RÉDACTION N° 017

COTE : AWR 001

TITRE : INTÉGRATION - PROJET WEIL (RÉSUMÉ)

FONDS : ANDRÉ WEIL

NOMBRE DE PAGES : 29

NOMBRE DE FEUILLES : 25

INTEGRATION : PROJET WEIL (résumé)

CHAP. I . Intégration abstraite.

§ 1. Théorie élémentaire de l'intégrale.

On se donne, sur un ensemble fondamental E , une famille Φ de fonctions numériques bornées satisfaisant à l'axiome :

(I) Si $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Phi$ et si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue dans R^n et s'annule au point $(0,0,\ldots,0)$, on a $F(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \Phi$.

On aura aussi à considérer des familles Φ satisfaisant à l'axiome plus restrictif :

(I_a) Si $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Phi$ et si F est continue dans R^n , $F(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \Phi$.

(I_a) équivaut à la conjonction de (I) et de la proposition "$1 \in \Phi$".

Si Φ satisfait à (I) et si $1 \notin \Phi$, la famille Φ' des fonctions c+f , où c est une constante et $f \in \Phi$, satisfait à (I_a) ; dans ce cas, toute $f' \in \Phi'$ peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme c+f ; dans ce cas encore, si $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Phi$, le point $(0,0,\ldots,0)$ est adhérent à l'ensemble des valeurs prises sur E par la fonction, à valeurs dans R^n , $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

On notera Φ_+ l'ensemble des fonctions $\geqslant 0$ de Φ ; si $f \in \Phi$, on aura $f = f^+ - f^-$, avec $f^+ \in \Phi_+$, $f^- \in \Phi_+$. Dans la suite, V désignera toujours une multiplicité vectorielle à un nombre fini de dimensions sur R , et Φ_V l'ensemble des fonctions sur E , à valeurs dans V , dont toutes les composantes, pour un certain choix de la base dans V , appartiennent à Φ (définition indépendante du choix de la base) ; un cas particulier important est celui où V est le corps C des nombres complexes.

Exemples d'ensembles Φ : ensemble des fonctions continues sur un compact ; ensemble des fonctions continues, nulles en dehors d'un ensemble compact, sur un localement compact, etc...

On dit qu'on a défini sur E une structure d'ensemble intégré si l'on s'est donné Φ et, sur Φ, une fonction numérique $\int f$, linéaire sur Φ, $\geqslant 0$ sur Φ_+ ; il revient au même de se donner $\int f$ linéaire et $\geqslant 0$ sur Φ_+ ; $\int f$ est dite une <u>intégrale</u> sur Φ.

Si $1 \notin \Phi$, pour qu'on puisse prolonger $\int f$ en une intégrale $\int f'$ sur Φ', il faut et il suffit que $\sup\limits_{f \in \Phi_+, f \leqslant 1} \int f$ ait une valeur finie I ; alors on peut prendre $\int (c+f) = c.I + \int f$. Si $1 \in \Phi$, et si $\int 1 = 1$, on dira aussi que $\int f$ est une <u>moyenne</u>.

La théorie <u>élémentaire</u> de l'intégrale est celle qui porte sur <u>une seule</u> intégrale donnée sur une famille Φ, <u>sans complétion de</u> Φ. Les résultats essentiels en sont :

1) Les inégalités classiques (de la moyenne ; Minkowski et Hölder ; convexité de $\log \|f\|_p$ par rapport à $1/p$).

2) La première version de Lebesgue-Fubini, c'est-à-dire le <u>produit de structures</u>. Si Φ_1, Φ_2 satisfaisant à (I) sont données sur E_1, E_2, on considère, sur $E = E_1 \times E_2$ la famille Φ des fonctions $F(f(x_1), g(x_2))$, où $f \in \Phi_{R^n}$, $g \in \Phi_{R^p}$, et où $F(u,v)$ est continue sur $R^n \times R^p$, et où de plus : a) $F(0,v)=0$ quel que soit v si $1 \notin \Phi_1$; b) $F(u,0)=0$ quel que soit u si $1 \notin \Phi_2$. Alors Φ satisfait à (I), et à (I_a) si Φ_1, Φ_2 y satisfont. Si $\int_1$ est une intégrale sur Φ_1, $\int_2$ une intégrale sur Φ_2, et si $f(x_1,x_2) \in \Phi$ on a $\int_1 f(x_1,x_2) \in \Phi_2$, $\int_2 f(x_1,x_2) \in \Phi_1$ et il y a une intégrale sur Φ et une seule (notée $\int_1\int_2$ ou bien $\int_2\int_1$) telle que $\int_1\int_2 f = \int_1 (\int_2 f) = \int_2 (\int_1 f)$. Le produit (fini) est commutatif et associatif.

<u>Produit infini</u> (pour des <u>moyennes</u> seulement).

<u>Observations</u>. Démonstrations des inégalités sans difficulté, sauf quelques points concernant les cas limites $p=1$ et $p=\infty$. On définit $\|f\|_p$ par $(\int |f|^p)^{1/p}$ pour $1 \leqslant p < \infty$, et par l'inégalité de Hölder pour $p=\infty$. On observera que $\|f\|_\infty \leqslant \sup|f|$: l'égalité a toujours lieu si $f \in \Phi_+$, $f \neq 0$ entraîne $\int f > 0$. Sinon, et si $\alpha = \|f\|_\infty < \sup|f|$, il y a $f_1 \in \Phi$ telle que $\alpha = \|f_1\|_\infty = \sup|f_1|$, et que $\int |f-f_1| = 0$; il suffit de prendre $f_1 = f.\min(1, \alpha/|f|)$.

Il est commode de formuler les inégalités pour Φ_+, pour Φ et pour Φ_C. Par exemple, si $f \in \Phi_+$, $\|f\|_p = \sup_{g \in \Phi, \|g\|_{p'} \leqslant 1} |\int fg|$ et les analogues en remplaçant Φ_+ par Φ ou par Φ_C (naturellement, on pourrait faire la théorie des inégalités pour Φ_V, avec une norme dans V et la norme duale dans V' dual de V, et $f \in \Phi_V$ $g \in \Phi_{V'}$; mais il suffira d'en faire des exercices).

On démontre $\|f\|_1 = \sup_{g \in \Phi, |g| \leqslant 1} |\int fg|$ (c'est le point le plus délicat !) ; c'est important pour le § 2.

Pour la démonstration du produit de structures ; on s'appuie sur les propositions suivantes, établies antérieurement :

a) Si $1 \in \Phi$, on peut prolonger l'intégrale $\int$ donnée sur Φ en une intégrale, notée encore $\int$, sur la famille Φ^* des fonctions limites <u>uniformes</u> sur E de fonctions de Φ.

b) Soit $f \in \Phi_V$; soit A l'adhérence (compacte) de l'ensemble des valeurs de f dans V. Alors il existe une intégrale, notée $\int_A$, sur l'ensemble $\Phi(A)$ des fonctions continues sur A, telle que, quelle que soit $F(u) \in \Phi(A)$, on ait $\int F(f(x)) = \int_A F(u)$. (C'est évident si $1 \in \Phi$. Si $1 \notin \Phi$, on a vu que $(0) \in A$, et qu'il suffit de
de démontrer que $F(0)=0$, $0 \leqslant F(u) \leqslant 1$ entraîne $\int F(f(x)) < M$.

AWR 001

Axiome de Riesz. 2 formes (Cartan!)

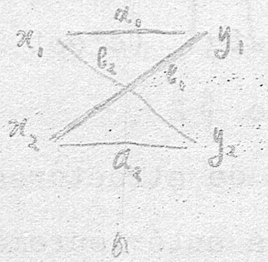
1) $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, tous $\geqslant 0$

$\to$ ex. $c_{ij} \geqslant 0$ tq. $a_i = \sum_j c_{ij}$, $b_j = \sum_i c_{ij}$ $\quad i,j = 1,2$

2) $x_i \leqslant y_j$ $\quad (i,j = 1,2)$

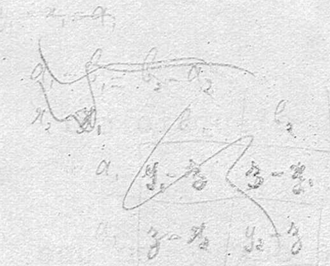
$\to$ ex. z tq. $x_i \leqslant z \leqslant y_j$ $\quad (i,j=1,2)$

on passe de 1) à 2) par construction



$a_1 = y_1 - x_1$, etc.

$(c_{11} = y_1 - z,\ c_{1j} = z - x_i)$



AWR001 6

Sinon, il y aura $F_n(u) \geqslant 0$ sur A , continue, telle que $F_n(0) = 0$ et $\int F_n(f(x)) \geqslant n^3$; soit $F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(u)/n^2$, on aura $\int F_n(f(x)) \leqslant \int F(f(x)).n^2$, d'où contradiction).

§ 2. Fonctions linéaires sur une famille Φ .

On commence par un lemme : Soient n et p entiers. Alors il existe np fonctions $F_{ij}(x,y)$ de $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_p)$ continues et $\geqslant 0$ pour $x_i \geqslant 0$, $y_j \geqslant 0$, et telles que $\sum_i x_i = \sum_j y_j$ entraîne $x_i = \sum_j F_{ij}(x,y)$; et $y_j = \sum_i F_{ij}(x,y)$. Evidemment $F_{ij}(0,0)=0$. On peut toujours supposer les F_{ij} choisis de sorte que si $s = \sum_i x_i = \sum_j y_j$; $s \geqslant \varepsilon$ entraîne $F_{ij} = x_i y_j / s$.

Alors soit Φ une famille (donnée une fois pour toutes) satisfaisant à (I). Soit $f \in \Phi_+$: on appellera partition de f (sous-entendu dans Φ_+) tout ensemble fini de $f_i \in \Phi_+$ tel que $f = \sum_i f_i$. Si, pour chaque i , on considère une partition f_{ij} de f_i , l'ensemble des f_{ij} est une partition de f , dite (par définition) plus fine que la partition f_i . D'après le lemme, les partitions de f forment par cette relation un ordonné filtrant, noté $\mathcal{P}(f)$, suivant lequel on prendra les limites dans ce qui suit.

On désignera par V , V',etc. des vectoriels (à un nombre fini de dimensions) sur $\mathbb{R}$; par N,N',etc. des normes dans ces vectoriels (quelconques, sauf que, lorsqu'il s'agira de $\mathbb{R}$ ou du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on prendra toujours pour norme la valeur absolue ; et si on a à considérer deux vectoriels en dualité, on prendra les normes duales l'une de l'autre). Chacune des définitions suivantes, relatives à un vectoriel V , et faisant usage, soit de la base, soit de la norme N dans V , est indépendante du choix de

AWK 001

cette base ou de cette norme. Pour une base donnée, on désignera par N_o la norme $N_o(x) = \sum_\nu |x_\nu|$, utile dans certaines démonstrations.

On considèrera des fonctions $I(f)$, linéaires sur Φ_V, à valeurs dans un vectoriel V' (On n'aura à considérer que les cas suivants : 1) $V = R$, V' quelconque ; 2) $V = V' = \mathcal{C}$; 3) $I(f)$ étant linéaire sur Φ, à valeurs dans R, on désignera (<u>par abus de langage</u>) par $I(f)$, pour $f \in \Phi_V$, l'élément de V dont les composantes pour une certaine base dans V, sont $I_\nu(f) = I(f_\nu)$ si $f = (f_\nu)$; 4) si $I(f)$ est définie dans Φ, à valeurs dans $\mathcal{C}$, on définira $I(f)$ sur $\Phi_{\mathcal{C}}$ par $I(f_1+if_2) = I(f_1)+iI(f_2)$).

$I(f)$ sera dite <u>relativement bornée</u> (="à variation bornée" dans la terminologie classique) si, quel que soit $h \in \Phi_+$, $N'(I(f))$ est borné sur l'ensemble des $f \in \Phi_V$ tels que $N(f) \leqslant h$. <u>Pour que $I(f)$ soit relativement bornée, il faut et il suffit qu'il existe une intégrale $\int f$ sur Φ telle que</u> $N'(I(f)) \leqslant \int N(f)$. Par un choix de bases, on se ramène à $V = R$. Alors, si $I(f)$, à valeurs dans V, définie et linéaire sur Φ, est relativement bornée, la formule $J(f) = \lim_{\mathfrak{p}(f)} \sum_i N(I(f_i))$, où $f \in \Phi_+$ et $(f_i) \in \mathfrak{p}(f)$, définit une intégrale $J(f)$ sur Φ_+ (donc sur Φ), qui est la plus petite de toutes les intégrales $J'(f)$ sur Φ_+ satisfaisant à $N(I(f)) \leqslant J'(f)$ pour $f \in \Phi_+$.

La limite existe comme limite croissante suivant un ordonné filtrant ; si on montre qu'elle est finie, la linéarité de $J(f)$ est évidente, puis tout le reste. Pour montrer qu'elle est finie il suffit de traiter le cas $N = N_o = \sum_\nu |x_\nu|$, donc le cas $V = R$. On a dans ce cas $\sum_i |I(f_i)| = \sup_{|\alpha_i| \leqslant 1} \left|\sum_i \alpha_i I(f_i)\right| = \sup \left| I(\sum_i \alpha_i f_i)\right|$;

On en déduit : $I^+(f) = \sup_{0 \le g \le f} I(g)$

$$|I|(f) = \sup_{0 \le |g| \le f} I(g)$$

De la 2e égalité, on déduit, en posant $|I| = \int$, et utilisant $\int |g| = \sup_{|h| \le 1} \int gh$, et prenant $I(g) \geq \int f - \varepsilon$, $\int gh \geq \int |g| - \delta$:

(et en vertu de l'identité $\big| |g|h - g \big| \le |g| - gh$ pour $|h| \le 1$)

$\int (f - |g|) \le \varepsilon$, $I(g) - I(|g|h) \le \delta$, $I(fh) - I(|g|h) \le \varepsilon$,

d'où $I(fh) \geq |I|(f) - 2\varepsilon - \delta$;

dc $|I|(f) = \sup_{|h| \le 1} I(fh) = \lim_{\substack{h_i \geq 0 \\ \sum h_i \le 1}} \sum_i |I(fh_i)|$

En part.

En plus on pt prendre $(f_i) = (fh_i, f(1 - \sum h_i))$

AWR 001

mais $\left|\sum_i a_i f_i\right| \leqslant f$ pour $|a_i| \leqslant 1$, $f_i \in \Phi_+$; donc par hypothèse $I(\sum_i a_i f_i)$ est bornée pour $|a_i| \leqslant 1$.

Le même résultat, avec la même démonstration, subsiste si au lieu d'une norme $N(x)$, on considère une fonction <u>convexe</u> et <u>positivement homogène</u> $H(x)$ ($H(\lambda x) = \lambda H(x)$ pour $\lambda > 0$ et $H(x+y) \leqslant H(x)+H(y)$). En particulier, si $I(f)$, définie sur Φ , est à valeurs dans R , on définit ainsi, pour $H(x)=x^+$, x^- , $|x|$ resp., trois intégrales notées $I^+(f)$, $I^-(f)$ et $|I|(f)$; pour $I(f)$ à valeurs dans C , on définit, pour $H(x)=|x|$, l'intégrale $|I|$ (f).

Dans ce qui suit, toutes les fonctions sont supposées <u>relativement bornées</u>, et on ne considère en général que des fonctions définies sur Φ (non sur un Φ_V) .

Soit $I(f)$ linéaire sur Φ , à valeurs dans V , telle que $N(I(f)) \leqslant c.\int f$ pour $f \in \Phi_+$ ($\int$ = intégrale donnée sur Φ). Alors, si $f \in \Phi_+$ et $\varepsilon > 0$, il existe une partition (f_i) de f , telle que, si on pose $a_i = I(f_i)/\int f_i$ (d'où $N(a_i) \leqslant c$) , et que si (f_{ij}) est pour chaque i une partition de f_i , on ait

(1) $$\sum_{i,j} N(I(f_{ij})-a_i\int f_{ij}) \leqslant \varepsilon$$

(Ce résultat, apparenté au feu th. de Nikodym, est l'outil essentiel pour tout ce qui suit).

On applique ce qui précède à la fonction, linéaire sur Φ , $(I(f), \int f)$, à valeurs dans $V \times R$, et à la fonction $H(u,x) = \sum_\lambda N(u-b_\lambda x)$, où $u \in V$, $x \in R$, et les b_λ sont choisis de sorte que $N(b_\lambda) \leqslant c$ et qu'à tout u satisfaisant à $N(u) \leqslant c$ corresponde au moins un λ tel que $N(u-b_\lambda) \leqslant \delta$. Dès que la partition (f_i) de f sera assez fine, on aura, pour toute partition plus

fine (f_{ij}), $\sum_{\lambda,i}\left[\sum_j N(I(f_{ij})-b_\lambda\int f_{ij})-N(I(f_i)-b_\lambda\int f_i)\right]\leqslant\eta$.
Soit $a_i = I(f_i)/\int f_i$ ($a_i=0$ si $\int f_i=0$) ; soit λ_i tel que $N(a_i-b_{\lambda_i})\leqslant\delta$. Tous les termes de l'inégalité précédente étant $\geqslant 0$, elle subsiste si on n'y prend que les termes pour lesquels $\lambda=\lambda_i$, d'où $\sum_{i,j} N(I(f_{ij})-b_{\lambda_i}\int f_{ij})\leqslant\eta+\sum_i N((a_i-b_{\lambda_i}).\int f_i)\leqslant\eta+\delta.\int f$, et par suite $\sum_{i,j} N(I(f_{ij})-a_i\int f_{ij})\leqslant\eta+2\delta.\int f$.

On dira dans ce qui suit qu'une fonction H , définie dans V , à valeurs dans V' , est <u>régulière</u> (dénomination provisoire!) si elle est positivement homogène et s'il existe c tel que
$N'(H(u)-H(v))\leqslant c.N(u-v)$.

Soit $I(f)$ relativement bornée, à valeurs dans V ; $H(u)$ régulière définie dans V , à valeurs dans V'. Alors il existe $J(f)$ relativement bornée, à valeurs dans V' , telle qu'on ait, pour $f\in\Phi_+$:
$J(f)=\lim_{\mathfrak{p}(f)}\sum_i H(I(f_i))$. On posera $J=H(I)$ et $J(f)=H(i)(f)$.

En effet, il suffit de montrer que la limite existe (le reste est alors évident) c'est-à-dire que, pour $(f_i)\in\mathfrak{p}(f)$ assez fine, (f_{ij}) plus fine que (f_i), on aura $N'(\sum_{i,j}H(I(f_{ij}))-\sum_i H(I(f_i)))\leqslant\varepsilon$.

On prend une intégrale $\int f$ telle que $N(I(f))\leqslant c.\int f$ pour $f\in\Phi_+$: on prend (f_i) et a_i tels que $I(f_i)=a_i\int f_i$, $\sum_{i,j}N(I(f_{ij})-a_i\int f_{ij})\leqslant\eta$ d'où $N'(\sum_{i,j}H(I(f_{ij}))-\sum_{i,j}H(a_i\int f_{ij}))\leqslant c\eta$, c'est-à-dire l'inégalité voulue, puisque $\sum_j H(a_i\int f_{ij})=\sum_j H(a_i).\int f_{ij}=H(a_i\int f_i)=H(I(f_i))$.

Soit de plus $L(u')$ régulière, définie dans V', à valeurs dans V" ; $N''(L(u')-L(v'))\leqslant c'N'(u'-v')$; soit $M(u)=L(H(u))$; alors, si $J=H(I)$, on a $M(I)=L(J)$ (ce qui justifie les notations adoptées) car, avec les mêmes notations, on a $J(f_i)=\lim\sum_j H(I(f_{ij}))$, donc $\sum_i N'(J(f_i)-H(a_i).\int f_i)\leqslant c\eta$, donc $N''(\sum_i M(I(f_i))-\sum_i L(J(f_i)))\leqslant c'c\eta$, c'est-à-dire le résultat voulu, puisque (f_i) est aussi fine que l'on veut.

Parmi les fonctions relativement bornées, on a en tout cas, $\int$ étant une intégrale donnée sur Φ, toutes les fonctions $I(f)=\int gf$, où $g \in \Phi'_V$. Si $H(u)$ est régulière, on a, si $I(f)=\int gf$, $H(I)(f) = \int H(g).f$. En effet, prenant dans V une base, et la norme $N_o(u) = \sum_\nu |u_\nu|$, soit (f_i) tel que $\sum_{i,j} N_o(\int (g-a_i)f_{ij}) \leqslant \varepsilon$ pour toute partition (f_{ij}) plus fine que (f_i) ; il suffira de montrer que cela entraîne $\sum_i \int N_o(g-a_i).\, f_i \leqslant \varepsilon$, puisqu'alors on a $N'(\int H(g).f - \sum_i H(a_i)\int f_i)=N'(\sum_i \int (H(g)-H(a_i))f_i) \leqslant c.\sum_i \int N_o(g-a_i)f_i \leqslant c\varepsilon$. Il suffit donc de montrer que l'on a $\int N_o(g-a_i).f_i \leqslant \sup \sum_j N_o(\int (g-a_i) f_{ij})$, la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des partitions de f_i ; ou encore, en décomposant suivant la base choisie dans V, que $\int |h|.f \leqslant \sup_{\mathcal{P}(f)} \sum_i \left|\int hf_i\right|$ pour $h \in \Phi'$, $f \in \Phi_+$. Mais, d'après le § 1, on a $\int |h|.f = \sup \left|\int hfg\right|$ pour $g \in \Phi$, $|g| \leqslant 1$; et $\left|\int hfg\right| \leqslant \left|\int hfg^+\right| + \left|\int hfg^-\right| \leqslant \sum_{i=1,2,3} \left|\int hf_i\right|$, si on pose $f_1=fg^+$, $f_2=fg^-$, $f_3 = f(1-|g|)$.

On désignera par Ω_V l'espace vectoriel des fonctions $I(f)$ linéaires et relativement bornées sur Φ, à valeurs dans V, uniformisé par la famille des pseudo-normes $N_f(I)=N(I)(f)$ pour $f \in \Phi_+$; on pose $\Omega = \Omega_R$, et Ω_+ sera l'ensemble des $I(f) \in \Omega$ qui sont $\geqslant 0$ sur Φ_+ (c'est-à-dire des intégrales sur Φ). Ω_V est <u>séparé</u> et <u>complet</u> (démonstration facile).

Si $H(u)$ est une fonction "régulière" définie dans V, à valeurs dans V', on a défini plus haut $J = H(I)$ comme une application de Ω_V dans $\Omega_{V'}$: celle-ci est <u>uniformément continue</u>. En effet, si $J_1=H(I_1)$, $J_2=H(I_2)$; on aura $N'_f(J_2-J_1)=L(f)$, ~~en posant~~ $L = N'(J_2-J_1) = N'(H(I_2)-H(I_1))$, d'où $L(f) \leqslant c.N_f(I_2-I_1)$ pour $f \in \Phi_+$.

AWR 001

Prendre $(f_i = f h_i)$, $(f'_j) = f h'_j$

$(f_{ijk}) = (f h_i h'_j,\ f h_i (1 - \Sigma h'_j),\ f h'_j (1 - \Sigma h_i))$

On ordonnera Ω en posant $I \geqslant 0$ pour $I \in \Omega_+$. On démontre facilement que tout ensemble, ordonné filtrant par la relation $\geqslant$, d'éléments de Ω_+, a une limite dans Ω_+.

On va maintenant se donner une fois pour toutes (dans tout ce qui suivra) <u>une</u> intégrale $\int$. Alors, si on fait correspondre, à tout $g \in \Phi'_V$, l'élément $I(f)=\int g.f$ de Ω_V, on a une application (peut-être pas biunivoque!) de Φ'_V dans Ω_V : par abus de langage, l'image de Φ'_V, avec la structure induite par celle de Ω_V, sera encore notée Φ'_V, et en particulier l'image de Φ_V sera encore notée Φ_V. On va étudier la variété linéaire $\overline{\Phi}_V$, adhérence commune (dans Ω_V) de Φ_V et de Φ'_V. D'autre part, on dira que $I \in \Omega_V$ est <u>singulière</u> par rapport à $\int$ si l'on a $\min(N(I), \int)(f)=0$; que $I \in \Omega_V$ est <u>absolument continue</u> par rapport à $\int$ si $I \in \overline{\Phi}_V$; on va caractériser les I absolument continues et les I singulières, et montrer que tout $I \in \Omega_V$ est, d'une manière et d'une seule, somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière par rapport à $\int$.

Tout d'abord, soit A_c l'ensemble des $I \in \Omega_V$ tels que $N(I(f)) \leqslant c.\int f$ pour $f \in \Phi_+$: on montre que l'ensemble des $I(f)=\int gf$ correspondant aux $g \in \Phi_V$ tels que $N(g) \leqslant c$ est dense dans A_c.

En effet, il y a $(f_i) \in \mathcal{P}(f)$ telle que pour toute partition plus fine (f_{ij}) on ait $\sum_{i,j} N(I(f_{ij})-a_i\int f_{ij}) \leqslant \varepsilon$. Soient $G_i(x_i)$ des fonctions continues, telles que $G_i(0)=0$, $\sum_i G_i(x_i)=1$ et $G_i(x_i)=x_i/(\sum_i x_i)$ pour $\sum_i x_i \geqslant \delta$; soit $g_i=G_i(f_i)$, et $g = \sum_i a_i g_i$. Soit (f'_j) une partition quelconque de f ; soit (f_{ij}) une partition plus fine que (f_i) et (f'_j), c'est-à-dire que $f_i = \sum_j f_{ij}$, $f'_j = \sum_i f_{ij}$, et telle que $f \geqslant \delta$ entraîne $f_{ij}=f_i f'_j/f$.

AWR 001

On aura alors $\sum_{i,j} N(I(f_{ij})-a_i\int f_{ij}) \leqslant \varepsilon$, donc $\sum_j N(I(f'_j)-\int\sum_i a_i f_{ij}) \leqslant \varepsilon$.
On a aussi $\sum_j N(\int(gf'_j - \sum_i a_i f_{ij})) \leqslant \int \sum_j N(gf'_j - \sum_i a_i f_{ij}) = \int h$, avec $h=0$ pour $f \geqslant \delta$ et, quel que soit f (puisque $N(a_i) \leqslant c$, $N(g) \leqslant c$) : $h \leqslant c.\sum_j f'_j + c\sum_{i,j} f_{ij} = 2cf$. On a donc $h \leqslant 2c\sqrt{\delta f}$, et par suite $\sum_j N(I(f'_j)-\int gf'_j) \leqslant \varepsilon + 2c\sqrt{\delta}\int\sqrt{f}$, ce qui démontre la proposition puisqu'on a pu prendre δ et ε arbitrairement petits, puis choisir les $G_i(x_i)$ en conséquence.

Soit alors $I \in \Omega_+$; soient $(c > 0)$ $I'_c = \min(I, c.\int)$ et $I''_c = I - I'_c$. Pour $c \to +\infty$, les I''_c forment un ordonné filtrant décroissant dans Ω_+ , donc convergent ; soient $I'' = \lim I''_c$, $I' = \lim I'_c$. On a $I'_c \in A_c$ donc $I' \in \overline{\Phi}$; et $\min(I''_c, \int) = H_c(I,\int)$, avec $H_c(u,v) = |v|.\lambda_c(|u/v|)$ et $\lambda_c(t)=0$ pour $t \leqslant c$, $=t-c$ pour $c \leqslant t \leqslant c+1$ et $=1$ pour $t \geqslant c+1$ ($H_c(u,v)$ est "régulière" !) ; on a $\lambda_c(t) \leqslant \varepsilon t$ pour c assez grand donc $\min(I''_c,\int) \leqslant \varepsilon I$ pour c assez grand, et, par passage à la limite, $\min(I'',\int) \leqslant \varepsilon I$ quel que soit ε , donc $\min(I''', \int)=0$.

On dira que deux intégrales $\int$, $\int'$ sont *singulières* l'une par rapport à l'autre si $\min(\int,\int')=0$ (ou si $\max(\int,\int')=\int+\int'$) . Cela veut dire $\lim_{\mathfrak{p}(f)} \sum_i \min(\int f_i, \int' f_i)=0$, d'où l'on conclut (en groupant ensemble, d'une part les f_i tels que $\int f_i \leqslant \int' f_i$, d'autre part les autres) : pour que $\int$, $\int'$ soient singulières l'une par rapport à l'autre, il faut et il suffit que tout $f \in \Phi_+$ admette, quel que soit ε , une partition à *deux* éléments (f_1,f_2) telle que $\int f_1 + \int' f_2 \leqslant \varepsilon$. On dira que $I \in \Omega_V$ est *singulière* par rapport à $\int$ s'il en est ainsi de $N(I)$, ou encore s'il existe $\int'$ singulière par rapport à $\int$ telle que $N(I(f)) \leqslant \int' f$ pour $f \in \Phi_+$: soit H_V

l'ensemble de ces I . Si $I \in \Theta_V \cap \Phi_V$, donc $I = \lim g$, $g \in \Phi_V$, on aura $0 = \min(N(I), \int) = \lim(\min(N(g),1))$ donc $\lim N(g) = 0$, $\lim g = I = 0$.

Donc tout $I \in \Omega_+$ peut être mis d'*une manière et d'une seule* sous la forme $I'+I''$ avec $I' \in \overline{\Phi}_+$, $I'' \in \Theta_+$; d'où s'ensuit le même résultat pour Ω_V , $\overline{\Phi}_V$, Θ_V , ces dernières étant donc des variétés linéaires fermées supplémentaires dans Ω_V . De plus, on a un critère pour $\overline{\Phi}_V$ (on dira que les intégrales $\in \overline{\Phi}_+$ et les $I \in \overline{\Phi}_V$ sont *absolument continues* par rapport à $\int$) : pour que $I \in \overline{\Phi}_V$, il faut et il suffit qu'à tout $h \in \Phi_+$ et tout ε corresponde η tel que $f \in \Phi_+$, $f \leq h$, $\int f \leq \eta$ entraînent $N(I(f)) \leq \varepsilon$.
Car : si $I \in \overline{\Phi}_V$, il y a $g \in \Phi_V$ tel que , si $J(f) = \int gf$, $N_h(I-J) \leq \delta$, donc, pour la partition $(f,h-f)$ de h , $N(I(f) - \int gf) \leq \delta$ et, si $N(g) \leq c$, $N(I(f)) \leq \delta + c.\int f$, donc aussi petit que l'on veut si δ , puis $\int f$, sont assez petits. Réciproquement : si le critérium est satisfait par I et I' , il l'est par I-I' , donc, puisque $I=I'+I''$, $I' \in \overline{\Phi}_V$, $I'' \in \Theta_V$, il suffit de montrer que si $I \in \Theta_V$ satisfait au critère , $I = 0$; c'est évident pour Θ_+ (d'après le critère donné plus haut pour Θ_+) , d'où on passe à Θ_V en décomposant suivant les composantes dans V , puis en parties positive et négative.

Si $I \in \overline{\Phi}_V$, et $H(u)$ régulière, on a $H(I) \in \overline{\Phi}_{V'}$ (évident) ; en particulier, pour que $I \in \overline{\Phi}_V$, il faut et il suffit que chaque composante I_ν de I (suivant une base dans V) soit élément de $\overline{\Phi}$, et pour que $I \in \overline{\Phi}$, il faut et il suffit que $I^+ \in \overline{\Phi}_+$, $I^- \in \overline{\Phi}_+$. Mêmes résultats pour Θ_V (on applique le crièère).

Théorie de Ω^1_V , $\overline{\Phi}^1_V$, etc. (ce qui suit ne donne évidemment quelque chose de nouveau *que si* $1 \notin \overline{\Phi}$). Soit H l'ordonné filtrant

AWR 001 16

(par la relation $\leqslant$) des $h \in \Phi_+$ tels que $0 \leqslant h \leqslant 1$. On dira que $I \in \Omega_V$ est <u>absolument borné</u> si $N(I)(h)$ est borné sur H ; on posera $N_1(I) = \sup_H N(I)(h) = \lim_H N(I)(h)$, et on désignera par Ω^1_V l'ensemble de ces I , <u>normé par</u> $N_1(I)$. On posera $I(1) = \lim_H I(h)$. Alors on a une décomposition, tout à fait analogue à celle donnée plus haut, de Ω^1_V en $\overline{\Phi}^1_V$, Θ^1_V , avec des critères analogues pour $\overline{\Phi}^1_V$, Θ^1_V (on peut aussi considérer que Ω^1_V est l'ensemble des $J(f')$, relativement (donc aussi absolument) bornées <u>sur</u> Φ' , et telles que l'on ait $J(1) = \lim_H J(h)$, ce qui donne une variété linéaire fermée dans l'espace Ω_V déduit de la famille Φ').

<u>Intégrandes</u>. On se bornera maintenant à l'étude de $\overline{\Phi}_V$ et de parties de $\overline{\Phi}_V$, celles-ci munies éventuellement de structures autres que celle induite par $\overline{\Phi}_V$; en particulier à l'étude de $\overline{\Phi}_+$, $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_R$ et $\overline{\Phi}_{\mathbb{C}}$ ($\mathbb{C}$ corps des nombres complexes). Les éléments de ces espaces s'appellent des <u>intégrandes</u> . On prolonge à ces espaces toutes les fonctions uniformément continues sur Φ_V ; d'où la définition de $\int \varphi . f$, $\varphi \in \overline{\Phi}_V$, $f \in \Phi$ (et aussi de $\int \varphi f$, $\varphi \in \overline{\Phi}_{\mathbb{C}}$, $f \in \Phi_{\mathbb{C}}$) et de $H(\varphi, 1) \in \overline{\Phi}_{V'}$, où $H(u,t)$ est une fonction "régulière" sur $V \times \mathbb{R}$. On ordonne $\overline{\Phi}$ comme il a été dit pour Ω .

On notera qu'on peut avoir, si $g \in \Phi$, $|g| \leqslant c$ <u>au sens de</u> $\overline{\Phi}$ (cela équivaut à $\|g\|_\infty \leqslant c$) sans que l'on ait, partout sur E , $|g(x)| \leqslant c$; cela ne paraît pas mériter qu'on change les notations (il y a toujours $g' \in \Phi$ tel que $g = g'$ "au sens de $\overline{\Phi}$ " et que $|g'(x)| \leqslant c$ sur E).

Soit comme plus haut A_c l'ensemble des $\varphi \in \overline{\Phi}_V$ tels que $N(\varphi) \leqslant c$.

Soit F(u) <u>continue</u> dans V , à valeurs dans V'. Considérons F(g) comme fonction sur $\Phi_V \subset \overline{\Phi_V}$, à valeurs dans $\Phi'_{V'} \subset \overline{\Phi_{V'}}$: elle est uniformément continue (au sens des structures uniformes de $\overline{\Phi_V}$, $\overline{\Phi_{V'}}$) sur l'ensemble des g tels que $N(g) \leqslant c$, et peut donc être prolongée, quel que soit c , en une fonction définie sur A_c , à valeurs dans $\overline{\Phi_{V'}}$ En effet, soit, sur l'ensemble des u tels que $N(u) \leqslant c$, $N'(F(u)) \leqslant c'$, et $N(u-v) \leqslant \beta$ entraîne $N'(F(u)-F(v)) \leqslant \alpha$; on aura donc, quels que soient, u,v dans cet ensemble $N'(F(u)-F(v)) \leqslant \alpha + 2\,c'.N(u-v)/\beta$, donc $\int N'(F(g)-F(h)).f \leqslant \alpha \int f + 2\,\frac{c'}{\beta} \int N(g-h).f$, donc aussi petit qu'on veut si α , puis $\int N(g-h).f$ ont été pris assez petits.

On posera dorénavant, pour $\varphi \in \overline{\Phi}$, $\|\varphi\|_p = \sup \left|\int \varphi f\right|$, la borne supérieure prise sur l'ensemble des $f \in \Phi$ tels que $\|f\|_{p'} \leqslant 1$ (pour $\varphi \in \overline{\Phi_+}$, on peut se restreindre aux $f \in \Phi_+$) ; de même, pour $\varphi \in \overline{\Phi_{\mathcal{C}}}$, avec $f \in \Phi_{\mathcal{C}}$, $\|f\|_{p'} \leqslant 1$. Pour p=1 , $\|\varphi\|_1 < +\infty$ équivaut à $I(f) = \int \varphi f \in \Omega^1$, c'est-à-dire à $\varphi \in \overline{\Phi}^1$, et l'on posera alors $\int \varphi = I(1) = \lim\limits_{H} \int \varphi h$. D'autre part, $\|\varphi\|_\infty$ est le plus petit $c \geqslant 0$ tel que $|\varphi| \leqslant c$. L'ensemble des $\varphi \in \overline{\Phi}$ tels que $\|\varphi\|_p < +\infty$, <u>avec la norme</u> $\|\varphi\|_p$, sera noté $\overline{\Phi}^p$. Alors on démontre :

a) que la fonction $|\varphi|^p$ (définie, d'après ce qui précède, sur $\overline{\Phi}^\infty$, comme fonction à valeurs dans $\overline{\Phi}^\infty$) peut être définie (par uniforme continuité) sur $\overline{\Phi}^p$ comme fonction à valeurs dans $\overline{\Phi}^1$ $(1 \leq p < +\infty)$, et que $\|\varphi\|_p = (\int |\varphi|^p)^{1/p}$;

b) que la fonction $\psi.\varphi$ (définie d'après ce qui précède sur $\overline{\Phi}^\infty \times \overline{\Phi}^\infty$) peut être définie comme fonction à valeurs dans $\overline{\Phi}^1$, <u>sur</u> $\overline{\Phi}^{p'} \times \overline{\Phi}^p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ et que toute fonction linéaire et continue sur $\overline{\Phi}^p$ est de la forme $\mathcal{F}(\varphi) = \int \psi.\varphi$ avec $\psi \in \overline{\Phi}^{p'}$ (<u>dualité des</u> $\overline{\Phi}^p$!) (il y a des petits canulars pour le cas limite 1,+∞)

AWR 001 18

c) les inégalités, par simple prolongement des résultats du § 1 ; en particulier, $\bar{\Phi}^p \cap \bar{\Phi}^q \subset \bar{\Phi}^r$ pour $p \leq r \leq q$. Il faut naturellement s'assurer que $\varphi.\psi$, pour $\varphi \in \bar{\Phi}^p \cap \bar{\Phi}^q$, $\psi \in \bar{\Phi}^{p'} \cap \bar{\Phi}^{q'}$, a la même valeur qu'on le prenne sur $\bar{\Phi}^p \times \bar{\Phi}^{p'}$ ou sur $\bar{\Phi}^q \times \bar{\Phi}^{q'}$ (on se servira du résultat suivant, qui est important à beaucoup d'égards : si $\varphi \in \bar{\Phi}^p \cap \bar{\Phi}^q$, avec $1 \leq p < q < \infty$, il y a une suite de $f_n \in \Phi$ tels que l'on ait $\varphi = \lim f_n$ au sens de $\bar{\Phi}^r$ quel que soit $r \in [p,q]$ (suite (f_n) indépendante de r !) et en même temps au sens de Φ). On montre même que $\psi.\varphi$ peut être défini, comme fonction à valeurs dans $\bar{\Phi}^r$, sur $\bar{\Phi}^p \times \bar{\Phi}^q$, chaque fois que $1/r=1/p + 1/q \leq 1$

Pseudo-fonctions. Soit K compact : soit ω une application $F(u) \to \varphi_F$ de l'ensemble des fonctions numériques F(u), continues sur K, dans $\bar{\Phi}$, telle que $F \geq 0$ sur K entraîne $\varphi_F \geq 0$, et que, si $L(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ est continue dans R^n, à $L(F_i(u))$ corresponde $L(\varphi_{F_i})$: une telle application s'appelle une pseudo-fonction ω, relative au compact K et à l'intégrale $\int$ donnée sur Φ, et on posera $\varphi_F = F(\omega)$. On donne à l'ensemble Ψ_K de ces fonctions une structure uniforme par l'ensemble des pseudométriques $\Delta(\omega, \omega') = \int \delta(\omega, \omega').f$, où $f \in \Phi_+$ et où $\delta(u,u')$ est l'une des pseudométriques d'une famille définissant la structure uniforme de K. On montre que, si $K' \subset K$, $\Psi_{K'}$ est isomorphe à la partie de Ψ_K formée des $\omega \in \Psi_K$ tels que $F(u)=0$ sur K' entraîne $F(\omega)=0$; que, si K est l'ensemble des $u \in V$ tels que $N(u) \leq c$, Ψ_K est isomorphe à l'ensemble A_c des $\varphi \in \bar{\Phi}_V$ tels que $N(\varphi) \leq c$; que, si $K = \prod_\iota K_\iota$, Ψ_K est isomorphe à $\prod_\iota \Psi_{K_\iota}$; d'où s'ensuit que, si on plonge K dans un produit de segments $[-1,+1]$, $K \subset \prod_\iota S_\iota$, Ψ_K peut être défini comme l'ensemble des (φ_ι) où $\varphi_\iota \in \bar{\Phi}$, $|\varphi_\iota| \leq 1$, tels que l'on ait $|F(\varphi_{\iota_1}, \varphi_{\iota_2}, \ldots, \varphi_{\iota_n})| \leq 1$

AWR 001 19

chaque fois que $|F(u_{\iota_1}, u_{\iota_2}, \ldots, u_{\iota_n})$ est ≤ 1 sur K .

Si K est à <u>deux</u> éléments, les pseudofonctions relatives à K s'appelleront aussi <u>pseudoensembles</u>.

Pour certaines questions, il paraît indispensable d'aller plus loin, et de définir des pseudofonctions relatives à <u>une famille</u> d'intégrales $\int_\iota$ données sur Φ (pour simplifier les notations, on supposera que $c.\int_\iota + d\int_\varkappa$ appartient aussi à la famille si $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$). On définira $\overline{\Phi}$ comme le complété de Φ par les normes $N_{h,\iota}(\varphi) = \int_\iota |\varphi| . h$, $h \in \Phi_+$; puis Ψ_K comme ci-dessus, avec les pseudométriques $\Delta(\omega, \omega') = \int_\iota \delta(\omega, \omega').f$.

En particulier, une pseudofonction ω (relative à K et à la famille d'intégrales $\int_\iota$) permet de définir, sur l'ensemble des fonctions $F(u)$ continues sur K , la familles des intégrales $\int_\iota F(\omega).f$, $f \in \Phi_+$, $\iota \in I$. Si ϑ est une pseudofonction relative à cette famille et à un autre compact M , on pourra <u>composer</u> les pseudo-fonctions ϑ , ω : $\vartheta \circ \omega$ sera une pseudofonction relative à M et aux intégrales $\int_\iota$.

<u>Observations générales</u>. Dans tout cela, il y a une certaine incohérence qui demandera une mise au point soignée. Du point de vue de la pure théorie de l'intégration, ce sont les $\overline{\Phi}^p$ qui sont essentiels. Les espaces $\overline{\Phi}$ d'une part, Ψ_K de l'autre, sont destinés à se substituer aux ensembles de fonctions mesurables des anciennes théories. On a vu plus haut comment les Ψ_K peuvent être déduits de $\overline{\Phi}$. Mais d'autre part, $\overline{\Phi}$ admet une représentation biunivoque dans $\Psi_{\overline{R}}$ (à tout $\varphi \in \overline{\Phi}$, on peut faire correspondre biunivoquement une pseudo-fonction relative à la droite achevée) ; de même $\overline{\Phi}_V$ dans $\Psi_{\overline{V}}$, si $\overline{V}$ est un compact déduit de V par

adjonction d'éléments (pas nécessairement un seul!).

Si par exemple on se donne, <u>au sens classique</u> (Carathéodory) une mesure sur une tribu de parties de E , et l'intégrale qui s'en déduit sur la famille Φ des fonctions mesurables bornées, on pourra faire les identifications suivantes : 1) de $\overline{\Phi}^p$ avec l'ensemble des fonctions mesurables φ telles que $\int |\varphi|^p < +\infty$ $(1 \leq p < +\infty)$; 2) <u>si l'espace E est mesurable</u> (réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie), de $\overline{\Phi}$ avec l'ensemble des fonctions φ mesurables telles que $\int_A |\varphi| < +\infty$ pour $m(A) < +\infty$; 3) <u>si E est mesurable</u>, et <u>si K satisfait au II^{è} axiome de dénombrabilité</u>, de Ψ_K avec l'ensemble des fonctions mesurables sur E , à valeurs dans K (c'est-à-dire des $\varphi(x)$ telles que $\overset{-1}{\varphi}(\Omega)$ soit mesurable pour Ω ouvert dans K).

La composition des pesudo-fonctions est nécessaire pour avoir un équivalent, dans la nouvelle théorie, de notions de la théorie classique telles que : "$\varphi(x)$ étant mesurable sur E , et B un ensemble de Borel sur la droite, soit $A = \overset{-1}{\varphi}(B)$ ". Ici, B apparaît comme pseudo-ensemble sur la droite (on verra d'ailleurs au ch.II comment, sur un compact, on peut établir des correspondances entre pseudoensembles, ensembles de Borel et ensembles mesurables).

Un remède radical sera de balancer entièrement les pseudofonctions, qui ne sont sans doute pas vraiment indispensables.

Il faut noter aussi qu'en dehors de son intérêt propre, la théorie des fonctions relativement bornées sur Φ ne sert absolument qu'à démontrer le théorème de dualité des $\overline{\Phi}^p$ (de la manière suivante : $\mathcal{F}(\varphi)$ étant linéaire et continue sur $\overline{\Phi}^p$, on constate immédiatement que $\mathcal{F}(f)$ est absolument continue sur Φ , d'où $\mathcal{F}(f) = \int \Upsilon f$, avec $\Upsilon \in \overline{\Phi}$). Il faudrait donc examiner la possibilité d'un changement d'ordre ;

après le § 1, théorie de $\overline{\Phi}$ et des $\overline{\Phi}^p$, en ne conservant de la théorie des fonctions relativement bornées que le strict indispensable pour la dualité (ou éventuellement en démontrant la dualité par la méthode von Neumann : on l'établit d'abord pour $\overline{\Phi}^2$ qui, en tant qu'espace de Hilbert, est autodual (ce qui exige ici un bout de théorie des espaces de Hilbert), et passant de là aux $\overline{\Phi}^p$) ; le développement, comme ci-dessus, de la théorie des fonctions relativement bornées se ferait plus loin, par exemple en fin de chapitre.

§ 3. Etude des produits de structure. On commence par Lebesgue-Fubini : on prolonge les applications $f(x_1,x_2) \to \int_1 f(x_1,x_2)$ et $f(x_1,x_2) \to \int_2 f(x_1,x_2)$ de Φ dans Φ_2 et Φ_1 , à $\overline{\Phi}^1$, $\overline{\Phi}_2^1$, $\overline{\Phi}_1^1$.

Pour la suite, il est prévu (non rédigé) : les inégalités de Marcel Riesz (il y a lieu de mettre au concours la recherche d'une démonstration s'appliquant directement aux espaces $\overline{\Phi}^p$; toutes les démonstrations connues, à savoir celle de Riesz, une démonstration récente de L.C.Young (Ann.of Maths., t.40, cf.Math. Reviews n° 1) et une autre très intéressante de Thorin (parue dans un périodique de Lund, citée par Young) traitent le cas fini des formes linéaires à un nombre fini de variables, et ne s'appliquent aux $\overline{\Phi}^p$ que par un passage à la limite) ;- la théorie des "opérateurs de Volterra" $\psi(x_2) = T(\varphi(x_1)) = \int_1 K(x_1,x_2)\varphi(x_1)$, où $K \in \overline{\Phi}^p$ sur $E_1 \times E_2$, $\varphi \in \overline{\Phi}_1^q$ (on pourrait avantageusement mettre ici les formules de résolution de l'équation de Fredholm, pour $K \in \overline{\Phi}^2$, $\varphi \in \overline{\Phi}^2$; sur tout cela, voir des notes et démonstrations, en parties inédites, de Smithies) ; - la théorie du produit de composition $K * L = \int_2 K(x_1,x_2)L(x_2,x_3)$.

Ensuite : théorie des produits infinis de moyennes, contenant autant de résultats du calcul des probabilités qu'on le voudra (dans le langage des probabilités, qu'on aura introduit dès le début du § 1) : résultats asymptotiques, parmi lésquels les plus simples sont ceux dits "de probabilité 0 ou 1" sur lesquels cf. en particulier les publications de C. Vischer (vérifier le nom : il s'agit d'un hollandais, tout jeune vraisemblablement, dont j'ai eu quelques tirés à part).

§ 4. Prolongement régulier. Soit Ψ une famille, analogue à Φ, contenant Φ (aucun rapport avec la notation Ψ_K employée plus haut). Une intégrale sur Ψ est dite prolongement régulier de sa restriction à Φ, si les espaces $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$; $\overline{\Phi}^p$, $\overline{\Psi}^p$, formés au moyen de cette intégrale, prise sur Φ et Ψ respectivement, sont isomorphes (on transforme trivialement cette définition en un critère d'application commode). Si $1 \in \Phi$; si Φ^* est l'ensemble des fonctions limites uniformes de fonctions de Φ, et qu'on prolonge $\int$, donnée sur $\mathring{\Phi}$, à Φ^* par continuité, le prolongement est régulier (évident).

Fonctions additives d'ensemble. Soit m(A) une fonction, à valeurs dans $[0,+\infty[$, sur une famille $\mathfrak{A}$ de parties de E, satisfaisant à : (A_I) Si $A,B \in \mathfrak{A}$, on a $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \complement B \in \mathfrak{A}$; (A_{II}) Si $A,B \in \mathfrak{A}$ et $A \cap B = \emptyset$, $m(A \cup B) = m(A)+m(B)$. Soit Φ_V la famille des fonctions étagées par rapport à $\mathfrak{A}$, à valeurs dans V, c'est-à-dire telles qu'il existe des $A_i \in \mathfrak{A}$ en nombre fini, sur chacun desquels f soit constante, avec f=0 sur $\complement(\bigcup_i A_i)$: m définit une intégrale sur Φ. Prolongement régulier de cette intégrale à la famille Φ^* des fonctions f telles qu'il existe $A \in \mathfrak{A}$ sur

AWR 001 23

lequel f est limite uniforme de fonctions étagées, et en dehors duquel f=0. Critères pour que $f \in \Phi^*$. Produit de structures.

Fonctions complètement additives : m(A) est complètement additive si : (A_{III}) $A_n \in \mathfrak{A}$ (n=1,2,...) , $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap_n A_n = \emptyset$ entraîne $\lim m(A_n)=0$; $\mathfrak{A}$ est dite une tribu, et m une mesure si de plus : (M_I) $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_n \supset A_{n+1}$ entraîne $\bigcap_n A_n \in \mathfrak{A}$; m est dite mesure complète si : (M_{II}) $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $\lim m(A_n) < +\infty$ entraîne $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{A}$; (M_{III}) $A \in \mathfrak{A}$, $B \subset A$, m(A)=0 entraîne $B \in \mathfrak{A}$. (N-B. Tribu a changé de sens!).

On donne alors quelques-uns des résultats de la théorie classique, en particulier la caractérisation de Φ^*_V (fonctions mesurables bornées sur un $A \in \mathfrak{A}$, nulles sur $\complement A$), et le th. de Carathéodory : toute fonction complètement additive admet un prolongement régulier qui est une mesure complète.

Le th. de Nikodym réapparaît sous la forme suivante : si m , m' sont deux mesures sur une même tribu, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale définie par m' soit absolument continue par rapport à celle définie par m , est que m(A)=0 entraîne m'(A)=0.

D'autre part (ce qui achève de redonner le Nikodym classique), on a $\Phi^*_V = \overline{\Phi}^*_V$ si E est réunion dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{A}$. J'ai l'impression que cette dernière condition est essentielle (au concours : formation d'un contre-exemple, bien entendu, avec Dieudonné hors-concours, membre du jury) : c'est-à-dire que le Nikodym classique est faux dans un espace non "mesurable" au sens de nos anciennes rédactions (au sens de Possel) : ce qui est encore un argument en faveur de ma théorie.

<u>On pourrait</u> donner ici le produit de structures pour fonctions complètement additives et mesures, qui formait (cf. le défunt monstre de Dieudonné) le morceau de <u>résistance</u> des anciennes théories. Cela me paraît entièrement inutile. Le cas vraiment intéressant, celui des compacts, sera traité au ch.II très facilement (d'ailleurs je crois bien que l'on peut, si l'on veut, (voir plus bas), faire un retour du cas des compacts au cas abstrait qui redonnerait le résultat abstrait). On peut se contenter de donner l'énoncé du résultat (Lebesgue-Fubini classique), ou mieux de le donner dans l'historique.

<u>On observera</u> que la théorie de l'intégration dans les compacts est sous-jacente dans tout ce chapitre. Cela est particulièrement sensible dans la démonstration, esquissée plus haut, du produit de structures, au § 1 ; et dans les pseudofonctions. Par exemple, pour le cas $1 \in \Phi$, soit $f_\iota(x)$, $\iota \in I$, une représentation paramétrique de Φ par un ensemble d'indices I ; soit $|f_\iota(x)| \leq M_\iota$, soit $S_\iota = [-M_\iota, +M_\iota]$: $f(x)=(f_\iota(x))$ est une application de E dans $S = \prod_\iota S_\iota$ et l'étude de l'intégrale $\int$ dans E est équivalente à l'étude d'une intégrale (au sens du ch.II) dans le compact S , ou si l'on veut dans l'adhérence de l'image de E dans S . En un certain sens, par conséquent, l'étude de l'intégrale "abstraite" (au sens ci-dessus) est une escroquerie. Néanmoins je la crois utile.

<u>CHAP.II</u> . <u>Intégration dans les espaces topologiques</u>. (esquisse sommaire).

§ 1. <u>Espaces compacts</u>. Il sera entendu que, dans un compact K , on prend <u>toujours</u> pour famille Φ la famille des fonctions continues sur K (bien entendu, il suffit de prendre une famille partout dense dans Φ au sens de la convergence uniforme, pour pouvoir passer à Φ ; c'est ce qui se passe dans le produit de structures, fini ou infini).

On commence par le théorème de H. Cartan : si $f_\alpha(x)$ est un ensemble ordonné filtrant par $\geqslant$, de $f_\alpha \in \Phi_+$, et si $\lim f_\alpha(x) \leqslant g(x)$, on a $\lim \int f_\alpha \leqslant \int g$. Si donc $g_\lambda(x)$ est aussi ordonné filtrant par $\geqslant$, $g_\lambda \in \Phi_+$, $\lim f_\alpha \leqslant \lim g_\lambda$, on a $\lim \int f_\alpha \leqslant \lim \int g_\lambda$. On peut donc, sans ambiguité, définir $\int f$ pour f semi-continue supérieurement et $\geqslant 0$ (N-B. Ceci n'est pas, provisoirement, une intégrale au sens du ch.I ; on retrouvera une vraie intégrale un peu plus loin), avec $f \leqslant g$ entraîne $\int f \leqslant \int g$, et $\int (af+bg) = a\int f + b\int g$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$, et, si les f_α, semi-continues supérieurement et $\geqslant 0$, forment un ordonné filtrant par $\geqslant$, $\lim \int f_\alpha = \int (\lim f_\alpha)$. Pour f continue et $\geqslant 0$ sur une partie fermée F et K, et $=0$ sur $\complement F$, $\int f$ définit une intégrale sur F (<u>structure induite sur une partie compacte de</u> K) notée $\int_F f$; en particulier, on posera $m(F) = \int_F 1$ (ce n'est pas, pour l'instant, une mesure au sens du ch.I, §4, ni même une fonction additive : on a bien $m(F \cup F') = m(F) + m(F')$ si $F \cap F' = \emptyset$, mais (A_I) n'est pas satisfait).

D'autre part, on démontre (th. de Lebesgue) que, si les f_n, semi-continues supérieurement et $\geqslant 0$, forment une <u>suite</u> croissante, et si $f = \lim f_n$ est semi-continue supérieurement, $\int f = \lim \int f_n$ (démonstration assez délicate). Ce résultat, beaucoup plus profond que celui de H. Cartan (et faux bien entendu pour un ordonné filtrant quelconque), paraît être la raison de l'intervention du dénombrable dans la théorie (et justifie rétrospectivement l'étude faite au ch.I, §4, des fonctions complètement additives, qui ne tirent leur intérêt <u>que</u> de l'application aux espaces topologiques).

Alors, soit, pour $A \subset K$, $m_i(A) = \sup m(F)$ pour F fermé et $\subset A$, A sera dit <u>mesurable</u>, et $m_i(A) = m(A)$ sa <u>mesure</u> si $m_i(A) + m_i(\complement A) = m(K)$.

AWR 001 26

Du théorème de Lebesgue on déduit facilement que tout fermé et tout ouvert sont mesurables ; que les mesurables forment une tribu, et $m(A)$ une mesure complète sur cette tribu (au sens du ch.I, § 4) . La tribu des mesurables contient évidemment la tribu de Borel (plus petite tribu contenant les fermés) ; il est clair aussi que, si A est mesurable, il y a un ensemble de Borel A' (un "F_σ") tel que $A' \subset A$, $m(A \cap \complement A')=0$, et un A'' (un "G_δ ") tel que $A'' \supset A$, $m(A'' \cap \complement A)=0$.

On définit enfin sans difficulté l'intégrale (prolongement régulier de $\int$, comme il résulte du ch.I, § 4, ou comme on le voit directement) sur la famille Λ des fonctions mesurables bornées (qui contient la famille $\mathcal{B}$ des fonctions boréliennes bornées) ; Λ et $\mathcal{B}$ satisfont bien à l'axiome (I_a) du ch.I, § 1, et contiennent toutes les semi-continues bornées. Et l'application de $\mathcal{B}$ (et à plus forte raison de Λ) dans $\overline{\Phi}^{\infty}$ est une application sur $\overline{\Phi}^{\infty}$.

Enfin, on identifie certaines fonctions non bornées, mesurables et en particulier boréliennes, avec des éléments de $\overline{\Phi}$, ce qui définit $\int \varphi$ pour celles de ces fonctions qui appartiennent à $\overline{\Phi}^1$: tout élément de $\overline{\Phi}$ correspond ainsi à une fonction borélienne au moins (sur cette famille, $\int$ sera encore dite l'intégrale, par abus de langage).

On terminera le § 1 par la théorie du produit de structure, à savoir la version classique de Lebesgue-Fubini pour les compacts : si $f(x_1,x_2)$ est borélienne sur $K_1 \times K_2$, $\int_1 f(x_1, x_2)$ est borélienne sur K_2 ; si $f(x_1,x_2)$ est mesurable sur $K_1 \times K_2$, $\int_1 f(x_1,x_2)$ est définie sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle, et de quelque manière qu'on la prolonge à tout K_2 , on obtient une fonction mesurable $f_2(x_2)$ telle que $\int_1\int_2 f = \int_2 f_2$; etc...

AWR 001 27

§ 2. Espaces topologiques quelconques. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties compactes de l'espace E , fermée par rapport à la réunion finie (on peut de plus supposer, sans restreindre la généralité de ce qui suit, que, si $K \in \mathcal{C}$, toute partie fermée de K appartient à $\mathcal{C}$). On prendra pour Φ la famille des fonctions f(x) telles qu'il existe $K \in \mathcal{C}$ sur lequel f soit borélienne et en dehors duquel f(x)=0 . Je n'ai pas réfléchi aux résultats qu'il faudra donner ici. Le cas le plus important est celui où $\mathcal{C}$ se compose de toutes les parties compactes de E : il se présente par exemple quand, $\int$ étant une intégrale sur un compact, et E une partie mesurable quelconque de ce compact, on examine la structure induite sur E .

§ 3. Mesure de Haar dans un groupe localement compact (existence et unicité). Applications ad libitum. En particulier, bien entendu, mesure de Lebesgue dans R , dans R^n , dans T et T^n . Egalement : "probabilités géomètriques" et quelques résultats de "géomètrie intégrale" de Blaschke.

(§ 4. Des applications aux probabilités ?)

N-B . Prière de rechercher, en particulier au moyen du monstre dieudonnéen, si aucun point important n'a été omis.

AWR 001

Remarques additionnelles (Weil) sur l'Intégration.

1) Au sujet de la théorie des fonctions complètement additives, il importe d'avertir que la seule partie un peu difficile, à savoir le théorème de Carathéodory (prolongement régulier d'une fonction complètement additive en une mesure complète) n'est pas utilisée par la suite ; au ch.II, on démontre directement que la "mesure" qu'on obtient sur un compact est bien une "mesure complète" au sens du ch.I . Rien n'empêcherait de rejeter le th. de Cara. en Appendice, ou même de le supprimer. On n'utilise au ch.II que les résultats élémentaires sur les limites de suites de fonctions mesurables.

2) Au sujet de l'introduction d'une famille d'intégrales $\int_\iota$ à propos des pseudofonctions :

a) J'ai des raisons de penser que cette idée est importante dans diverses questions (transformation de Fourier, p. ex.).

b) Si l'on a la famille Φ et la famille d'intégrales $\int_\iota$ sur Φ , $\overline{\Phi}$ se définit par complétion pour les pseudonormes $N_{\iota,h}(f)=\int_\iota h.|f|$, $h \in \Phi_+$. Si $1 \in \Phi$, il suffit évidemment de prendre les pseudonormes $N_\iota(f) = \int_\iota |f|$. Si d'autre part $1 \notin \Phi$, et si Φ' est la famille des $c+f$ (c = constante, $f \in \Phi$), $\overline{\Phi}$ peut aussi bien se définir à partir de Φ' avec les $N_{\iota,h}(f') = \int_\iota h.\,|f'|$. Mais cela revient à partir de Φ' et de la famille d'intégrales définies sur Φ', $J_{\iota,h}(f') = \int_\iota h.f'$. Autrement dit, on peut, avec avantage pour la simplicité de l'exposé, se borner à traiter le cas $1 \in \Phi$ sans restreindre la généralité.

c) En particulier, il y aurait peut-être intérêt, pour la théorie de l'intégration dans les topologiques non compacts, à mettre à la base (au lieu de ce qui est dit dans le texte, qui a l'inconvénient

AWR 001

de donner une importance excessive aux fonctions boréliennes) une famille d'intégrales $\int_i F(x)$, définies toutes sur la famille de <u>toutes</u> les fonctions numériques continues dans E, dont chacune s'annule en dehors d'un compact K_i (c'est-à-dire ne dépende que des valeurs prises par $F(x)$ sur K_i) et qui se prolongent les unes les autres. Cela revient évidemment au même que ce qui est dit dans le texte. Convient-il de traiter à part les localement compacts (avec la famille des $F(x)$ continues, nulles en dehors d'un compact)?

3) Ma rédaction donnait, dès le début du § 1, l'extension de $\int$, par continuité, à l'ensemble des limites uniformes de fonctions de Φ dans le cas $1 \in \Phi$, et comme application l'intégrale de Stieltjes sur un segment fermé de R (ou sur $\overline{R}$) pour les fonctions continues par morceaux, en partant des fonctions étagées.

4) L'interprétation d'une intégrale sur E comme mesure dans $E \times R$ est à donner au ch. II, avec les localement compacts (se borner à E compact ou localement compact ?).
