RAPPORTS CARTAN SUR L'INTEGRATION

Rédaction n° 018

Nombre de pages : 21

Nombre de feuilles : 21

Intégration

Rapport Cartan

RAPPORTS CARTAN SUR L'INTEGRATION.

I

MESURES.

Généralités sur les mesures de Radon, sur un espace compact.

E compact. Topologie $\mathcal{C}$ sur $\mathfrak{P}(E)$, que voici : étant donné $A \in \mathfrak{P}(E)$, on obtient un voisinage de A en prenant arbitrairement F fermé $\subset A$ et U ouvert $\supset A$, puis considérant l'ensemble des $X \in \mathfrak{P}(E)$ tels que $F \subset X \subset U$. Les voisinages $V(F,U)$ ainsi définis constituent, par définition, un système fondamental de voisinages de A ; les $V(F,U)$ sont à la fois ouverts et fermés (pour la topologie $\mathcal{C}$), ce qui prouve que $\mathfrak{P}(E)$, muni de la topologie $\mathcal{C}$, est totalement discontinu ; il est aussi complètement régulier. Les ensembles fermés de E (ou les ensembles ouverts) forment une partie partout dense de $\mathfrak{P}(E)$.

On appelle mesure de Radon (ou, plus brièvement, mesure) sur E, une fonction μ définie sur une partie $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{P}(E)$, telle que

1° $\mathfrak{F}$ contienne toutes les parties fermées de E ;

2° μ (à valeurs dans un groupe abélien topologique complet) est additive ($\mu(A \cup B) = \mu(A)+\mu(B)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$), continue pour la topologie $\mathcal{C}$, et non prolongeable par continuité à d'autres éléments de $\mathfrak{P}(E)$.

On voit facilement que $\mathfrak{F}$ est une phratrie.

Dans le cas où μ est à valeurs réelles, les conditions ci-dessus entraînent que μ est majorée par une ν additive et continue, à valeurs positives ; de même $-\mu$; μ est donc "relativement bornée" (ou "à variation bornée").

Une mesure est entièrement définie par ses valeurs sur un ensemble partout dense dans $\mathfrak{P}(E)$ (au sens de la topologie $\mathcal{C}$) ;

ces valeurs doivent définir une fonction continue μ_o, qui soit prolongeable par continuité aux ensembles fermés (condition remplie d'elle-même si la fonction est à valeurs réelles et "croissante"), et dont le prolongement aux ensembles fermés jouisse de la propriété d'additivité (cette dernière condition est remplie, par exemple, si μ_o est définie, continue et additive sur une phratrie). On obtient alors la mesure de Radon en prolongeant μ_o par continuité ; c'est à cela que se réduit le problème classique de la "mesure des ensembles" (dans le cas particulier d'une mesure positive).

Propriétés particulières des mesures à valeurs réelles $\geqslant 0$.

1° Si μ_o, additive, à valeurs $\geqslant 0$ est définie sur une phratrie, il suffit qu'elle soit semi-continue inférieurement pour qu'elle soit continue.

2° Si μ_o additive, à valeurs $\geqslant 0$, est définie pour les fermés, la condition pour que μ_o soit continue s'exprime ainsi : pour tout ordonné filtrant décroissant de fermés F_i, d'intersection F, on a $\mu_o(F) = \inf \mu_o(F_i)$ (Dans le cas où l'espace compact E est métrisable, il suffit de formuler cette définition pour les suites décroissantes de fermés).

3° Mesure extérieure et mesure intérieure. Soit μ une mesure réelle et $\geqslant 0$, $\mathfrak{F}$ la phratrie sur laquelle elle est définie. Posons, pour A quelconque $\in \mathfrak{P}(E)$,

$$\overline{\mu}(A) = \limsup_{X \to A, X \in \mathfrak{F}} \mu(X) \quad , \qquad \underline{\mu}(A) = \liminf_{X \to A, X \in \mathfrak{F}} \mu(X)$$

(on pourrait se borner à faire parcourir à X un sous-ensemble partout dense de $\mathfrak{F}$).

$\overline{\mu}(A)$ est semi-continue supérieurement : c'est la mesure extérieure: $\underline{\mu}(A)$ est semi-continue inférieurement : c'est la mesure intérieure.

Les ensembles "mesurables" (ceux de $\mathfrak{F}$, par définition) sont ceux où $\overline{\mu}(A) = \underline{\mu}(A)$, puisque ce sont ceux où μ est prolongeable par continuité. La fonction $\overline{\mu}$ est <u>convexe</u>

$$\overline{\mu}(A \cup B) \leqslant \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$$

elle jouit même de la <u>convexité dénombrable</u>

$$\overline{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n) .$$

Appliquer aux ensembles "de mesure nulle" (i.e : de mesure extérieure nulle).

<u>Mesures induites</u>.

Soit μ une mesure à <u>valeurs quelconques</u>. Si A est mesurable, $\mu(A \cap X)$ définit, pour X mesurable, une fonction additive et continue $\mu_A(X)$, donc une nouvelle mesure. Les ensembles X mesurables pour μ_A sont ceux pour lesquels $A \cap X$ est mesurable pour μ. Selon cette manière de voir, μ_A est une mesure <u>sur l'espace</u> E ; dans le cas où A est <u>compact</u>, elle définit une mesure <u>sur l'espace</u> A. Dans le cas général, il en sera de même lorsque nous aurons défini la notion de mesure sur un espace topologique non compact.

Dans le cas où μ est <u>à valeurs réelles</u> $\geqslant 0$, on peut, pour A <u>quelconque</u> $\in \mathfrak{P}(E)$, définir une mesure μ_A, savoir, pour X mesurable - μ,

$$\mu_A(X) = \overline{\mu}(A \cap X) ;$$

on vérifie que c'est une fonction continue et additive de X.

Dans le cas où A est mesurable pour , on a en outre, pour X quelconque

$$\overline{\mu}_A(X) = \overline{\mu}(A \cap X) .$$

<u>Mesures sur un espace topologique quelconque</u> E.

1° <u>Cas général</u> (mesures à valeurs dans un groupe abélien topologique complet).

Une mesure μ est définie par la donnée, pour chaque compact $K \subset E$, d'une mesure sur K (que nous noterons μ_K), ces mesures se prolongeant mutuellement (c'est-à-dire que, si $K_1 \subset K_2$, $\mu_{K_1}(K_1) = \mu_{K_2}(K_1)$) On peut donc définir la mesure $\mu(K)$ d'un ensemble compact.

Un ensemble $A \subset E$ est dit <u>mesurable</u> (pour μ) si :

1° pour tout compact K, la trace $A \cap K$ est mesurable pour μ_K ;

2° pour tout voisinage V de 0 (dans le groupe des valeurs de μ) il existe un compact $K \subset E$ tel que l'on ait $\mu(H) \in V$ pour tout compact $H \subset A \cap \complement K$.

La <u>mesure</u> de A, notée $\mu(A)$, est alors la limite de $\mu_K(A \cap K)$ suivant l'ordonné filtrant (croissant) des compacts $K \subset E$. Les ensembles mesurables forment une <u>phratrie</u>, sur laquelle μ est <u>additive</u>. Les ensembles de <u>mesure nulle</u> sont ceux dont la trace sur tout compact est de mesure nulle. On a une théorie des mesures <u>induites</u>.

<u>2° Cas d'une mesure à valeurs réelles</u> $\geqslant 0$. On peut la définir par une $\mu(K)$ définie et additive pour les <u>compacts</u>, et satisfaisant à la condition

$$\mu(K) = \inf \mu(K_i)$$

pour tout ordonné filtrant décroissant de compacts K_i, d'intersection K.

La condition 2° de mesurabilité se réduit à celle-ci : $\mu_K(A \cap K)$ est borné.

On peut définir, pour A <u>quelconque</u> :

- la mesure intérieure $\underline{\mu}(A)$: borne supérieure des $\mu(K)$ pour K compact $\subset A$;
- la mesure extérieure $\overline{\mu}(A)$: borne supérieure des mesures extérieures $\overline{\mu}_K(A \cap K)$ pour tous les compacts K.

Les ensembles mesurables sont ceux pour lesquels $\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A) < +\infty$. La mesure extérieure jouit de la <u>convexité dénombrable</u>.

Théorie des <u>mesures induites</u> (par exemple : pour la mesure μ_K induite sur un compact, la mesure extérieure de A quelconque est la mesure extérieure (pour μ) de l'ensemble $A \cap K$).

<u>Fonctions convexes d'ensembles</u>.

E topologique compact. Fonction α , à valeurs réelles $\geqslant 0$ (finies) définie pour <u>toute</u> partie $A \subset E$, croissante ($A \subset B$ entraîne $\mu(A) \leqslant \mu(B)$), convexe ($\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$). Nous dirons que α est <u>régulière</u> si : 1° elle est <u>semi-continue supérieurement</u> pour la topologie $\mathcal{C}$; 2° si elle est <u>continue</u> pour chaque A <u>ouvert</u>. Exemple : une "mesure extérieure" .

L'ensemble $\mathcal{F}$ des A où α est <u>continue</u> est une famille qui contient les ouverts et les fermés.

Une telle α est entièrement déterminée par la connaissance de ses valeurs sur un ensemble $\mathcal{G}$ <u>partout dense</u> dans $\mathfrak{P}(E)$ (par exemple, pour l'ensemble $\mathcal{G}$ des fermés ; pour que α soit une <u>mesure extérieure</u> (notion qui doit remplacer celle de "mesure de Carathéodory"), il faut et il suffit que α soit <u>additive</u> sur l'ensemble des fermés). La restriction d'une telle α , sur $\mathcal{G}$, est assujettie aux conditions (nécessaires et suffisantes) :

1° être croissante et convexe ;

2° être semi-continue supérieurement et bornée, et être continue pour chaque ouvert de $\mathcal{G}$, s'il y en a .

(Par exemple, la restriction d'une telle α à l'ensemble $\mathcal{G}$ des <u>fermés</u> doit être croissante et convexe, et satisfaire à la condition de l'ordonné filtrant décroissant. Dans ce cas, α se prolonge aux ouverts par $\alpha(U) = \sup \alpha(F)$ pour les fermés $F \subset U$; puis à A quelconque par $\alpha(A) = \inf \alpha(U)$ pour U ouvert $\supset A$) .

Une α croissante, convexe et régulière, jouit de la <u>convexité dénombrable</u> ; de plus, si on a un ordonné filtrant <u>croissant</u> d'ensembles <u>ouverts</u> U_i, de réunion U, on a $\alpha(U) = \sup_i \alpha(U_i)$.

<u>Remarque</u>. Si α est régulière sur E, la restriction de α aux A contenus dans un compact fixe F de E, est une fonction régulière sur F .

La borne supérieure α d'un ordonné filtrant croissant de α_i (croissantes, convexes et régulières), à supposer qu'elle soit <u>finie</u>, et <u>additive sur les compacts</u>, est une <u>mesure extérieure</u> (car elle est régulière), et la convergence des α_i vers α est <u>uniforme</u>. Les ensembles <u>mesurables</u> (pour la mesure extérieure α) sont ceux pour lesquels les α_i sont toutes <u>continues</u> (condition suffisante, car toute limite uniforme de fonctions continues est continue ; nécessaire, car si $\alpha = \overline{\mu}$, on a $\overline{\mu}(A) - \underline{\mu}(A) = \sup_i (\alpha_i(A) - \underline{\alpha_i}(A))$, en posant $\underline{\alpha_i}(A) = \liminf_{X \to A} \alpha_i(X)$.)

<u>Application : procédé général pour définir des mesures positives</u> (sur un espace compact E) .

Soit $\mathcal{U}$ une famille d'ouverts ($\subset E$) formant une <u>base</u> de la topologie de E (tout compact peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts $\in \mathcal{U}$, arbitrairement petits). Rappelons que tout recouvrement <u>fini</u> $\mathcal{R}$ de E, formé avec des ouverts $U_i \in \mathcal{U}$, définit un <u>entourage</u> de la structure uniforme de E (un ensemble $A \subset E$ étant "petit d'ordre $\mathcal{R}$" s'il est contenu dans un U_i) .

Soit $\alpha(U)$ une fonction $\geqslant 0$ <u>quelconque</u> de $U \in \mathcal{U}$. Posons, pour F fermé, $\mu^{\mathcal{R}}(F) = \inf \sum_i \alpha(U_i)$, pour tous les recouvrements <u>finis</u> de F avec des ouverts $U_i \in \mathcal{U}$, et petits d'ordre $\mathcal{R}$. $\mu^{\mathcal{R}}$ peut être prolongée en une fonction d'ensemble <u>croissante</u>, <u>convexe</u> et <u>régulière</u>. D'autre part, l'ensemble des $\mu^{\mathcal{R}}$ (lorsque $\mathcal{R}$ varie) est filtrant pour la relation $\leqslant$; soit μ la borne supérieure des $\mu^{\mathcal{R}}$;

μ est <u>additive</u> pour les fermés ; si μ est finie dans E , elle définit une <u>mesure extérieure</u>, donc une <u>mesure de Radon positive</u> : c'est la <u>mesure définie par</u> α (cf. Hausdorff, Dimension und aüsseres Mass , Math. Ann., 79, 1919, p. 157-179 ; remarquable exposé, fait dans l'esprit des "mesures extérieures" à la Carathéodory).

<u>Cas particulier : plus petite mesure $\geqslant$ une α donnée, croissante, convexe et régulière</u>. On vérifie facilement que la mesure extérieure $\overline{\mu}$ définie par α (au sens ci-dessus), si elle existe, est $\geqslant \alpha$, et que toute mesure extérieure $\geqslant \alpha$ est $\geqslant \overline{\mu}$. On peut obtenir autrement $\overline{\mu}$. Une condition <u>nécessaire</u> pour que $\overline{\mu}$ existe est que

$$\sup \sum_i \alpha(F_i) < +\infty$$

pour tous les systèmes <u>finis</u> de F_i fermés, sans point commun deux à deux ; or, cette condition est <u>suffisante</u>, car

$$\beta(F) = \sup \sum_i \alpha(F \cap F_i)$$

(F fermé ; F_i fermés disjoints) est une fonction d'ensembles fermés qui se prolonge en une mesure extérieure ; on a évidemment $\beta = \overline{\mu}$. D'ailleurs, pour A <u>quelconque</u>

$$\overline{\mu}(A) = \sup \sum_i \alpha(F_i \cap A)$$

La mesure intérieure $\underline{\mu}$ est d'autre part

$$\underline{\mu}(A) = \sup \sum_i \alpha(F_i)$$

pour les systèmes <u>finis</u> de fermés $F_i \subset A$, deux à deux sans point commun.

<u>Mesures généralisées</u> (à valeurs réelles $\geqslant 0$).

Soit toujours E un <u>espace compact</u>.

Soit une famille de α_i , croissantes, convexes et régulières (on peut supposer que c'est un ordonné filtrant, car sup de deux fonctions régulières est régulière). Soit μ leur borne supérieure (pour chaque A , $\mu(A)$ peut être <u>infinie</u>), supposée <u>additive pour les</u>

compacts (mais non nécessairement finie). Une telle sera dite mesure généralisée sur l'espace compact E . Un A sera dit mesurable pour si $\mu(A) < +\infty$ et $\inf \mu(A-F)=0$ pour les F fermés $\subset A$. Les ensembles mesurables forment une phratrie $\mathfrak{F}$, sur laquelle μ est additive (et finie) ; μ est même "complètement additive" sur $\mathfrak{F}$ ($\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ pour une suite dénombrable de $A_n \in \mathfrak{F}$ sans point commun deux à deux).

Si A est mesurable pour μ , $\mu(A \cap F) = \mu_A(F)$ définie pour les F fermés, est une vraie mesure (mesure induite) ; pour qu'un B soit mesurable pour μ_A , il faut et il suffit que $A \cap B$ soit mesurable pour μ . D'autre part, lorsque A est compact, μ_A définit aussi une mesure sur l'espace compact A .

μ étant par hypothèse borne supérieure des a_i (croissantes, convexes et régulières), la mesure intérieure d'un A sera par définition

$$\underline{\mu}(A) = \sup_i \underline{a_i}(A) = \sup_{\substack{i \\ F \subset A}} a_i(F) = \sup_{F \subset A} \mu(F) \qquad (F \text{ fermé})$$

Plus petite mesure généralisée $\geqslant$ une a croissante, convexe et régulière

Ce sera la borne supérieure des $\mu^{\mathcal{R}}$ définies comme plus haut. Ce sera aussi la borne supérieure des fonctions régulières du type $a_{F_1, F_2, \dots, F_n}(F) = \sum_{i=1}^{n} a(F_i \cap F)$ (F_i fermés disjoints).

Extension à un espace topologique quelconque.

L'extension de tout ce qui précède (depuis "fonctions convexes d'ensembles") se fait d'une manière évidente, en considérant les sous-espaces compacts de l'espace étudié.

II

MESURES k-DIMENSIONNELLES.

Définition générale : c'est, dans l'espace euclidien, une "mesure généralisée" (voir Rapport I) qui est invariante par déplacement, et se reproduit multipliée par le facteur λ^k lorsqu'on fait une homothétie de rapport λ .

Mesure linéaire dans l'espace euclidien (k=1).(La dimension n de l'espace est supposée quelconque).

Il y a bien des définitions possibles, non équivalentes, mais qui toutes sont équivalentes si on se borne aux courbes rectifiables. Dans chaque cas, la mesure linéaire est définie : 1° soit comme la plus petite "mesure généralisée" $\geqslant$ une certaine α , croissante convexe et régulière ; le mieux est de définir α pour les ensembles compacts d'abord (ce que ne font d'ailleurs pas les auteurs !) ; 2° soit, plus généralement, comme définie à partir d'une $\alpha(U)$ définie pour certains ouverts, ce qui permet (voir Rapport I) de définir des $\mu^{\mathcal{R}}$, dont la borne supérieure sera la mesure linéaire (c'est une "mesure généralisée")

Passons en revue les principales définitions :

- Celle de Gross : α d'un compact K est la borne supérieure des mesures lebesguiennes des projections orthogonales de K sur les différentes droites de l'espace .
- Celle de Janzen (référence ?) : on fait choix d'un système d'axes rectangulaires et on prend pour $\alpha(K)$ (K compact) la racine carrée de la somme des carrés des mesures lebesguiennes des projections orthogonales de K sur les axes de coordonnées.
- Celle de Carathéodory (Gött.Nachr.,1914, p.404-426) reprise par Hausdorff (Math.Ann.,1919,p.157-179) : les U sont les sphères ouvertes, $\alpha(U)$ est le diamètre de la sphère. La mesure de Cara.est $\geqslant$ la mesure de Gross.

En fait, la définition de Janzen est à condamner, car elle n'est pas invariante par déplacement !

Celle de Gross est condamnée par la remarque de Saks (Fundamenta, 9, 1927, p.16-24), qui construit, dans le plan, un ensemble compact dont la projection sur toute droite est de mesure lebesguienne nulle (donc sa mesure de Gross est nulle) et qui néanmoins est rencontré par toute demi-droite issue de l'origine (donc sa mesure de Cara est >0). Il en résulte qu'une transformation ponctuelle biunivoque pour laquelle le rapport des distances homologues est borné sup^t et inf^t, peut fort bien transformer un ensemble dont la mesure de Gross est nulle en un ensemble dont la mesure de Gross est >0. Cela paraît fâcheux !

La définition de Carathéodory ne présente aucun des inconvénients précédents. Toutefois, A.P. Morse et J.F. Randolph y font une ~~grave~~ objection (cf. Gillespie Measure, Duke Math.J., 6,1940, p.408-419 ; il y a une bibliographie, où manque la référence à Hausdorff) : ils construisent dans le plan un ensemble compact dont la mesure linéaire (de Cara) est égale à la mesure lebesguienne (non nulle) de chacune de ses projections sur les axes de coordonnées rectangulaires. Ils proposent, comme conséquence, une nouvelle définition (pour le cas du plan) : elle revient à prendre pour ensembles U non plus seulement les cercles (ouverts), mais tous les ensembles bornés convexes (ouverts), et pour $a(U)$ le $\frac{1}{2}$ périmètre de U. Le rapport de la "mesure de Gillespie" qu'on obtient ainsi, à la mesure de Cara, est $\geqslant 1$ et $\leqslant \frac{\pi}{2}$; le carré de la Gill. mesure est $\geqslant$ la somme des carrés des projections sur 2 axes rectangulaires. Pour le cas où on est dans l'espace euclidien à n 2 dim., il y a une définition analogue (voir plus loin).

- Selon moi, il y a deux définitions possibles (nettement différentes) de la mesure linéaire. Voici comment on y est conduit : soit K un compact (dans l'espace euclidien à n dimensions) ; considérons l'ensemble $\varphi(K)$ des variétés affines à n-1 dimensions qui rencontrent K : dans l'espace de ces variétés, l'ensemble $\varphi(K)$, qui est compact, a une mesure (pour la mesure invariante, dans cet espace, par le groupe des déplacements) ; ce sera, par définition, $\alpha_1(K)$, que nous normerons de manière qu'un segment de droite de longueur 1 ait un α_1 égal à 1 ; $\alpha_1(K)$ est croissante, convexe et régulière ; à un facteur près, c'est la valeur moyenne de la mesure lebesguienne de la projection orthogonale de K sur les différentes directions de droites de l'espace. La mesure linéaire (1ère version) sera la plus petite mesure $\geqslant \alpha_1$; si f désigne la fonction qui indique en combien de points chaque variété affine (à n-1 dim.) rencontre K , f est sommable (pour la mesure invariante de l'espace des variétés) et son intégrale n'est autre que la mesure linéaire de K (voir Favard, C.R. 194, 1932, p. 344). Cette mesure est sujette aux mêmes objections que celle de Gross. Elle en est distincte.

Observons que, si K est convexe, $\alpha_1(K)$, dans le cas du plan, n'est autre que le $\frac{1}{2}$ périmètre de K ; si on prolonge α_1 aux ensembles ouverts, $\alpha_1(U)$ pour un U ouvert convexe est le $\frac{1}{2}$ périmètre de U .

Observons encore que, si un compact K est connexe, $\alpha_1(K)$ est le même que $\alpha_1(\hat{K})$, $\hat{K}$ désignant l'enveloppe convexe de K (plus petit ensemble convexe contenant K) ; dans le cas du plan, $\alpha_1(K) = \frac{1}{2}$ périmètre de l'enveloppe convexe de K . Cette remarque conduit à la mesure linéaire (2è version) : on prend la famille $\mathcal{U}$ des ouverts connexes, et la fonction $\alpha_1(U)$ pour $U \in \mathcal{U}$, puis la mesure définie par α_1 .

On voit qu'il revient au même de prendre les ouverts convexes, et on retombe, dans le cas du plan, sur la mesure de Gillespie ; en même temps, on a une définition valable pour l'espace à n dimensions (par exemple, pour U ouvert convexe, $\alpha_1(U)$ est, pour 3 dimensions, le double de la valeur moyenne de la mesure lebesguienne de la projection orthogonale de U sur les différentes droites de l'espace.)

Mesures p-dimensionnelles (p entier > 1, $p \leqslant$ dimension n) .

Comme pour la mesure linéaire, on a proposé plusieurs définitions non équivalentes, mais qui toutes concordent pour les "bonnes" surfaces. Comme plus haut, on se ramène à 2 types de procédés généraux, en définissant d'abord une fonction α_p pour certains ensembles.

Il y a la mesure p-dimensionnelle de Gross : $\alpha_p(K)$ pour un compact K est la borne supérieure des mesures lebesguiennes des projections orthogonales de K sur les variétés affines à p dimensions.

- la mesure de Janzen, à rejeter à cause de la non-invariance par déplacement ; -la mesure de Cara précisée par Hausdorff : les ouverts U des sphères, $\alpha_p(U)$ est la mesure lebesguienne de la section de U par un plan (à p dim.) passant par le centre, soit $\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(1+\frac{p}{2})} r^p$, r étant le rayon (Hausdorff prouve que pour p=n , on retrouve la mesure lebesguienne à n dimensions, que pour p=2 et une surface continûment différentiable on retrouve l'aire ordinaire) ;- la mesure de Gillespie (pour n=3, p=2) : les U sont les ouverts convexes, $\alpha_2(U)$ est le $\frac{1}{2}$ aire de la surface limitant U .

Selon moi, il y a encore deux définitions possibles de la mesure p-dimensionnelle : le point de départ, pour chacune des deux, réside dans la considération du volume invariant de l'espace des variétés affines à n-p dimensions ~~pm~~ dans l'espace à n dimensions (avec choix convenable d'une unité de volume) ; n étant fixé une fois pour toutes, on définit $a_p(K)$ (pour K compact) comme la mesure de l'ensemble des variétés affines à n-p dimensions qui rencontrent K ; on peut étendre cette définition à $p=0$ ($a_0(K)=0$ si K est vide, $a_0(K)=1$ si K n'est pas vide). <u>La mesure p-dimensionnelle</u> (<u>1^{re} version</u>) sera la plus petite mesure $\geqslant a_p$. Mêmes remarques que pour a_1 (voir plus haut). En particulier la mesure 0-dimensionnelle d'un ensemble est le <u>nombre de points</u> de l'ensemble.

Si $n=3$, $p=2$ et si K est <u>convexe</u>, $a_2(K)$ n'est autre que la moitié de l'aire de la surface limitant K. Si donc on prend pour $\mathcal{U}$ la famille des ensembles convexes, et la fonction $a_2(U)$, on retombe sur la mesure superficielle de Gillespie. Mais ici la considération des ensembles <u>convexes</u> ne parait pas s'imposer comme pour $p=1$. Pour $p=1$ nous y étions arrivés en partant des ensembles ouverts <u>connexes</u> ; il semble que, pour $p > 1$, il faille faire intervenir, logiquement, d'autres considérations que la connexion : on pourrait par exemple faire entrer en jeu les nombres de Betti d'ordre $< p$. Il y a évidemment dans tout cela beaucoup d'arbitraire.

<u>Relations entre les mesures p-dimensionnelles pour diverses valeurs de p</u>.

Une définition correcte devrait satisfaire à la condition suivante : soit $n=n_1+n_2$, l'espace E^n (à n dimensions) étant considéré comme produit de E^{n_1} et E^{n_2} (sous-espaces totalement orthogonaux) ; si $K_1 \subset E^{n_1}$, la mesure d'ordre $p+n_2$ de l'ensemble produit $K_1 \times I_2$ (I_2 étant un compact de E^{n_2}) est égale au produit de la mesure d'ordre p de K_1 dans E^{n_1} (on suppose $p \leqslant n_1$) par la mesure d'ordre n_2 (lebesguienne) de I_2 dans E^{n_2}. Morse et Randolph prouvent qu'il en est bien ainsi pour $p=1$, $n_1=2$, $n_2=1$, lorsqu'on considère les mesures de Gillespie de dimensions 1 et 2 . Dans le cas général, il y aurait une étude à faire.

Une autre question, dans un ordre d'idées voisines, est celle des <u>mesures à la Minkowski</u> ; si K_ρ désigne l'ensemble obtenu à partir d'un compact K par la construction de Cantor-Minkowski par des sphères de rayon ρ , la mesure <u>linéaire</u> à la Minkowski est la limite, pour $\rho \longrightarrow 0$, du quotient du volume (à n dim.) de K_ρ par le volume (à n-1 dim.) de la sphère de rayon ρ . A vrai dire, la limite n'existe peut être pas : il faut considérer la lim.sup. $\overline{m}(K)$ et la lim.inf. $\underline{m}(K)$. On peut montrer que la mesure linéaire de Cara est toujours $\leqslant \underline{m}(K)$ (<u>Estermann</u>, Abh. Hamburg.,4,1926,p.73-116), fait qui est en relation avec la propriété extrémale de la sphère : parmi les ensembles de volume donné, c'est celui dont la frontière a la plus petite "surface". Si 2 points quelconques de K peuvent être joints par un <u>continu</u> $\subset K$, et si K a une mesure linéaire de Cara <u>finie</u>, la mesure de Minkowski existe $(\overline{m}(K)=\underline{m}(K))$ et est égale à la mesure de Cara. Il y a une série de résultats intéressants dans cet ordre d'idées (toujours chez Estermann).

<u>Questions particulières</u>.

Ce sont notamment celles qui relèvent de l'étude descriptive des ensembles "mesurables" pour la <u>mesure linéaire</u> (de Cara, p.ex.) ou pour la mesure <u>superficielle</u> (de Gross ou de Janzen). A la 1ère question se rattache le mémoire de <u>Bésicovitch</u> (Math.Ann.,98,1928,p.422-464) : il étudie les ensembles plans "linéairement mesurables" à la Cara. : points réguliers, irréguliers d'un tel ensemble, existence d'une droite <u>tangente</u> en "presque tous" les points réguliers ;

tout ensemble "régulier" A est "presque tout entier" contenu dans un ensemble de courbes rectifiables dont la longueur dépasse arbitrairement peu la "longueur" de A ; etc. Questions intéressantes, pas faciles, mais qui sortent nettement du cadre de l'Intégration.

Schauder (Fundamenta, 13, 1929, p. 269-276) étudie la semi-continuité inférieure de l'aire à la Janzen d'une surface variable satisfaisant à certaines conditions de régularité. Schauder encore (Fundamenta, 8, 1926, p. 1-48 ; c'est sa thèse, je crois) étudie les propriétés des ensembles (de l'espace E^3) qui sont "mesurables" pour la mesure superficielle de Gross .

Mesures k-dimensionnelles (k non entier).

Je ne vois guère que les mesures introduites par Hausdorff (toujours le mémoire des Math. Ann., 79, 1919, p. 157-179), et définies plus généralement dans l'espace à n dimensions, par une fonction $\lambda(r)$ (fonction > 0, décroissante quand $r > 0$ décroît, nulle pour $r=0$) ; on considère la famille $\mathcal{U}$ des sphères ouvertes, et pour une telle sphère U , $\alpha(U)$ est $\lambda(r)$, r étant le rayon. On en déduit une "mesure généralisée" par le procédé déjà exposé. On peut étudier en particulier le cas $\lambda(r)=r^k$ (mesure k-dimensionnelle). Les ensembles plans, de mesure k-dimensionnelle nulle pour $k > 0$, sont en relation avec les ensembles de capacité nulle (Thèse de Frostman).

Pour n=1, le seul cas intéressant (étudié par Hausdorff) est celui où $0 < k < 1$. Pour tout k , il existe au moins un ensemble linéaire dont la mesure k-dimensionnelle n'est ni nulle ni infinie ; un tel ensemble sera dit de dimension k (par ex. l'ensemble de Cantor est de dimension $\frac{\log 2}{\log 3}$) .

III

INTEGRALE PAR RAPPORT A UNE MESURE DONNEE.

On part d'une mesure (voir Rapport I ; nous nous bornons en principe au cas d'une mesure sur un espace topologique, le cas d'une mesure "abstraite" paraissant sans grand intérêt, et pouvant d'ailleurs s'y ramener).

Un premier cas est celui d'une mesure réelle par rapport à laquelle il s'agit d'intégrer des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel topologique $\mathcal{E}$ localement convexe, supposé complet (ou tout au moins tel que tout ensemble compact soit contenu dans un ensemble convexe compact). Ici interviennent deux ensembles de valeurs :

- l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs des fonctions ;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;

et une loi de composition, à valeurs dans $\mathcal{E}$, qui sera aussi l'ensemble des valeurs des intégrales.

Un autre cas est celui d'une mesure à valeurs dans un espace vectoriel topologique $\mathcal{E}$ (avec une hypothèse supplémentaire sur laquelle on reviendra plus loin), les fonctions à intégrer étant à valeurs réelle Il intervient encore 2 ensembles de valeurs, et une loi de composition. Les intégrales ont leurs valeurs dans $\mathcal{E}$.

On pourrait concevoir, en toute généralité, 3 groupes abéliens topologiques complets $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$, et une loi de composition

$$(x,x') \longrightarrow \varphi(x,x') \qquad (x \in \mathcal{E}\ ,\ x' \in \mathcal{E}'\ ,\ \varphi(x,x') \in \mathcal{E}'')$$

continue sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$, additive en x et additive en x'. Nous ferons l'hypothèse générale que voici, μ désignant la mesure étudiée à valeurs dans $\mathcal{E}'$), E un ensemble mesurable quelconque :

Quel que soit le voisinage V'' de l'origine dans $\mathcal{E}''$, il existe un voisinage V de l'origine dans $\mathcal{E}$, tel que : si (E_i) est une partitèon finie en ensembles mesurables de l'ensemble mesurable E , et si les $u_i \in V$, on a

$$\sum u_i \, \mu(E_i) \in V'' .$$

Examinons en particulier cette condition lorsque $\mathcal{E}$ est vectoriel topologique, et $\mathcal{E}'$ est le groupe de la droite numérique R ($\mathcal{E}'' = \mathcal{E}$).
Il est clair qu'en supposant $\mathcal{E}$ <u>localement convexe</u>, la condition est vérifiée pour toute mesure μ positive, donc pour toute mesure réelle (différence de deux mesures positives).

Voyons encore ce que donne cette condition quand $\mathcal{E} = R$, $\mathcal{E}'$ étant un vectoriel topologique <u>normé</u> (complet) ; $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}'$. La condition exprime que, pour toute forme linéaire f (à valeurs réelles) sur $\mathcal{E}'$, $f \circ \mu$ est une <u>mesure</u> (à "variation bornée") et en outre que $f \circ \mu$ reste, en valeur absolue, inférieure à une <u>mesure positive fixe</u> lorsque f parcourt l'ensemble des formes linéaires de norme $\leqslant 1$. Une condition <u>suffisante</u> pour qu'il en soit ainsi est que $\|\mu(A)\|$ soit $\leqslant$ une mesure positive $\nu(A)$ ($\|x'\|$ désignant la norme dans $\mathcal{E}'$).

<u>Principe de l'intégration</u>.

L'intégrale d'une <u>fonction étagée</u> (sur la phratrie $\mathfrak{F}$ des ensembles mesurables - μ), c'est-à-dire d'une fonction qui est une combinaison de fonctions caractéristiques d'ensembles de $\mathfrak{F}$, à coefficients dans $\mathcal{E}$, se définit d'une manière évidente. Reste à prolonger cette définition à d'autres fonctions, ce qui peut se faire de bien des manières.

Un principe général pour ce prolongement consiste à mettre, dans l'ensemble Φ de toutes les fonctions (à valeurs dans $\mathcal{E}$) une topologie pour laquelle l'intégrale $\int f\,d\mu$ d'une f étagée soit continue en f . Alors $\int f\,d\mu$ est une fonction de f qui se prolonge à l'adhérence de l'ensemble des fonctions étagées, et dont le prolongement est encore additif. Il faut observer que l'ensemble Φ est doué d'une structure de groupe abélien, et admet une loi de composition avec $\mathcal{E}'$, le composé d'une $f \in \Phi$ et d'un élément de $\mathcal{E}'$ étant une fonction à valeurs dans $\mathcal{E}''$; il est évident que la topologie de Φ devra être compatible avec cette structure. (Par exemple, si $\mathcal{E}$ est vectoriel topologique, et $\mathcal{E}' = R$, Φ devra avoir une topologie d'espace vectoriel).

Si $\mathcal{E}$ est vectoriel localement convexe, et si μ est à valeurs réelles $\geqslant 0$, si en outre la fonction f à intégrer a ses valeurs dans un ensemble F fermé convexe, l'intégrale $\int f\,d\mu$ a sa valeur dans F .

Exemple de topologie : celle de la convergence uniforme. On obtient ainsi, sur un espace compact E , l'intégrale des fonctions continues (procédé de Cauchy-Stieltjes), et de quelques autres en même temps. L'hypothèse générale sur μ est précisément là pour assurer que $\int f\,d\mu$ soit continue en f pour f étagée, lorsque Φ est muni de la topologie de la convergence uniforme.

Autre exemple de topologie : $\mathcal{E}$ vectoriel normé complet (norme ρ) μ mesure réelle $\geqslant 0$ ($\overline{\mu}$ mesure extérieure correspondante ; on sait plus généralement définir l'intégrale supérieure $\overline{\mu}(f)$ d'une fonction réelle $f \geqslant 0$). Posons, pour f à valeurs dans $\mathcal{E}$,

$$\overline{\mu}(f) = \overline{\mu}(\rho\,(f)) .$$

Dans l'espace Φ des fonctions à valeurs dans $\mathcal{E}$, $\overline{\mu}(f)$ est une norme (plus précisément, c'est une norme dans le sous-espace des f telles que $\overline{\mu}(f) < +\infty$, après passage au quotient). D'où une topologie, et, sur l'adhérence de l'ensemble des fonctions étagées, le prolongement de l'intégrale $\int f \, d\mu$, qui satisfait à $\rho\left(\int f \, d\mu\right) \leqslant \int \rho(f) \, d\mu$.

Dans le cas où f est à valeurs réelles, on retrouve les fonctions sommables au sens de Lebesgue et leur intégrale (finie !) . Dans le cas général, c'est l'intégrale de Bochner qu'on trouve (Fundamenta, t.20,1933,p.262-276), par un procédé différent du sien, mais équivalent. L'espace des fonctions "sommables" est complet pour la topologie définie par la norme $\overline{\mu}(f)$.

Plus généralement : si $\mathcal{E}$ vectoriel topologique a sa topologie définie par un système de pseudo-normes ρ_α (c'est-à-dire si $\mathcal{E}$ est localement convexe), posons $\overline{\mu}_\alpha(f) = \overline{\mu}(\rho_\alpha(f))$; les $\overline{\mu}_\alpha$ constituent, sur Φ , un système de pseudo-normes qui font de Φ un espace localement convexe (dont la topologie ne dépend que de la topologie de $\mathcal{E}$). En prenant l'adhérence des fonctions étagées, on trouve les fonctions "sommables" et leur "intégrale" . L'espace des fonctions sommables est complet lorsque les ρ_α forment une famille dénombrable (lorsque $\mathcal{E}$ est métrisable) .

G. Birkhoff a aussi, de son côté, étudié le problème de l'intégration des fonctions à valeurs dans $\mathcal{E}$ (vectoriel topologique ; G.B. se borne au cas d'un espace normé complet) par rapport à une mesure positive. Il fait autre chose que Bochner. Ce qu'il fait (Trans.Amer.Math.Soc.,38, 1935, p.357-378) revient à mettre sur Φ la topologie que voici (moins fine que la précédente) :

pour toute forme linéaire continue φ sur $\mathcal{E}$, considérons $\overline{\mu}(|\varphi\circ f|)$; puis posons

$$\sigma(f) = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \overline{\mu}(|\varphi\circ f|) \qquad (\|\varphi\| \text{ désigne la norme de } \varphi)$$

σ est une <u>norme</u> sur Φ , et $\sigma(f) \leqslant \overline{\mu}(f)$ définie plus haut (car $|\varphi\circ f| \leqslant \rho(f)$ si $\|\varphi\| \leqslant 1$) . Donc la topologie définie par $\sigma(f)$ est moins fine que celle définie par $\overline{\mu}(f)$. En prenant l'adhérence, pour σ , des fonctions étagées, on obtient les fonctions sommables-Birkhoff et leur intégrale. Cette intégrale satisfait à

$$\varphi\left(\int f\, d\mu\right) = \int \varphi(f)\, d\mu$$

pour toute forme φ linéaire continue (condition vérifiée a fortiori, pour l'intégrale de Bochner). L'intégrale de G. Birkhoff est d'ailleurs <u>pleine de canulars</u> : par exemple, si $\mathcal{E}$ est l'espace de Hilbert, l'espace des fonctions sommables <u>n'est pas complet</u>, le th. de Lebesgue-Fubini ne s'applique pas.

<u>Autre exemple</u>. Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ (fonctions à valeurs réelles), $\mathcal{E}'$ vectoriel topologique tel que $\|\mu(A)\| \leqslant \nu(A)$ (ν mesure positive ; ν désignera la plus petite mesure $\geqslant 0$ supérieure à $\|\mu(A)\|$). Posons $\rho(f) = \overline{\nu}(|f|)$; c'est une <u>norme</u> sur l'espace Φ des fonctions étagées réelles. D'où topologie sur Φ , fonctions sommables, intégrale.
