RÉDACTION NON NUMÉROTÉE

COTE HCR 000

TITRE OBSERVATIONS CARTAN-WEIL
SUR LA RÉDACTION DES ESPACES UNIFORMES

FONDS HENRI CARTAN

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 10

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 10

HCR 000

OBSERVATIONS CARTAN-WEIL
SUR LA REDACTION DES ESPACES UNIFORMES.

I. Structures uniformes et relations d'équivalence.

Notion de : relation d'équiv. compatible avec une structure : Si l'appl. de E dans $\tilde{E}$ donne de $\mathfrak{U}$ une image $\tilde{\mathfrak{U}}$, et il se trouve que $\tilde{\mathfrak{U}}$ a pour image inverse $\mathfrak{U}$.

Il y a intérêt à ne pas poser tout d'abord l'axiome U-I des structures uniformes. Définir une structure uniforme par :

U-I. Tout ensemble du filtre $\mathfrak{U}$ contient la diagonale Δ.

U-II et U-III comme chez Dieudonné (en supprimant bien entendu la correspondance $V_1 = \rho(V)$ et le recours à l'axiome du choix, parfaitement scurrile ici).

Modifier en conséquence les axiomes des sytèmes fondamentaux d'entourages (p. 97).

Remarque : une relation d'équivalence est un cas particulier d'une structure uniforme ($\mathfrak{U}$ a pour base un ensemble unique R, contenant Δ , et satisfaisant à $R = \overset{-1}{R} = R^2$).

Inversement, une structure uniforme définit une relation d'équivalence R = intersection de tous les V de $\mathfrak{U}$. E désignant l'ensemble initial, soit $\tilde{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Considérons la famille des $R \circ V \circ R$ où V parcourt $\mathfrak{U}$; elle constitue une base de $\mathfrak{U}$ (système fondamental d'entourages), car soit V donné et V_1 tel que $(V_1)^3 \subset V$; alors $R \circ V_1 \circ R \subset V$,

c.q.f.d.

Or chaque $R \circ V \circ R$ définit une relation $\tilde{V}$ dans $\tilde{E}$. D'où un filtre $\tilde{\mathfrak{U}}$ sur $\tilde{E} \times \tilde{E}$, et une structure uniforme sur $\tilde{E}$. Cette structure satsifait à l'axiome de séparation :

U-I bis. L'intersection des ensembles de $\mathfrak{U}$ se réduit à la diagonale $\tilde{\Delta}$.

Cela posé ; lorsqu'on aborde (p. 100) la structure topologique définie par une structure uniforme, on remarquera que l'axiome U-Ibis est <u>nécessaire</u> pour que l'axiome de séparation T_1 (Fréchet) soit vérifié ; et elle est <u>suffisante</u> pour que l'espace soit de Hausdorff et même régulier (p. 103).

Dorénavant, un E étant donné, on n'astreindra pas une structure uniforme sur E à satisfaire à U-I bis, mais il sera entendu, lorsqu'on parlera d'un E comme <u>espace uniforme</u>, que c'est de l'espace des classes d'équivalence qu'il s'agit (A. W. n'aime pas ces manières de parler). Par exemple, c'est ce qu'on fera lorsqu'il s'agira de <u>compléter</u> un E uniforme : on définira l'ensemble $\mathfrak{F}$ des filtres de Cauchy sur E, et on dotera $\mathfrak{F}$ d'une structure uniforme convenable ; l'espace complété sera <u>l'espace uniforme</u> $\mathfrak{F}$, donc l'espace $\mathcal{E}$ des classes d'équivalence de $\mathfrak{F}$ doué de la structure uniforme envisagée. C'est encore ce qu'on fera, dans la théorie de l'intégration, lorsqu'on parlera de l'espace L^p des fonctions sommables ; il s'agira de l'espace des classes d'équivalence.

II. <u>Démonstration du théorème fondamental</u> (p. 117 et suivantes de la rédaction).

<u>Unicité</u> : comme rédigé. Pour l'<u>existence</u>, commencer par le lemme :

<u>Lemme. Soit E un espace uniforme</u> séparé<u>, E' un sous-ensemble partout dense tel que tout filtre de Cauchy</u> Φ' <u>sur E' engendre sur E un filtre convergent. Alors E est complet</u>.

En effet, soit Φ un filtre de Cauchy sur E. A chaque entourage V de la structure uniforme et à chaque $A \in \Phi$, associons l'ensemble $V(A)$. Ces ensembles constituent la base d'un filtre Ψ, car soient A, A', V, V', et $W = V \cap V'$; on a

$$W(A \cap A') \subset V(A) \cap V'(A') .$$

Le filtre Ψ est un filtre de Cauchy, car étant donné V arbitraire, prenons V_1 tel que $V_1^3 \subset V$, puis $A \in \Phi$ tel que $A \times A \subset V_1$;

alors $V_1(A) \times V_1(A) \subset V$

et comme $V_1(A) \in \Psi$, Ψ est bien un filtre de Cauchy. Cela étant, la trace de Ψ sur E' est un filtre Ψ', car chaque $V(A)$ a sur E' une trace non vide, E' étant partout dense dans E. Par hypothèse, le filtre Ψ' engendre sur E un filtre convergent ; a fortiori Ψ est convergent (~~note Dieudonné : ce point n'est pas aussi évident que semble dire Cartan, car le filtre engendré par Ψ' est plus fin que Ψ ; c'est le fait que Ψ est un filtre de Cauchy, et la prop. 3, p. 112 qui entraînent la proposition ; on s'est d'ailleurs déjà servi de cette proposition p. 113, prop. 5 ; il serait bon de l'énoncer explicitement~~). Donc, Φ, qui est plus fin que Ψ, est convergent. c.q.f.d.

Ce lemme étant établi, nous allons définir un $\mathcal{E}$ uniforme (~~non séparé~~) tel que E soit isomorphe à un sous-ensemble partout dense de $\mathcal{E}$, et que tout filtre de Cauchy sur E engendre sur $\mathcal{E}$ un filtre convergent. Cela démontrera le théorème.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{F}$ des filtres de Cauchy sur E. Nous allons mettre sur $\mathfrak{F}$ une structure uniforme convenable, de façon que l'espace cherché soit l'espace des classes d'équivalence de $\mathfrak{F}$ avec la structure uniforme correspondante.

Nous prenons sur $\mathfrak{F}$ la structure uniforme suivante : deux filtres de Cauchy Φ_1 et Φ_2 (sur E) sont "voisins" s'ils contiennent tous deux un même ensemble de E qui soit "petit". D'une façon précise : à chaque entourage symétrique V (du filtre $\mathfrak{U}$ sur $E \times E$) associons l'ensemble $\tilde{V}$ des couples (Φ_1, Φ_2) tels qu'il existe un $A \subset E$ satisfaisant à $A \times A \subset V$, $A \in \Phi_1$, $A \in \Phi_2$.

HCR000

5

Les $\tilde{V}$ constituent, sur l'ensemble $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$, la base d'un filtre satisfaisant aux axiomes U-I, U-II, U-III des structures uniformes. En effet :

1°) $(\Phi, \Phi) \in \tilde{V}$ quels que soient Φ et $\tilde{V}$, parce que Φ est un filtre de Cauchy. D'où U-I.

2°) D'après cela, $\tilde{V}$ n'est pas vide ; les $\tilde{V}$ constituent la base d'un filtre, car soient $\tilde{V}$ et $\tilde{V'}$: si $V'' = V \cap V'$; on a évidemment

$$\tilde{V''} \subset \tilde{V} \cap \tilde{V'} .$$

3°) Les ensembles $\tilde{V}$ sont symétriques, donc U-II est vérifié.

4°) Si $\tilde{V}$ est donné, il existe $\tilde{V}_1$ tel que $(\tilde{V}_1)^2 \subset \tilde{V}$; il suffit pour cela que $V_1^2 \subset V$; en effet, si l'on a $(\Phi_1, \Phi_2) \in \tilde{V}_1$, $(\Phi_2, \Phi_3) \in \tilde{V}_1$ il existe A et B tels que $A \times A \subset V_1$, $B \times B \subset V_1$, $A \in \Phi_1$, $A \in \Phi_2$, $B \in \Phi_2$, $B \in \Phi_3$, donc $A \cap B \in \Phi_2$, et par suite $A \cap B \neq \emptyset$; mais alors (voir remarques Weil ci-après), $(A \cup B) \times (A \cup B) \subset V_1^2 \subset V$, et $A \cup B \in \Phi_1$, $A \cup B \in \Phi_3$; donc $(\Phi_1, \Phi_3) \in \tilde{V}$.

c.q.f.d.

<u>Remarques Weil</u>.

Il ne faut pas abuser du calcul des correspondances. En particulier (cf. démonstration de Cartan) le calcul avec les formules $A \times A \subset V$ est encombrant. Voici une remarque qui le simplifie :

Si $A \times A \subset V$, $B \times B \subset V'$, <u>et si</u> $A \cap B \neq \emptyset$, on a $(A \cup B) \times (A \cup B) \subset VV' \cup V'V$.

La vérification est immédiate ; mais la démonstration suivante n'est pas sans intérêt :

On a évidemment $(A \cup B) \times (A \cup B) = (A \times A) \cup (A \times B) \cup \cup (B \times A) \cup (B \times B)$. Mais on a d'autre part :

$$\begin{aligned} (A \times A).(B \times B) &= A \times B \quad \text{si} \quad A \cap B \neq \emptyset \\ &= \emptyset \quad \text{si} \quad A \cap B = \emptyset . \end{aligned}$$

En réalité, ce qui intervient dans le théorème de "complétion" (je trouve ce vocable barbare) est la famille $\mathcal{F}_V$ des ensembles A tels que $A \times A \subset V$ (ensembles "petits d'ordre V") ; autrement dit, c'est la généralisation de la notion "ensemble de diamètre $< \varepsilon$ " qui intervient, la notion qui généralise le "couple de points de distance $< \varepsilon$ " n'intervenant qu'à titre d'intermédiaire parfois encombrant. Cela donne une généralisation des espaces uniformes, à laquelle je suis en train de réfléchir. Pour l'instant, les remarques ci-dessus doivent permettre de simplifier un peu la rédaction.

Soit donc $\mathfrak{F}$ l'ensemble des filtres de Cauchy sur E, muni de la structure uniforme $\tilde{\mathcal{U}}$ ci-dessus. A chaque $x \in E$ associons le filtre Φ_x ayant pour base $\{x\}$; c'est un élément $\dot{x}$ de $\mathfrak{F}$. On définit ainsi une application biunivoque de E sur une partie $\dot{E}$ de $\mathfrak{F}$; je dis que c'est une <u>isomorphie</u> des espaces uniformes E et $\dot{E}$ (ce dernier défini par la structure uniforme induite sur $\dot{E}$ par celle de $\mathfrak{F}$). En effet, on a une base pour la structure uniforme de $\dot{E}$ en prenant pour chaque V l'ensemble formé des couples $(\dot{x}, \dot{y})$ tels que $(\dot{x}, \dot{y}) \in \tilde{V}$; ~~c'est-à-dire l'ensemble correspondant aux~~ les couples (x,y) ~~tels que~~ correspondants sont ceux pour lesquels

$$(1) \qquad (\Phi_x, \Phi_y) \in \tilde{V}.$$

Or cette relation signifie l'existence d'un $A \subset E$ tel que

$$x \in A, \quad y \in A, \quad A \times A \subset V$$

Pour cela, il faut et il suffit que

$$(2) \qquad (x, y) \in V.$$

les relations (1) et (2) sont donc équivalentes.

Cela étant, cherchons la trace sur $\dot{E}$ des voisinages d'un élément Φ de $\mathfrak{F}$. A chaque V on associe les $x \in E$ tels que $(\Phi_x, \Phi) \in \tilde{V}$; cette relation signifie : x appartient à un A tel que $A \times A \subset V$, $A \in \Phi$; appelons $V(\Phi)$ la réunion des A satisfaisant à ces deux conditions : la trace, sur $\dot{E}$, du filtre des voisinages de Φ , a pour base les images $\dot{V}(\Phi)$ des $V(\Phi)$. D'ailleurs aucun des $V(\Phi)$

n'est vide, puisque Φ est un filtre de Cauchy ; donc $\dot{E}$ est partout dense dans $\mathfrak{F}$. En outre, l'image $\dot{\Phi}$ de Φ, considéré comme famille de parties de $\dot{E}$, engendre un filtre sur $\mathfrak{F}$ qui converge vers l'élément Φ de $\mathfrak{F}$. En effet tout voisinage de Φ dans $\mathfrak{F}$, contient un $\dot{V}(\Phi)$; et chaque $\dot{V}(\Phi)$ appartient au filtre $\dot{\Phi}$, car si $A \in \Phi$ et $A \times A \subset V$, alors $V(\Phi) \supset A$, donc $V(\Phi) \in \Phi$ et par suite $\dot{V}(\Phi) \in \dot{\Phi}$.

En résumé, $\dot{E}$ est partout dense dans $\mathfrak{F}$, et tout filtre de Cauchy sur $\dot{E}$ engendre sur $\mathfrak{F}$ un filtre convergent ; cela achève la démonstration. (Note Dieudonné : c'est un peu vite dit, car la démonstration nécessite encore les points suivants (triviaux d'ailleurs): 1°- l'application canonique de $\mathfrak{F}$ sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des classes d'équivalence de $\mathfrak{F}$ applique biunivoquement $\dot{E}$ sur une partie E' de $\mathcal{E}$; 2°- E', comme sous-espace uniforme de $\mathcal{E}$, est isomorphe à $\dot{E}$; E' est partout dense dans $\mathcal{E}$).

III. Uniformité des compacts.

Soit E un compact ; on va montrer que la famille des ouverts $\Omega \subset E \times E$ qui contiennent la "diagonale" Δ définit une structure uniforme sur E. Tout revient à montrer qu'à tout Ω correspond un Ω' tel que $\Omega'^2 \subset \Omega$. Sinon, toute fermeture $\overline{\Omega}'^2$ aurait avec le complémentaire F de Ω dans $E \times E$ une intersection non vide ; F est compact, toute intersection finie d'ensembles $\overline{\Omega}'^2$ contient un $\overline{\Omega}'^2$, donc les $\overline{\Omega}'^2$ auraient tous un élément commun (x,y) avec $x \neq y$. Or, soient, dans E : ω_1, ω_2, respectivement, des voisinages ouverts de x, y ; f_1, f_2, des voisinages fermés de x, y ; de telle sorte que $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$, $f_1 \subset \omega_1$, $f_2 \subset \omega_2$; soit $\omega_3 = E - f_1 - f_2$; on prend $\Omega' = \bigcup_{i=1,2,3} (\omega_i \times \omega_i')$.

HC R 000

8

(On peut encore un peu simplifier, par divers procédés ; en particulier, on définira la structure par les <u>fermés</u> Φ dans $E \times E$ tels que tout point de Δ soit intérieur à Φ. Il faut alors qu'on ait démontré dans les compacts le théorème, d'ailleurs facile et intéressant par lui-même : si E, E', E" sont trois espaces, si F est compact dans $E \times E'$, F' compact dans $E' \times E''$, alors FF' est compact dans $E \times E''$. Il y a un autre théorème intéressant : F étant encore compact, si F' est seulement supposé fermé (non compact), FF' est fermé) .

IV. <u>Compacité des uniformes</u> (p. 130 et suiv. de la rédaction).

Pour qu'un E uniforme soit <u>compact</u>, il faut qu'il soit complet, car tout filtre de Cauchy sur un compact possède au moins un point adhérent, donc est convergent (prop. 3, p. 112). Inversement, à quelle condition un uniforme complet est-il compact ? Plus généralement : <u>Etant donné un uniforme E, à quelle condition l'espace complété $\overline{E}$ est-il compact</u> ? Nous dirons dans ce cas que l'espace uniforme E est <u>relativement compact</u>.

<u>Théorème 3</u>. <u>Pour qu'un uniforme E soit relativement compact, il faut et il suffit qu'à tout entourage V on puisse associer un recouvrement de E avec un nombre fini de E_i satisfaisant à</u> $E_i \times E_i \subset V$.

1°- La condition est <u>nécessaire</u>. Car soit $\overline{V}$ un entourage (sur $\overline{E} \times \overline{E}$) dont la trace sur $E \times E$ soit contenue dans V . A chaque $x \in \overline{E}$, attachons un ouvert U contenant x, tel que $U \times U \subset \overline{V}$, puis recouvrons $\overline{E}$ avec un nombre <u>fini</u> de tels ouverts U_i , ce qui est possible puisque $\overline{E}$ est compact par hypothèse. Si E_i est la trace de U_i sur E, on aura bien

$$(1) \qquad E = \bigcup_i E_i \;, \qquad E_i \times E_i \subset V .$$

2°- La condition est <u>suffisante</u>. Pour montrer que E est relativement compact, il suffit de montrer que tout ultrafiltre Φ sur E engendre un filtre convergent sur $\bar{E}$ (cf. p. 83 de la rédaction). Pour cela, il suffit, $\bar{E}$ étant complet, de montrer que tout ultrafiltre Φ sur E est de Cauchy. Or, soit donné V, et prenons un recouvrement satisfaisant à (1). Si on montre que l'un au moins des E_i appartient à Φ, on aura montré que Φ est de Cauchy. Or, si on avait $E_i \notin \Phi$ pour tout i, on aurait, Φ étant un ultrafiltre $\complement E_i \in \Phi$ d'où $\bigcap_i \complement E_i \neq \emptyset$, ce qui est contradictoire avec $\bigcup_i E_i = E$.

V. <u>Mode général de définition d'une structure uniforme</u>.

Cartan demande qu'on reporte à cette rubrique ~~la structure uniforme induite et~~ le produit d'espaces uniformes (dont on bloquera les propriétés, au lieu de les éparpiller au cours du chapitre). Tout cela viendrait après la compacité des uniformes (note Dieudonné : il n'y a pas d'objection pour le produit d'espaces uniformes, mais c'est impossible pour la structure induite, dont on se sert à plusieurs reprises dans le cours du chapitre).

La notion essentielle est la suivante :

<u>Soit, sur un</u> E, <u>une famille de fonctions</u> f_ι <u>à valeurs respectivement dans des</u> F_ι <u>uniformes</u>. <u>Parmi les structures uniformes de E qui rendent ces</u> f_ι <u>uniformément continues, il en est une ~~plus~~ moins ~~grossière~~ fine que toutes les autres</u>. On l'obtient en prenant arbitrairement un nombre <u>fini</u> de f_ι, et, pour chaque f_ι, un entourage V_ι sur $F_\iota \times F_\iota$; on considère l'ensemble des couples (x, y) ($x \in E$, $y \in E$) tels que l'on ait $(f_\iota(x), f_\iota(y)) \in V_\iota$, pour chacun des ι considérés (en nombre fini) ; ces ensembles forment

la base d'un filtre $\mathfrak{U}$ sur $E \times E$, et ce filtre définit la structure uniforme cherchée.

En particulier, si on a <u>une</u> application f de E dans un F uniform on trouve sur E ce qu'on peut appeler la structure uniforme induite le filtre $\mathfrak{U}$ sur $E \times E$ est l'image inverse du filtre $\mathfrak{V}$ sur $F \times F$ (note Dieudonné : la dénomination "structure uniforme image inverse de celle de F par f" me paraît préférable). Cas plus particulier : E est sous-ensemble d'un F uniforme.

Si E est un produit d'uniformes F_ι, on obtient la structure uniforme de E en rendant uniformément continues les applications de E dans chacun des F_ι (coordonnées).

D'autre part, on a le théorème important (dans le cas général d'une famille de f_ι) :

<u>Si les F_ι sont relativement compacts, l'espace uniforme E est relativement compact</u>. (Conséquence immédiate du critère de compacité des uniformes).

Dans le cas général, supposons E doué initialement d'une topologie (T), les f_ι étant continues (à valeurs dans des uniformes F_ι). Ces fonctions définissent une structure uniforme sur E ; la topologie correspondante est <u>plus grossière</u> que la topologie initiale. Elle est identique à cette dernière dans le <u>seul</u> cas où à chaque $x_0 \in E$ et à chaque voisinage $A(x_0)$ de la topologie (T), on peut associer une f_ι et un entourage V_ι dans $F_\iota \times F_\iota$, tels que l'ensemble des $x \in E$ défini par $(f_\iota(x), f_\iota(x_0)) \in V_\iota$ soit contenu dans $A(x_0)$. Dans un chapitre ultérieur, on montrera que cette condition est remplie si E est uniformisable et si on prend pour f_ι la famille des fonctions continues réelles, à valeurs entre 0 et 1. E, muni de la structure uniforme correspondante, sera relativement compact.