduit pas un seul élément. a étant un élément > 0 , nous désignerons par S_a l'ensemble des x tels que $-a < x < a$. Les ensembles S_a jouissent des propriétés suivantes :

A. $-S_a = S_a$

B. Si $a > 0$, $b > 0$, on a $S_a + S_b \subset S_{a+b}$.

Désignons par $\mathfrak{S}$ la famille des ensembles S_a, pour $a > 0$. Cette famille satisfait évidemment aux conditions V.1,2,4 du § 1. Pour montrer qu'elle satisfait aussi à V.3, distinguons deux cas :

α : il existe parmi les éléments >0 de E un élément a_1 inférieur à tous les autres ; dans ce cas $S_{a_1} = \{0\}$, de sorte que la condition V.3 est évidemment remplie ;

β : parmi les éléments > 0, il n'en existe aucun qui soit inférieur à tous les autres. Dans ce cas, si $a > 0$, il existe des éléments a_1, a_2 tels que $0 < a_2 < a_1 < a$. Soit b le plus petit des éléments $a_2, a_1 - a_2, a - a_1$. On a $a = a_2 + (a_1 - a_2) + (a - a_1)$, d'où $b + b < a$ et $S_b + S_b \subset S_a$, ce qui montre que la condition V.3 est bien remplie.

Nous supposerons désormais que c'est la condition β qui se trouve réalisée : il en est bien ainsi dans le groupe additif des rationnels. Dans ces conditions, la propriété B peut être remplacée par la propriété plus précise suivante :

B'. <u>Si</u> a <u>et</u> b <u>sont</u> > 0 , <u>on a</u> $S_a + S_b = S_{a+b}$.

Supposons par exemple $a \geqslant b$. Soit $z \in S_{a+b}$. Si $z \in S_a$, on a aussi $z \in S_a + S_b$. Si $a \leqslant z < a + b$, on a $0 \leqslant z - a < b$.

Il existe un élément c tel que $0 < c < b-(z-a)$. Posons $d = z-(b-c)$. On a $d < a$, et $d > -b \geqslant -a$, d'où $d \in S_a$. De plus, on a $0 < z-d < b$, d'où $z-d \in S_b$ et $z = d + (z-d) \in S_a + S_b$; démonstration analogue si $-(a+b) < z \leqslant -a$.

a et b étant deux éléments tels que $a < b$, désignons par $S_{a,b}$ l'ensemble des x tels que $a < x < b$. Cet ensemble est ouvert. En effet, si x est un élément de $S_{a,b}$, et si c est le plus petit des éléments $x-a$, $b-x$, on a $x + S_c \subset S_{a,b}$. De plus, la famille de ceux des $S_{a,b}$ qui contiennent un élément x constitue un système fondamental de voisinages de x.

De plus, si F est une partie de E composée d'éléments > 0 et telle que tout élément > 0 soit supérieur à un élément au moins de F, la famille des $x + S_c$, pour $c \in F$, constitue encore un système fondamental de voisinages de x.

Définition 1. <u>On appelle groupe additif de la droite rationnelle le groupe topologique qu'on obtient par le procédé précédent à partir du groupe ordonné des rationnels</u>.

On notera que la topologie du groupe additif des rationnels est identique à celle de la droite rationnelle.

II. DÉFINITION D'UNE TOPOLOGIE PAR UNE FAMILLE DE SOUS-GROUPES.

Soit un groupe topologique E dans lequel on donne une famille $\mathcal{G}$ de sous-groupes, possédant les propriétés suivantes : 1) l'intersection de deux groupes de $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{G}$; 2) si $g \in \mathcal{G}$, et si $x \in E$, on a $x \top g \top x^{-1} \in \mathcal{G}$. La famille $\mathcal{G}$ possède évidemment les propriétés V.1,2,3,4 (car si g est un sous-groupe, on a

$g = g^{-1} = g \top g$). Par suite, il existe un groupe topologique dans lequel les ensembles de $\mathfrak{G}$ forment un système fondamental de voisinages de l'unité.

Partons par exemple du groupe additif Q des rationnels. n étant un entier > 0 , désignons par g_n l'ensemble des rationnels qui, mis sous forme de fractions irréductibles, ont leurs numérateurs divisibles par n : g_n est évidemment un sous-groupe. De plus, si m est un autre entier > 0 , $g_m \cap g_n = g_s$ si s est le p.p.c.m. de m et de n. Soit alors P un ensemble d'entiers > 0 possédant la propriété suivante : le p.p.c.m. de deux entiers de P est encore dans P. Dans ces conditions la famille $\mathfrak{G}$ des g_n , pour $n \in P$, possède les propriétés indiquées au début, et nous fournit par suite un groupe topologique.

Le cas en pratique le plus important est celui où P se compose de toutes les puissances d'exposants > 0 d'un entier $p > 0$.

Définition 2. p <u>étant un entier</u> > 0, <u>le groupe topologique construit de la manière qui vient d'être indiquée à partir de l'ensemble des puissances de p s'appelle le groupe additif des rationnels p-adiques</u>.

<u>Exercices</u>. 1) Former dans le groupe additif des rationnels une famille $\mathfrak{S}$ d'ensembles satisfaisant à V.1,2,3",4 mais non à V.3 .

2) Transposer la condition O.2 pour un groupe commutatif écrit multiplicativement. Montrer qu'elle est vérifiée pour le groupe multiplicatif des rationnels 0. Montrer que la topologie déduite dans ce groupe de l'ordre coïncide avec celle induite par la topologie de la droite rationnelle.

3) P et P' étant deux ensembles d'entiers 0 dont chacun contient le p.p.c.m. de deux de ces éléments, à quelle condition les topologies du groupe additif des rationnels qui leur correspondent sont-elles identiques ?

4) Montrer que la topologie d'un groupe ordonné est toujours régulière. P étant un ensemble d'entiers 0 contenant le p.p.c.m. de deux de ses éléments, à quelle condition la topologie du groupe des rationnels qu'on en déduit est-elle régulière ?

§ 3. STRUCTURES UNIFORMES DANS UN GROUPE TOPOLOGIQUE.

Soit E un groupe topologique, dans lequel l'élément unité est e. Désignons par Δ l'ensemble diagonal du produit $E \times E$, et par $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages de e dans E. V étant un élément de $\mathcal{V}$, désignons par U_V l'ensemble des couples $(x,y) \in E \times E$ tels que $y \in x \top V$, et par $\mathcal{U}$ la famille des ensembles U_V ($V \in \mathcal{V}$). Montrons que la famille $\mathcal{U}$ constitue un système fondamental d'entourages dans une structure uniforme de E.

1) U.I est vérifié ; en effet, on a, quel que soit $V \in \mathcal{V}$,

$$\Delta \subset U_V .$$

2) Soit $U_V \in \mathcal{U}$; il existe un $W \in \mathcal{V}$ tel que $W^{-1} \subset V$; on a $U_W \subset \overset{-1}{U_V}$, car la condition $y \in x \top W$ entraîne $\overset{-1}{x} \top y \in W$, $\overset{-1}{y} \top x \in V$ et $x \in y \top V$.

3) Soit $U_V \in \mathcal{U}$; il existe un $W \in \mathcal{V}$ tel que $W \top W \subset V$; on a $\overset{2}{U_W} \subset U_V$; en effet les conditions $z \in x \top W$, $y \in z \top W$ entraînent $y \in x \top W \top W \subset x \top V$.

Il est évident que la structure uniforme ainsi définie ne dépend pas du système fondamental $\mathcal{V}$ choisi ; car, si $V' \subset V$, on a $U_{V'} \subset U_V$.

La topologie de E déterminée par cette structure uniforme est identique à celle dont on était partie : en effet, si $x \in E$, l'ensemble $U_V(x)$ (cf. ch. II, § 2) n'est autre que $x \top V$. De plus, on notera qu'un filtre de définition de la topologie de E constitue aussi un filtre de définition de la structure uniforme de E (cf. chap. II).

Si maintenant nous désignons par U'_V l'ensemble des couples $(x,y) \in E \times E$ tels que $y \in V \top x$, et par $\mathcal{U}'$ la famille des U'_V, on voit de même que la famille $\mathcal{U}'$ constitue un système fondamental d'entourages pour une structure uniforme de E, qui détermine également sur E la topologie dont on est parti.

Nous sommes donc en présence de deux structures uniformes de l'espace topologique E. Nous les appellerons structures uniformes droite et gauche.

On peut montrer par des exemples que ces structures sont en général distinctes. Il est cependant des cas fort importants dans lesquels elles se confondent.

Proposition 1. Les structures uniformes droite et gauche sont confondues dans les deux cas suivants : 1) si E est commutatif 2) si E est compact.

En effet : 1) si E est commutatif, on a $U_V = U'_V$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$
2) si E est compact, on sait qu'il n'est susceptible que d'une seule structure uniforme.

Ces conditions ne sont d'ailleurs nullement nécessaires.

Proposition 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux structures uniformes de E se confondent est qu'un système fondamental $\mathcal{V}$ de voisinages de e satisfasse à la condition suivante

V.5. Si $V \in \mathcal{V}$, il existe un $W \in \mathcal{V}$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $x \top W \top x^{-1} \subset V$.

En effet, si les structures uniformes se confondent, il existe, pour chaque $V \in \mathcal{V}$, un $W \in \mathcal{V}$ tel que $U_W \subset U_V$, d'où, pour tout x, $x \top W \subset V \top x$, $x \top W \top x^{-1} \subset V$. Inversement si la condition est réalisée, on a $U_W \subset U'_V$ et aussi, pour tout x, $x^{-1} \top W \top x \subset V$, d'où $U'_W \subset U_V$: les structures uniformes se confondent.

Proposition 3. L'application topologique x^{-1} de E sur E fait correspondre à la structure uniforme droite la structure uniforme gauche et réciproquement.

En effet, soit φ l'application de $E \times E$ sur lui-même définie par $\varphi(x,y) = (x^{-1},y^{-1})$. On a $\varphi(U_V) = U'_{V^{-1}}$, $\varphi(U'_V) = U_{V^{-1}}$ d'où on déduit que $\varphi(\mathcal{U})$ forme un système fondamental d'entourages équivalent à $\mathcal{U}'$, et de même $\varphi(\mathcal{U}')$ un système fondamental d'entourages équivalent à $\mathcal{U}$.

Corollaire. Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux structures uniformes de E se confondent est que la fonction x^{-1} soit uniformément continue dans l'une ou l'autre de ces structures.

Proposition 4 :

Si $a \in E$, les fonctions $x \top x$, $x \top a$ (a constant) sont uniformément continues dans chacune des structures uniformes de E.

Soit donné un élément $V \in \mathcal{V}$. La condition $y \in x \top V$ entraîne $a \top y \in (a \top x) \top V$, ce qui démontre l'uniforme continuité de $a \top x$ dans la structure uniforme droite. D'autre part, il existe un $W \in \mathcal{V}$ tel que $a \top W \subset V \top a$; la condition $y \in W \top x$ entraîne $a \top y \in a \top W \top x \subset V \top (a \top x)$, ce qui démontre l'uniforme continuité de $a \top x$ dans la structure uniforme gauche. Démonstrations analogues pour $x \top a$.

Par contre, la fonction $x \top y$ n'est pas en général fonction uniformément continue de ses 2 arguments. En effet :

Proposition 5. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $x \top y$ soit une fonction uniformément continue de ses 2 arguments dans l'une ou l'autre des structures uniformes droite ou gauche est que ces structures uniformes se confondent.

En effet supposons la fonction $x \top y$ uniformément continue dans la structure uniforme gauche. Alors, pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe un W tel que, quels que soient x, y, $x \top (W \top y) \subset V \top (x \top y)$, d'où $x \top W \top x^{-1} \subset V$: la condition V.5 est remplie. Démonstration analogue si $x \top y$ est uniformément continue au sens de la structure uniforme droite. Inversement, si V.5 est remplie, soit $V \in \mathcal{V}$; il existe un $W_1 \in \mathcal{V}$ tel que, $W_1 \top W_1 \subset V$, et il existe un $W \in \mathcal{V}$ tel que, pour tout x, $x \top W \top x^{-1} \in W_1$. D'où $(W \top x) \top (W \top y) \subset W_1 \top W_1 \top (x \top y) \subset V \top (x \top y)$ ce qui démontre l'uniforme continuité de $x \top y$.

<u>Corollaire</u>. <u>Si les structures uniformes droite et gauche se confondent, la fonction $x \top y^{-1}$ est aussi une fonction uniformément continue de ses deux arguments</u>.

<u>Remarques</u>. 1) La structure uniforme déduire de la topologie du groupe additif de la droite rationnelle (§1, déf. 3) se confond avec la structure uniforme fondamentale de l'ensemble des rationnels (ch. II, §1) ; celle déduite de la topologie du groupe additif des rationnels p.adiques (§1, déf.4) se confond avec la structure uniforme p.adiques (ch. II, §1).

2) Si, dans un groupe topologique E, il existe un point a tel que l'intersection des voisinages de a soit $\{a\}$, sa topologie est régulière. En effet, tout d'abord la même propriété appartient au point e ; car, si $x \neq e$, il y a par hypothèse un voisinage V de e tel que que $a \top x \notin a \top V$, d'où $x \notin V$. Il en résulte tout de suite que chacune des structures uniformes de E satisfait à U.IV et que par suite la topologie de E est régulière. Il en résulte que dans un groupe topologique, l'axiome de Frechet, celui de Haussdorf et la condition de régularité sont équivalents.

<u>Exercices</u> :

1) Montrer que la construction des structures uniformes droite et gauche dans un groupe E ne s'appuie que sur les propriétés V.1,2,3 du système $\mathcal{V}$. En ne supposant pas nécessairement vérifiée V.4 , montrer que ces structures uniformes déterminent en E les topologies définies dans l'Exerc. 2, § 1.

2) On considère le groupe multiplicatif des nombres rationnels $\neq 0$, et la topologie de ce groupe définie à l'exerc. 4 § 1 . Etudier la structure uniforme déduite du groupe topologique obtenu. Montrer qu'elle est différente de la structure uniforme induite par la structure uniforme fondamentale de la droite rationnelle.

3) On considère le groupe multiplicatif des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients rationnels, à déterminants $\neq 0$. A chaque entier $n > 0$ on fait correspondre l'ensemble V_n des matrices telles que $|a-1| < \frac{1}{n}$, $|b| < \frac{1}{n}$, $|c| < \frac{1}{n}$, $|d-c| < \frac{1}{n}$. Soit $\mathcal{V}$ la famille des ensembles V_n. Montrer que la famille $\mathcal{V}$ satisfait aux axiomes V.1,2,3,4 mais non à V.5 et que par suite les structures uniformes du groupe topologique obtenu sont distinctes. Vérifier sur cet exemple que les fonctions x^{-1} , $x \top y$ ne sont pas uniformément continues.

§ 4. SOUS-GROUPES - ESPACES-QUOTIENT - PRODUITS.

I. Désignons par E un groupe topologique, et par g un sous-groupe de E. Il est évident que la topologie induite dans g par celle de E satisfait à l'axiome A du § 1, et par suite que nous avons une structure de groupe topologique induite dans g. Les structures uniformes droite et gauche de E induisent dans g les structures uniformes droite et gauche de g.

Si g est un sous-groupe, il en est de même de son adhérence $\bar{g}$. En effet, si $x, y \in \bar{g}$ et si $\mathcal{F}$ est un filtre de définition de E, il existe des applications x_α, y_α de $\mathcal{F}$ dans g qui convergent vers x, y ; l'application $x_\alpha \top y_\alpha^{-1}$ converge vers $x \top y^{-1}$, d'où $x \top y^{-1} \in \bar{g}$. On voit de même que si g est sous-groupe invariant, il en est de même de $\bar{g}$.

Si g est un sous-groupe fermé, chacune des classes $x \top g$, $g \top y$ à droite ou à gauche suivant g est un ensemble fermé.

II. On sait que dans l'étude des structures-quotient d'un groupe E, il y a plusieurs cas à distinguer :

II.1. Une relation d'équivalence ρ compatible avec la composition à gauche dans E est une relation de congruence à droite suivant un sous-groupe g ; la relation $\rho(x,y)$ équivaut à $y \in x \top g$ ou à $x \in y \top g$. L'ensemble-quotient correspondant admet les élément de E comme opérateurs. Nous désignerons par T_x l'opérateur de E/ρ fourni par un $x \in E$. Donc, si $\mathfrak{y} \in E/\rho$, $T_x \mathfrak{y}$ est la classe à droite (mod. g) qui contient $x \top y$, pour $y \in \mathfrak{y}$. De plus, on a

(1) $T_x * T_y = T_{x \top y}$.

Ceci dit, contrairement à ce que se passe dans le cas général, on peut ici définir une structure uniforme-quotient de la structure-uniforme gauche de E, qui détermine sur E/ρ la topologie quotient de celle de E. Soit en effet $\mathcal{V}$ le système des voisinages de l'unité dans E. V étant un élément de $\mathcal{V}$, désignons par $\mathcal{U}_V$ l'ensemble des couples $(\mathcal{C}, \mathcal{Y}) \in (E/\rho)\times(E/\rho)$ tels que $(V \top \mathcal{C}) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$. Chaque ensemble $\mathcal{U}_V$ contient l'ensemble diagonal de $(E/\rho)\times(E/\rho)$. D'autre part, $V \top \mathcal{C}$ est une réunion de classes à droite suivant g, de sorte que la condition $(V \top \mathcal{C}) \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ équivaut à $\mathcal{Y} \subset V \top \mathcal{C}$. La condition $(\mathcal{C}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{U}_{V^{-1}}$ entraîne $\mathcal{Y} \subset V^{-1} \top \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset V \top \mathcal{Y}$, d'où $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}) \subset \mathcal{U}_V$, d'où $\mathcal{U}_{V^{-1}} \subset \mathcal{U}_V$. Enfin, soit $W' \in \mathcal{V}$ tel que $W' \top W' \subset V$; les conditions $(\mathcal{C}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{U}_{W'}$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \in \mathcal{U}_{W'}$ entraînent $\mathcal{Z} \subset W' \top \mathcal{Y} \subset W' \top W' \top \mathcal{C} \subset V \top \mathcal{C}$, d'où $(\mathcal{C}, \mathcal{Z}) \subset \mathcal{U}_V$: on a $\mathcal{U}_{W'} * \mathcal{U}_{W'} \subset \mathcal{U}_V$. Il résulte de là que la famille des ensembles $\mathcal{U}_V$ constitue un système fondamental d'entourages dans une structure uniforme de E/ρ. C'est cette structure uniforme que nous appellerons structure uniforme quotient de la structure uniforme gauche de E.

L'application canonique I de E sur E/ρ est évidemment uniformément continue, car la condition $y \in V \top x$ entraîne $Iy \subset V \top Ix$.

$\mathcal{C}$ étant un élément de E/ρ, un système fondamental de voisinages de $\mathcal{C}$ dans la structure uniforme que nous venons de déterminer se trouve donné par la famille des ensembles $\mathcal{U}_V(\mathcal{C})$, $\mathcal{U}_V(\mathcal{C})$ étant l'ensemble des $\mathcal{Y}$ tels que $(\mathcal{C}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{U}_V$. Or $\mathcal{U}_V(\mathcal{C})$ se confond avec l'image par I de l'ensemble $V \top \mathcal{C}$. La famille des ensembles $V \top \mathcal{C}$ constituant, dans E, un système fondamental de voisinages de l'ensemble $\mathcal{C}$, il en résulte que la structure uniforme de E/ρ détermine dans l'ensemble E/ρ la topologie quotient de la topologie de E.

$T_x \mathfrak{y}$ peut être considéré comme une application de $E\times(E/\rho)$ dans E/ρ. L'espace topologique $E\times(E/\rho)$ pouvant être considéré comme un espace quotient de $E\times E$, il en résulte que $T_x \mathfrak{y}$ est fonction continue de l'ensemble de ses deux arguments $x, \mathfrak{y}$. En particulier, si on remarque que $\overset{-1}{T_x} = T_{x^{-1}}$, il en résulte que les applications T_a sont, pour tout $a \in E$, des applications topologiques de E/ρ sur lui-même. Ces applications sont de plus uniformément continues. En effet, si $V \in \mathcal{V}$, il existe un $W \in \mathcal{V}$ tel que $a \top W \top a^{-1} \subset V$; la condition $\mathfrak{y} \in \mathfrak{A}_V(\mathcal{C})$ entraîne alors $\mathfrak{y} \subset W \top \mathcal{C}$, d'où $a \top \mathfrak{y} \subset (a \top W \top a^{-1}) \top (a \top \mathcal{C}) \subset V \top (a \top \mathcal{C})$. Par contre, en général, $T_x \mathfrak{y}$ n'est pas fonction uniformément continue de ses 2 arguments. Il en est cependant ainsi si les structures uniformes droite et gauche de E se confondent.

<u>Définition 1</u>. <u>On appelle représentation continue du groupe topologique</u> E <u>au moyen d'un espace topologique</u> $\mathfrak{h}$ <u>une correspondance univoque qui à chaque</u> $x \in E$ <u>fasse correspondre une application</u> S_x <u>de</u> $\mathfrak{h}$ <u>dans lui-même, et ceci de telle manière que</u> :

1) <u>SI</u> $x \in E$, $M \in \mathfrak{h}$, $S_x M$ <u>soit fonction continue de ses deux arguments</u> x <u>et</u> M

2) <u>on ait</u> $S_x * S_y = S_{x \top y}$

3) e <u>étant l'unité de</u> E, S_e <u>soit l'application identique de</u> $\mathfrak{h}$.

Par suite, à chaque sous-groupe g de E correspond une représentation continue de E au moyen de l'espace E/ρ, ρ étant la relation de congruence à droite (mod. g).

Considérons d'une manière générale une représentation continue du groupe E au moyen d'un espace $\mathfrak{h}$. Soit $R(M,N)$ la relation entre points de $\mathfrak{h}$ qui se formule de la manière suivante : il existe un $x \in E$ tel que $S_x M = N$. Il résulte tout de suite des conditions 2), 3) que R est une relation d'équivalence dans $\mathfrak{h}$.

<u>Définition 2.</u> <u>Les classes d'équivalence suivant</u> R <u>s'appellent les systèmes d'intransitivité de la représentation.</u> <u>Si</u> R <u>est partout vraie, on dit que le groupe</u> E <u>opère transitivement dans</u> $\mathfrak{h}$.

Il est clair que chaque système d'intransitivité fournit une représentation de E , et que E opère transitivement dans un même système d'intransitivité.

Supposons donc que E opère déjà transitivement dans $\mathfrak{h}$. A étant un point de $\mathfrak{h}$, l'ensemble des x tels que $S_x A = A$ est évidemment un sous-groupe g_A de E. La relation $\rho(x,y)$ de congruence à droite suivant g_A équivaut à la relation $S_x A = S_y A$. Il en résulte que l'on peut, à chaque $\mathscr{C} \in E/\rho$, faire correspondre l'élément $M = J_A(\mathscr{C})$ de $\mathfrak{h}$ qui est la valeur commune des $S_x A$ pour $x \in \mathscr{C}$: J_A est une application bi-univoque de E/ρ dans $\mathfrak{h}$, et même, sur $\mathfrak{h}$ (en vertu de la transitivité). Cette application est aussi une application continue ; mais pas nécessairement topologique. On peut donc dire, en abrégé, que :

<u>Proposition 1.</u> <u>Un espace de représentation continue de</u> E , <u>dans lequel</u> E <u>opère transitivement, est une image continue et bi-univoque d'un espace-quotient de</u> E.

On notera que le groupe g_A et par suite l'application S_A dépendent en général du point A : si B est un autre point, et si c est tel que $S_c A = B$, on a $g_B = c \top g_A \top c^{-1}$.

~~Condition pour que le groupe des transformations J_x soit image bi-univoque de E.~~

Un intérêt particulier s'attache aux espaces de représentation $\mathcal{H}$ pour lesquels l'application J_A est bi-univoque. Pour cela, il faut et il suffit que l'image $J_A \mathcal{U}$ d'un voisinage $\mathcal{U}$ de g dans E/ρ soit un voisinage de A dans $\mathcal{H}$. En effet, cette condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est remplie, un voisinage $\mathcal{U}'$ d'un élément $\mathcal{E} = T_x g$ de E/ρ sera de la forme $\mathcal{U}' = T_x \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ étant un voisinage de g et aura pour image $J_A \mathcal{U}' = S_x S_A \mathcal{U}$, qui est un voisinage de $S_x A$, de sorte que S_A sera bien un application topologique.

Or, un voisinage $\mathcal{U}$ de g dans $\mathcal{E}$/ρ est l'image par l'application canonique de E sur E/ρ d'un voisinage U de e dans E. Donc, pour que J_A soit topologique, il faut et suffit que, A étant un point de $\mathcal{H}$, U un voisinage de e dans E , l'ensemble $S_U(A)$ (ensemble de $S_x A$ pour $x \in U$) soit un voisinage de A .

<u>Définition 3.</u> <u>On appelle espace homogène par rapport au groupe E un espace de représentation de E dans lequel E opère transitivement et tel que A étant un point de l'espace, U un voisinage de e dans E , $S_\rho(A)$ soit un voisinage de A .</u>

Donc, les espaces homogènes par rapport à E sont isomorphes aux espaces-quotients E/ρ relatifs aux sous-groupes g de E . Il en résulte que tout espace homogène possède une structure uniforme.

II.2. Nous avons envisagé en II.1 les relations d'équivalence compatibles avec la composition à gauche dans E. On arrive à des résultats analogues si on considère une relation d'équivalence ρ compatible avec la composition à droite : l'espace E/ρ admet encore les éléments de E comme opérateurs. Cependant ici, T_{1_x} désignant l'application de E/ρ sur lui-même définie par x, l'égalité (1) est remplacée par

$$T_x * T_y = T_{y \top x}$$

<u>Définition 4.</u> <u>Si, dans la définition 2, on remplace la condition 2)</u> par la condition
$S_x * S_g = S_{y \top x}$, <u>on dit qu'on a une anti-représentation continue du groupe</u> E <u>au moyen de l'espace</u> $\mathcal{Y}$.

Par analogie avec II.1, le lecteur établira facilement les rapports qui existent entre les espaces-quotient E/ρ relatifs aux relations compatibles avec la composition à droite et les anti-représentations.

II.3. Il reste enfin à envisager le cas d'une relation d'équivalence compatible à la fois avec la composition à droite et la composition à gauche. La donnée d'une telle relation équivaut à celle d'un sous-groupe invariant g ; on sait que l'ensemble-quotient correspondant E/g possède une structure de groupe. Reprenant les notations de II.1 , la composition $\top$ dans E/g est donnée par la formule $\mathcal{C} \top \mathcal{Y} = J_x \mathcal{Y}$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. L'ensemble E/g possède aussi une topologie, quotient de celle de E. Cette topologie satisfait à l'axiome A dans E/g , car $\mathcal{C} \top \mathcal{Y} = T_x \mathcal{Y}$ est évidemment fonction continue de ses deux arguments $\mathcal{C}$, $\mathcal{Y}$. Le groupe topologique ainsi obtenu est appelé le groupe quotient du groupe topologique E par son sous-groupe g.

La structure uniforme gauche (rep. droite) de E/g est évidemment la structure uniforme quotient de la structure uniforme gauche (resp. droite) de E .

Définition 5. *On appelle représentation continue du groupe topologique* E *dans un groupe topologique* G *une application* φ *continue de* E *dans* G *telle que*

$$\varphi\,(x \top y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

Si de plus $\varphi(E) = G$, *on dit que* φ *est une représentation sur le groupe* G (le signe $\circ$ dénote la loi de composition dans G).

Donc : l'application canonique d'un groupe topologique E sur un groupe quotient E/g est une représentation de E sur E/g.

Le lien entre cette notion et celle d'espace de représentation s'obtient en remarquant que la donnée d'une représentation de E dans G permet d'associer à chaque $x \in E$ un opérateur S_x de l'espace G, à savoir l'opérateur de G défini par $S_x\, y = \varphi(x) \circ y$. Ces opérateurs satisfont aux conditions 1),2),3) de la définition 2. Donc G peut être considéré comme espace de représentation de E. E y opèrera transitivement si et suelement si on a affaire à une représentation de E sur G. Dans le cas général, $\varphi(E)$ sera évidemment un sous-groupe de G.

φ étant une représentation de E sur le groupe G, soit g l'ensemble des $x \in E$ tels que $\varphi(x) = f$, f étant l'unité du groupe G : g est un sous-groupe invariant de E, et $\varphi(x)$ ne dépend que de la classe (mod. g) à laquelle appartient x. φ donne donc une application $\bar{\varphi}$, évidemment continue et bi-univoque de E/g sur G. Donc :

Proposition 2. *Les groupes sur lesquels on peut représenter continument un groupe topologique* E *sont les images continues bi-univoques des groupes-quotient de* E.

A la notion d'espace homogène par rapport au groupe G correspond ici celle d'*homomorphie* du groupe topologique G :

<u>Définition 6. La représentation φ du groupe topologique E sur le groupe G est appelée une homomorphie de E sur G quand l'application $\bar{\varphi}$ est bi-continue. Plus généralement, on appelle homomorphie de E dans un groupe G une homomorphie de E sur un sous-groupe de G.</u>

<u>Remarques</u>. 1) Soit φ une application du groupe topologique E dans le groupe topologique G telle que l'on ait $\varphi(x \top y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$. Pour que cette application soit continue, il suffit qu'elle soit continue au point e. En effet, si cette condition est réalisée, par chaque voisinage Z de l'élément-unité f de G il existe un voisinage V de e dans E telle que $\varphi(V) \subset Z$, d'où $\varphi(x \top V) \subset \varphi(x) \circ Z$, $\varphi(V \top x) \subset Z \circ \varphi(x)$

On voit en même temps que si la condition est réalisée, φ donne une application uniformément continue de la structure uniforme droite (resp. gauche) de E dans celle de G.

2) Pour qu'une représentation continue φ du groupe topologique E dans le groupe topologique G soit une homomorphie de groupe topologique il faut et suffit que, pour chaque voisinage V de e dans E, $\varphi(V)$ soit un voisinage de f dans $\varphi(E)$ (cf. définition 2).

III. Considérons maintenant un ensemble d'indices I et supposons qu'à chaque $\alpha \in I$ on ait fait correspondre un groupe topologique E_α (les ensembles E_α étant contenus dans un même fondamental). Nous savons déjà former dans le produit $\prod_\alpha E_\alpha$ une structure de groupe et une structure-topologique produit. La structure topologique produit satisfait dans $E = \prod_\alpha E_\alpha$ à l'axiome A. Désignons en effet par le même signe $\top$ la loi de composition dans chacun des E_α et dans le produit. Soit f_α l'application de $E_\alpha \times E_\alpha$ dans E_α définie par $f_\alpha(x,y) = x \top y^{-1}$ et soit f l'application correspondante de $E \times E$ dans E. $E \times E$ peut être considéré comme le produit $\prod_\alpha (E_\alpha \times E_\alpha)$ (à une isomorphie canonique près) si $x = (x_\alpha)$, $y = (y_\alpha)$, le couple (x,y) correspondra dans cette isomorphie canonique au groupement $(x_\alpha, y_\alpha)_\alpha$. $f(x,y)$ est le groupement $(f_\alpha(x_\alpha, y_\alpha))$. Chacune des applications f_α étant continues, il en est de même de f.

Le groupe topologique E ainsi obtenu s'appelle le produit des groupes topologiques E_α.

Les même considérations s'appliqueraient au produit d'un nombre fini de groupes topologiques explicitement donnés, situés ou non dans un même fondamental.

Remarque.

E étant un groupe topologique régulier, tout sous-groupe de E est également régulier. De même, un produit de groupes topologiques réguliers est un groupe topologique de Hausdorf, donc aussi régulier.

ρ étant une relation de congruence à droite suivant un sous-groupe g, l'espace E/ρ n'est en général pas de Hausdorf, même quand E est régulier. En effet, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que l'ensemble $\{g\}$ formé du seul élément g de E/ρ soit fermé, donc que g soit fermé dans E. Inversement, si cette condition est réalisée, E/ρ possède une structure uniforme et contient un ensemble fermé à 1 seul élément, donc est régulier.

Exercices.

1) Montrer que l'adhérence A de l'élément unité e dans un groupe topologique E est un sous-groupe invariant de E et que le groupe E/A est un groupe topologique régulier. A est l'intersection de tous les sous-groupes fermés de E.

2) g étant un sous-groupe dense dans le groupe topologique E, ρ la relation de congruence à droite (mod. g), quelle est la structure topologique de E/ρ ?

3) Si les structures uniformes droite et gauche d'un groupe topologique E se confondent, il en est de même pour tout sous-groupe et tout groupe quotient. Inversement, si ces structures uniformes se confondent par un sous-groupe dense dans E, elles se confondent dans E.

4) Montrer que tout sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est aussi fermé.

5) Si la topologie induite par celle d'un groupe topologique régulier E dans un sous-groupe g est discrète, g est fermé.

---

§ 5. THÉORIE DE LA CONNEXION DES GROUPES TOPOLOGIQUES.

Proposition 1. Le composant C et le constituant K de l'élément unité e dans un groupe topologique E sont des sous-groupes invariants fermés de E. Le composant et le constituant d'un élément x sont respectivement $x \top C$, $x \top K$.

Soient C_x, K_x le composant et le constituant de x. Soient x, y, x',y' des points tels que $x' \in C_x$, $y' \in C_y$, $C_x \top y'$ et $x \top C_y$ sont deux ensembles connexes ayant en commun le point $x \top y'$; le second de ces ensembles contient $x \top y$, donc est contenu dans $C_{x \top y}$; d'où $C_x \top y' \subset C_{x \top y}$ et $x' \top y' \in C_{x \top y}$; ce qui prouve que la relation $x' \in C_x$ est compatible avec la composition dans G ; soient de même x, y, x',y' des points tels que $x' \in K_x$, $y' \in K_y$. U étant un ensemble ouvert et fermé, il en est de même de $U \top y'$; d'où on déduit que $K_x \top y'$ est contenu dans un constituant de E .

Il en est de même de $x \top K_y$, et, en raisonnant comme dans le cas précédent, on voit que la relation $x' \in K_x$ est compatible avec la composition dans E.

Il en résulte que $C = C_e$ et $K = K_e$ sont des sous-groupes invariants. On sait d'autre part que ces ensembles sont fermés. Les relations $x' \in C_x$, $x' \in K_x$ ne sont autres que les relations de congruence modulo C et modulo K .

V désignant un voisinage de l'unité, désignons par g_V le sous-groupe engendré par les éléments de V. On a $V \top g_V = g_V$, donc g_V est un sous-groupe ouvert. De plus, si $x \in \overline{g}_V$, on a $(x \top V^{-1}) \cap g_V \neq \emptyset$, d'où $x \in V \top g_V = g_V$: g_V est donc fermé. Désignons par L l'intersection de la famille des g_V, V parcourant les voisinages de e. L est un sous-groupe fermé, qui peut encore être défini comme l'intersection des sous-groupes à la fois ouverts et fermés de E. Or, si g est un sous-groupe ouvert et fermé, la même propriété appartient encore à $x \top g \top x^{-1}$, si $x \in E$; d'où on déduit que L est un sous-groupe invariant. Il est évident que $C \subset K \subset L$. Par suite :

<u>Proposition 2.</u> <u>Dans un groupe connexe, tout voisinage de l'unité constitue un système de générateurs.</u>

L'auteur ignore s'il existe des groupes topologiques pour lesquels $C \neq K$. Quoiqu'il en soit, on a la propriété suivante :

<u>Proposition 2.</u> <u>Dans un groupe localement compact</u> E, <u>on a</u> $C = K = L$.

E étant localement compact, il en est de même de E/C . (E/C possède une topologie de Hausdorff parce que C est fermé). De plus L/C est l'intersection des sous-espaces de E/C engendrés par les voisinages de l'unité dans E/C . De plus, dans E/C, toute partie connexe contient au plus 1 élément. Il suffit donc de démontrer le théorème pour un groupe topologique E dans lequel $C = \{e\}$. Supposons donc qu'il en soit ainsi.

E est un espace uniforme localement compact dans lequel le composant de tout point x est $\{x\}$. V désignant un voisinage compact de e dans E, soit V_1 un voisinage de e tel que $V_1 \top V_1 \subset V$. On sait que V_1 contient un voisinage ouvert et fermé, U de e. L'ensemble $V \cap \complement U$ étant fermé, il existe un voisinage W de e tel que $(U \top W) \cap (V \cap \complement U) = \emptyset$. En effet, dans le cas contraire, il existerait pour chaque W un élément $x_W \in (U \top W) \cap (V \cap \complement U)$; x_W étant considéré comme une application dans $V \cap \complement U$ du filtre des voisinages de e aurait au moins un point limite x_0 dans $V \cap \complement U$ qui est compact ; comme $x_W \in U \top W$, on aurait aussi $x_0 \in \overline{U} = U$, ce qui est impossible. On peut de plus supposer W choisi de telle manière que $W \subset U$, $W = W^{-1}$. (Si ces conditions n'étaient pas remplies, on remplacerait W par $W \cap W^{-1} \cap U$).

Démontrons par récurrence sur n que $W^n \subset U$; c'est vrai pour $n = 1$; si c'est vrai pour n, on a $W^{n+1} = W^n \top W \subset U \top W$; or $U \top W \subset U \top U \subset V_1 \top V_1 \subset V$, et $(U \top W) \cap (V \cap \complement U) = \emptyset$, d'où $U \top W = U$, et $W^{n+1} \subset U$. Puisque $W = W^{-1}$, il en résulte que le sous-groupe engendré par W est dans U, d'où $L \subset U \subset V$; ceci étant vrai quel que soit V, on a $L = \{e\}$, ce qui démontre la proposition.

<u>Exercices</u> :

1) E étant le groupe additif des rationnels p-adiques, montrer que le groupe L se réduit à $\{0\}$.

2) E étant un groupe topologique, on désigne par M l'intersection de tous les sous-groupes invariants g tels que la topologie de E/g soit discrète. Montrer que $M = L$. Remarquer, en tenant compte de l'exercice 1, que la topologie de E/M n'est pas nécessairement discrète.

29

3) Dans un groupe topologique E, on considère les familles $\mathcal{G}$ de sous-espaces de E possédant les propriétés suivantes : a) $E \in \mathcal{G}$ b) si $g \in \mathcal{G}$, le constituant de e dans le groupe g appartient à $\mathcal{G}$. On désigne par $\mathcal{G}_0$ l'intersection de toutes les familles $\mathcal{G}$. Montrer que le composant de l'unité dans E est l'intersection de tous les groupes de $\mathcal{G}_0$.

Supposons que le groupe E soit un groupe commutatif écrit additivement et ordonné, sa structure topologique se déduisant par le procédé du § 2 de sa structure de groupe ordonné. a étant un élément >0 de G, cherchons à quelle condition l'ensemble $)-a,a($ constitue un système de générateurs. S'il en est ainsi, soit x un élément de G : x pourra se mettre sous la forme $x_1+x_2+\ldots+x_n$, les x_i étant des éléments de $)-a,a($. On a donc $x < n\,a$.

<u>Définition 1</u>. <u>On dit que le groupe ordonné</u> E <u>est archimédien si</u>, a <u>étant un élément</u> >0 <u>de</u> E <u>et</u> x <u>un élément quelconque, il existe toujours un entier</u> n <u>tel que</u> $n\,a > x$.

Nous venons d'établir la

<u>Proposition 3</u>. <u>Si dans un groupe ordonné</u> E <u>chaque voisinage de</u> 0 <u>constitue un système de générateurs, le groupe</u> E <u>est archimédien</u>.

Examinons maintenant la réciproque. E étant un groupe archimédien, soit a un élément >0 de E. Si l'ensemble $)-a,a($ est $\neq \{0\}$, il contient au moins un élément $a' > 0$. x étant un élément quelconque de E, soit n le plus grand entier tel que $n\,a' \leqslant x$. On a $x = n\,a' + (x - n\,a')$, avec $0 \leqslant x - n\,a' < a'$, d'où $a' \in)-a,a($, $x - n\,a' \in)-a,a($, d'où on conclut que x appartient au groupe engendré par les éléments de $)-a,a($. Au contraire, si $)-a,a(= \{0\}$, le groupe engendré par les éléments de $)-a,a($ se réduit évidemment à $\{0\}$.

Dans ce cas, E est un groupe discret. Donc :

Proposition 4. Si un groupe E est archimédien, et s'il n'est pas discret, tout voisinage de 0 constitue un système de générateurs de E .

Le groupe additif $\mathbb{Q}$ de la droite rationnelle est évidemment archimédien, et n'est pas discret. Il est donc engendré par tout voisinage de 0.

----

§ 6. GROUPES COMPLETS.

Nous avons vu, au § 2, que, dans un groupe topologique E , on pouvait introduire deux structures uniformes, en général distinctes.

Proposition 1. Si le groupe topologique E est complet par rapport à l'une de ses structures uniformes, il l'est aussi par rapport à l'autre.

En effet, il résulte de la proposition 3, § 2 que les deux structures uniformes d'un groupe topologique sont isomorphes. Si l'une est complète, l'autre l'est aussi.

Définition 1. On appelle complet un groupe topologique dont l'une des structures uniformes est complète (il en est alors de même de l'autre).

On sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace uniforme E soit complet est que toute application dans E d'un filtre, convergente au sens de Cauchy, soit aussi convergente. Dans le cas d'un groupe topologique, on peut donner une nouvelle forme à la condition de convergence au sens de Cauchy. $\mathfrak{F}$ étant un filtre, soit x_φ une application de $\mathfrak{F}$ dans E ; $x_\varphi^{-1} \top x_{\varphi'}$ peut être considéré comme une application de $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ dans E (avec $(\varphi, \varphi') \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$). Or:

Proposition 2. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que l'application x_φ converge au sens de Cauchy dans la structure uniforme droite est que l'application $x_\varphi^{-1} \top x_{\varphi'}$ converge vers l'élément unité</u> e .

Supposons l'application x_φ convergente au sens de Cauchy. V étant un voisinage de e, l'ensemble des couples (x,y) tels que $y \in x \top V$ constitue un entourage. Il existera donc un ensemble $A \subset \mathfrak{F}$ tel que les conditions $\varphi \in A$, $\varphi' \in A$ entraîne $x_{\varphi'} \in x_\varphi \top V$, d'où $x_\varphi^{-1} \top x_{\varphi'} \in V$: l'application $x_\varphi^{-1} \top x_{\varphi'}$ converge vers e . Inversement si l'application $x_\varphi^{-1} \top x_{\varphi'}$ converge vers e, il existera un ensemble A du filtre $\mathfrak{F}$ tel que la condition $(\varphi, \varphi') \in A \times A$ entraîne $x_\varphi^{-1} \top x_{\varphi'} \in V$, $x_{\varphi'} \in x_\varphi \top V$, ce qui démontre la convergence au sens de Cauchy de l'application x_φ .

On aurait une proposition analogue pour la structure uniforme gauche.

Si nous considérons maintenant un groupe topologique E non complet, chacune des structures uniformes de E pourra être complétée. On obtiendra ainsi deux espaces uniformes complets $\bar{E}_g$, $\bar{E}_d$. Mais il ne sera en général pas possible de prolonger la structure de groupe de E par une structure de groupe topologique de l'espace uniforme $\bar{E}_g$ (ou de $\bar{E}_d$) .

Il y a cependant un cas important où il en est ainsi. C'est celui dans lequel les structures uniformes droite et gauche de E coïncident. Soit alors $\bar{E}$ l'espace obtenu en complétant E . On sait

32

que, dans le cas envisagé, la fonction $x \top y$ est uniformément continue sur $E \times E$. Elle peut donc se prolonger par une application, que nous désignerons encore par $x \top y$, de $\overline{E} \times \overline{E}$ sur $\overline{E}$. Nous avons donc une loi de composition dans $\overline{E}$. Nous allons montrer que c'est une loi de composition de groupe. En effet 1) elle est associative, car les fonctions $x \top (y \top z)$ et $(x \top y) \top z$, continues sur $\overline{E} \times \overline{E} \times \overline{E}$, et égales entre elles sur $E \times E \times E$, qui est dense dans $\overline{E} \times \overline{E} \times \overline{E}$, sont partout égales entre elles 2) elle comporte un élément-unité, qui est celui de E ; car les fonctions continues x, $x \top e$, $e \top x$ égales sur E sont aussi égales sur $\overline{E}$ 3) tout élément possède un inverse ; car, la fonction x^{-1}, uniformément continue sur E, peut se prolonger par une fonction x^{-1} continue sur $\overline{E}$; et les fonctions continues e, $x \top x^{-1}$, $x^{-1} \top x$, égales entre elles pour $x \in E$ sont aussi égales entre elles pour $x \in \overline{E}$.

Nous avons donc dans $\overline{E}$ une structure uniforme (et par suite a fortiori une structure topologique) et une structure de groupe. Les fonctions $x \top y$, x^{-1} étant continues, il en est de même de $x \top y^{-1}$, et par suite l'axiome A est vérifié dans $\overline{E}$; désignons par $\overline{E}^*$ la structure de groupe topologique ainsi obtenue. Soit $\mathcal{V}$ le système des voisinages de l'unité dans E, et soit $\overline{\mathcal{V}}$ l'ensemble des adhérences dans $\overline{E}$ des ensembles de $\mathcal{V}$. $\overline{\mathcal{V}}$ constitue un système fondamental de voisinages dans $\overline{E}^*$. V étant dans $\mathcal{V}$, soit $\mathcal{U}_V$ l'ensemble des couples $(x,y) \in E \times E$ tels que $y \in x \top V$. La famille des ensembles $\mathcal{U}_V$ constitue un système fondamental d'entourages de la structure uniforme de E. Soit $\overline{\mathcal{U}}_V$ l'adhérence de $\mathcal{U}_V$ dans $\overline{E} \times \overline{E}$: la famille des $\overline{\mathcal{U}}_V$ constitue un système fondamental d'entourages de $\overline{E}$. Or, $\overline{\mathcal{U}}_V$ est l'ensemble des couples $(\overline{x},\overline{y}) \in \overline{E} \times \overline{E}$

tels que $\bar{y} \in \bar{x} \top \bar{V}$. Donc la famille des $\bar{\mathfrak{U}}_V$ constitue un système fondamental d'entourages dans la structure uniforme droite de $\bar{E}^*$, ce qui montre que cette structure uniforme droite se confond avec celle de $\bar{E}$, et que par suite le groupe topologique $\bar{E}^*$ est complet. On verrait de même que la structure uniforme gauche de $\bar{E}^*$ se confond avec celle de $\bar{E}$. Donc :

<u>Proposition 3</u>. <u>Un groupe topologique</u> E <u>dans lequel les structures uniformes droite et gauche coïncident peut être considéré</u> (à <u>une isomorphie près de structure de groupe topologique) comme un sous-groupe dense d'un groupe topologique complet, dans lequel les structures uniformes droite et gauche sont aussi confondues</u>.

De plus, la détermination de ce groupe complet est unique, à des isomorphies près :

<u>Proposition 4</u>. <u>Soient</u> $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ <u>des groupes topologiques complets</u>, E_1 <u>et</u> E_2 <u>des sous-groupes denses de</u> $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$. <u>S'il existe une isomorphie</u> φ <u>de structure de groupe topologique de</u> E_1 <u>avec</u> E_2, φ <u>peut se prolonger par une isomorphie de groupe topologique de</u> $\bar{E}_1$ <u>avec</u> $\bar{E}_2$.

En effet, φ est une isomorphie de structure uniforme entre la structure uniforme droite de E_1 et celle de E_2. Il en résulte (ch. II,.....) que φ peut se prolonger par une isomorphie $\bar{\varphi}$ de la structure uniforme droite de $\bar{E}_1$ avec celle de $\bar{E}_2$. $\top_1$, $\top_2$ désignant les lois de composition dans $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$, les fonctions $\bar{\varphi}(x \top_1 y)$, $\bar{\varphi}(x) \top_2 \bar{\varphi}(y)$ sont égales si $(x,y) \in E_1 \times E_1$ et sont continues sur $\bar{E}_1 \times \bar{E}_1$. Elles sont donc égales pour x,y quelconques dans $\bar{E}_1$, ce qui montre que $\bar{\varphi}$ est aussi une isomorphie de groupe.

On notera que la proposition 3 s'applique notamment à tout groupe commutatif.

<u>Exercice</u>. Montrer que la conclusion de la proposition 3 s'applique encore pour un groupe topologique E qui satisfait à la condition suivante : il existe un voisinage U de e tel que, pour tout voisinage V de e, il en existe un autre W tel que la condition $x \in U$ entraîne $x\, T\, W\, T\, x^{-1} \subset V$. Appliquer au groupe étudié dans l'exercice 3 , § 3 .

<u>Complétion des groupes ordonnés</u>.

Supposons que la structure topologique d'un groupe commutatif E (écrit additivement) ait été construite par le procédé du § 2 à partir d'une relation d'ordre "$x < y$" dans E qui fasse de E un groupe ordonné. En supposant $E \subset \overline{E}$, nous allons montrer que cette relation d'ordre peut se prolonger "par continuité" dans $\overline{E}$.

Désignons en effet par F l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de E , par G celui des éléments $\leqslant 0$, par $\overline{F}$ et $\overline{G}$ les adhérences de F , G dans E . On a $-F = G$, $-G = F$, d'où, en vertu de la continuité de la fonction $-x$, $-\overline{F} \subset \overline{G}$, $-\overline{G} \subset \overline{F}$.

0 est un élément commun à $\overline{F}$, $\overline{G}$. C'est le seul. Soit en effet x un élément $\neq 0$ de $\overline{F}$; il existe donc un élément $a > 0$ de E tel que $x \in F \cap \complement S_a = \complement (G \cup S_a)$ (où S_a désigne comme au § 2 l'ensemble des x de E tels que $-a < x < a$). Donc tout voisinage de x contient des points de E qui ne sont pas dans $G \cup S_a = G + S_a$, ce qui montre que $x \notin \overline{G}$.

La somme de deux éléments de $\overline{F}$ est dans $\overline{F}$; en effet la fonction continue $x + y$ applique $F \times F$ dans F , donc aussi $\overline{F} \times \overline{F}$ dans $\overline{F}$. On conclut de là que :

1°) Les conditions $y-x \in \overline{F}$, $x-y \in \overline{F}$ entraînent $y-x \in \overline{F} \cap \overline{G}$, et $y = x$

2°) Les conditions $y-x \in \overline{F}$, $z-y \in \overline{F}$ entraînent $z-x = (z-y)+(y-x) \in \overline{F}$

3°) La condition $y-x \notin \bar{F}$ entraîne $y-x \in \bar{G}$, $x-y = -(y-x) \in \bar{F}$. donc que la relation "$y-x \in \bar{F}$" est une relation d'ordre dans $\bar{E}$, et que $\bar{E}$ est totalement ordonné par cette relation. On a $\bar{F} \cap E = F$ puisque $\bar{F} \cap G = \{0\}$. Il en résulte que, si x et y sont, dans E, la relation "$y-x \in \bar{F}$ " équivaut à "$x \leqslant y$" . Notre relation d(ordre prolonge donc celle que nous nous étions donnée dans E . Il n'y a donc pas d'inconvénient à la noter toujours "$x \leqslant y$" . Les éléments $\geqslant 0$ de $\bar{E}$ sont ceux de $\bar{F}$, de sorte que la condition 0.2 du § 2 est vérifiée.

De plus la topologie $\mathcal{T}$ de $\bar{E}$ est identique à la topologie $\mathcal{T}'$ que l'on peut déduire par le procédé du § 2 de la relation d'ordre dans $\bar{E}$. Un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{T}$ est formé des $\bar{S}_a$, a parcourant les éléments >0 de E . Si on désigne par $\bar{a}$ un élément >0 de $\bar{E}$ et par $S'_{\bar{a}}$ l'ensemble des x de $\bar{E}$ tels que $-\bar{a} < x < \bar{a}$, un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{T}'$ est formé des $S'_{\bar{a}}$.

Or $S'_{\bar{a}}$ est l'intersection des ensembles $\bar{a}-(\bar{F} \cup \complement\{0\})$, $-\bar{a}+(\bar{F} \cup \complement\{0\})$ qui sont ouverts dans $\mathcal{T}$, car il en est ainsi de $\bar{F} \cup \complement\{0\} = \complement\bar{G}$. Donc $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$. L'ensemble S'_a étant ouvert dans $\mathcal{T}'$ l'est aussi dans $\mathcal{T}$; on a donc $S'_a \subset \overline{S'_a \cap E} = \bar{S}_a$, ce qui prouve que $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$.

Si le groupe E est archimédien, il en est de même de $\bar{E}$. En effet, si E est discret, on a $\bar{E} = E$. Sinon, chaque voisinage V de 0 dans $\bar{E}$ contient un voisinage de 0 dans E, donc (§ 2, prop.) un système de générateurs de E ; le groupe engendré par V est un sous-groupe ouvert de $\bar{E}$ contenant E , c'est-à-dire $\bar{E}$ lui-même. On en déduit que $\bar{E}$ est archimédien (§ 2, prop.) .

<u>Proposition 5</u>. <u>E étant un groupe archimédien complet</u> $\neq \{0\}$, A <u>une partie de</u> E , <u>pour que</u> A <u>soit relativement compacte, il faut et suffit que</u> A <u>soit bornée</u>.

1) Montrons que S_a , et par suite toute partie de S_a , est relativement compact. Il suffit de montrer que, b étant un élément > 0 quelconque de E , S_a peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles de la forme $x + S_b$. Or, soit n un entier tel que $nb > a$. x étant un élément de S_a , m le plus grand entier tel que $mb \leqslant x$, on a $-n < m < n$, et $x - mb \in S_b$, d'où

$$S_a \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} (\nu b + S_b)$$

2) Soit A une partie relativement compacte de E . Soit a un élément > 0 de E. Il existe un nombre fini d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de E tels que $A \subset \bigcup_{\nu=1}^{p} (x_\nu + S_a)$. Soit y_0 le plus grand des éléments x_ν , $-x_\nu$, et soit m un entier tel que $ma > y_0$. On a $-ma < x_\nu < ma$ $(1 \leqslant \nu \leqslant p)$, de sorte que $A \subset S_{(m+1)a}$.

Etat 1

CHAPITRE IV. - LES NOMBRES RÉELS I.

§ 1. DÉFINITION. INTERVALLES.

Nous désignerons par Q le groupe additif de la droite rationnelle Nous dirons qu'un groupe topologique additif a la structure -R s'il contient un sous-groupe dense isomorphe à Q (au sens d'une isomorphie de groupes topologiques), et s'il est complet. Il résulte du § 5, chap. III qu'il existe un groupe topologique ayant la structure -R, et qu'il n'en existe qu'un, à une isomorphie près.

Nous conviendrons une fois pour toutes que dans chacune des théories que nous développerons à partir de maintenant figurera implicitement un ensemble fondamental qui sera désigné par R ayant la structure-R , et que l'ensemble fondamental des nombres rationnels de la théorie en sera un sous-groupe dense.

Définition 1. <u>Les éléments de</u> R <u>seront appelés les nombres réels de la théorie</u>.

Donc, les nombres rationnels (et, a fortiori, les nombres entiers) seront des nombres réels particuliers.

Rappelons d'autre part que nous avons défini la structure topologique de Q à partir de sa structure de groupe ordonné. Il résulte alors de ce qui a été dit au chap. III, § 6 qu'il existe dans R une structure de groupe ordonné d'où l'on pourrait déduire la structure topologique de R. La relation d'ordre dans R sera notée, comme dans Q, par le signe " $\leqslant$ " .

Théorème 1. <u>La famille des parties relativement compactes de</u> R <u>est identique à celle des parties bornées</u>.

C'est un cas particulier de la prop. 5 §6, chap. III. On en déduit la

Scholie. Le groupe R est localement compact, mais non compact.

a et b étant des nombres réels tels que $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ est relativement compact et fermé, donc compact.

D'autre part, on a $a = \lim_{n \to \infty} (a + 1/n)$; si n_0 est un entier tel que $1/n_0 < b-a$, la condition $n > n_0$ entraîne $a + 1/n \in)a,b($, de sorte que a appartient à l'adhérence de $)a,b($. On voit de même qu'il en est de même de b. On en conclut que, si $a < b$, $[a,b]$ est l'adhérence commune à tous les intervalles d'origine a et d'extrêmité b , et que $)a,b($ est l'intérieur de tous ces intervalles.

On peut en déduire la

Proposition 1. Un nombre réel a est limite d'une suite r_n strictement croissante de nombres rationnels.

Nous allons déterminer r_n par récurrence sur n. r_0 sera un nombre rationnel strictement inférieur à a. r_n étant déjà déterminé et strictement inférieur à a, l'ensemble $)r_n, a(\cap)a-\frac{1}{n}($ est ouvert, et n'est pas vide ; on peut donc y choisir un nombre rationnel qui sera r_{n+1}. On a évidemment $r_n < r_{n+1}$ et $\lim_{n \to +\infty} r_n = a$.

Les intervalles R, $)\leftarrow, a($, $)b, \rightarrow($, $)a,b($ sont ouverts ; par contre, les intervalles $[a,b]$, $[a, \rightarrow($, $)\leftarrow, a]$, $)a,b]$, $[a,b($ ne le sont pas. Les trois premiers sont des ensembles fermés dans R ; le premier seul est compact. Les deux derniers ne sont ni ouverts ni fermés : ils sont dits semi-fermés.

Le groupe Q étant archimédien, il en est de même de R (cf. prop. 4, §5, chap. III). De plus, R n'est évidemment pas discret.

Donc chaque voisinage de 0 dans R constitue un système de générateurs. R étant localement compact est donc connexe (cf. prop. 2, § 5, chap. III).

Théorème 2. *La famille des parties connexes de* R *est identique à celle des intervalles*.

1) Soit A une partie connexe de R. Il faut montrer que les conditions $a \in A$, $b \in A$, $a < x < b$ entraînent $x \in A$. Or, l'ensemble $R \cap \complement \{x\}$ est la réunion des deux ensembles ouverts non vides $)\leftarrow, x($ et $)x, \rightarrow($, dont chacun rencontre A. A n'est donc pas contenu dans $R \cap \complement \{x\}$, ce qui prouve que $x \in A$.

2) a et b étant des nombres réels tels que $a < b$, montrons d'abord que l'intervalle $[a,b]$ est connexe. En effet, la fonction $f(x)$ définie comme étant égale à a si $x < a$, à x si $a \leqslant x \leqslant b$, à b si $x > b$ donne évidemment une application continue de R sur $[a,b]$. Soit maintenant I un intervalle quelconque. Si I n'était pas connexe, on pourrait y prendre deux nombres a, b tels que $a < b$ appartenant à des composants différents. L'intervalle $[a,b]$ serait connexe, contenu dans I et rencontrerait des composants différents de I : c'est impossible.

Corollaire 1. *Une image continue dans un espace topologique d'un intervalle de* R *est un ensemble connexe. Une image continue dans* R *d'un ensemble connexe est un intervalle*.

Corollaire 2. *Si* a *et* b *sont des valeurs prises dans un ensemble connexe* E *d'un espace topologique par une fonction* f *continue sur* E *à valeurs dans* R, *toute valeur* c *intermédiaire entre* a *et* b (*c'est-à-dire telle que* $a \leqslant c \leqslant b$ *ou* $b \leqslant c \leqslant a$) *est aussi prise par* f *dans* E.

Démontrons maintenant le :

Théorème 3. Une partie non vide bornée supérieurement possède une petite borne supérieure.

Soit A une partie non vide bornée supérieurement de R, et soit B l'ensemble des bornes supérieures de A. Soit B' l'ensemble des nombres inférieurs à tous ceux de B. B et B' sont des ensembles fermés non vides. Un nombre réel x, s'il n'est pas dans B, est inférieur à un nombre de A au moins, donc à tous les nombres de B : il est dans B'. On a donc $R = B \cup B'$. On en conclut que $B \cap B'$ contient au moins un élément a : a est évidemment minimal dans B, ce qui démontre le théorème.

On voit de même que toute partie bornée inférieurement possède une plus grande borne inférieure.

On conclut de là que tout intervalle borné inférieurement possède une origine, que tout intervalle borné supérieurement possède une extrêmité, donc que tout intervalle est de l'une des formes R , $)\leftarrow,a($, $)\leftarrow,a]$, $)a,\rightarrow($, $[a,\rightarrow($, $)a,b($, $[a,b]$, $)a,b]$, $[a,b($.

Définition 2. On appelle longueur de l'intervalle borné non vide d'origine a et d'extrêmité b le nombre b-a. On appelle longueur de l'intervalle vide le nombre 0 .

La longueur d'un intervalle borné est donc toujours un nombre $\geqslant 0$. Elle n'est $\neq 0$ que si l'intervalle contient des points intérieurs.

Définition 3. On dit que deux intervalles sont empiétants quand ils ont des points intérieurs communs.

Proposition 3. <u>Si les intervalles d'une famille finie</u> Φ <u>n'empiètent pas les uns sur les autres et sont tous contenus dans un intervalle</u> I, <u>la somme de leurs longueurs est au plus égale à celle de</u> I. <u>Elle lui est égale si</u> I <u>est la réunion des intervalles de</u> Φ.

On peut évidemment supposer $\emptyset \notin \emptyset$. Numérotons les intervalles de $\emptyset$ au moyen des indices $1,2,\dots,h$ de telle manière que, a_i désignant l'origine de l'intervalle d'indice i, on ait $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_h$. Soit b_i l'extrêmité de l'intervalle d'indice i ; les intervalles n'empiètent pas, on a $b_i \leqslant a_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant h-1)$. Soient a_o et b_o les extrêmités de I : on a $b_o - a_o = (b_o - b_h) + \sum_{i=1}^{h-1} (a_{i+1} - b_i) + (a_1 - a_o)$, ce qui démontre la première partie de la proposition. Si de plus I est la réunion des intervalles de $\emptyset$, on a nécessairement $b_o = b_h$, $a_o = a_1$, $a_{i+1} = b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h-1)$, ce qui démontre la seconde partie.

Proposition 4. <u>Une famille</u> ψ <u>d'intervalles non empiétants de longueurs strictement positives est dénombrable</u>.

Désignons par ψ_n la famille des intervalles de dont les longueurs sont $\geqslant 1/n$: on a $\psi = \bigcup_n \psi_n$, de sorte qu'il suffit de montrer que ψ_n est dénombrable. Soit $\psi_{n,p}$ la famille des intervalles de ψ_n qui rencontrent l'intervalle $[-p,p]$, p étant un entier > 0. Les intervalles de $\psi_{n,p}$ sont tous contenus dans $[-(p+1),(p+1)]$. Il résulte de la proposition 3 qu'une partie finie de $\psi_{n,p}$ ne peut contenir plus de $2(p+1)n$ intervalles ; donc $\psi_{n,p}$ est finie, et $\psi_n = \bigcup_{p=1}^{\infty} \psi_{n,p}$ est dénombrable.

Proposition 5. <u>Tout ensemble ouvert de R est la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts non empiétants</u>.

En effet, le composant C_x dans U d'un point $x \in U$ est un intervalle. Le point x appartenant à un intervalle ouvert contenu dans U , C_x est de longueur strictement positive. Pour la même raison, on voit qu'un point frontière de C_x est point frontière de U et par suite n'appartient pas à U : C_x est un intervalle ouvert. Les divers composants de U étant deux à deux sans élément commun, la famille de ces composants est dénombrable, ce qui démontre la proposition.

<u>La valeur absolue</u>.

Comme pour les nombres rationnels, nous définirons la valeur absolue $|x|$ d'un nombre réel x comme étant égale à x si x est positif, à -x si x est strictement négatif. La fonction $|x|$ est continue ; en effet, ε étant un nombre strictement positif, la condition $x' \in x +]-\varepsilon, \varepsilon[$ entraîne $|x'-x| < \varepsilon$, d'où $|x'-x| \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. La fonction $|x| + |y| - |x+y|$ est donc une fonction continue du couple (x,y) ; cette fonction est partout positive dans $Q \times Q$, donc aussi dans $R \times R$. D'où l'inégalité, dite <u>triangulaire</u>

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| .$$

L'intervalle $]-a,a[$ est l'ensemble des nombres x tels que $|x| < a$. On en conclut que l'ensemble des couples (x,y) tels que $|y-x| < a$ constitue un entourage V_a de la structure uniforme de R, et que V_a décrit un système fondamental d'entourages quand a décrit un ensemble de nombres strictement positifs dont 0 soit point adhérent.

$\mathfrak{F}$ étant un filtre, f une application de $\mathfrak{F}$ dans R, pour que cette application converge vers un nombre a , il faut et suffit que l'on ait $\lim\limits_{x \in \mathfrak{F}} |f(x)-a| = 0$.

§ 3. LA MULTIPLICATION DES NOMBRES RÉELS.

Nous nous proposons de définir entre nombres réels une multiplication, en prolongeant par continuité la multiplication déjà connue pour les nombres rationnels.

Montrons d'abord que la fonction rs , définie sur $Q \times Q$, est uniformément continue sur $Q_n \times Q_n$, où $Q_n = Q \cap [-n,n]$. Soit en effet a un rationnel > 0 . Il existe un rationnel > 0 b tel que $2n.b < a$. L'ensemble des couples $((r,s),(r',s'))$ d'éléments de $Q_n \times Q_n$ tels que $|r'-r| < b$, $|s'-s| < b$ constitue un entourage $\mathcal{U}$ de la structure uniforme de $Q_n \times Q_n$. Or, si $((r,s),(r',s')) \in \mathcal{U}$, on a $|r's'-rs| \leqslant |r'(s'-s)| + |(r'-r)s| < 2nb < a$, ce qui démontre notre assertion.

Si maintenant (x,y) est un élément de $R \times R$, il existe un entier $n > 0$ tel que $(x,y) \in)-n,n(\times)-n,n($. Dans ces conditions $\overline{Q}_n \times \overline{Q}_n$ constitue un voisinage de (x,y). En vertu de l'uniforme continuité de rs dans $Q_n \times Q_n$, on en conclut que la fonction rs tend vers une limite quand le couple (r,s) tend vers (x,y). C'est cette limite que nous désignerons par xy, et que nous appellerons le produit de y par x. En raison de la manière dont elle a été obtenue, la fonction xy est continue sur $R \times R$.

Les fonctions $x(y+z) - (xy+xz)$, $x(yz)-(xy)z$, $xy-yx$, $1.x - x$ sont des fonctions continues de (x,y,z), nulles sur $Q \times Q \times Q$, qui est dense sur $R \times R \times R$: elles sont identiquement nulles. Ce qui signifie que la multiplication que nous venons de définir, jointe à l'addition que nous connaissons déjà, confère à R une structure d'anneau commutatif, dans lequel 1 est élément unité.

Nous allons voir que cet anneau est un corps. En effet, x étant un nombre réel $\neq 0$, xR est un sous-groupe de R, image continue de R, donc connexe. xR contient $x = x.1$ et $-x = x.(-1)$. Il contient donc l'intervalle ouvert d'extrêmités $-x,x$, qui est un voisinage de 0 (car $x \neq 0$), et dont les éléments forment un système de générateurs de R. On a donc $xR = R$. En particulier $1 \in xR$. Le nombre x possède donc un inverse x^{-1}, ce qui prouve que R est un corps.

L'ensemble P des nombres positifs est l'adhérence de $P \cap Q$. Or, la fonction xy applique $(P \cap Q) \times (P \cap Q)$ dans P, donc aussi $P \times P$ dans P : le produit de deux nombres positifs est positif. La formule $x'y'-xy = x'(y'-y) + y(x'-x)$ montre que, si x,y,x',y' sont des nombres positifs, les conditions $x \leq x'$, $y \leq y'$ entraînent $xy \leq x'y'$. De plus, sous les mêmes conditions, l'égalité n'est possible que dans les cas suivants : 1) si $x = x'$, $y = y'$; 2) si $x = x' = 0$; 3) si $y = y' = 0$.

On voit de même que le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif est négatif, que le produit de deux nombres négatifs est ~~négatif~~. Par suite, si x,y,x',y' sont des nombres négatifs, les inégalités $x' \leq x$, $y' \leq y$ entraînent $xy \leq x'y'$.

On déduit facilement de là l'égalité $|xy| = |x| . |y|$.

Désignons maintenant par P^* l'ensemble des nombres strictement positifs. Si $x \in P^*$, on a $x^{-1}x \in P^*$, d'où $x^{-1} \in P^*$. Si y est un autre nombre de P^*, la condition $x < y$ entraîne $x^{-1} > y^{-1}$. En effet, si on avait $x^{-1} \leq y^{-1}$, on aurait aussi $1 = xx^{-1} < yy^{-1} = 1$. On en conclut que, si a,b sont des nombres de P^* tels que $a < b$, l'image I^{-1} par la fonction x^{-1} de l'intervalle $I =)a,b($ est contenue dans l'intervalle $J =)b^{-1},a^{-1}($.

On a aussi $J^{-1} \subset I$, d'où $I^{-1} = J$: l'application x^{-1} change les intervalles ouverts de P en intervalles ouverts. Il en est de même de son application réciproque, qui lui est identique. On en conclut que l'application x^{-1} est une homéomorphie de P.

L'ensemble P^* est un groupe multiplicatif. En vertu de la continuité de xy et de x^{-1}, la structure topologique induite par R dans P^* confère à P^* une structure de groupe topologique. Nous verrons plus tard que ce groupe est isomorphe à R .

On voit de même que la fonction x^{-1} est continue sur l'ensemble N^* des nombres strictement négatifs, donc aussi sur l'ensemble $R^* = N^* \cup P^*$ des nombres $\neq 0$, dans lequel P^* et N^* sont relativement fermés. Donc le groupe R^* , avec la topologie induite par R, est un groupe topologique qui possède deux composants, à savoir P^* et N^* .

Applications. Il résulte tout de suite de ce qu'on vient de dire que :

Proposition 1. Si f et g sont des applications continues dans R d'un espace topologique E , il en est encore de même des applications $f+g$, $f-g$, fg. Si la fonction g ne prend pas la valeur 0 , f/g est une application continue.

Corollaire. Soient f et g des applications dans R d'une partie A d'un espace topologique E . p étant un point adhérent à A , si $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers des limites a,b quand x tend vers p en restant dans A , on a aussi

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} \left[f(x) + g(x)\right] = a+b \qquad \lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} \left[f(x) - g(x)\right] = a-b$$

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} \left[f(x)\, g(x)\right] = ab$$

et, si $b \neq 0$,
$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

Remarque. En ce qui concerne cette dernière conclusion, il faut observer que la fonction f/g n'est pas nécessairement définie sur A tout entier, car g peut s'annuler sur A . Cependant, si $b \neq 0$, il existe un voisinage de p dans A sur lequel g ne s'annulle pas, et sur lequel par suite f/g est défini.

Il résulte de la proposition 1 qu'il existe deux lois de composition, l'addition et la multiplication, entre les fonctions définies sur un espace topologique E qui prennent leurs valeurs dans R et qui sont continues : cet ensemble constitue un sous-anneau de l'ensemble des fonctions définies sur E à valeurs dans R . Si $E = R$, ce sous-anneau contient en particulier la fonction $f(x) = x$, donc aussi toutes les fonctions qui peuvent s'exprimer comme polynomes en x à coefficients réels. Donc : <u>les polynomes en</u> x <u>à coefficients réels sont des fonctions continues de</u> x .

<u>Les fonctions</u> x^+, x^-.

Nous poserons $x^+ = (x+|x|)/2$ et $x^- = (|x| - x)/2$. Le nombre x^+ est égal à x si x est positif, à 0 si x est négatif. Le nombre x^- est égal à 0 si x est positif, à $-x$ si x est négatif. Les fonctions x^+ et x^- sont continues et ne prennent que des valeurs positives. On a $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$.

Exercice. Montrer que la fonction xy n'est pas uniformément continue sur R^*, muni de la structure uniforme induite par celle de R. En conclure que l'espace topologique R^* est susceptible de deux structures uniformes différentes, l'une induite par R, l'autre définie par le groupe topologique multiplicatif R^* . Montrer que ces deux structures uniformes se confondent sur toute partie bornée de R^* dont l'adhérence ne contient pas 0. Montrer que la fonction x^{-1} est uniformément continue dans la structure uniforme induite par R sur une partie bornée ou non dont l'adhérence ne contient pas 0 .

§ 4. L'ESPACE R^n

Définition. On appelle espace numérique à n dimensions et on désigne par R^n le groupe topologique $R \times R \times \ldots \times R$

On appelle intervalle dans R^n un ensemble qui est le produit de n intervalles de R .

Un tel ensemble n'est ouvert que s'il est le produit de n intervalles ouverts. Dans ce cas, on l'appelle intervalle ouvert de R^n .

Une partie A de R^n est dite bornée si ces projections sur les facteurs égaux à R du produit R^n sont des ensembles bornés de R . En tenant compte du , on voit que le th. 1 du § 1 subsiste dans R^n :

La famille des parties bornées de R^n est identique à la famille des parties qui y sont relativement compactes.

On en déduit que l'espace R^n est localement compact.

Parmi les applications continues dans R de R^n figurent notamment les n projections $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Comme d'autre part ces applications continues forment un anneau, on en déduit que tout polynome en les variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$, considéré comme fonction du point $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est une fonction continue.

R étant un corps, on en déduit pour l'ensemble $R \times R \times \ldots \times R$ une structure d'espace vectoriel de dimension n par rapport à R (Algèbre,...). La structure d'espace vectoriel et celle d'espace topologique de R^n, réunies, constituent ce qu'on appelle une structure d'espace affine à n dimensions.

Une fonction linéaire du point $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ s'exprime comme polynome du premier degré $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à coefficients dans R. Elle est donc une fonction continue de x. On en conclut qu'une application $x' = f(x)$ de R^n dans lui-même qui est une automorphie de la structure d'espace vectoriel de R^n est aussi une homéomorphie de R^n : c'est donc une automorphie de la structure d'espace affine de R^n. En particulier, si on prend une base quelconque d'espace vectoriel de R^n par rapport à R, les coordonnées d'un élément x, exprimées au moyen de cette base, sont des fonctions continues de x, et x est fonction continue de l'ensemble de ces coordonnées.

Nous nous proposons maintenant d'étudier les sous-groupes fermés G de R^n.

Définition 2. <u>On appelle rang d'un sous-groupe</u> G <u>de</u> R^n <u>le plus grand entier</u> r <u>tel qu'il existe</u> r <u>éléments linéairement indépendants dans</u> G.

G étant un sous-groupe de R^n, soit g l'ensemble des éléments x tels que $Rx \subset g$. g est évidemment un sous-groupe de G, car $R(x+y) \subset Rx + Ry$ et $R(-x) = Rx$. C'est de plus un sous-espace vectoriel de R^n, car si λ est un nombre réel, on a $R(\lambda x) \subset Rx$, donc, si $x \in g$, $\lambda x \in g$. m étant la dimension de g, on sait qu'on peut représenter R^n comme somme directe de g et d'un sous-espace vectoriel H de dimension $n-m$. Soit h le groupe $H \cap G$; si un élément x de G se met sous la forme $y + z$, avec $y \in g$, $z \in H$, on a $z = x - y \in h$, de sorte que G est somme directe de g et de h.

Si maintenant G est fermé, il en est de même de h. Dans ces conditions, nous allons montrer que 0 <u>est un élément isolé de</u> h. Désignons en effet par Q l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $|x_i| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$: Q est un voisinage compact de 0.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que notre assertion soit fausse. Dans ces conditions, dans chaque voisinage V de 0 contenu dans Q existe un élément $x_V \neq 0$ de h. Considérons l'ensemble des voisinages V de 0 contenus dans Q comme l'ensemble des éléments d'un filtre, obtenu au moyen de la relation d'ordre par inclusion qui existe entre les V (cf. chap. 1, §). Soit $\mathfrak{F}$ ce filtre. Soit d'autre part pour chaque $V \in \mathfrak{F}$, n_V le plus grand entier tel que $n_V x_V \in Q$ (on a $n_V \geqslant 1$). La correspondance $V \longrightarrow n_V x_V$ est une application de $\mathfrak{F}$ dans l'ensemble compact Q : il existe donc un filtre $\mathfrak{F}_1$ plus fin que $\mathfrak{F}$ tel que la même correspondance définisse une application convergente de $\mathfrak{F}_1$. Posons $y = \lim\limits_{V \in \mathfrak{F}_1} n_V x_V$. On a aussi $0 = \lim\limits_{V \in \mathfrak{F}_1} x_V$, d'où $y = \lim\limits_{V \in \mathfrak{F}_1} (n_V + 1) x_V$ et $(n_V + 1) x_V \notin Q$. Donc y appartient à la frontière de Q : on a $y \neq 0$. λ étant un nombre réel quelconque, désignons par p_V le plus grand entier tel que $p_V / n_V \leqslant \lambda$: on a $0 \leqslant \lambda - p_V/n_V < 1/n_V$. D'autre part, on a $\lim\limits_{V \in \mathfrak{F}_1} 1/n_V = 0$: en effet, pour tout entier N il existe un voisinage W de 0 tel que $\overbrace{W + W + \ldots + W}^{N+1 \text{ fois}} \subset Q$; si $V \subset W$, on a $n_V > N$. On a donc $\lambda = \lim\limits_{V \in \mathfrak{F}_1} p_V/n_V$, et $\lambda y = \lim\limits_{V \in \mathfrak{F}_1} p_V/n_V . n_V x_V = \lim\limits_{V \in \mathfrak{F}_1} p_V x_V$. Le groupe h étant fermé, on en déduit $\lambda y \in h$, d'où $y \in g$, ce qui nous conduit à une contradiction.

On en déduit qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'éléments de h dans une partie compacte A de R^n. En effet, du fait que 0 est isolé, on déduit tout de suite que chaque élément de h est isolé, donc que la topologie induite par A sur $A \cap h$ est discrète et compacte.

Nous allons maintenant montrer qu'un sous-groupe h de R^n de rangs $s > 0$ qui possède la propriété que nous venons d'indiquer peut être engendré par un système de s éléments. Nous procéderons par récurrence sur s .

1) Pour $s = 1$. Soit a un élément $\neq 0$ de h. Les nombres λ tels que $\lambda a \in h$ forment un sous-groupe Λ de R . Λ ne contien qu'un nombre fini de nombres de l'intervalle compact $[-1,1]$: soit λ_o le plus petit de ceux qui sont strictement positifs. λ étant un nombre quelconque de Λ , soit n le plus grand entier tel que $n\lambda_o \leqslant \lambda$; on a $0 \leqslant \lambda - n\lambda_o < \lambda_o$, et $\lambda - n\lambda_o \in \Lambda$ d'où $\lambda = n\lambda_o$, ce qui signifie que λ_o est un générateur de Λ , donc que $\lambda_o a$ est un générateur de h ;

2) Supposons le théorème démontré pour les groupes de rang s-1. h étant de rang s, choisissons-y s éléments $a_1, a_2, \ldots, a_s$ linéairement indépendants. Soit h' le sous-groupe de h composé des éléments qui appartiennent au sous-~~grou~~ espace vectoriel engendré par $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$. Un élément x de h peut se mettre sous la forme $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i(x) a_i$, et l'ensemble $\lambda_s(h)$ est un sous-groupe de R. Je dis que ce sous-groupe ne contient qu'un nombre fini d'éléments dans l'intervalle $[-1,1]$. En effet, si $\mu \in \lambda_s(h)$, il existe un $x \in h$ tel que $x = \sum_1^{s-1} \lambda_i(x) a_i + \mu a_s$. Si n_i est le plus grand entier qui soit $\leqslant \lambda_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant s-1)$, on a aussi $\sum_{i=1}^{s-1} (\lambda_i(x) - n_i) a_i + \mu a_s \in h$, de sorte qu'à chaque nombre μ de $\lambda(h)$ contenu dans l'intervalle $[-1,1]$, on peut faire correspondre bi-univoquement un élément de h contenu dans l'ensemble A des éléments $x = \sum_{i=1}^{s} x_i a_i$ tels que $|x_i| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Or, A est compact, et h ne contient qu'un nombre fini d'éléments dans A . On en conclut que $\lambda_s(h)$ ne contient qu'un

nombre fini d'éléments dans $[-1,1]$ et que par suite $\lambda_s(h)$ possède un générateur μ_0. Si e_s est un élément de h tel que $\lambda_s(e_s) = \mu_0$, et si x est un élément quelconque de h, il existe un entier n tel que $\lambda_s(x) = n\mu_0$; d'où $\lambda_s(x - n e_s) = 0$, $x - n e_s \in h'$. Or h' est un sous-groupe de rang s-1 : il a donc un système de s-1 générateurs $e_1, e_2, \ldots, e_{s-1}$ qui, avec e_s, donnent un système de générateurs de h.

De tout ce que nous venons de démontrer résulte le théorème suivant :

Théorème 4. <u>Si</u> G <u>est un sous-groupe fermé de</u> R^n, G <u>est la somme directe d'un sous-espace vectoriel de</u> R^n <u>et d'un groupe engendré par un certain nombre d'éléments linéairement indépendants de</u> R^n.

Prenons maintenant deux sous-groupes fermés G, G' de R^n et soient $G = C \oplus D$, $G' = C' \oplus D'$ des décompositions de G, G' en espaces vectoriels C, C' et groupes discrets D, D'. Si G et G' sont isomorphes, ils ont même rang, et il en est de même de C, C' qui sont les composants de 0 dans G, G'. Inversement, supposons que G, G' aient même rang r et que C, C' aient même rang p. Prenons des bases $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$, $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$ de C, C' par rapport à R, et des systèmes de générateurs $(f_1, f_2, \ldots, f_s)$, $(f'_1, f'_2, \ldots, f'_s)$ de D, D' (où s = r-p). Les élément $e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_s$ sont linéairement indépendants. Adjoignons-leur t = n-r éléments $g_1, g_2, \ldots, g_t$ de manière à former une base de R^n ; soient de même $g'_1, g'_2, \ldots, g'_t$ des éléments qui, avec $e'_1, e'_2, \ldots, e'_p, f'_1, f'_2, \ldots, f'_s$

forment une base de R^n. Il existe une automorphie I de R^n telle que l'on ait $I e_i = e'_i$ $(1 \leq i \leq p)$, $I f_i = f'_i$ $(1 \leq i \leq s)$ $I g_i = g'_i$ $(1 \leq i \leq t)$. Cette automorphie transforme G en G'. Il en résulte que, sous les conditions imposées, non seulement G et G' sont isomorphes, mais qu'il en est de même de R^n/G et de R^n/G'.

Désignons par Z le groupe additif des entiers. Il résulte de ce qu'on vient de dire que R^n/G est isomorphe au groupe $R^n/R^p \times Z^s$, c'est-à-dire à $(R/Z)^s \times R^t$.

Définition 3. Le groupe $T = R/Z$ est appelé tore à 1 dimension. Le groupe $T^n = T \times T \times \ldots \times T$ est appelé tore à n dimensions. Plus généralement, E étant un ensemble quelconque, le groupe T^E est appelé un tore.

Théorème 5. Les tores sont des groupes compacts et connexes.

Il suffit de le démontrer pour le tore à 1 dimension. Or, x étant un nombre réel, soit n le plus grand entier inférieur à x. On a $x-n \equiv x$ (mod. Z) et $0 \leq x-n < 1$. On en conclut que chaque classe de R (mod. Z) contient un représentant dans l'intervalle $[0,1]$, donc que T est une image continue de cet intervalle ce qui prouve sa compacité et sa connexité.

Domaine fondamental

Soit G le groupe des points à coordonnées entières dans R^n. $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ étant un point quelconque de R^n, désignons par p_i le plus grand entier $\leq n_i$ $(1 \leq i \leq n)$, et par a' le point $(a_1 - p_1, a_2 - p_2, \ldots, a_n - p_n)$. On a $a' \equiv a$ (mod. G). D'autre part a' appartient à l'ensemble E des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $0 \leq x_i < 1$ $(1 \leq i \leq n)$. E est un intervalle de R^n, égal

au produit de n intervalles de R identiques à $[0, 1($.
Chaque classe de R^n (mod. G) contient donc un point de E.
Elle n'en contient qu'un, car si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sont des points de E, on a $|a_i - b_i| < 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, de sorte que les différences $a_i - b_i$ ne peuvent être entières que si elles sont nulles.

On exprime ce fait en disant que E consitue un <u>domaine fondamental</u> pour le groupe G . L'application canonique de R^n sur R^n/G , qui est isomorphe à T^n , donne une application continue bi-univoque de E sur T^n: [~~donne une application continue bi-univoque de E sur T^n~~]: les points de E peuvent servir à représenter ceux de T^n . On notera que l'application en question n'est pas bicontinue.

Les points de la frontière de E se répartissent en deux catégories : ceux qui appartiennent à E , dont aucune coordonnée n'est égale à 1, et ceux dont au moins une coordonnée est égale à 1, qui n'appartiennent pas à E. Chaque point de la seconde catégorie est congru (mod. G) à un point et à un seul de la première.

CARACTERISATION TOPOLOGIQUE DES GROUPES R et T.

Nous nous proposons dans ce qui suit de montrer qu'on peut donner un critère de nature purement topologique permettant de reconnaître si un groupe topologique G est homomorphe au groupe R des nombres réels, c'est-à-dire s'il est isomorphe à l'un des groupes R ou T. Nous aurons besoin pour cela de la définition suivante :

Définition 1. Un espace topologique est dit localement connexe si chaque point y possède un système fondamental de voisinages connexes.

On notera que, s'il s'agit d'un groupe topologique, il suffit déjà pour qu'il en soit ainsi qu'il existe un système fondamental de voisinages de l'élément unité composé d'ensembles connexes V : car, x étant un point quelconque, les ensembles $x \top V$ sont connexes comme images continues des V et forment un système fondamental de voisinages de x.

Théorème 6. Pour qu'un groupe topologique G soit isomorphe à l'un des groupes R ou T, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux conditions suivantes : 1) être connexe 2) être localement connexe et régulier 3) contenir un voisinage connexe U de l'élément unité e tel que $U \cap \complement \{e\}$ ne soit plus connexe.

Les conditions sont nécessaires ; en effet, R et T sont connexes ; les intervalles de R et par suite aussi leurs images dans T étant connexes, ils sont localement connexes. L'ensemble $[-1/4, 1/4] \cap \complement \{0\}$ n'est pas connexe, non plus que son image par l'application canonique de R ~~on~~ sur T, application qui est une homéomorphie de cet ensemble dans T.

Inversement, soit G un groupe topologique, dans lequel nous désignerons la loi de composition par le signe $\top$, qui possède les propriétés 1),2),3). Soit $\mathcal{S}$ la famille des ensembles V de G possèdant les propriétés suivantes : a) $e \in V$; b) $V = V^{-1}$; c) V est ouvert ; d) V est connexe ; e) $V \subset U.W$ étant un voisinage ouvert de e tel que $W \subset U$, soit V le composant de e par rapport à $W \cap W^{-1}.V$ satisfait évidemment aux conditions a),d),e). L'application $x \longrightarrow x^{-1}$ étant topologique, V^{-1} est le composant de e dans $(W \cap W^{-1})^{-1} = W \cap W^{-1}$, donc $V^{-1} = V$. Si x est un point de V, $W \cap W^{-1}$ est un voisinage de x ; il existe donc un voisinage connexe de x contenu dans $W \cap W^{-1}$; ce voisinage, étant connexe, est contenu dans V : V est donc ouvert. Il résulte de là que $\mathcal{S}$ est un système fondamental de voisinages de e.

Il existe par hypothèse deux ensembles A, A' non vides, sans élément commun, relativement fermés par rapport à $U \cap \complement\{e\}$, tels que $U \cap \complement\{e\} = A \cup A'$. e est adhérent à A dans G : car sinon A et $A' \cup \{e\}$ seraient relativement fermés par rapport à U, ce qui est impossible, puisque U est connexe. De même, e est adhérent à A'. A et A' rencontrent donc tout élément V de $\mathcal{S}$; comme $V \cap \complement\{e\} = (V \cap A) \cup (V \cap A')$, on voit que $V \cap \complement\{e\}$ n'est pas connexe.

Soit L un composant de $V \cap \complement\{e\}$. Un point x de L possède un voisinage connexe contenu dans $V \cap \complement\{e\}$, donc dans L : L est ouvert. e est adhérent à L, car sinon L serait ouvert et fermé par rapport à V, ce qui est impossible, V étant connexe.

Soit L' un autre composant de $V \cap \complement\{e\}$. V_1 étant un élément de $\mathcal{S}$ tel que $V_1 \top V_1 \subset V$, choisissons dans les ensembles non vides $V_1 \cap L$, $V_1 \cap L'$ des points x, x'. Les ensembles $x \top L'$, $L \top x'$ sont connexes, contenus dans V et ont en commun le point $x \top x'$. De plus, x est adhérent à $x \top L'$, et x' à $L \top x'$. Donc l'ensemble $H = \{x\} \cup (x \top L) \cup (L \top x') \cup \{x'\}$ est connexe contenu dans V et rencontre L, L' ; H ne peut donc pas être contenu dans $V \cap \complement\{e\}$ et contient par suite e. Donc on a ou bien $x^{-1} \in L'$ ou bien $x'^{-1} \in L$. Dans le premier cas, L^{-1}, qui est un composant de $(V \cap \complement\{e\})^{-1} = V \cap \complement\{e\}$ et qui rencontre L', lui est égal. Dans le second cas, on voit de même que $L'^{-1} = L$, d'où $L^{-1} = L'$: cette conclusion est donc toujours vraie, ce qui prouve que, <u>si</u> $V \in \mathcal{S}$, <u>l'ensemble</u> $V \cap \complement\{e\}$ <u>possède exactement deux composants distincts</u>.

Considérons maintenant 3 éléments V_0, V_1, V_2 de $\mathcal{S}$ tels que $V_1 \top V_1 \top V_1 \subset V_0$ et $V_2 \top V_2 \subset V_1$. Nous poserons $L_i = V_i \cap A$, $(i = 0,1,2)$, et $\widetilde{L}_i = L_i \cup \{e\}$. L_i est évidemment l'un des composants de $V_i \cap \complement\{e\}$; $\widetilde{L}_i$ est l'adhérence de L_i par rapport à V_i. Montrons que la relation entre éléments x, y de V_2 qui se formule "$y \top x^{-1} \in \widetilde{L}_0$" est une relation d'ordre dans V_2. En effet : 1) si $y \top x^{-1}$ et $x \top y^{-1}$ sont dans $\widetilde{L}_0$, ces éléments, étant inverses l'un de l'autre, ne peuvent être à la fois dans L_0, car $L_0 \cap L_0^{-1} = \emptyset$: ils sont donc tous deux égaux à e ; 2) supposons que $u = y \top x^{-1}$ et $v = z \top y^{-1}$ soient dans $\widetilde{L}_0$ $(x,y,z \in V_2)$. Ils sont aussi dans V_1, donc dans $\widetilde{L}_1$; or, si u et v sont dans L_1, l'ensemble $\widetilde{L}_1 \top v$ est contenu dans $V_0 \cap \complement\{e\}$, est connexe et a le point u en commun avec L_0 : cet ensemble est donc contenu dans L_0, d'où $z \top x^{-1} = v \top u \in \widetilde{L}_0$; si u ou v est égal à e, il est clair que $v \top u \in \widetilde{L}_0$. On remarquera que nous avons démontré la formule (1) $L_1 \top L_1 \subset L_0$. Nous noterons "$x \leqslant y$" la relation d'ordre que nous venons de définir. (Il convient de bien remarquer que cette relation n'a de sens qu'entre éléments de V_2).

E étant une partie de V_1, x un élément de V_1, on a la formule

(2) $E \cap \complement\{x\} = ((L_0 \top x) \cap E) \cup ((L_0^{-1} \top x) \cap E)$. En effet, si y est un élément de E différent de x, on a $y \top x^{-1} \in V_0 \cap \complement\{e\}$, d'où ou bien $y \top x^{-1} \in L_0$, ce qui entraîne $x < y$ et $y \in L_0 \top x$, ou bien $y \top x^{-1} \in L_0^{-1}$, ce qui entraîne $y < x$ et $y \in L_0^{-1} \top x$. La démonstration montre en même temps que V_2 est <u>totalement</u> ordonné par notre relation d'ordre. De plus, on peut déduire de la formule (2) le lemme suivant :

Lemme. <u>Si</u> E <u>est une partie connexe de</u> V_1 <u>qui rencontre les ensembles</u> $L_0 \top x$, $L_0^{-1} \top x$ (où $x \in V_1$), E <u>contient</u> x.

En effet, les ensembles $L_0 \top x$ et $L_0^{-1} \top x$ sont ouverts ; leurs intersections avec E sont ouvertes par rapport à $E \cap \complement\{x\}$ la formule (2) montre alors que $E \cap \complement\{x\}$ n'est pas connexe, et est par suite $\neq E$, ce qui démontre le lemme.

En particulier, si b, x, c sont des éléments de V_2 tels que $b \leqslant x \leqslant c$, toute partie connexe de V_2 qui contient b et c contient x. On notera que l'ensemble des $y \in V_2$ tels que $y < x$ est ouvert, donc que l'ensemble des $z \in V_2$ que $z \geqslant x$ est relativement fermé dans V_2.

Désignons maintenant par V_2^2 l'image de V_2 par l'application continue $x \longrightarrow x \top x$. Donc V_2^2 est une partie connexe de V_1 ; si z est un élément de L_2, V_2^2 rencontre $L_0 \top z$ au point $z \top z$ et $L_0^{-1} \top z$ au point e : donc $z \in V_2^2$, et $L_2 \subset V_2^2$. On voit de même que $L_2^{-1} \subset V_2^2$ d'où $V_2 \subset V_2^2$. De plus, si x, x' sont des éléments de V_2 tels que $x \top x = x' \top x'$, on a $x = x'$.

En effet, il est impossible que l'élément $y = x^{-1} \top x'$ soit dans L_1, car on aurait $y^{-1} = x' \top x^{-1} = x \top y \top x^{-1} = x \top L_1 \top x^{-1}$; or $x \top L_1 \top x^{-1}$ est un ensemble connexe contenu dans $V_0 \cap \complement\{e\}$, qui rencontre L_1 (en x si $x \in L_2$, en x^{-1} si $x \in L_2^{-1}$; il est égal à L_1 si $x = e$) ; il est donc dans L_1 et ne peut contenir y^{-1} qui est dans L_1^{-1}. On voit de même que y ne peut être dans L_1^{-1} ; comme y est dans V_1, on a $y = e$ d'où $x = x'$. Donc l'application $x \longrightarrow x \top x = x^2$ est une application biunivoque continue de V_2 sur V_2^2.

Nous prendrons maintenant un élément $a \in L_2$ qui restera fixe dans la suite. Nous déterminerons par récurrence une suite a_n d'éléments de L_2 de la manière suivante : $a_0 = a$; a_n étant déjà déterminé, a_{n+1} sera l'élément de L_2 tel que $a_{n+1}^2 = a_n$. On voit tout de suite que, n et p étant des entiers positifs quelconques, on a $a_{n+p}^{2p} = a_n$.

Soit D le groupe additif des rationnels qui peuvent se mettre sous forme de fractions dont les dénominateurs soient des puissances de 2. $\rho = p/2^n$ étant un nombre de D mis sous forme de fraction irréductible (p entier qui est impair si $n > 0$), posons $f(r) = a_n^p$. On remarquera que si on représente ρ par une autre fraction $p2^q/2^{n+q}$ dont le dénominateur soit une puissance de 2, on a aussi $f(\rho) = a_{n+q}^{p2^q}$. ρ et ρ' étant deux nombres de D, représentés par des fractions $p/2^n$, $p'/2^n$ de même dénominateur, on a $f(\rho + \rho') = a_n^{p+p'} = a_n^p \top a_n^{p'} = f(\rho) \top f(\rho')$: f est une homomorphie de la structure de groupe de D dans celle de G.

Montrons que, si $\rho \in D \cap [0,1]$, ,on a $f(\rho) \in \tilde{L}_2$. Il en est ainsi pour les nombres $\rho \in [0,1]$ qui se représentent par des fractions de dénominateur 2^0, à savoir 0 et 1. Supposons la proposition vraie pour tous ceux qui se représentent par des fractions de dénominateur 2^n. $\rho = p/2^{n+1}$ étant un nombre qui se représente par une fraction de dénominateur 2^{n+1}, et tel que $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, si p est pair, ρ se représente par une fraction de dénominateur 2^n ; sinon, $p = 2q + 1$, et $p/2^{n+1} = q/2^n + 1/2^{n+1} = q + 1/2^n - 1/2^{n+1}$ et $0 \leqslant q + 1/2^n \leqslant 1$. Les éléments $a_{n+1}^{-1} \top f(\rho) = f(q/2^n)$ et $a_{n+1} \top f(\rho) = f(q + 1/2^n)$ sont donc dans L_2 ; en vertu du lemme, il en est de même de $f(\rho)$.

On déduit de là que, ρ et ρ' étant des éléments de $D \cap [0,1]$, les conditions $\rho \leqslant \rho'$, $f(\rho) \leqslant f(\rho')$ sont équivalentes.

Montrons maintenant que l'image par f d'une suite <u>croissante</u> ρ_n de nombres de D qui converge dans R est une suite convergente dans G. Si $\xi = \lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n$, choisissons un entier n_0 tel que $\xi - \rho_{n_0} < 1$: si $n \geqslant n_0$, on a $\rho_n - \rho_n \in [0,1]$. Désignons par F l'ensemble des éléments $u \in L_2$ tels que l'on ait, pour $n \geqslant n_0$, $u \geqslant f(\rho_n - \rho_{n_0})$. Pour chaque $n \geqslant n_0$ l'ensemble des éléments de L_2 qui sont $\geqslant f(\rho_n - \rho_{n_0})$ est relativement fermé dans L_2 : il en est donc de même de F. De plus, si ρ_n n'est pas constant pour $n \geqslant n_0$ (ce que nous pouvons supposer sans inconvénient), on a $F \neq L_2$. L_2 étant connexe, il existe au moins un point frontière x de F par rapport à L_2. V étant un élément de $\mathfrak{S}$ tel que $x \top V \subset L_2$, il existe un entier $N \geqslant n_0$ et un élément $y \in x \top V$ tels que $y < f(\rho_N - \rho_{n_0})$. Si $n \geqslant N$, on a aussi $y < f(\rho_n - \rho_{n_0})$ et $f(\rho_n - \rho_{n_0}) \leqslant x$ (car $x \in F$). En vertu du lemme, on a donc $f(\rho_n - \rho_{n_0}) \in x \top V$, d'où $x = \lim\limits_{n \to +\infty} f(\rho_n - \rho_{n_0})$, et $x \top f(\rho_{n_0}) = \lim\limits_{n \to \infty} f(\rho_n)$.

60

Soit en particulier $g = \lim_{n \to +\infty} a_n^{-1}$: on a $g \top g = \lim_{n \to +\infty} (a_n \top a_n)^{-1}$ $= \lim_{n \to +\infty} a_{n-1} = g$, et par suite $g = e$. V étant un élément de $\mathfrak{S}$, soit N un entier tel que $f(a_N^{-1}) \in V$, d'où $f(a_N) \in V$. Si ρ est un nombre de $D \cap [0, 1/2^N]$, on a $e \leqslant f(\rho) \leqslant f(a_N)$, d'où $f(\rho) \in V$. On a donc $f(D \cap [-1/2^N, 1/2^N]) \subset V$, ce qui montre que f est une application de D continue au point 0. Comme c'est une homomorphie de la structure de groupe de D, elle est uniformément continue dans D. ξ étant un nombre réel, $f(\rho)$ ne peut donc admettre plus d'une valeur limite quand ρ tend vers ξ sur D ; nous avons vu tout à l'heure qu'elle en admettait au moins une. f peut donc se prolonger par une application continue de R dans G, que nous désignerons encore par f .

Les fonctions continues $f(\xi + \eta)$ et $f(\xi) \top f(\eta)$, égales entre elles quand le couple (ξ, η) est dans $D \times D$, sont toujours égales : f est une représentation de R dans G . L'ensemble $f([-1,1])$ est connexe et contient a et a^{-1}. Il contient donc aussi tout élément x tel que $a < x < a^{-1}$. Or, l'ensemble de ces éléments est ouvert et contient e : f(R) est donc un sous-groupe de G qui contient un voisinage de e. G étant connexe, on a $f(R) = G$. Si le groupe fermé H des nombres x tels que $f(x) = e$ se réduit à $\{0\}$, f est une application biunivoque et continue, donc aussi bicontinue, de R : c'est une isomorphie de R avec G . Sinon, f donne une application bi-univoque sur G du groupe R/H , qui est compact. Cette application est donc aussi bicontinue, et fournit une isomorphie de G avec R/H , qui est lui-même isomorphe à T : le théorème est démontré.

Remarque. On peut, dans l'énoncé du théorème 6, remplacer la condition 2 par la suivante : 2' : le groupe G est localement compact.

Il suffira de montrer que la condition 2' entraîne la condition 2. Supposons-la remplie. X étant un voisinage compact de e, tel que $X = X^{-1}$, $X \neq U$ et $X \top X \subset U$, désignons par V le composant de e par rapport à X. On sait que V est l'intersection des ensembles ouverts et fermés par rapport à X qui contiennent e. Or, chacun de ces ensembles rencontre la frontière de X par rapport à U, car sinon il serait ouvert et fermé par rapport à U, ce qui est impossible, U étant connexe. Or, ces ensembles, ainsi que la frontière de X sont compacts : leur intersection V rencontre donc la frontière de X, ce qui prouve notre assertion. Choisissons dans V un point $y \neq e$. Définissons d'autre part les ensembles A, A' comme dans la démonstration du théorème 6, et supposons par exemple que $y \in A$. y étant intérieur à U et A relativement ouvert par rapport à U, il existe un voisinage W de e tel que $y \top W \subset A$. On sait que e est adhérent à A', de sorte que $A' \cap W \neq \emptyset$: choisissons dans cet ensemble un point y'. L'ensemble $V \top y'$ est connexe et rencontre A' au point y' et A au point $y \top y'$; de plus, il est contenu dans U : ce n'est possible que s'il contient e, d'où $y'^{-1} \in V$. Or V^{-1} est le composant de e dans $X^{-1} = X$, d'où $V^{-1} = V$, et par suite $y' \in V$, $A' \cap W \subset V$. En raisonnant de même sur un point de $V \cap A'$ (nous venons de voir que cet ensemble n'est pas vide), on voit qu'il existe un voisinage W' de e tel que $A \cap W' \subset V$. On a donc $W \cap W' \subset V$: V est un voisinage de e contenu dans X et connexe, ce qui prouve que G est localement connexe. Etant localement compact, il est régulier.

On notera que, dans la démonstration que nous venons de faire, l'hypothèse de locale compacité n'est intervenue que pour démontrer la régularité de G et l'existence de voisinages aussi petits que l'on veut dans lesquels le composant de e soit $\neq \{e\}$.

G étant un groupe topologique isomorphe à R, il est possible de déterminer toutes les isomorphies de G avec R, connaissant l'une d'elles, soit I. En effet, si I' en est une autre, $I' \circ I^{-1}$ est une automorphie de R ; et inversement, si J est une automorphie de R, $J \circ I$ est une isomorphie de G avec R. Le problème revient donc à déterminer les automorphies du groupe topologique R. Soit, plus généralement, J une représentation de R dans R. Soit $a = J(1)$; on a, pour tout entier n, $J(n) = na$, d'où, p et q étant des entiers dont le second est $\neq 0$, $qJ(p/q) = pa$, $J(p/q) = p/qa$. La fonction $J(x)-xa$, continue sur R, est nulle sur l'ensemble des rationnels : elle est partout nulle, et $J(x) = xa$. Si $a = 0$, on a $J(R) = \{0\}$; sinon, J est une application continue biunivoque, donc bicontinue, de R sur R. Donc :

Proposition 1. Si $J(x)$ est une représentation de R dans R il existe un nombre a tel que $J(x) = ax$. Si $J(R) \neq \{0\}$, J est une automorphie de R.

a et b étant deux nombres réels $\neq 0$, il existe une automorphie J de R et une seule telle que $J(b) = a$, à savoir celle définie par la formule $J(x) = a/b.x$. On en déduit la

Proposition 2. G étant un groupe topologique isomorphe à R, u un élément de G autre que l'élément unité, a un nombre réel $\neq 0$, il existe une isomorphie et une seule de G avec R qui amène u sur a.

Comme première application du théorème 6, nous donnerons la proposition suivante :

Proposition 3. <u>Soit</u> G <u>un groupe ordonné archimédien</u> (<u>écrit additivement</u>). <u>Il y a une isomorphie de structure de groupe ordonné entre</u> G <u>et un sous-groupe de</u> R .

Nous pouvons considérer G comme un groupe topologique. Il existe une isomorphie H de groupe topologique entre G et un sous-groupe dense d'un groupe complet $\overline{G}$. On sait (chap. III, § 6) que $\overline{G}$ comporte une structure de groupe ordonné archimédien telle que H soit une isomorphie de groupe ordonné. On peut donc sans restriction supposer directement G complet.

Si G est discret et $\neq \{0\}$, il existe dans G un élément $a > 0$ tel que 0 soit le seul élément x tel que $-a < x < a$. b étant un élément de G, soit n le plus grand entier tel que $na \leqslant b$; on a $0 \leqslant b-na < a$, d'où $b-na = 0$. La correspondance $n \to na$ est donc une homomorphie du groupe additif des entiers <u>sur</u> le groupe G. De plus, si $n > 0$, on a $na > 0$, d'où $na \neq 0$: il s'agit d'une isomorphie de groupe. Les conditions $m \geqslant n$, $ma \geqslant na$ étant évidemment équivalentes, nous avons bien une isomorphie de groupe ordonné.

Si G n'est pas discret, il est engendré par chaque voisinage de 0 (Chap. III, § 5, prop. 4) et localement compact (Chap. III, § 6, prop. 5) : il est donc connexe. Par contre $G \cap \complement \{0\}$ n'est pas connexe, car l'ensemble des éléments >0 et celui des éléments <0 sont relativement fermés dans $G \cap \complement \{0\}$. On en déduit qu'il existe une isomorphie I de groupe topologique entre G et le groupe R ou le groupe T . Mais G n'est pas compact (chap. III, § 6, prop. 5) ; donc $I(G) = R$. P désignant l'ensemble des éléments strictement positifs de G, $I(P)$, qui est l'un des composants de $R \cap \complement\{0\}$, est identique soit à l'ensemble des nombres strictement positifs de R, soit à celui des nombres strictement négatifs. Dans le premier cas, I est aussi une isomorphie de groupe ordonné. Dans le second cas, il en est ainsi de l'isomorphie JI, où J est l'automorphie de R définie par la formule $J(x) = -x$.

§ 5. FONCTIONS LOGARITHMIQUE ET EXPONENTIELLE.

Soit P^* le groupe topologique multiplicatif des nombres réels strictement positifs. C'est un groupe connexe localement compact ; par contre $P^* \cap \complement\{1\}$ n'est pas connexe, puisque cet ensemble contient des nombres < 1 et des nombres > 1. On en déduit que, a désignant un nombre $\neq 1$ de P^*, il existe une isomorphie et une seule de P avec R qui amène a sur le nombre 1.

Définition 1. <u>On appelle logarithme de base</u> a <u>d'un nombre</u> $x > 0$ <u>le correspondant de</u> x <u>dans l'isomorphie qu'on vient de définir</u>. <u>Ce nombre se note</u> $\log_a x$.

Le logarithme de base a est donc une fonction continue définie sur P^* et à valeurs dans R. x et y étant des nombres de P^*, on a

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Définition 2. <u>La fonction réciproque du logarithme de base</u> a <u>s'appelle l'exponentielle de base</u> a.

Cette dernière fonction est donc une isomorphie de R avec P^*. Si on la désigne par $\varphi_a(X)$, on a $\varphi_a(1) = a$, d'où, pour tout entier n, $\varphi_a(n) = a^n$. Pour cette raison, la fonction en question se désigne par la notation a^X. On a donc les identités

$$a^{X+Y} = a^X . a^Y \qquad a^{\log_a x} = x \qquad \log_a a^X = X$$

Soit b un autre nombre strictement positif $\neq$ 1. La fonction $\log_b x$ représente une nouvelle isomorphie de P^* avec R : il existe donc une constante k telle que

$$\log_b x = k \log_a x$$

ce qui signifie que <u>deux fonctions logarithmiques de bases différentes se déduisent l'une de l'autre par multiplication par une constante</u>.

En faisant $x = a$, il vient $k = \log_b a$. En faisant $x = b$, il vient $k = 1/\log_a b$. On a donc

$$\log_b x = \log_b a . \log_a x = \log_a x / \log_a b \ .$$

De même, on voit que la fonction $\log_a b^X$ est une automorphie de R. On a donc $\log_a b^X = hX$, h étant un nombre dont on détermine la valeur en faisant $X = 1$: il vient $h = \log_a b$. On a donc

$$\log_a b^X = X \log_a b$$

En posant $b = a^Y$, il vient

$$\log_a (a^Y)^X = XY$$

ou encore

$$a^{XY} = (a^Y)^X = (a^X)^Y$$

<u>Remarque</u>. On convient de poser $\log_1 x = 0$ pour tout $x > 0$, et $1^X = 1$ pour tout $X \in R$. Grâce à ces conventions, les formules écrites restent valables pour $a = 1$.

<u>Application</u>. a étant un nombre strictement positif, n un entier ≥ 1, l'équation $x^n = a$ possède une seule solution <u>positive</u> en x, à savoir $a^{1/n}$: de l'équation donnée, on tire en effet $n \log_a x = 1$. Le nombre $a^{1/n}$ s'appelle la racine n-ième de a et se désigne souvent par $\sqrt[n]{a}$. Si $n = 2$, il s'appelle

la <u>racine carrée</u> et se note $\sqrt{a}$; si $n = 3$, il s'appelle la <u>racine cubique</u>.

a étant un nombre réel $\neq 1$, la fonction a^X, qui établit une homéomorphie entre R et P^* fait correspondre à chacun des 2 composants de $R \cap \complement \{0\}$ un composant de $P^* \cap \complement (1)$: a^{P^*} est ou bien l'intervalle $)1, \rightarrow($ ou bien $)0,1($. Comme $a = a^1 \in a^{P^*}$, on voit que :

<u>Si</u> $a > 1$, <u>les conditions</u> $X > 0$, $a^X > 1$ <u>sont équivalentes</u>.
Si $a < 1$, <u>les conditions</u> $X > 0$, $a^X < 1$ <u>sont équivalentes</u>.

En tenant compte de la formule $a^{X+Y} = a^X . a^Y$ on en déduit tout de suite la

Proposition 1. <u>Si</u> $a > 1$, <u>la fonction</u> a^X <u>et sa fonction réciproque</u> $\log_a x$ <u>sont strictement croissantes</u>. <u>Si</u> $a < 1$, <u>elles sont strictement décroissantes</u>.

§ 6. LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES.

Le polynome x^2+1 est irréductible dans R. En effet, s'il admettait un diviseur de degré d tel que $0 < d < 2$, on aurait $d = 1$, et l'équation $x^2 + 1 = 0$ aurait une racine dans R, ce qui est impossible, car, si $x \in R$, $x^2 + 1 \geqslant 1$.

Nous savons dès lors (Algèbre,   ) qu'on peut construire :

1) Un ensemble C
2) Une structure de corps dans C
3) une correspondance bi-univoque Γ entre R^2 et C de telle manière que :

a) Γ soit une isomorphie de groupe additif entre R^2 et le groupe additif des éléments de C ;

b) on ait, si $a,b,c \in R$, $\Gamma((0,0)).\ \Gamma((b,c)) = \Gamma(ab, ac)$, de sorte qu'en posant, pour $a \in R$, $\gamma(a) = \Gamma((a,0))$, γ soit une isomorphie de structure de corps entre R et un sous-corps de C ;

c) en posant $e = \gamma(1)$, $i = \Gamma((0,1))$, on ait $i^2 + e = 0$.

Et nous savons également que deux structures constituées par les données de deux corps C, C' et de correspondances Γ, Γ' satisfaisant aux conditions a),b),c) sont isomorphes. Appelons structures-C de pareilles structures.

Etant donnée une structure-C, la correspondance bi-univoque Γ transporte dans son ensemble fondamental C une structure topologique qui, avec la structure de groupe additif, donne dans C une structure de groupe topologique. De plus, γ est une isomorphie de groupe topologique entre R et $\gamma(R)$.

Les structures-C jouent dans de nombreuses parties de l'analyse un rôle de premier plan. Il est commode, dans les théories où elles interviennent, d'introduire un ensemble fondamental C pourvu de la structure-C. Ceci fait, l'ensemble $\gamma(R)$ se trouve pourvu d'une structure-R . C'est pourquoi, le plus souvent, on convient dans ces théories d'employer comme nombres réels les éléments de $\gamma(R)$ eux-mêmes, ce qui revient à supposer que γ est la correspondance identique. Les éléments de C sont alors appelés les <u>nombres complexes</u> de la théorie, et C s'appelle le <u>plan complexe</u>.

Un nombre complexe z se met et d'une seule manière sous la forme $x + iy$, où x,y sont des nombres réels. En effet, il existe un couple $(x,y) \in R^2$ et un seul tel que $z = \Gamma((x,y)) = \Gamma((x,0) + (0,y)) = x + iy$. Le nombre x s'appelle la <u>partie réelle</u> de z, et iy s'appelle sa <u>partie imaginaire</u>. L'addition et la multiplication dans C sont données par les formules

$$(1) \begin{cases} (x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y') \\ (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y) \end{cases}$$

Le polynome $X^2 + 1$ se décompose dans C en deux facteurs du premier degré : $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$. Il en résulte qu'il existe une automorphie $\mathcal{J}$ de la structure de corps de C laissant invariants les nombres de R et ceux-là seulement, telle que $\mathcal{J}(i) = -i$. On a $\mathcal{J}(x + iy) = x - iy$, d'où résulte tout de suite que $\mathcal{J}$ est aussi une homéomorphie de C avec lui-même.

z étant un nombre complexe, $\mathcal{J}(z)$ s'appelle l'<u>imaginaire conjugué</u> de z . On le désigne souvent par $\bar{z}$. Cependant, on ne doit pas désigner par $\bar{A}$ l'ensemble des imaginaires conjugués des nombres d'une partie A de C, sous peine d'entrer en conflit avec le sens d'"adhérence de A" du signe $\bar{A}$.

Le corps C peut être considéré comme un espace vectoriel de dimension 2 par rapport à R . Un élément z de C définit, par la formule $u \longrightarrow zu$, une application linéaire de cet espace vectoriel dans lui-même. La norme de cette application s'appelle la <u>norme</u> de z et se désigne par N(z). Pour la calculer, remarquons que les nombres 1,i constituent une base de C par rapport à R ; si $z = x + iy$, on a $z.1 = x + iy$, $z.i = -y + ix$, d'où

$$N(z) = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2$$

La norme de z peut donc encore se mettre sous la forme $(x + iy)(x - iy) = z\bar{z}$. On remarquera que la norme d'un nombre complexe est toujours positive, et qu'elle ne peut s'annuler que si le nombre est lui-même nul. De plus, N(z) est une fonction continue de z .

z et z' étant deux nombres complexes, on a $zz'.u$, $z.z'u$ d'où résulte que la norme de zz' est égale au produit des normes de z et de z'.

Soit C le groupe multiplicatif des nombres complexes 0. Muni de la structure topologique induite par celle de C, il donne un groupe topologique. En effet, tout d'abord il résulte des formules (1) que zz' est fonction continue du couple (z,z') d'autre part, si $z = C$, on a z^{-1} $\bar{z}.(N(z))^{-1}$ et les fonctions $N(z),(N(z))^{-1}$, $\bar{z}$ sont fonctions continues de z sur C. La fonction $N(z)$ est une représentation de C dans le groupe multiplicatif P des nombres réels strictement positifs. D'autre part P est un sous-groupe de C ; si x P , on a $N(x)$ x^2 . On peut déduire de la fonction $N(z)$ une nouvelle représentation de C dans P qui cette fois laisse invariants les éléments de P, à savoir celle fournie par la fonction $N(z)$. Cette fonction est d'ailleurs définie dans C tout entier ; si $x \in R$, on a $\sqrt{N(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$. C'est pourquoi on pose la définition suivante :

Définition 1. z <u>étant un nombre complexe, on appelle valeur absolue de</u> z <u>et on désigne par</u> $|z|$ <u>le nombre</u> $\sqrt{N(z)}$.

On a donc $|zz'| = |z| . |z'|$, $|z| \geqslant 0$ et l'égalité $|z| = 0$ entraîne $z = 0$.

Ceci posé, désignons par E le groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue 1 . z étant un élément quelconque de C, on a $z = |z| . z/|z|$, avec $|z| \in P^*$, $z/|z| \in E$. Inversement, si $z = \rho u$, $\rho \in P^*$, $u \in E$, on a $|z| = |\rho| . |u| = \rho$, et $u = z/|z|$. D'où résulte que la correspondance $(\rho,u) \longrightarrow \rho u$ est une correspondance bi-univoque entre $P^* \times E$ et C^* .

C'est évidemment aussi une isomorphie de structure de groupe entre le groupe produit de P^* par E et C^*. Enfin c'est une homéomorphie ; en effet ρu est fonction continue du couple (ρ,u) ; inversement $\rho = |\rho u|$ et $u = \rho u/\rho$ sont des fonctions continues de ρu dans C. Donc le groupe topologique C^* est isomorphe au produit des groupes topologiques P^*, E.

Etudions maintenant le groupe E. Il est fermé dans C^*. Comme 0 n'est pas adhérent à E, puisque $|0| = 0$, E est aussi fermé dans C. De plus la condition $x^2 + y^2 = 1$ $(x,y \in R)$ entraîne $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$: E est donc contenu dans la partie de C définie par les inégalités précédentes, qui est compacte. E est donc un groupe compact.

Si l'ensemble C^* n'était pas connexe, il résulterait de la remarque qui suit le théorème 6 que le groupe additif C, qui est localement compact et connexe, serait isomorphe à R, ce qui est impossible puisque C contient un sous-groupe différent de lui-même isomorphe à R, ce qui n'est pas le cas pour R. Le groupe C^* est donc connexe, et il en est par suite de même de E.

Soit S l'ensemble des nombres $z = x + iy$ tels que $y > 0$, et S' celui des nombres tels que $y < 0$. S et S' sont sans élément commun et relativement fermés dans leur réunion $C \cap \complement R$. Ils rencontrent tous deux E, l'un en i, l'autre en $-i$. Donc $E \cap \complement R$, qui est égal à $E \cap \complement \{-1,1\}$ n'est pas connexe. L'ensemble $E \cap \complement \{-1\}$ est un voisinage de 1 dans E ; s'il est connexe, il résulte de la remarque au théorème 6 que E est isomorphe à T ; la même conclusion subsisterait s'il n'était pas connexe, car alors $E \cap \complement \{-1\}$ qui s'en déduit par la transformation $z \longrightarrow -z$ ne

71

serait pas non plus connexe, et on pourrait de nouveau appliquer la remarque au théorème 6. Donc E est isomorphe à T (on en conclut facilement qu'en fait $E \cap \complement \{-1\}$ est connexe). Donc :

Proposition 1. Le groupe multiplicatif des nombres complexes $\neq 0$ est isomorphe au produit du groupe multiplicatif P^* par le groupe additif T, ou encore au produit des groupes additifs R et T, ou encore au quotient de $R \times R$, par le groupe discret engendré par $(0,1)$.

Il résulte de là qu'il existe une application $\varphi(x,y)$ de $R \times R$ dans C^* possédant les propriétés suivantes : 1) φ est continue 2) on a $\varphi(x,y+1) = \varphi(x,y)$ 3) on a $\varphi(x+x', y+y') = \varphi(x,y).\varphi(x',y')$; 4) $\varphi(R \times R) = C^*$; 5) si $z \in C^*$ il existe un couple (x,y) et un seul de $R \times R$ tel que $0 \leqslant y < 1$ et $\varphi(x,y) = z$; 6) $\varphi(x,0) = |\varphi(x,y)|$, $|\varphi(0,y)| = 1$. De plus il existe un nombre $a > 0$ tel que $\varphi(x,0) = a^x$.

§ 7. REPRÉSENTATION DES NOMBRES RÉELS.

x étant un nombre réel, il existe un entier n et un seul tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier s'appelle la partie entière de x et se désigne souvent par $E(x)$.

a étant un entier > 1, posons $x_i = E(xa^i)$, i parcourant l'ensemble Z des entiers. Nous supposerons dans ce qui va suivre que x est positif. Montrons d'abord que, si $i \leqslant 0$, on a

$$(1) \qquad x_i = E(a^i E(x))$$

En effet, on a d'abord $a^i E(x) \leqslant a^i x < x_i + 1$. De plus, on a

$x-E(x) < 1$, d'où $a^i x - a^i E(x) < a^i$, et, a fortioti, $x_i - a^i E(x) < a^i$ ce que nous écrirons $x_i a^{-i} - E(x) < 1$. Or, si i est négatif, $x_i a^{-i}$ et $E(x)$ sont des entiers. On a donc $x_i a^{-i} - E(x) \leqslant 0$, d'où $x_i \leqslant a^i E(x) < x_i + 1$, ce qui démontre l'égalité (1).
On sait que, si $i \leqslant 0$, on a $a^{-i} \geqslant -i$, d'où $a^i \leqslant \frac{1}{-i}$ et $\lim\limits_{i \to -\infty} a^i = 0$. On en conclut qu'il existe un entier i_0 tel que $x_i = 0$ si $i < i_0$.

Soit d'autre part, pour chaque $i \in Z$, y_i l'entier tel que $y_i \equiv x_i$ (mod. a), $0 \leqslant y_i < a$. On a (algèbre...) :

$$E(x) = \sum_{i \leqslant 0} a^{-i} y_i$$

La formule (1) où on remplace x par xa^j, montre que, si $i \leqslant 0$,

$$x_{i+j} = E(a^i E(xa^j)$$

d'où on déduit que, pour tout entier n, on a

$$E(xa^n) = \sum_{h \leqslant n} a^{n-h} y_h$$

Or, on a

$$x - \frac{E(xa^n)}{a^n} < \frac{1}{a^n} \quad , \text{d'où}$$

$$(2) \qquad x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{h \leqslant n} \frac{y_h}{a^h}$$

Le nombre $\rho_n = \sum\limits_{h \leqslant n} \frac{y_h}{a^h}$ est un nombre rationnel. Nous avons donc défini pour tout nombre réel x, une suite bien déterminée de nombres rationnels de limite x . On dit que la formule (2) donne le développement a-mal de x . Les y_i sont appelés les coefficients de ce développement.

Si on a des signes spéciaux individuels pour les entiers y tels que $0 \leqslant y < a$, on désigne les "valeurs approchées" ρ_n (pour $n > 0$) par des symboles construits de la manière suivante : on écrit d'abord la représentation a-male de $E(x)$, qui se compose d'un certain nombre des y_i d'indices négatifs, puis on place une virgule, qu'on fait suivre des signes $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Désignons maintenant par A l'ensemble des entiers y tels que $0 \leqslant y < a$, et étudions les propriétés de l'application $(i \longrightarrow y_i)$ de Z dans A. Nous savons déjà qu'il existe un entier i_o tel que $y_i = 0$ pour $i < i_o$. Montrons de plus qu'il est impossible qu'il existe un entier j_o tel que l'on ait $y_i = a-1$ pour tous les $i > j_o$. Supposons en effet pour un instant qu'il en soit ainsi, et que $y_{j_o} \neq a-1$. On aurait

$$x = \sum_{h \leqslant j_o} \frac{y_h}{a^h} + \lim_{n \to \infty} \sum_{h=j_o+1}^{n} \frac{a-1}{a^h}$$

Or

$$\sum_{j_o+1}^{n} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{j_o+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{a^{n-j_o}}}{1 - \frac{1}{a}}$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} (a-1) \sum_{j_o+1}^{n} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{j_o}}$$

et

$$xa^{j_o} = \sum_{h \leqslant j_o} a^{j_o-h} y_h + 1$$

ce qui est impossible puisque $E(xa^{j_o}) = \sum_{h \leqslant j_o} a^{j_o-h} y_h$

Inversement, donnons-nous une application $(i \longrightarrow y_i)$ de Z dans A telle que :

1) il existe un entier i_o tel que $y_i = 0$ pour $i < i_o$

2) il n'existe aucun entier j_o tel que $y_i = a-1$ pour $i > j_o$

Posons
$$\rho_n = \sum_{h \leqslant n} \frac{y_h}{a^h}$$

d'où, si $m > n$,

$$0 \leqslant \rho_m - \rho_n = \sum_{n+1}^{m} \frac{y_h}{a^h} \leqslant \sum_{n+1}^{m} \frac{a-1}{a^h} \leqslant \frac{1}{a^n}$$

La suite (ρ_n) est donc convergente. Soit x sa limite. On a

$$0 \leqslant x - \rho_n \leqslant \frac{1}{a^n}$$

Il existe par hypothèse un entier $n' > n$ tel que $y_{n'} < a-1$, d'où, si $m > n'$,

$$\rho_m - \rho_n \leqslant \sum_{n+1}^{m} \frac{a-1}{a^h} - \frac{1}{a^{n'}} \leqslant \frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^{n'}}$$

et par suite

$$x - \rho_n \leqslant \frac{1}{a^n} - \frac{1}{a^{n'}} < \frac{1}{a^n}$$

Comme $a^n \rho_n$ est un entier, on a $\rho_n a^n = E(xa^n)$. Comme de plus on a $\rho_n a^n \equiv y_n$ (mod. a), les y_n sont les coefficients du développement a-mal de x .

Un cas particulier important est celui où $a = 2$: on a alors ce qu'on appelle la représentation dyadique de x . L'ensemble A se compose ici des nombres 0,1 . Si on désigne par U_x l'ensemble des $i \in Z$ tels que $y_i = 1$, le nombre x est bien déterminé par la donnée de l'ensemble U_x . Nous avons donc établi une correspondance bi-univoque entre l'ensemble P des réels positifs et une famille $\mathcal{U}$ de parties de Z ; R ayant évidemment même puissance que P, on en déduit que cette puissance est au plus égale à celle de l'ensemble $\mathbb{P}(Z)$ des parties de Z . Considérons par ailleurs l'ensemble $\mathcal{U}'$ des parties de Z qui correspondent aux nombres x de l'intervalle $[0,1)$. Les ensembles $U_x \in \mathcal{U}'$ sont tous contenus dans l'ensemble Z' des entiers $\geqslant 0$. j étant un élément de Z' , soit $\mathcal{V}_j$ la famille des parties de Z' qui contiennent tous les entiers $\geqslant j$: on a $\mathcal{U}' = \mathbb{P}(Z') - \bigcup_j \mathcal{V}_j$. Or, pour chaque j , $\mathcal{V}_j$ est une famille finie ; donc $\bigcup_j \mathcal{V}_j$ est une famille dénombrable . Comme il n'en est pas ainsi de $\mathbb{P}(Z')$, on en conclut que $\mathcal{U}$ a même puissance que $\mathcal{P}(Z')$, donc aussi que $\mathcal{P}(Z)$. Il résulte de là que R a même puissance que $\mathcal{P}(Z)$:

Théorème 3. <u>L'ensemble des nombres réels a même puissance que l'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable</u>.

En particulier : l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

D'un ensemble qui a même puissance que R, on dit qu'il a la <u>puissance du continu</u>.

Soit φ une application bi-univoque de R sur la famille des parties de l'ensemble Z_p des entiers pairs, et soit ψ une application bi-univoque de R sur la famille des parties de l'ensemble Z_i des entiers impairs. Posons $\Phi(x,y) = \varphi(x) \cup \psi(y)$: Φ est une application bi-univoque de $R \times R = R^2$ sur l'ensemble des parties de Z. Donc R^2 a la puissance du continu. On en déduit tout de suite que, <u>pour tout entier</u> $n > 0$, R^n <u>a la puissance du continu</u>.

LES COUPURES DE DEDEKIND.

Désignons par M un ensemble dense dans l'ensemble R des nombres réels. x étant un nombre réel, nous désignerons par A_x l'ensemble des nombres de M inférieurs à x, par B_x celui des nombres de M strictement supérieurs à x. On a $M = A_x \cup B_x$; tout élément de A_x est strictement inférieur à tout élément de B_x. De plus, x est dans R la plus petite borne supérieure de A_x, et, si $x \in M$, on a $x \in A_x$.

Définition 1. On appelle coupure dans l'ensemble M un couple (A,B) de parties de M possédant les propriétés suivantes 1) On a $M = A \cup B$; 2) tout élément de A est strictement inférieur à tout élément de B ; 3) Si A possède une plus petite borne supérieure dans M, elle est dans A .

Donc, à chaque nombre réel x se trouve associée une coupure (A_x, B_x) dans M, et x est bien déterminé par cette coupure. Inversement, soit (A,B) une coupure de M . Supposons que ni A ni B ne soit vide. Dans ce cas, l'ensemble A étant non vide et borné supérieurement admet une plus petite borne supérieure x . Le nombre x est donc inférieur à tous les éléments de B, et même strictement inférieur en vertu de la condition 3). De plus tout élément de A est inférieur à x : en vertu de la condition 1), on a $A = A_x$, $B = B_x$.

Désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble des coupures dans M, et par $\Gamma(x)$ la coupure (A_x, B_x) associée à un nombre réel x . Γ est donc une application bi-univoque de R dans $\mathcal{C}$. De plus, les seuls éléments de $\mathcal{C}$ non contenus dans $\Gamma(R)$ sont les coupures $(\emptyset , M)$ et $(M, \emptyset)$.

On peut maintenant ordonner $\mathcal{C}$ au moyen de la convention suivante : $\gamma = (A,B)$ et $\gamma' = (A',B')$ étant deux éléments de $\mathcal{C}$, la relation $\gamma \leqslant \gamma'$ sera par définition équivalente à $A \subset A'$.

Que la relation ainsi définie soit une relation d'ordre résulte immédiatement du fait qu'il en est ainsi pour la relation d'inclusion entre ensembles. De plus, $\mathcal{C}$ est totalement ordonné par cette relation. En effet, $\gamma = (A,B)$ et $\gamma' = (A',B')$ étant deux éléments de $\mathcal{C}$, supposons $A \not\subset A'$: on a alors $A \cap B' \neq \emptyset$:

A contient un élément supérieur à tout élément de A'. Un élément de A', étant inférieur à au moins un élément de A, est dans A, d'où $A' \subset A$ et $\gamma' \leq \gamma$.

D'autre part, x et x' étant des nombres réels, il est clair que les conditions $x \leq x'$, $(A_x, B_x) \leq (A_{x'}, B_{x'})$ sont équivalentes, ce qui signifie que Γ est une isomorphie de structure d'ordre entre R et une partie de $\mathcal{C}$. Les éléments $(\emptyset, M)$, $(M, \emptyset)$ de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas dans $\Gamma(R)$ sont l'un le plus petit élément, l'autre le plus grand élément de $\mathcal{C}$.

Nous avons donc montré que l'on peut construire un ensemble totalement ordonné $\mathcal{C}$ et une isomorphie de structure d'ordre Γ de R dans $\mathcal{C}$ tels que les éléments de $\mathcal{C}$ non contenus dans $\Gamma(R)$ soient seulement le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{C}$. La structure constituée par la donnée d'un fondamental $\mathcal{C}$, d'une relation d'ordre ordonnant totalement $\mathcal{C}$ et d'une isomorphie Γ jouissant des propriétés précédentes porte le nom de structure-$\overline{R}$.

Deux structures-$\overline{R}$, déterminées l'une par l'ensemble ordonné $\mathcal{C}$ et l'isomorphie Γ, l'autre par $\mathcal{C}'$ et Γ', sont toujours isomorphes. En effet $\Gamma' \overset{-1}{\Gamma}$ constitue une isomorphie de structure d'ordre entre $\Gamma(R)$ et $\Gamma'(R)$; on peut prolonger cette isomorphie en une isomorphie de structure d'ordre Δ de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}'$ en faisant correspondre au plus petit et au plus grand élément de $\mathcal{C}$ le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{C}'$. La correspondance obtenue est évidemment une isomorphie des deux structures-$\overline{R}$ considérées.

D'autre part, dans une théorie où intervient un ensemble fondamental $\mathcal{C}$ porteur d'une structure-$\overline{R}$, la correspondance Γ permet de transporter dans Γ (R) une structure-R . On pourra donc sans inconvénient, dans une pareille théorie, supposer que les éléments de Γ (R) sont les nombres réels, en sorte que Γ soit simplement l'identité. Dans ces conditions, l'ensemble fondamental $\mathcal{C}$ porte le nom de droite réelle achevée.

Plaçons-nous dans une théorie comportant une droite réelle achevée $\mathcal{C}$. On a donc $R \subset \mathcal{C}$. Nous allons construire une topologie dans $\mathcal{C}$, et pour cela, y définir la notion d'ensemble fermé. Soit $\mathcal{F}$ la famille des parties F de $\mathcal{C}$ possédant les propriétés suivantes : 1) $F \cap R$ est un ensemble fermé de la droite réelle ; 2) si $F \cap R$ n'est pas borné supérieurement, F contient le plus grand élément ω_1 de $\mathcal{C}$ 3) si $F \cap R$ n'est pas borné inférieurement, $F \cap R$ contient le plus petit élément ω_2 de $\mathcal{C}$. Il est clair que l'intersection d'une famille quelconque d'ensembles de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$, et que la réunion de deux ensembles de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$; que de plus $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$. Si donc $\mathcal{O}$ est la famille des complémentaires par rapport à $\mathcal{C}$ des ensembles de $\mathcal{F}$, la famille $\mathcal{O}$ satisfait aux conditions O.I,II,III et constitue la famille des ensembles ouverts d'une topologie de $\mathcal{C}$.

Le complémentaire par rapport à $\mathcal{C}$ d'un ensemble $U \subset R$ et ouvert sur la droite réelle est dans $\mathcal{F}$: on a donc $U \in \mathcal{O}$. Inversement, si O est un ensemble de $\mathcal{O}$, l'ensemble $O \cap R$ est égal à $R \cap \complement(\complement O)$, donc encore au complémentaire par rapport à R de $R \cap \complement O$, qui est un ensemble fermé de la droite réelle.

Donc $O \cap R$ est un ensemble ouvert de la droite réelle. Il en résulte que la topologie que nous venons de définir dans $\mathcal{C}$ induit sur R la topologie de la droite réelle. Toutes les fois que nous considérerons la droite réelle achevée, nous la supposerons implicitement munie de la structure topologique que nous venons de définir.

x désignant un nombre réel, l'intervalle $)x,\omega_1]$ de $\mathcal{C}$ constitue un voisinage de ω_1 dans $\mathcal{C}$. Inversement, si V est un voisinage de ω_1 dans $\mathcal{C}$, $\complement V$ est contenu dans un ensemble F de $\mathcal{F}$ qui ne contient pas ω_1. Donc $F \cap R$ est borné supérieurement. Si x en est une borne supérieure, on a $)x, \omega_1] \subset V$, de sorte que la famille des intervalles $)x,\omega_1]$, pour $x \in R$, constitue un système fondamental de voisinages de ω_1. Il en serait encore de même si x décrivait un ensemble non borné supérieurement de R. De même, la famille des intervalles $[\omega_2,x($, pour $x \in R$, constitue un système fondamental de voisinages de ω_2.
Les entiers étant des éléments de $\mathcal{C}$, le filtre dénombrable typique est un filtre sur C. <u>Ce filtre converge vers</u> ω_1. En effet, pour tout entier $n > 0$, le filtre contient un ensemble contenu dans le voisinage $)n, \omega_1]$ de ω_1. Il en résulte, que, u_n désignant une suite de nombres réels, les symboles $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, $\lim\limits_{\substack{n \in Z \\ n \to \omega_1}} u_n$ (où Z est l'ensemble des entiers > 0) ont le même sens : il parait donc naturel de désigner par $+\infty$ le plus grand élément de $\mathcal{C}$. D'autre part, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n) = \omega_2$, et c'est pourquoi le plus petit élément de $\mathcal{C}$ se désigne par $-\infty$.

Dans la topologie de la droite réelle achevée, $+\infty$ et $-\infty$ appartiennent à l'adhérence de R. On a donc $\mathcal{C} = \overline{R}$.

C'est pourquoi on désigne en général la droite réelle achevée par le signe $\overline{R}$; on s'explique en même temps le nom de structure-$\overline{R}$ que nous avons introduit au début.

On remarquera que, si $x \in \overline{R}$, l'intervalle $[x, +\infty]$ de $\overline{R}$ est fermé : l'ensemble des éléments supérieurs à x est fermé. Il en est de même de l'ensemble des éléments inférieurs à x, et par suite aussi de l'ensemble des éléments supérieurs (ou inférieurs) à tous les éléments d'une partie de $\overline{R}$.

Démontrons maintenant le

Si $x \in R$, les ensembles $[-\infty, x($ et $)x, +\infty]$ sont relativement fermés dans leur réunion $\overline{R} \cap \complement\{x\}$. On en déduit, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 2, que toute partie connexe de $\overline{R}$ est un intervalle. Inversement, un intervalle I de $\overline{R}$ qui contient au moins deux points est, comme on le voit facilement, contenu dans l'adhérence de $I \cap R$, qui est connexe : il est donc connexe. La conclusion subsiste si I ne contient que 0 ou 1 point. Donc :

Théorème 2 bis. <u>La famille des parties connexes de $\overline{R}$ est identique à celle des intervalles</u>.

Théorème 3 bis. <u>Toute partie de $\overline{R}$ possède une plus petite borne supérieure dans $\overline{R}$</u> .

Nous en donnerons deux démonstrations, l'une analogue à celle du théorème 3, l'autre plus directe. Nous désignerons par E une partie quelconque de $\overline{R}$.

1) Soient C l'ensemble de tous les éléments supérieurs à tous ceux de E, C' celui des éléments inférieurs à tous ceux de C .

On voit, comme dans la démonstration du théorème 3, que $\overline{R} = C \cup C'$. D'autre part C et C' sont des ensembles fermés. Or, $\overline{R}$, qui est l'adhérence de l'ensemble connexe R , est connexe. De plus on a $+\infty \in C$, $-\infty \in C'$ de sorte que ni C ni C' n'est vide. Donc $C \cap C' \neq \emptyset$. Soit a un élément de $C \cap C'$. Etant dans C, a est une borne supérieure de E . Etant dans C', il est inférieur à toute borne supérieure de E : a est la plus petite borne supérieure de E.

2) M étant une partie dense de R, nous avons vu qu'il existe une isomorphie Γ de structure d'ordre entre $\overline{R}$ et l'ensemble des coupures dans M . Soit B^* l'ensemble des éléments de M supérieurs à tous les éléments de E , A l'ensemble des éléments de M inférieurs à tous ceux de B^* , B celui des éléments de M strictement supérieurs à tous ceux de A . Tout élément inférieur à un élément de A est dans A , d'où $M = A \cup B$. Tout élément de A est strictement inférieur à tout élément de B . Si A possède une plus petite borne supérieure a dans M, a est inférieur à tout élément de B^* (car les éléments de B^* sont des bornes supérieures de A), donc est dans A. Le couple (A,B) constitue donc une coupure dans M . Il lui correspond un élément $m \in \overline{R}$ tel que A soit l'ensemble des éléments de M inférieurs à m . Comme $E \subset A$, m est une borne supérieure de E . De plus, si x est une borne supérieure de E , il lui correspond par Γ une coupure (A_x, B_x) où A_x est l'ensemble des éléments de M inférieurs à x . Donc $E \subset A_x$, d'où $B_x \subset B^*$, et $A \subset A_x$: on a $m \leqslant x$, de sorte que m est la plus petite borne supérieure de E.

On verrait de même que toute partie de $\overline{R}$ possède une plus grande borne inférieure.

Il résulte de là que tout intervalle de $\overline{R}$ possède une origine et une extrêmité, et est par suite de l'une des formes $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,b]$, a et b étant des éléments de $\overline{R}$.

On notera que, x étant un nombre réel, les intervalles $]x, \rightarrow[$, $[x, \rightarrow[$, $]\leftarrow, x[$, $]\leftarrow, x]$ <u>de l'ensemble</u> R sont respectivement identiques aux intervalles $]x, +\infty[$, $[x, +\infty[$, $]-\infty, x[$, $]-\infty, x]$ de l'ensemble $\overline{R}$. C'est sous cette dernière forme qu'il sera en général le plus commode de les désigner.

Théorème 1 bis.

<u>La droite réelle achevée est compacte</u>.

Il est clair que $\overline{R}$ est un espace de Hausdorf. Supposons connue une famille Φ d'ensembles ouverts dont la réunion recouvre $\overline{R}$. Désignons par E l'ensemble des x tels que l'intervalle $[-\infty, x]$ soit contenu dans la réunion d'une sous-famille <u>finie</u> de Φ . Il est clair que tout élément inférieur à un élément de E est dans E . Soit a la plus petite borne supérieure de E : Φ contient un ensemble ouvert U tel que $a \in U$. Distinguons 3 cas : a) si $a = -\infty$, il existe un nombre réel b tel que $[-\infty, b] \subset U$, d'où $b \in E$ puisque $\{U\}$ est une sous-famille finie de Φ : c'est impossible ; b) $a \in R$: il existe alors des nombres réels b,c tels que $b < a < c$, $[b,c] \subset U$; c) $a = +\infty$: il existe un nombre réel b tel que $[b, +\infty] \subset U$. Dans les cas b),c), on a $b \in E$. Il existe donc une sous-famille finie Φ_1 de Φ dont la réunion recouvre $[-\infty, b]$; mais alors la réunion S de la famille finie $\Phi_1 \cup \{U\}$ recouvre $[-\infty, a]$, d'où $a \in E$; de plus, si on était dans le cas b), on aurait $[-\infty, c] \subset S$, d'où $c \in E$, ce qui est impossible. Donc $a = +\infty \in E$, ce qui démontre la compacité de $\overline{R}$.

On en déduit que, a et b étant des éléments de $\overline{R}$, l'intervalle $[a,b]$ est compact. D'où le :

<u>Principe des intervalles emboités</u>. <u>L'intersection d'une famille totalement ordonnée par inclusion d'intervalles fermés non vides n'est pas vide</u>.

Comme application de ce principe, nous allons donner une nouvelle démonstration du fait que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. En effet, si R était dénombrable, il en serait de même de $\overline{R}$: il existerait une application bi-univoque $\varphi(m)$ de l'ensemble des entiers positifs sur $\overline{R}$. Définissons par récurrence sur n un entier m_n de la manière suivante : 1) $m_0 = 0$, $m_1 = 1$; 2) n étant supérieur à 2, les m_k étant déjà déterminés pour $k \leqslant n$, et différents les uns des autres, m_{n+1} est le plus petit entier $h > m_n$ tel que $\varphi(h)$ appartienne à l'intervalle ouvert d'extrêmités $\varphi(m_n)$, $\varphi(m_{n-1})$, intervalle que nous désignerons par I_n . On a donc $I_{n+1} \subset I_n$. Il existe un point x qui appartient à tous les intervalles $\overline{I}_n$: soit $k = \overset{-1}{\varphi}(x)$. Puisque $m_{n+1} > m_n$, il existe un entier ℓ tel que $m_\ell > k + 1$. On a donc $\varphi(k) \in \overline{I}_{m_\ell}$, $\varphi(k) \neq \varphi(m_{\ell-1})$, $\varphi(k) \neq \varphi(m_\ell)$, d'où $\varphi(k) \in I_{m_\ell}$ et $k < m_{\ell+1}$ ce qui conduit à une contradiction.

L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION DANS $\overline{R}$.

La fonction $x + y$ est une fonction définie sur $R \times R$, à valeurs dans R. Nous allons voir s'il est possible de la prolonger par continuité en certains points de $\overline{R} \times \overline{R}$.

1) Si le point (x,y) tend, en restant dans $R \times R$, vers un point $(a, +\infty)$ de $\overline{R} \times \overline{R}$, et si $a \neq -\infty$, $x + y$ tend vers $+\infty$. En effet, donnons-nous un voisinage $)u, +\infty]$ de $+\infty$ $(u \in R)$. Si $a \in R$, les conditions $y \in)u+1, +\infty] \cap R$, $x \in)a-1, a+1($ entraînent $x + y \in)u, +\infty]$. Si $a = +\infty$, les conditions $y \in)u, +\infty] \cap R$, $x \in)0, +\infty] \cap R$ entraînent $x + y \in)u, +\infty]$, ce qui démontre notre assertion.

2) Si le point x tend vers $+\infty$ dans R, le point $-x$ tend vers $-\infty$. En effet, $[-\infty, u($ étant un voisinage de $-\infty$ $(u \in R)$, la condition $x \in)-u, +\infty] \cap R$ entraîne $-x \in [-\infty, u($.

3) Si le point (x,y) tend dans $R \times R$ vers $(a, -\infty)$ et si $a \neq +\infty$, $x + y$ tend vers $-\infty$: résulte de 1), 2).

4) Si le point $x + y$ tend dans $R \times R$ vers le point $(+\infty, a)$ et si $a \neq -\infty$, $x + y$ tend vers $+\infty$; s'il tend dans $R \times R$ vers $(-\infty, a)$ et si $a \neq +\infty$, $x + y$ tend vers $-\infty$: cela résulte de 1), 3) et de l'égalité $x + y = y + x$.

5) Si le point $x + y$ tend dans $R \times R$ vers l'un des points $(-\infty, +\infty)$ ou $(+\infty, -\infty)$, $x + y$ ne tend vers aucune limite. En effet, a étant un nombre réel quelconque, on a $\lim\limits_{\substack{x \in R \\ x \to +\infty}} (a-x) = -\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x \in R \\ x \to +\infty}} (x + (a-x)) = a$, ce qui montre que tout élément de R est une valeur limite de $x + y$ au point $(+\infty, -\infty)$.

Il en est de même au point $(-\infty, +\infty)$ puisque $x+y=y+x$.

Nous pouvons donc prolonger $x+y$ par continuité dans l'ensemble $A = (R \times \bar{R}) \cup (\bar{R} \times R) \cup \{(+\infty, +\infty)\} \cup \{(-\infty, -\infty)\}$, mais pas dans un ensemble plus grand. (x,y) étant élément de A, nous désignerons encore par $x+y$ la valeur prise en ce point par notre fonction prolongée. On aura donc

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \quad \text{si } x \neq -\infty$$
$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \quad \text{si } x \neq +\infty$$

Si $(x,y) \in A$, on a aussi $(y,x) \in A$.

Les fonctions $x+y$, $y+x$ égales sur $R \times R$ sont aussi égales sur $A \times A$. x,y,z étant trois éléments de $\bar{R}$, supposons que (y,z) et $(x,y+z)$ soient dans A. On a alors

$$x+(y+z) = \lim_{\substack{(u,v,w) \in R\times R\times R \\ u\to x,\, v\to y,\, w\to z}} u+(v+w) = \lim_{\substack{w\in R \\ w\to z}} \lim_{\substack{(u,v)\in R\times R \\ u\to x,\, u\to y}} ((u+v)+w)$$

ce qui montre que (x,y) et $(x+y,z)$ sont dans A et que l'on a $x+(y+z) = (x+y)+z$.

Soit maintenant a un nombre réel > 1. Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\in R \\ x\to+\infty}} a^x = +\infty$. Donnons-nous un voisinage $]u,+\infty]$ de $+\infty$ avec $u > 0$). En vertu de la proposition 1, chap. IV, § , la condition $x \in]\log_a u, +\infty[$ entraîne $a^x \in]u, +\infty[$, ce qui démontre notre assertion. De la même manière, on voit que $\lim\limits_{\substack{x\in R \\ x\to-\infty}} a^x = 0$. Au contraire, si $a < 1$, on a $\lim\limits_{\substack{x\in R \\ x\to+\infty}} a^x = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\in R \\ x\to-\infty}} a^x = +\infty$. Enfin, si $a = 1$, a^x est constante. La fonction a^x peut donc être prolongée par continuité sur $\bar{R}$, et la fonction prolongée établit, si $a \neq 1$, une homéomorphie entre $\bar{R}$ et l'intervalle $[0, +\infty]$. Sa fonction réciproque est une fonction continue sur $[0, +\infty]$ et qui prolonge la fonction $\log_a x$. Si $a > 1$, elle prend la valeur $+\infty$

pour $x = +\infty$, la valeur $-\infty$ pour $x = 0$.

Soit $P^* =]0, +\infty[$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. La formule $xy = 2^{\log_2 x + \log_2 y}$ montre que si $a \in P^* \cup \{+\infty\}$, la fonction xy tend vers $+\infty$ quand (x,y) tend dans $P^* \times P^*$ vers $(+\infty, a)$ ou vers $(a, +\infty)$, et qu'au contraire cette fonction ne tend vers aucune limite quand (x,y) tend vers $(0, +\infty)$ ou vers $(+\infty, 0)$. Désignons par M l'ensemble $(P^* \times P^*) \cup (\{+\infty\} \times P^*) \cup (P^* \times \{+\infty\})$: la fonction xy peut se prolonger par continuité dans M. x et y étant des éléments de $\overline{R}$ tels que $(x,y) \in M$, nous désignerons encore par xy la valeur prise par la fonction prolongée au point (x,y). On a donc

$$x(+\infty) = (+\infty).x = +\infty \qquad \text{si } x > 0$$

De plus, si $(x,y) \in M$, on a $(y,x) \in M$ et $yx = xy$. Si (y,z) et (x,yz) sont dans M, il en est de même de (x,y) et de (xy,z), et on a $x(yz) = (xy)z$.

Ce que nous venons de dire ne concerne que la multiplication des éléments > 0 de $\overline{R}$. En tenant compte des formules $xy = (-x)(-y)$ et $-xy = (-x)y \ \ x(-y)$, on en conclut que la fonction xy tend vers une limite quand le point (x,y) tend dans $R \times R$ vers l'un des points $(a, +\infty)$, $(a, -\infty)$, $(+\infty, a)$, $(-\infty, a)$, pourvu que a soit $\neq 0$. Nous laissons au lecteur le soin de trouver la valeur de cette limite dans les différents cas.

Considérons maintenant la fonction x^{-1}. En supposant $x \in P^*$, on a $\log_2 x^{-1} = -\log_2 x$. On en conclut que, si x tend vers $+\infty$ dans P^* , x^{-1} tend vers 0 et que si x tend vers 0 <u>dans</u> P^* , x^{-1} tend vers $-\infty$.

Au contraire, si x tend dans R vers 0, x^{-1} ne tend vers aucune limite. En effet, les points $+\infty$, $-\infty$ sont évidemment tous deux des points limites de la suite $(-1)^n n = 1/(-1)^n(1/n)$. quand n tend vers $+\infty$.

La formule $x^e = 2^{e \log_2 x}$ montre que, si e est un exposant strictement positif, la fonction x^e tend vers $+\infty$ quand x tend dans P^* vers $+\infty$; elle tend au contraire vers 0 si e est strictement négatif.

Si e n'est pas entier,,la fonction x^e n'est définie que pour $x \in P^*$. Au contraire, si e est un entier $\neq 0$, elle est définie sur R tout entier. Il résulte alors immédiatement de ce qu'on vient de dire que :

e <u>étant un exposant entier</u> > 0, <u>la fonction</u> x^e <u>tend vers</u> $+\infty$ <u>si</u> x <u>tend vers</u> $+\infty$ <u>dans</u> R. <u>Si</u> x <u>tend vers</u> $-\infty$ <u>dans</u> R <u>elle tend vers</u> $+\infty$ <u>ou</u> $-\infty$ <u>suivant que</u> e <u>est pair ou impair</u>.

La seconde partie de l'énoncé résulte de la première en remarquant que $(-x)^e$ est égal à x^e si e est pair, à $-x^e$ si e est impair.

<u>Si</u> e <u>est un exposant entier</u> < 0, <u>la fonction</u> x^e <u>tend vers</u> 0 <u>quand</u> x <u>tend dans</u> R <u>vers</u> $-\infty$ <u>ou vers</u> $+\infty$.

NOTIONS RELATIVES AUX FONCTIONS A ARGUMENT OU A VALEUR DANS $\overline{R}$.

I.

En vertu du théorème 3 bis, toute fonction définie sur un ensemble E et à valeurs dans $\overline{R}$ admet un maximum M et un minimum m sur E (plus petite borne supérieure et plus grande borne inférieure de f(E)). En général M et m n'appartiennent pas à f(E). Cependant on a la proposition suivante :

Proposition 1. Une fonction continue définie sur un espace compact E et à valeurs dans $\overline{R}$ atteint son maximum et son minimum (c'est-à-dire qu'il existe des points p,q de E tels que $f(p) \in M$, $f(q) \in m$.)

En effet, l'ensemble f(E) étant compact et par suite fermé et non vide contient sa plus petite borne supérieure et sa plus grande borne inférieure.

II.

Considérons une application f dans $\overline{R}$ d'un filtre $\mathcal{F}$. Soit L l'ensemble des valeurs limites de f sur $\mathcal{F}$: L est fermé et n'est pas vide.

Définition 1. Le plus grand et le plus petit élément de L s'appellent respectivement la plus grande limite et la plus petite limite de f sur $\mathcal{F}$. On les désigne par $\overline{\lim}_{\mathcal{F}} f$, $\underline{\lim}_{\mathcal{F}} f$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'application f soit convergente est que $\overline{\lim}_{\mathcal{F}} f = \underline{\lim}_{\mathcal{F}} f$. Dans ce cas, f converge vers la valeur commune de ces deux éléments.

Proposition 2. <u>Soit $\mathcal{F}^*$ le filtre ordonné des ensembles filtrants de $\mathcal{F}$. On a</u>

$$\overline{\lim}_{\mathcal{F}} f = \lim_{\mathcal{F}^*}(\max_X f) \; ; \; \underline{\lim}_{\mathcal{F}} f = \lim_{\mathcal{F}^*}(\min_X f)$$

<u>où</u> X <u>désigne un élément générique de</u> $\mathcal{F}^*$ <u>, et</u> $\max_X f$, $\min_X f$ <u>le maximum et le minimum de</u> f <u>sur</u> X .

L'ensemble L des valeurs limites de f sur $\mathcal{F}$ est égal à $\bigcap_{X \in \mathcal{F}^*} \overline{f(X)}$; or, si $X \in \mathcal{F}^*$, $\max_X f$ est supérieur à tous les éléments de $\overline{f(X)}$, donc aussi à ceux de L, et en particulier à $\overline{\lim}_{\mathcal{F}} f$. Si a est un élément strictement supérieur à $\overline{\lim}_{\mathcal{F}} f$, on a $L \cap [a, +\infty] = \emptyset$; comme les ensembles $\overline{f(X)} \cap [a, +\infty]$ sont compacts l'un au moins est vide. Il existe donc un $X_0 \in \mathcal{F}^*$ tel que $\overline{f(X_0)} \in [-\infty, a($, d'où $\max_{X_0} f < a$. Si X est un élément de $\mathcal{F}^*$ contenu dans X_0, on a $\overline{\lim}_{\mathcal{F}} f \leq \max_X f < a$, ce qui démontre la première formule. Démonstration analogue pour la seconde.

On a d'autre part, si λ est un nombre réel

$$(1) \quad \begin{array}{lll} \overline{\lim}_{\mathcal{F}} \lambda f = \lambda \overline{\lim}_{\mathcal{F}} f & \underline{\lim}_{\mathcal{F}} \lambda f = \lambda \underline{\lim} f & \text{si } \lambda > 0 \\ \overline{\lim}_{\mathcal{F}} \lambda f = \lambda \underline{\lim}_{\mathcal{F}} f & \underline{\lim}_{\mathcal{F}} \lambda f = \lambda \overline{\lim} f & \text{si } \lambda < 0 \end{array}$$

En effet, si L est l'ensemble des valeurs limites de f sur $\mathcal{F}$, et si $\lambda \neq 0$, λL est celui des valeurs limites de λf .

Considérons maintenant deux applications f, g d'un même filtre $\mathcal{F}$ dans $\overline{R}$. Supposons qu'il existe un ensemble filtrant X de $\mathcal{F}$ tel que, pour tout $x \in X$, le couple $(f(x), g(x))$ soit différent des couples $(+\infty, -\infty)$ et $(-\infty, +\infty)$. Dans ces conditions, la fonction f + g est définie dans X , et on peut par suite définir les éléments $\overline{\lim}_{\mathcal{F}}(f+g)$, $\underline{\lim}_{\mathcal{F}}(f+g)$.

Supposons de plus que le couple $(\overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, f, \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, g)$ soit aussi différent des couples $(+\infty, -\infty)$ et $(-\infty, +\infty)$. Dans ces conditions, on a

$$(2) \qquad \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\,(f+g) \leqslant \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, f + \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, g$$

En effet, il existe un filtre $\mathcal{F}_1$ plus fin que $\mathcal{F}$ tel que $f+g$ converge sur $\mathcal{F}_1$ vers $\overline{\lim}_{\mathcal{F}}\,(f+g)$. Il existe un filtre $\mathcal{F}_2$ plus fin que $\mathcal{F}_1$ tel que f et g convergent sur $\mathcal{F}_2$ vers des limites a, b. En vertu de la continuité de la fonction $x+y$ sur son domaine de définition, on a $\overline{\lim}_{\mathcal{F}}\,(f+g) = \lim_{\mathcal{F}_2}(f+g) = a+b$. Comme d'autre part $a \leqslant \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, f$, $b \leqslant \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, g$, l'inégalité (2) est démontrée.

De plus, si l'une des applications f, g est convergente, l'inégalité (2) peut être remplacée par une égalité. En effet supposons f convergente. Il existe un filtre $\mathcal{F}_1$ plus fin que $\mathcal{F}$ tel que g converge sur $\mathcal{F}_1$ vers $\overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, g$; alors $f+g$ converge sur $\mathcal{F}_1$ vers $\lim_{\mathcal{F}} f + \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, g$, et par suite le second membre de l'inégalité (2) est dans ce cas inférieur au premier.

On démontrerait de même que, si le couple $(\underline{\lim}_{\mathcal{F}}\, f, \underline{\lim}_{\mathcal{F}}\, g)$ est différent des couples $(+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)$, on a

$$(2') \qquad \underline{\lim}_{\mathcal{F}}\,(f+g) \geqslant \underline{\lim}_{\mathcal{F}}\, f + \underline{\lim}_{\mathcal{F}}\, g .$$

Si les ensembles filtrants de $\mathcal{F}$ sont les voisinages d'un point p dans un espace topologique E, les éléments $\overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, f$, $\underline{\lim}_{\mathcal{F}}\, f$ se désignent par $\overline{\lim}_{x \to p} f(x)$, $\underline{\lim}_{x \to p} f(x)$. Si ce sont les intersections des voisinages de p avec un ensemble A tel que $p \in \bar{A}$, ils se désignent par $\overline{\lim}_{\substack{x \in A \\ x \to p}} f(x)$, $\underline{\lim}_{\substack{x \in A \\ x \to p}} f(x)$. On a

$$(3) \qquad \underline{\lim}_{x \to p} f(x) \leqslant \underline{\lim}_{\substack{x \in A \\ x \to p}} f(x) \leqslant \overline{\lim}_{\substack{x \in A \\ x \to p}} f(x) \quad \overline{\lim}_{x \to p} f(x).$$

III

Définition 2. Une application f d'un espace topologique dans $\overline{R}$ est dite semi-continue supérieurement au point p si on a $f(p = \overline{\lim}_{x \to p} f(x)$. Elle est dite semi-continue inférieurement en p si $f(p) = \underline{\lim}_{x \to p} f(x)$.

Il résulte de là qu'une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue au point p est qu'elle soit simultanément semi-continue supérieurement et inférieurement au point p.

Si f est semi-continue supérieurement (ou inférieurement) en tous les points de $\mathcal{E}$, elle est dite semi-continue supérieurement (ou inférieurement) sur $\mathcal{E}$.

Proposition 3. Pour que f soit semi-continue supérieurement sur $\mathcal{E}$, il faut et suffit que, pour tout $a \in R$, l'ensemble $\overset{-1}{f}([a, +\infty])$ soit fermé dans $\mathcal{E}$.

1) Supposons f semi-continue supérieurement. a étant un nombre réel, soit p un point adhérent à l'ensemble $A = \overset{-1}{f}([a, +\infty])$. On a $f(p) = \overline{\lim}_{x \to p} f(x) \geqslant \overline{\lim}_{\substack{x \in A \\ x \to p}} f(x) \geqslant a$, d'où $p \in A$: A est fermé.

2) Supposons que, pour tout $a \in R$, l'ensemble $\overset{-1}{f}([a, +\infty])$ soit fermé. Il en est encore de même pour tout $a \in \overline{R}$, car $\overset{-1}{f}([-\infty, +\infty]) = \mathcal{E}$ et $\overset{-1}{f}([+\infty, +\infty]) = \bigcap_{a \in R} \overset{-1}{f}([a, +\infty])$. p étant un point de $\mathcal{E}$, soit $a = \overline{\lim}_{x \to p} f(x)$: on a $f(p) \leqslant a$. ~~xxxx~~ D'autre part, si $b < a$, p est adhérent à l'ensemble $\overset{-1}{f}([b, +\infty])$, qui est fermé ; donc $p \in \bigcap_{b < a} \overset{-1}{f}([b, +\infty]) = \overset{-1}{f}([a, +\infty])$, d'où $f(p) \geqslant a$ et $f(p) = a$, ce qui démontre la semi-continuité de f.

Proposition 4. Si f est semi-continue supérieurement en un point p, et si λ est un nombre réel $\neq 0$, λf est semi-continue supérieurement en p si $\lambda > 0$, et semi-continue inférieurement en p si $\lambda < 0$.

Résulte immédiatement de la formule (1)

Proposition 5. Pour qu'une fonction f soit semi-continue inférieurement, il faut et suffit que, pour tout $a \in R$, l'ensemble $\overset{-1}{f}([-\infty, a])$ soit fermé.

Résulte immédiatement des proposition 3,4.

Proposition 6. Soient f, g des fonctions semi-continues supérieurement sur $\mathcal{E}$. Si, pour tout $x \in \mathcal{E}$, le couple $(f(x), g(x))$ est différent des couples $(-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty)$, la fonction $f + g$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{E}$.

En effet, p étant un point de $\mathcal{E}$, on a $\overline{\lim\limits_{x \to p}} (f(x) + g(x))$. $\leqslant \overline{\lim\limits_{x \to p}} f(x) + \overline{\lim\limits_{x \to p}} g(x) = f(p) + g(p)$, et inversement, $f(p) + g(p) \leqslant \underline{\overline{\lim\limits_{x \to p}}} (f(x) + g(x))$.

On peut évidemment dans la proposition 6 remplacer le mot "supérieurement" par "inférieurement".

IV

Proposition 7. Une application monotone f d'un filtre $\mathcal{F}$ ordonné dans $\overline{R}$ est convergente.

Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un filtre ordonné croissant et que f soit croissante. Soit a la plus petite borne supérieure de $f(\mathcal{F})$. Si $a = -\infty$, f est constante et égale à $-\infty$ sur $\mathcal{F}$. Sinon, pour chaque nombre $b < a$, il existe un $x \in \mathcal{F}$ tel que $b < f(x)$; l'ensemble X des éléments de $\mathcal{F}$ supérieurs à b est un ensemble filtrant de $\mathcal{F}$ et on a $f(X) \in \,]b, a]$, d'où $\lim_{\mathcal{F}} f = a$, ce qui démontre la proposition. Démonstrations analogues dans les autres cas.

Il résulte de là que toute suite monotone de nombres réels est convergente dans $\overline{R}$; pour qu'elle soit convergente dans R , il faut et suffit que sa limite soit dans R , donc que la suite soit bornée.

D'autre part, considérons une application monotone f d'une partie A de $\overline{R}$ dans $\overline{R}$. p étant un point de $\overline{A}$, supposons que p appartienne à l'adhérence de l'ensemble A_p des éléments de A strictement inférieurs à p. L'ensemble A_p possède une structure d'ordre induite par celle de $\overline{R}$, donc aussi une structure de filtre ordonné croissant. Le filtre ainsi obtenu sur A_p est identique, comme on le voit tout de suite, à la trace sur A_p du filtre sur $\overline{R}$ engendré par les voisinages de p. On en conclut que $f(x)$ tend vers une limite quand x tend vers p sur A_p . De même, si p est adhérent à l'ensemble des éléments de A strictement supérieurs à p, la limite $\lim\limits_{\substack{x > p,\, x \in A \\ x \to p}} f(x)$ existe.

V

Proposition 8. L'ensemble D des points de discontinuité d'une fonction monotone f définie sur un intervalle de $\overline{R}$ et à valeurs dans $\overline{R}$ est dénombrable.

Supposons par exemple f croissante. A chaque point $p \in I$ associons l'intervalle $I_p = \,)\underline{\lim}_{x \to p} f(x), \overline{\lim}_{x \to p} f(x)($. Pour que $p \in D$, il faut et suffit que $I_p \neq \emptyset$. Soient p, q deux points de D tels que $p < q$; soit r un nombre tel que $p < r < q$: si $x \in I \cap [-\infty, r($, on a $f(x) \leqslant f(r)$; comme $[-\infty, r($

est un voisinage de p, on a $\overline{\lim}_{x \to p} f(x) \leqslant f(r)$; on voit de même que $f(r) \geqslant \underline{\lim}_{x \to p} f(x)$. On a donc $I_p \cap I_q = \emptyset$, et, en particulier, $I_p \neq I_q$. Or la famille des intervalles I_p, pour $p \in D$, est dénombrable (§ 1, prop. 4) : il en est donc de même de D.

Proposition 9. *f étant une fonction définie dans un intervalle* I *de* $\overline{R}$ *et à valeurs dans* $\overline{R}$, *pour que* f *soit une homéomorphie de* I *avec un intervalle de* $\overline{R}$, *il faut et suffit que* f *soit strictement monotone et continue sur* I .

1) Supposons que f soit une homéomorphie de I avec f(I). Si a,b sont des éléments de I, l'image réciproque par f de l'intervalle fermé d'extrêmités f(a), f(b) est un ensemble connexe, donc un intervalle, qui contient a et b, donc aussi l'intervalle fermé d'extrêmités a,b. Donc, si $a \leqslant b$, $f([a,b])$ est contenu dans l'intervalle fermé d'extrêmités f(a), f(b), ce qui prouve que f est monotone. Etant une application bi-univoque, elle est strictement monotone.

2) Supposons f strictement monotone et continue. f(I) est un ensemble connexe, donc un intervalle, et f est une application bi-univoque et continue de I sur f(I). I étant localement compact, f est bicontinue.
