INTEGRATION
LES PHRATRIES

Rédaction n° 016

Nombre de pages : 63

Nombre de feuilles : 63

Intégration Chap I
les phratries

16

Livre VI

Etat 2bis

A 16²

NOTE EXPLICATIVE.

Le coeur du vrai disciple de Bourbaki, tout en se sentant réconforté à la vue du travail puissant de l'un de ses condisciples relatif à l'intégration, ne pouvait manquer de se serrer en constatant que l'inspiration profonde du maître de l'Escorial ne s'est que partiellement expirée par la plume (si j'ose dire) de Dieudonné ; il regrette en effet que le sus-nommé ait cru devoir en revenir aux méthodes anciennes en ce qui concerne la *définition* de l'intégrale ; il s'émeut d'autre part du caractère massif des considérations initiales sur les tribus.

En présence de cet état de choses, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile, ne serait-ce qu'à titre dialectique, de montrer comment il était possible de suivre strictement l'idée du maître : définition de l'intégrale par prolongement d'une fonctionnelle. Tel est le but de la rédaction ci-jointe. Elle ne présente aucune prétention au définitif ; de nombreuses idées, de multiples remarques et exercices tirés de celle de Dieudonné s'y adjoindraient harmonieusement. Les lecteurs éventuels pourront constater que je me suis attaché à être le plus précis possible en ce qui concerne la notion de presque partout et que j'ai évité, autant que je le pouvais, les calculs sur $\pm\infty$, évitant ainsi les dangereuses "conventions de calcul".

Chapitre I.

LES PHRATRIES.

I. DEFINITION. PHRATRIE ENGENDREE PAR UNE FAMILLE.

Défintion. Une famille $\mathcal{S}$ d'ensembles s'appelle une phratrie quand elle satisfait aux conditions suivantes :

P. 1. Les conditions $X \in \mathcal{S}$, $Y \in \mathcal{S}$ entraînent $X \cup Y \in \mathcal{S}$

P. 2. Les conditions $X \in \mathcal{S}$, $Y \in \mathcal{S}$, $Y \subset X$ entraînent $X-Y \in$

P. 3. $\mathcal{S}$ n'est pas vide.

Il en résulte immédiatement que toute phratrie contient l'ensemble vide.

Proposition 1. Si $\mathcal{S}$ est une phratrie, les conditions $X \in \mathcal{S}$, $Y \in \mathcal{S}$ entraînent $X \cap Y \in \mathcal{S}$.

En effet, elles entraînent $Y-(X \cap Y) = (X \cup Y)-X \in \mathcal{S}$, d'où $X \cap Y = Y -(Y-X \cap Y) \in \mathcal{S}$.

Par suite, la réunion et l'intersection d'une famille finie non vide d'ensembles de $\mathcal{S}$ sont dans $\mathcal{S}$.

Montrons maintenant que l'intersection $\mathcal{T}$ d'une famille $\mathcal{U}$ de phratries est une phratrie. En effet, les conditions $X \in \mathcal{T}$, $Y \in \mathcal{T}$ entraînent que, pour toute phratrie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{U}$, $X \in \mathcal{S}$, $Y \in \mathcal{S}$, d

$X \cup Y \in \mathcal{S}$, et si $Y \subset X$, $X-Y \in \mathcal{S}$; d'où enfin $X \cup Y \in \mathcal{T}$, et, si $Y \subset X$, $X-Y \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ contenant l'ensemble vide n'est pas vide et es par suite une phratrie.

Considérons maintenant une famillle d'ensembles quelconque $\mathcal{F}$ L'intersection de toutes les phratries qui contiennent $\mathcal{F}$ est une phra--trie qui contient $\mathcal{F}$ et qui est contenue dans toute phratrie qui contient $\mathcal{F}$. Nous l'appellerons la phratrie engendrée par $\mathcal{F}$, et nous la désignerons par $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$.

1 Proposition 2. Si X $\in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, <u>il existe une famille finie $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ telle que l'on ait aussi</u> X $\in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}'}$.

Posons $\mathfrak{S}' = \bigcup_{\mathfrak{F}'} \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}'}$, $\mathfrak{F}'$ parcourant toutes les familles finies contenues dans $\mathfrak{F}$. On a $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$. Notre proposition sera démontrée si nous montrons que $\mathfrak{S}'$ est une phratrie : car on aura alors $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$. Or, si X, Y sont des ensembles de $\mathfrak{S}'$, il existe des familles finies $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ telles que $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'' \subset \mathfrak{F}$, X $\in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}'}$, Y $\in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}''}$. Posons $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}' \cup \mathfrak{F}''$: on a X $\in \mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}$; Y $\in \mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}$ et par suite aussi X $\cup$ Y $\in \mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}$ et, si Y $\subset$ X, X-Y $\in \mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}$. Or $\mathfrak{G}$ est une famille finie contenue dans $\mathfrak{F}$; on a donc X $\cup$ Y $\in \mathfrak{S}'$ et, si Y $\subset$ X, X-Y $\in \mathfrak{S}'$, ce qui prouve que $\mathfrak{S}'$ est une phratrie.

Il y a donc intérêt à étudier les phratries qui sont engendrées par des familles finies.

Considérons d'abord le cas d'une famille finie $\mathfrak{F}$ dont les éléments sont deux à deux sans élément commun. Nous appellerons provisoirement "simple" une telle famille.

Soit $\mathfrak{S}'$ la famille des ensembles X tels que 1) X $\subset \bigcup_{\mathfrak{F}}$ Y 2) pour tout Y $\in \mathfrak{F}$, on ait ou bien X $\cap$ Y = 0 ou bien X $\cap$ Y=Y. On voit tout de suite que $\mathfrak{S}'$ est une phratrie. De plus $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}'$; il en résulte que $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$. D'autre part, si X $\subset \mathfrak{S}'$, soit X' la réunion de ceux des ensembles de $\mathfrak{F}$ qui sont contenus dans X ; pour tout Y $\in \mathfrak{F}$, on a (X-X') $\cap$ Y = 0 ; comme X-X' $\subset \bigcup_{\mathfrak{F}}$ Y, on a X-X' = 0 , et X' = X, d'où X $\in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, et $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$. Donc:

1 <u>si $\mathfrak{F}$ est une famille simple, les ensembles de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ peuvent être caractérisés soit par les conditions 1), 2) soit par le fait d'être des réunions d'ensembles de</u> $\mathfrak{F}$. D'autre part, les ensembles Y de $\mathfrak{F}$ sont

caractérisés, parmi ceux de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, par la condition d'être *minimaux*, condition qui s'exprime ainsi : il n'existe dans Y aucun autre ensemble de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ que $\bigcirc$ et Y .

Proposition 3. *Si $\mathcal{F}$ est une famille finie d'ensembles, il existe une famille simple $\mathcal{F}'$ et une seule telle que* $\mathcal{S}_{\mathcal{F}'} = \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$.

A chaque partie non vide $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ faisons correspondre l'ensemble $Y_{\mathcal{G}} = (\bigcap_{\mathcal{G}} Z) \cap (\bigcap_{T \in \mathcal{F}-\mathcal{G}} (A-T))$, où A est la réunion des ensembles de $\mathcal{F}$: nous obtenons ainsi une famille finie $\mathcal{F}'$ d'ensembles de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ (il est clair que $A \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$). Si $X \in \mathcal{F}$, on a $Y_{\mathcal{G}} \subset X$ ou $Y_{\mathcal{G}} \cap X = \bigcirc$ suivant que $X \in \mathcal{G}$ ou que $X \in \mathcal{F} - \mathcal{G}$.

De plus, si $x \in A$, x appartient à un ensemble $Y_{\mathcal{G}}$ et à un seul, à savoir à celui qui correspond à la famille $\mathcal{G}$ des parties de $\mathcal{F}$ dont x est élément. Il résulte de là que la famille $\mathcal{F}'$ est simple, que la réunion de ses ensembles est A, et que les ensembles de $\mathcal{F}$ appartiennent à $\mathcal{S}_{\mathcal{F}'}$. Comme d'autre part, toute famille simple $\mathcal{F}''$ telle que $\mathcal{S}_{\mathcal{F}''} = \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ se confond avec la famille des ensembles minimaux de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, notre pro- -position est démontrée.

Elle peut encore se formuler de la manière suivante :

Théorème 1, dit "de décomposition". *Si $\mathcal{S}$ est une phratrie, et $\mathcal{F}$ une famille finie d'ensembles de $\mathcal{S}$, il existe une famille finie $\mathcal{F}'$ d'ensembles de $\mathcal{S}$ deux à deux sans élément commun telle que chaque ensemble de $\mathcal{F}$ soit une réunion d'ensembles de $\mathcal{F}'$ et que la réunion de tous les ensembles de $\mathcal{F}'$ soit égale à celle de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.*

Nous aurons plusieurs fois à engendrer des phratries par des familles d'ensembles $\mathcal{F}_0$ satisfaisant aux conditions suivantes:

HP 1. *Les conditions* $X \in \mathcal{F}_0$, $Y \in \mathcal{F}_0$ *entraînent* $X \cap Y \in \mathcal{F}_0$

HP 2. *Les conditions* $X \in \mathcal{F}_0$, $Y \in \mathcal{F}_0$, $Y \subset X$ *entraînent l'existence* d'une famille simple $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}_0$ dont X-Y soit la réunion.

HP. 3. $\mathcal{F}_0$ n'est pas vide.

Une pareille famille est appelée une hypo-phratrie.

Remarquons d'abord que, si $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ sont des familles simples contenues dans une hypo-phratrie $\mathcal{F}_0$, et si $X = \bigcup_{\mathcal{F}'} X'$, $Y = \bigcup_{\mathcal{F}''} Y'$, on a $X \cap Y = \bigcup_{\substack{X' \in \mathcal{F}' \\ Y' \in \mathcal{F}''}} (X' \cap Y')$, et que la famille des ensembles $X' \cap Y'$ pour $X' \in \mathcal{F}'$, $Y' \in \mathcal{F}''$ est une famille simple. Il en résulte que l'intersection de plusieurs ensembles dont chacun est la réunion d'une famille simple contenue dans $\mathcal{F}_0$ est encore la réunion d'une famille simple contenue dans $\mathcal{F}_0$.

Considérons une hypo-phratrie $\mathcal{F}_0$ et une famille finie $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_0$. Considérons un ensemble minimal $Y_{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ (cf. démonstration de la proposition 3). Si X est un élément de $\mathcal{G}$, on peut écrire $Y_{\mathcal{G}} = (\bigcap_{\mathcal{G}} Z) \cap (\bigcap_{T \in \mathcal{F}-\mathcal{G}} (X - X \cap T))$. Or chacun des ensembles $X - X \cap T$ est la réunion d'une famille simple contenue dans $\mathcal{F}_0$: $Y_{\mathcal{G}}$ est donc lui-même la réunion d'une famille simple $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ contenue dans $\mathcal{F}_0$.

Si $\mathcal{F}'$ est la réunion des diverses familles $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}$ parcourant toutes les parties non vides de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ est encore une famille simple contenue dans $\mathcal{F}_0$ (parce que les ensembles $Y_{\mathcal{G}}$ sont deux à deux sans élément commun) ; de plus, on a $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}'}$. En rapprochant ce résultat de la proposition 2, on obtient la

Proposition 4. Si $\mathcal{F}_0$ est une hypo-phratrie, tout ensemble de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_0}$ est la réunion d'un certain nombre d'ensembles de $\mathcal{F}_0$ deux à deux sans élément commun.

Exemples. 1) la famille des parties finies d'un ensemble, celle des parties dénombrables et celle de toutes les parties constituent des phratries.

2) R étant l'ensemble des nombres réels, soit $\mathcal{F}_0$ la famille

constituée par la réunion de la famille des intervalles ouverts bor--nés de R et de celle des parties finies de R. $\mathbb{F}_{\odot}$ est une hypo-phra--trie. Soient en effet X, Y deux ensembles de $\mathbb{F}_{\odot}$.

a) si X et Y sont des intervalles ouverts bornés (a, b) et (c, d) leur intersection est vide si $b \leqslant c$ ou si $d \leqslant a$; sinon, $X \cap Y$ est l'intervalle ouvert (e, f) où $e = \overline{\text{borne}}\,(a,c)$, $f = \underline{\text{borne}}\,(b,d)$; si l'un des ensembles X, Y est fini, il en est de même de $X \cap Y$;

b) supposons $Y \subset X$; si X est fini, il en est de même de X-Y ; si X, Y sont des intervalles ouverts (a,b), (c,d), on a $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$; si on a $a < c$, $d < b$, X-Y s'écrit $(a, c) \cup (d,b) \cup \{c\} \cup \{d\}$; si on a $a = c$, $d < b$, on a $X-Y = (d, b) \cup \{d\}$; si on a $a < c$, $d = b$, on a $X-Y = (a,c) \cup \{c\}$; enfin si $a = c, b = d$, X-Y est vide. Si X est un intervalle ouvert (a, b) et Y un ensemble fini, on peut supposer les éléments $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de Y rangés par ordre de grandeur ; on a alors $a \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_n < b$, et $X-Y = (a, c_1) \cup (c_1, c_2) \cup \ldots \cup (c_n, b)$. Donc, dans tous les cas, X-Y est la réunion d'une famille simple d'en--sembles de $\mathbb{F}_{\odot}$. La phratrie engendrée par $\mathbb{F}_{\odot}$ se confond avec la phratrie engendrée par les intervalles bornés de diverses espèces : on l'appelle la *phratrie de Borel* dans R.

De même, on appelle phratrie de Borel dans R^n la phratrie engendrée par les intervalles bornés de diverses espèces de R^n.

§ II FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLES.

Définition. *On appelle additive une fonction d'ensembles* λ *à valeurs dans* R *satisfaisant aux conditions suivantes : le champ de définition* $\mathcal{S}$ *de* λ *est une phratrie ; si* $X \in \mathcal{S}$, $Y \in \mathcal{S}$, $X \cap Y = \emptyset$, on a $\lambda(X \cup Y) = \lambda(X) + \lambda(Y)$.

Les longueurs, surfaces, volumes, etc.. que nous aurons à définir seront des fonctions additives d'ensembles prenant des valeurs $\geqslant 0$.

Définition. La fonction additive d'ensembles λ est dite croissante si elle ne prend que des valeurs $\geqslant 0$.

L'épithète "croissante" est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 1. Si λ est une fonction additive croissante d'ensembles, dont le champ de définition est $\mathfrak{S}$, les conditions $X \in \mathfrak{S}$, $Y \in \mathfrak{S}$, $Y \subset X$ entraînent $\lambda(Y) \leqslant \lambda(X)$.

En effet ces conditions entraînent $X-Y \in \mathfrak{S}$, $\lambda(X-Y) \geqslant 0$ et $\lambda(X) = \lambda(Y) + \lambda(X-Y) \geqslant \lambda(Y)$.

Pour définit des fonctions additives d'ensembles, il nous sera plusieurs fois commode de commencer par les définir sur des hypo-phratries, et de les prolonger ensuite.

Définition. On appelle quasi-additive une fonction d'ensembles λ_* à valeur dans R qui satisfait aux conditions suivantes : son champ de définition est une hypo-phratrie $\mathfrak{F}_0$; si $\mathfrak{F}$ est une famille finie d'ensembles de $\mathfrak{F}_0$ deux à deux sans élément commun et si $\bigcup_{\mathfrak{F}} X \in \mathfrak{F}_0$, on a $\lambda_*(\bigcup_{\mathfrak{F}} X) = \sum_{X \in \mathfrak{F}} \lambda_*(X)$.

Considérons par exemple l'hypo-phratrie $\mathfrak{F}_0$ définie à la fin du § I. Si X est un ensemble fini, posons $\lambda_*(X) = 0$; si X est un intervalle ouvert (a, b), posons $\lambda_*(X) = b-a$. La fonction ainsi définie sur $\mathfrak{F}_0$ est additive : soit en effet $\mathfrak{F}$ une famille simple (cf. §I) contenue dans $\mathfrak{F}_0$, dont la réunion appartienne à $\mathfrak{F}_0$. Si cette réunion est un ensemble fini, l'égalité $\lambda_*(\bigcup_{\mathfrak{F}} X) = \sum_{X \in \mathfrak{F}} \lambda_*(X)$ est évidente. Sinon, cette réunion est un intervalle ouvert (a,b) non vide

Soit $\mathfrak{F}'$ la famille de ceux des ensembles de $\mathfrak{F}$ qui sont des inter--valles ouverts non vides ; soient (a_i, b_i) $(i = 1,2,\ldots,h)$ ces inter--valles, rangés dans un ordre tel que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_h$. On a $b_i \leqslant a_{i+1}$ $(1 \leqslant i < h)$, car sinon les inter--valles (a_i, b_i), (a_{i+1}, b_{i+1}) auraient des points communs. De plus, on a $a_1 \geqslant a$, $b_h \leqslant b$. Si pour une valeur de i $(1 \leqslant i < h)$ on avait $b_i < a_{i+1}$, l'ensemble infini (b_i, a_{i+1}) serait contenu dans (a,b), mais n'aurait aucun point commun avec $\bigcup_{\mathfrak{F}_1} X$, ce qui est évidemment impossible. On voit de même que $a_1 = a$, $b_h = b$. Il en résulte que $\lambda_*(\bigcup_{\mathfrak{F}} X) = b-a = \sum_{i=1}^{h}(b_i - a_i) = \sum_{X\in\mathfrak{F}_1} \lambda_*(X) = \sum_{X\in\mathfrak{F}} \lambda_*(X)$, ce qui prouve notre assertion.

Proposition 2. <u>Si λ_* est une fonction quasi-additive d'ensem-</u><u>bles dont le champ de définition est</u> $\mathfrak{F}_0$, λ_* <u>peut, et d'une seule manière, être prolongée par une fonction additive d'ensembles dont le champ de définition soit</u> $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}_0}$.

Définissons une relation $\mathcal{K}$ entre éléments $u \in R$ et ensembles $X \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}_0}$ de la manière suivante : le prédicat $\mathcal{K}(u, X)$ sera par définition équivalente au suivant : il existe une famille simple $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_0$ telle que $X = \bigcup_{\mathfrak{F}} X'$ et que $u = \sum_{X'\in\mathfrak{F}} \lambda_*(X')$. Pour tout $X \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}_0}$ il existe un $u \in R$ tel que $\mathcal{K}(u,X)$, ceci en vertu de la proposi--tion 4, § I. Montrons que les conditions $X \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}_0}$, $Y \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}_0}$, $Y \subset X$, $\mathcal{K}(u,X)$, $\mathcal{K}(v,Y)$ entraînent $\mathcal{K}(u-v, X-Y)$.

Soient en effet $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ des familles simples contenues dans $\mathfrak{F}_0$ telles que $X = \bigcup_{\mathfrak{F}} X'$, $Y = \bigcup_{\mathfrak{G}} Y'$, $u = \sum_{X'\in\mathfrak{F}} \lambda_*(X')$, $v = \sum_{Y'\in\mathfrak{G}} \lambda_*(Y')$

Nous savons qu'il existe une famille simple $\mathbb{H} \subset \mathbb{F}_0$ telle que $\mathbb{F} \cup \mathbb{G} \subset \mathbb{S}_{\mathbb{H}}$. Chaque ensemble $X' \in \mathbb{F}$ est la réunion d'une fa- -mille $\mathbb{F}'_{X'}$ d'ensembles de H. Posons $\mathbb{F}' = \bigcup_{X' \in \mathcal{F}} \mathbb{F}'_{X'}$. On a $X = \bigcup_{\mathcal{F}'} X'_1$. Si X', X'' sont deux ensembles différents de $\mathbb{F}$, on a $X' \cap X'' = \bigcirc$, d'où $\mathbb{F}'_{X'} \cap \mathbb{F}'_{X''} = \bigcirc$. La fonction λ_* étant quasi-additive, on a

$$u = \sum_{X' \in \mathcal{F}} \lambda_*(X') = \sum_{X' \in \mathcal{F}'} \lambda_*(X'_1)$$

De même, il existe une famille $\mathbb{G}' \subset \mathbb{H}$ telle que $Y = \bigcup_{\mathcal{G}'} Y'_1$ et

$$v = \sum_{Y'_1 \in \mathcal{G}'} \lambda_*(Y'_1)$$

Or, la condition $Y \subset X$ entraîne $\mathbb{G}' \subset \mathbb{F}'$, $X-Y = \bigcup_{\mathcal{F}'-\mathcal{G}'} X'_1$ et

$$u-v = \sum_{X'_1 \in \mathcal{F}'-\mathcal{G}'} \lambda_*(X'_1)$$

d'où $\mathcal{K}(u-v, X-Y)$.

Or il est évident que la condition $\mathcal{K}(u, \bigcirc)$ entraîne $u = 0$. Par suite les conditions $\mathcal{K}(u,X)$, $\mathcal{K}(u',X)$ entraînent $u = u'$: $\mathcal{K}$ est une relation fonctionnelle, qui nous fournit une fonction λ dont le champ de définition est $\mathbb{S}_{\mathbb{F}_0}$; si X, Y sont deux ensembles de ce champ sans élément commun, on a

$$\lambda(X) = \lambda((X \cup Y) - Y) = \lambda(X \cup Y) - \lambda(Y)$$

ce qui prouve que λ est additive. Enfin il est évident qu'elle pro- -longe λ_*. D'autre part, si λ' est une fonction additive sur $\mathbb{S}_{\mathbb{F}_0}$ qui prolonge λ_*, il est évident que l'on doit avoir, pour tout $x \in \mathbb{S}_{\mathbb{F}_0}$, $\mathcal{K}(\lambda'(X), X)$, d'où $\lambda'(X) = \lambda(X)$. Notre proposition est donc démontrée.

On remarquera que si λ_* ne prend que des valeurs $\geqslant 0$, il en est de même de λ.

En particulier, cette proposition nous apprend qu'il existe une fonction additive dont le champ de définition est la phratrie de Borel de R et dont la valeur pour l'intervalle ouvert (a, b) est b-a. Cette fonction s'appelle la <u>longueur</u>. Sa valeur pour l'un quelconque des 4 intervalles d'origine a et d'extrêmité b est égale à b-a.

§ III. Produits de phratries.

Nous pourrions, pour commencer à définir les volumes dans R^n, nous servir de la même méthode que nous venons d'employer dans le cas de R. Mais nous allons procéder autrement, en déduisant la théorie dans R^n de la théorie dans R^1.

D'une manière générale, soient données n phratries $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$. La famille des ensembles de la forme $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ avec $X_1 \in \mathfrak{S}_1$, $X_2 \in \mathfrak{S}_2$, ..., $X_n \in \mathfrak{S}_n$ n'est en général pas une phratrie. Mais la phratrie engendrée par cette famille s'appelle pro--duit des phratries $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ et se désigne par $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\ldots\mathfrak{S}_n$ (conformément à la terminologie employée jusqu'ici le produit de ces phratries devrait être l'ensemble des n-uples $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$; comme nous n'aurons pas à considérer cet ensemble, nous espérons que ce double sens du mot "produit" n'entraînera pas de confusions).

Proposition 1. <u>Soient</u> $\mathcal{F}_i$ <u>des familles d'ensembles engendrant les phratries</u> $\mathfrak{S}_i$. <u>La phratrie</u> $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\ldots\mathfrak{S}_n$ <u>est engendrée par la famille</u> $\mathcal{F}$ <u>des ensembles de la forme</u> $Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n$, <u>avec</u> $Y_i \in \mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

En effet, il est clair que $\mathcal{F} \subset \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\ldots\mathfrak{S}_n$, d'où $\mathfrak{S}_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\ldots\mathfrak{S}_n$. Soit p étant un indice tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, soit $\mathfrak{G}_p$ la famille des ensem--bles $Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_n$ avec $Z_i \in \mathfrak{S}_i$ si $i \leqslant p$, $Z_i \in \mathcal{F}_i$ si $i > p$. Nous allons montrer par récurrence sur p que $\mathfrak{G}_p \subset \mathfrak{S}_{\mathcal{F}}$. La proposition est évidente pour p = 1. Supposons la vraie pour p-1.

Soit $\mathbb{H}$ la famille des ensembles U jouissant de la propriété sui--vante : les conditions $Z_i \in \mathbb{S}_i$ si $i < p$, $Z_p = U$, $Z_i \in \mathbb{F}_i$ si $i > p$ entraînent $Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n \in \mathbb{S}_{\mathbb{F}}$. La proposition étant vraie pour p-1, $\mathbb{H}$ contient $\mathbb{F}_p$. D'autre part, on voit tout de suite que la réunion de deux ensembles U, ou la différence de deux de ces ensem--bles dont l'un soit contenu dans l'autre, est encore un ensemble U. Donc $\mathbb{H}$ est une phratrie, et par suite $\mathbb{S}_p \subset \mathbb{H}$, ce qui démontre la proposition pour p. La proposition est donc vraie pour $p = n+1$, et donne $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{\mathbb{F}}$, ce qui démontre la proposition 1.

<u>Cas particulier</u>. Si toutes les phratries $\mathbb{S}_i$ sont égales à la phratrie de Borel dans R, et les familles $\mathbb{F}_i$ égales à la famille des intervalles de R, la famille désignée par $\mathbb{F}$ est la famille des inter--valles de R^n, et par suite $\mathbb{S}_1 \mathbb{S}_2 \dots \mathbb{S}_n$ est la phratrie de Borel dans R^n.

Montrons maintenant plus généralement que si les $\mathbb{F}_i$ sont des hypo-phratries, il en est de même de $\mathbb{F}$. Soient en effet $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ et $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n$ deux ensembles de $\mathbb{F}$. On a $X \cap Y = (X_1 \cap Y_1) \times (X_2 \cap Y_2) \times \dots \times (X_n \cap Y_n)$ ce qui montre que $X \cap Y \in \mathbb{F}$. Si de plus $Y \subset X$, on a $Y_i \subset X_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$; posons $Z_i = X_i - Y_i$. A chaque partie A non vide de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ faisons correspondre l'ensemble $Z_A = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, les U_i étant définis par les conditions $U_i = Z_i$ si $i \in A$, $U_i = X_i$ si $i \notin A$. Les ensembles Z_A sont deux à deux sans élément commun, et leur réunion est Y-X. D'autre part, chacun des ensembles U_i est la réunion d'une famille finie non vide d'ensembles de $\mathbb{F}_i$ sans élément commun deux à deux. Il en résulte que Z_A est la réunion d'une famille finie non vide d'ensembles sans élément commun deux à deux de $\mathbb{F}$, et qu'il en est de même de X-Y .

Supposant toujours que les $\mathbb{F}_i$ sont des hypo-phratries, suppos-sons donnée dans chacune d'elles une fonction quasi-additive $\lambda_{*,i}$. Définissons une fonction λ_* sur $\mathbb{F}$ par la formule

$$\lambda_*(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_{*,i}(X_i)$$

La fonction ainsi définie est additive sur $\mathbb{F}$. Supposons en effet que l'ensemble $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \in \mathbb{F}$ soit la réunion d'un certain nombre d'ensembles

$$Y_i = Y_{i,1} \times Y_{i,2} \times \ldots \times Y_{i,n} \qquad (i = 1,2,\ldots, p)$$

appartenant également à $\mathbb{F}$ d'où $Y_{i,k} \in \mathcal{F}_k$. ~~Nous savons, en~~

Nous savons, en vertu du théorème 1 et de la proposition 3, § II, que, pour chaque k ($1 \leqslant k \leqslant n$) on peut trouver une famille finie $\mathcal{G}_k$ d'ensembles de $\mathbb{F}_k$ sans élément commun deux à deux telle que chacun des ensembles $Y_{i,k}$ ($i = 1,2,\ldots,p$) soit la réunion de certains ensem-bles de $\mathcal{G}_k$. Soit $\mathcal{G}$ la famille des ensembles de la forme $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, avec $U_k \in \mathcal{G}_k$ ($k = 1,2,\ldots,n$). Les ensembles de $\mathcal{G}$ sont sans élément commun deux à deux, et chacun des ensembles Y_i est la réunion d'un certain nombre d'entre eux.

Désignons par $U_{a,k}$ les ensembles de $\mathcal{G}_k$ ($a = 1,2,\ldots,m_k$). Nous avons $X_k = \bigcup_a U_{a,k}$ d'où

$$\lambda_{*,k}(X_k) = \sum_a \lambda_{*,k}(U_{a,k})$$

$$\lambda_*(X) = \prod_{k=1}^{n} \sum_a \lambda_{*,k}(U_{a,k})$$

En développant le produit du second membre, on voit que l'on a

$$\lambda_*(X) = \sum_{U \in \mathcal{G}} \lambda_*(U) .$$

De même, chacun des $Y_{i,k}$ est la réunion d'un certain nombre d'ensembles de $\mathcal{G}_k$. On en déduit, en raisonnant de la même manière,

$$\lambda_*(Y_i) = \sum_{U \in \mathcal{Y}_i} \lambda_*(U)$$

Nous avons donc bien

$$\lambda_*(X) = \sum_i \lambda_*(Y_i)$$

ce qui démontre la quasi-additivité de la fonction λ_*.

La fonction additive λ_* que nous venons de définir dans $\mathcal{F}$ est appelée "produit" des fonctions $\lambda_{*,k}$. Il convient de remarquer que chacune des fonctions $\lambda_{*,k}$ peut être prolongée par une fonction additive λ_k définie sur $\mathcal{S}_k$. Le produit des fonctions λ_k est une fonction additive sur $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \dots \mathcal{S}_n$. Elle constitue le prolongement à cette phratrie de la fonction λ_*.

En appliquant ces résultats aux intervalles de R^n, nous voyons que nous obtenons une fonction additive définie sur la phratrie de Borel de R^n et dont la valeur pour un intervalle de R^n est le produit des longueurs des arêtes de cet intervalle.

Chapitre II

FONCTIONNELLES LINEAIRES CROISSANTES.

Nous avons dans le chapitre I résolu le problème qui consiste à attribuer des volumes λ aux ensembles d'une certaine famille $\mathfrak{S}$ de parties de R^n, qui est une phratrie. Si une fonction f est égale à une constante a sur un ensemble $X \in \mathfrak{S}$ et nulle partout ailleurs, son intégrale sera a. $\lambda(X)$.

Supposons maintenant que nous ayons un nombre fini de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de cette espèce, f_i prenant la valeur constante a_i sur un ensemble $X_i \in \mathfrak{S}$ et étant nulle en dehors de cet ensemble. Nous supposerons de plus que les ensembles X_i sont sans point commun deux à deux. La fonction $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ sera constante sur chacun des ensembles X_i et nulle en dehors de leur réunion ; son inté-grale devra être $\sum_{i=1}^{n} a_i . \lambda(X_i)$. Nous pouvons donc définir l'inté-grale pour une certaine classe de fonctions f. Nous allons choisir des propriétés importantes de cette classe de fonctions et de la fonc-tionnelle qu'y définit l'intégrale, et, par l'étude de ces propriétés, montrer comment on peut espérer étendre le champ de définition de l'intégrale.

§ I LES FONCTIONS ETAGEES.

La théorie que nous allons développer dans ce paragraphe compor-te un type primitif, dont nous désignerons l'ensemble des éléments par E, et une constante primitive, qui est une famille non vide $\mathfrak{S}$ de parties de E. Les axiomes seront ceux qui expriment que $\mathfrak{S}$ est une phratrie (chap. I, § I, P. 1 et 2). Les fonctions que nous considérerons seront implicitement supposées définies sur E et pre-nant leurs valeurs dans l'espace R des nombres réels.

Définition. *Une fonction* f *est dite une fonction étagée attachée à* $\mathcal{S}$ *si les conditions suivantes sont réalisées* : a) *l'ensemble des valeurs prises par* f *est fini* ; b) *si* a *est un nombre réel* $\neq 0$, $\overset{-1}{f}(a) \in \mathcal{S}$.

Proposition 1. *Si* f *est une fonction étagée attachée à* $\mathcal{S}$, *il existe une famille finie* $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ *d'ensembles de* $\mathcal{S}$ *deux à deux sans élément commun tels que* f *soit constante sur chacun d'eux et nulle en dehors de leur réunion. Si* $f(X_i) = \{a_i\}$ *on a*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{X_i} .$$

Soit en effet $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ l'ensemble des valeurs non nul-les prises par f. Les ensembles $X_i = \overset{-1}{f}(a_i)$ répondent à la question. De plus l'égalité $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{X_i}(x)$ est vraie si $x \in X_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) et si $x \in \complement \bigcup_i X_i$. On a donc $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{X_i}$.

Proposition 2. *Soit* f *une fonction telle qu'il existe une suite finie* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *d'ensembles de* $\mathcal{S}$ *sur chacun desquels* f *soit constante et en dehors de la réunion desquels* f *soit nulle.* f *est alors une fonction étagée attachée à* $\mathcal{S}$.

En effet, soit $\{a_i\} = f(X_i)$, et soit V l'ensemble des nombres $\neq 0$ de la suite finie $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. V est l'ensemble des valeurs $\neq 0$ prises par f. De plus, si $a \in V$, soit A l'ensemble des indices i tels que $a_i = a$: on a $\overset{-1}{f}(a) = \bigcup_{i \in A} X_i \in \mathcal{S}$.

Proposition 3. *Soient* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *des fonctions étagées attachées à* $\mathcal{S}$ *et* $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *une fonction définie sur* R^n, *à valeurs dans* R, *telle que* $\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$. *La fonction* $\varphi(f_1, f_2, \dots, f_n)$ *est une fonction étagée attachée à* $\mathcal{S}$.

En effet, pour chaque $k (1 \leqslant k \leqslant n)$ il existe une famille finie $\{X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{p_k,k}\}$ d'ensembles de $\mathcal{S}$ tels que f_k soit constante sur chacun d'eux et nulle en dehors de $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant p_k} X_{i,k}$. Appliquons le théorème de décomposition à la famille formée par tous les ensembles $X_{i,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant p_k)$; nous obtenons une famille finie d'en--sembles $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_p\}$ sans élément commun deux à deux, appar--tenant à $\mathcal{S}$, telle que chacun des $X_{i,k}$ soit la réunion de certains d'entre eux et que $\bigcup_{i,k} X_{i,k} = \bigcup_j Y_j$. La fonction $\varphi(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est constante sur chacun de ces ensembles et nulle en dehors de leur réunion.

Proposition 4. <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont des fonctions étagées attachées à</u> $\mathcal{S}$, <u>et</u> a, b <u>des nombres réels, af+bg est une fonction étagée attachée à</u> $\mathcal{S}$; <u>il en est de même de</u> $|f|$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3. Plus géné--ralement, toute combinaison linéaire de fonctions étagées attachées à $\mathcal{S}$ à coefficients réels est une fonction étagée attachée à $\mathcal{S}$. En particulier, si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une suite finie d'ensembles de $\mathcal{S}$, et si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres réels, la fonction $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{X_i}$ est une fonction étagée attachée à $\mathcal{S}$.

Proposition 5. <u>Si</u> f <u>est une fonction étagée attachée à</u> $\mathcal{S}$, <u>et</u> A <u>une partie de</u> $R - \{0\}$, <u>on a</u> $\overset{-1}{f}(A) \in \mathcal{S}$

En effet, soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ les valeurs prises par f qui sont dans A. On a

$$\overset{-1}{f}(A) = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \overset{-1}{f}\{a_i\} \in \mathcal{S} .$$

Supposons maintenant connue une fonction additive λ définie sur $\mathcal{S}$ et ne prenant que des valeurs $\geqslant 0$ <u>finies</u>.

Montrons que si une fonction f peut se mettre de deux manières sous forme de combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles de $\mathcal{S}$:

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_{X_i} = \sum_{j=1}^{n} b_j \varphi_{Y_j} \qquad \begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots, X_m \in \gamma \\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \in \gamma \end{array}$$

on a aussi

$$\sum_{i=1}^{m} a_i . \lambda(X_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j . \lambda(Y_j)$$

En effet, appliquons le théorème de décomposition à la famille des ensembles de la suite finie $(X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ nous obtenons une famille d'ensembles $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_p\}$ de $\mathcal{S}$ deux à deux sans élément commun. Si A_k est l'ensemble des indices i tels que $Z_k \subset X_i$ et B_k l'ensemble des indices j tels que $Z_k \subset Y_j$, on a

$$f(X) = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i \in A_k} a_i\Big) \varphi_{Z_k}(X) = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{j \in B_k} b_j\Big) \varphi_{Z_k}(X)$$

d'où, si $X \in Z_k$,

$$\sum_{i \in A_k} a_i = \sum_{j \in B_k} b_j$$

D'autre part

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \lambda(X_i) = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i \in A_k} a_i\Big) \lambda(Z_k) = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{j \in B_k} b_j\Big) \lambda(Z_k) = \sum_{j=1}^{n} b_j \lambda(Y_j)$$

ce qui démontre notre égalité.

Nous pouvons donc définir une fonction $\mathcal{L}_\lambda$ sur la famille des fonctions étagées attachées à $\mathcal{S}$ par la formule

$$\mathcal{L}_\lambda\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_{X_i}\Big) = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda(X_i) \qquad (X_1, X_2, \ldots, X_m \in \gamma)$$

Les propriétés suivantes résultent immédiatement de cette définition :

Proposition 6. <u>Si</u> f <u>et</u> g <u>sont des fonctions étagées attachées à</u> $\mathcal{S}$ <u>et</u> a,b <u>des nombres réels</u>, $\mathcal{L}_\lambda(af+bg) = a\mathcal{L}_\lambda(f) + b\mathcal{L}_\lambda(g)$.

Proposition 7. <u>Si</u> f <u>est une fonction étagée attachée à</u> $\mathcal{S}$ <u>et ne prenant que des valeurs</u> $\geqslant 0$, <u>on a</u> $\mathcal{L}_\lambda(f) \geqslant 0$.

§ II. FAMILLES (W) ET FONCTIONNELLES LINEAIRES CROISSANTES.

La théorie qui va être développée dans ce paragraphe compor- -te un type primitif, dont nous désignerons l'ensemble des élé- -ments par E, et deux constantes primitives : une famille non vide Λ de fonctions définies sur E et à valeurs dans R, et une fonction $\mathcal{L}$ définie sur Λ et à valeurs dans R (donc : une fonctionnelle). Les axiomes sont les suivants :

W 1 <u>Les conditions</u> $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$, $a \in R$, $b \in R$ <u>entraîne</u><u>nt</u> $af + bg \in \Lambda$.

W 2. <u>La condition</u> $f \in \Lambda$ <u>entraîne</u> $|f| \in \Lambda$.

L 1. <u>Les conditions</u> $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$, $a \in R$, $b \in R$ <u>entraînent</u>

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$$

L 2. <u>La condition</u> $f \in \Lambda$ <u>entraîne</u> $\mathcal{L}(|f|) \geqslant 0$.

Nous appellerons dans la suite famille (W) une famille de fonctions satsifaisant à W 1 et à W 2. Le premier de ces axiome exprime que la famille est le support d'un espace vectoriel. Nous dirons qu'une fonctionnelle dont le champ de définition est une famille (W) et qui satisfait aux conditions L 1 et L 2 est une fonctionnelle linéaire croissante (cf. plus bas proposition 2, qui justifie l'épithète "croissante").

Nous avons vu au § I que la famille des fonctions étagées attachées à une phratrie est une famille (W) et que la fonction- -nelle $\mathcal{L}_\lambda$ définie par une fonction λ additive et <u>finie</u> d'ensembles est linéaire et croissante. La donnée d'une phratrie et d'une fonction additive d'ensembles sur cette phratrie définit donc une structure de la théorie que nous allons maintenant développer.

Nous aurons besoin de la définition suivante, qui appartient à la théorie générale des fonctions à valeurs numériques :

Définition. f étant une fonction prenant ses valeurs dans R (ou dans $\overline{R}$), on désigne par f^+ la fonction définie par les égalités $f^+(x) = f(x)$ si $f(x) \geqslant 0$, $f^+(x) = 0$ si $f(x) < 0$.
On désigne par f^- la fonction définie par les égalités $f^-(x) = 0$ si $f(x) \geqslant 0$ et $f^-(x) = -f(x)$ si $f(x) < 0$.

Il résulte de là que l'on a $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Proposition 1. Les conditions $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$ entraînent $f^+ \in \Lambda$, $f^- \in \Lambda$, $\overline{\text{borne}}\,(f,g) \in \Lambda$, $\underline{\text{borne}}\,(f,g) \in \Lambda$.

En effet : $f^+ = \frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}f$, $f^- = \frac{1}{2}|f| - \frac{1}{2}f$, $\overline{\text{borne}}\,(f,g) = f + (g-f)^+$, $\underline{\text{borne}}\,(f,g) = f + (g-f)^-$

Proposition 2. Les conditions $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$, $f \leqslant g$ entraînent $\mathcal{L}(f) \leqslant \mathcal{L}(g)$.

En effet, $\mathcal{L}(g) - \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g-f) = \mathcal{L}(|g-f|) \geqslant 0$.

Proposition 3. La condition $f \in \Lambda$ entraîne $|\mathcal{L}(f)| \leqslant \mathcal{L}(|f|)$.

En effet, $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f^+) - \mathcal{L}(f^-)$, et $\mathcal{L}(f^+) \geqslant 0$, $\mathcal{L}(f^-) \geqslant 0$, d'où $|\mathcal{L}(f)| \leqslant \mathcal{L}(f^+) + \mathcal{L}(f^-) = \mathcal{L}(|f|)$.

Définition. Deux fonctions f, g de Λ sont dites équivalentes (mod. $\mathcal{L}$), et on écrit $f \equiv g$ (mod. $\mathcal{L}$) si $\mathcal{L}(|f-g|) = 0$.

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence entre éléments de Λ. Remarquons en effet d'abord que, Λ n'étant pas vide, contient 0 et que $\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(0+0) = \mathcal{L}(0) + \mathcal{L}(0)$, d'où $\mathcal{L}(0) = 0$. Ceci posé : a) la condition $f \in \Lambda$ entraîne $\mathcal{L}(|f-f|) = 0$ d'où $f \equiv f$ (mod. $\mathcal{L}$), ce qui démontre la reflexivité ; b) les conditions $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$, $f \equiv g$ (mod. $\mathcal{L}$) entraînent $0 = \mathcal{L}(|f-g|) = \mathcal{L}(|g-f|)$

d'où $g \equiv f \pmod{\mathcal{L}}$, ce qui démontre la symètrie ; c) les conditions $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$, $h \in \Lambda$, $f \equiv g \pmod{\mathcal{L}}$ $g \equiv h \pmod{\mathcal{L}}$ entraînent $0 \leqslant \mathcal{L}(|f-h|) \leqslant \mathcal{L}(|f-g|) + \mathcal{L}(|g-h|) = 0 + 0 = 0$, d'où $f \equiv h \pmod{\mathcal{L}}$, ce qui démontre la transitivité.

De plus, cette relation d'équivalence est compatible avec les opérations linéaires dans Λ. En effet, les conditions $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$, $f' \in \Lambda$, $g' \in \Lambda$, $a \in R$, $b \in R$, $f \equiv f' \pmod{\mathcal{L}}$, $g \equiv g' \pmod{\mathcal{L}}$ entraînent $0 \leqslant \mathcal{L}(|(af + bg)-(af'+ bg')|) = \mathcal{L}(|a(f-f') + b(g-g')|) \leqslant |a| \mathcal{L}(|f-f'|) + |b| \mathcal{L}(|g-g'|) = 0$ d'où $af + bg \equiv af' + bg' \pmod{\mathcal{L}}$.

Il résulte de là que notre relation d'équivalence définit un partage de Λ en classes, dites classes d'équivalence $\pmod{\mathcal{L}}$, et que ces classes forment un espace vectoriel.

Nous désignerons l'ensemble de ces classes par $L^1(\mathcal{L})$.

Les conditions $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$, $g \equiv g \pmod{\mathcal{L}}$ entraînent $0 \leqslant \mathcal{L}(\big| |f| - |g| \big|) \leqslant \mathcal{L}(|f-g|) = 0$, d'où $|f| \equiv |g| \pmod{\mathcal{L}}$. $\mathfrak{f}$ étant un élément de $L^1(\mathcal{L})$ toutes les fonctions $|f|$ pour $f \in \mathfrak{f}$, appartiennent donc à une même classe d'équivalence, que nous désignerons par $|\mathfrak{f}|$.

Les conditions $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$, $f \equiv g \pmod{\mathcal{L}}$ entraînent $0 \leqslant |\mathcal{L}(f) - \mathcal{L}(g)| = |\mathcal{L}(f-g)| \leqslant \mathcal{L}(|f-g|) = 0$, d'où $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$. La fonction $\mathcal{L}$ est donc constante sur chaque classe : elle définit une fonction linéaire sur l'espace des classes, fonction que nous désignerons encore -par abus de langage- par $\mathcal{L}$.

$\mathfrak{f}$ étant une classe quelconque, on a $\mathcal{L}(|\mathfrak{f}|) \geqslant 0$.

$\mathfrak{f}$ étant une classe d'équivalence, nous poserons

$$\|\mathfrak{f}\| = \mathcal{L}(|\mathfrak{f}|)$$

Il en résulte que, a étant un nombre réel, et $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ des classes d'équivalence, on a

$$\|a\mathfrak{f}\| = |a| \cdot \|\mathfrak{f}\| \qquad \|\mathfrak{f}+\mathfrak{g}\| \leqslant \|\mathfrak{f}\| + \|\mathfrak{g}\|$$

$\|\mathfrak{f}\|$ est une fonction définie sur l'espace des classes, à valeurs réelles $\geqslant 0$. De plus, la condition $\|\mathfrak{f}\| = 0$ entraîne, si $f \in \mathfrak{f}$ $\mathcal{L}(|f|) = 0$, d'où $f \equiv 0 \pmod{\mathcal{L}}$ et $\mathfrak{f} = 0$. La fonction $\|\mathfrak{f}\|$ définit donc dans l'espace des classes une structure d'espace de Banach. L'ensemble des classes, muni des diverses structures que nous y avons reconnues, sera désigné par $L^1(\mathcal{L})$.

L'inégalité $|\mathcal{L}(\mathfrak{f}) - \mathcal{L}(\mathfrak{g})| = |\mathcal{L}(\mathfrak{f}-\mathfrak{g})| \leqslant \mathcal{L}\|\mathfrak{f}-\mathfrak{g}\|$ montre que $\mathcal{L}$ est uniformément continue sur $L^1(\mathcal{L})$.

ADDENDUM (à placer à la fin du § II).

Définissons une fonction A sur $L^1(\mathcal{L})$, à valeurs dans $L^1(\mathcal{L})$, par l'égalité $A(\mathfrak{f}) = |\mathfrak{f}|$. A est uniformément continue sur $L^1(\mathcal{L})$. En effet, $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$ étant des éléments de $L^1(\mathcal{L})$, f et g des fonctions de Λ telles que $f \in \bar{\mathfrak{f}}$, $g \in \bar{\mathfrak{g}}$,on a

$$\|A(\mathfrak{f}) - A(\mathfrak{g})\| = \mathcal{L}(||f| - |g||) \leqslant \mathcal{L}(|f-g|) = \|\mathfrak{f} - \mathfrak{g}\|$$

A peut donc être prolongée par une fonction $\bar{A}$ définie sur $\bar{L}^1(\mathcal{L})$, continue et prenant ses valeurs dans $\bar{L}^1(\mathcal{L})$. Si $\bar{\mathfrak{f}} \in \bar{L}^1(\mathcal{L})$, nous poserons $|\bar{\mathfrak{f}}| = A(\bar{\mathfrak{f}})$.

Si (f_n) est une suite de fonctions de Λ dont les classes dans $L^1(\mathcal{L})$ convergent vers $\mathfrak{f}$, les classes des fonctions $|f_n|$ convergent vers $|\mathfrak{f}|$. Or, la métrique dans $\bar{L}^1(\mathcal{L})$ est définie par la fonction $\|\bar{\mathfrak{f}}\|$, qu'on obtient en prolongeant la fonction $\|\mathfrak{f}\|$; or $\|\mathfrak{f}\| = \mathcal{L}(|\mathfrak{f}|)$; on en déduit que l'on a aussi $\|\bar{\mathfrak{f}}\| = \bar{\mathcal{L}}(|\bar{\mathfrak{f}}|)$

Il en résulte en particulier que l'on a toujours $\bar{\mathcal{L}}(|\bar{\mathfrak{f}}|) \geqslant 0$, et que la condition $\bar{\mathcal{L}}(|\bar{\mathfrak{f}}|) = 0$ entraîne $\bar{\mathfrak{f}} = 0$.

L'espace $L^1(\mathcal{L})$ n'est en général pas complet. Mais nous savons qu'on peut le complèter : soit $\bar{L}^1(\mathcal{L})$ l'espace complet qu'on obtient alors. $\mathcal{L}$ peut être prolongée par une fonction linéaire $\bar{\mathcal{L}}$ sur $\bar{L}^1(\mathcal{L})$. Ceci posé, si nous arrivons à mettre en correspondance les éléments abstraits de $\bar{L}^1(\mathcal{L})$ avec des fonctions définies sur E, nous aurons prolongé la fonctionnelle $\mathcal{L}$ à de nouvelles fonctions : c'est là le principe de la définition que nous donnerons de l'intégrale.

(voir Addendum p. 20)

§ III. LA NOTION DE PRESQUE PARTOUT.

Nous conserverons dans ce § les notations du § II. Soit $\mathfrak{f}$ un élément de $\bar{L}^1(\mathcal{L})$: $\mathfrak{f}$ est la limite d'une suite $(\mathfrak{f}_n)$ d'éléments de $L^1(\mathcal{L})$. Supposons qu'on puisse choisir, pour chaque n, un élément $f_n \in \mathfrak{f}_n$ de telle manière que, en chaque point $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ converge vers une valeur limite $(f(x))$: il parait normal de vouloir faire correspondre à $\mathfrak{f}$ la fonction limite f ainisi obtenue et de poser

$$\mathcal{L}^*(f) = \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{f}) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(\mathfrak{f}_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(f_n)$$

$\mathcal{L}^*$ étant la fonctionnelle prolongée qu'il s'agit de définir.

Mais, il peut se produire que $f \in \Lambda$; nous devrons donc avoir dans ce cas $\mathcal{L}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(f_n)$, ce qui est une condition portant sur la fonctionnelle $\mathcal{L}$ donnée. Nous pouvons donc prévoir qu'il faudra imposer à $\mathcal{L}$ une condition supplémentaire pour arriver à nos fins.

En fait, nous verrons qu'il suffit d'imposer la condition suivante :

24

L.3 Les conditions $f_n \in \Lambda$, $f_n \leqslant f_{n+1}$ $(1 \leqslant n < +\infty)$, $f = \lim\limits_{n\to\infty}\uparrow f_n$ et $f \in \Lambda$ entraînent $\mathcal{L}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}(f_n)$

Une fonctionnelle définie sur une famille (W) et satisfaisant aux conditions L 1, L 2, L 3 s'appelle une fonctionnelle linéaire conti--nument croissante.

Nous développerons maintenant la théorie qui se déduit de celle du § II par adjonction de L 3.

Proposition 1. Les conditions $f_n \in \Lambda$, $f_n \leqslant f_{n+1}$ $(1 \leqslant n < +\infty)$ $f \leqslant \lim\uparrow f_n$, $f \in \Lambda$ entraînent

$$\mathcal{L}(f) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(f_n)$$

Remarque. Dans cet énoncé, la fonction $\lim f_n$ peut prendre des valeurs infinies.

Posons en effet g_n = borne (f, f_n) : on a $g_n \in \Lambda$, $g_n \leqslant g_{n+1}$, $f = \lim\limits_{n\to\infty}\uparrow g_n$, d'où

$$\mathcal{L}(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}(g_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}(f_n)$$

Proposition 2. f étant une fonction de Λ, supposons que pour chaque nombre $\varepsilon > 0$ existe une suite croissante (f_n) de fonctions de Λ telle que

$$f_n \geqslant 0 \; ; \; \mathcal{L}(f_n) < \varepsilon \quad (1 \leqslant n < +\infty) \; ; \; |f| \leqslant \lim_{n\to\infty}\uparrow f_n$$

Alors on a $f \equiv 0 \pmod{\mathcal{L}}$.

Soit en effet g_n = borne $(|f|, f_n)$. On a $g_n \in \Lambda$, $g_n \leqslant g_{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\uparrow g_n = |f|$. On en déduit

$$0 \leqslant \mathcal{L}(|f|) \equiv \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(g_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(f_n) < \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathcal{L}(|f|) = 0$, $f \equiv 0 \pmod{\mathcal{L}}$

Définition. Une fonction φ définie sur E, à valeurs dans $\overline{R}$, s'appelle négligeable (par rapport à $\mathcal{L}$) lorsque pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe une suite croissante (f_n) de fonctions de Λ telle qu

$$f_n \geqslant 0 \ ; \ \mathcal{L}(f_n) < \varepsilon \ ; \ (1 \leqslant n < +\infty) \ ; \ |\varphi| \leqslant \lim_{n \to +\infty} \uparrow f_n$$

Il résulte alors de la proposition 2 que :

Proposition 3. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction</u> $f \in \Lambda$ <u>soit</u> $\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ \mathcal{L})$ <u>est qu'elle soit négli-geable</u>.

Il résulte d'autre part immédiatement de la définition que les fonctions φ et $|\varphi|$ sont négligeables en même temps.

Proposition 4. φ <u>et</u> ψ <u>étant des fonctions négligeables</u> $\geqslant 0$ a <u>et</u> b <u>des nombres réels</u> $\geqslant 0$, $a\varphi + b\psi$ <u>est négligeable</u>.

Remarque. Nous convenons que, pour toute fonction φ, même prenant des valeurs infinies, on a $0\varphi = 0$.

Soit ε un nombre > 0. Par hypothèse, il existe des suites croissantes (f_n), (g_n) de fonctions $\geqslant 0$ de Λ telles que

$$\varphi \leqslant \lim_{n \to \infty} \uparrow f_n \quad \psi \leqslant \lim_{n \to \infty} \uparrow g_n \ ; \ \mathcal{L}(f_n) < \frac{\varepsilon}{2a} \ ; \ \mathcal{L}(g_n) < \frac{\varepsilon}{2b}$$

(si l'un des nombres a, b est nul, remplacer $\frac{\varepsilon}{2a}$ ou $\frac{\varepsilon}{2b}$ par $+\infty$)
La suite $(af_n + bg_n)$ est une suite croissante de fonctions $\geqslant 0$ de Λ et on a

$$a\varphi + b\psi = \lim_{n \to +\infty} \uparrow (af_n + bg_n) \ ; \ \mathcal{L}(af_n + bg_n) < \varepsilon$$

Proposition 5. <u>Soit</u> (φ_p) <u>une suite croissante de fonctions négli-geables</u>. <u>La fonction</u> $\varphi = \lim_{p \to +\infty} \uparrow \varphi_p$ <u>est négligeable</u>.

ε étant un nombre > 0 donné, il existe par hypothèse pour chaque indice p une suite croissante $(f_{n,p})$ de fonctions $\geqslant 0$ de Λ telle que

$$|\varphi_p| \leqslant \lim_{n \to +\infty} \uparrow f_{n,p} \qquad \mathcal{L}(f_{n,p}) < \varepsilon \cdot 2^{-p}$$

Posons $u_{o,p} = f_{1,p}$ et, si $n > 0$, $u_{n,p} = f_{n+1,p} - f_{n,p}$, et

$$v_m = \sum_{n+p=m} u_{n,p}$$

On a $v_m \leqslant v_{m+1}$, et, si $m > p$, $v_m \geqslant f_{m-p,p}$. On en déduit que $\varphi_p \leqslant \lim_{m\to+\infty} \uparrow v_m$. Cette inégalité, dont le second membre ne dépend pas de p, étant vraie quel que soit p, on a $\varphi \leqslant \lim_{m\to+\infty} \uparrow v_m$. De plus, v_m est une fonction $\geqslant 0$ de Λ, et on a

$$v_m \leqslant \sum_{q=1}^{p} f_{m,q} \qquad \mathcal{L}(v_m) \leqslant \varepsilon \sum_{q=1}^{p} 2^{-q} < \varepsilon$$

ce qui démontre notre proposition.

Définition. <u>Un ensemble</u> $N \subset E$ <u>s'appelle négligeable quand sa fonction caractéristique est négligeable</u>.

Proposition 6. <u>Toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable</u>.

En effet, si N' est une partie d'un ensemble négligeable N, on a $\varphi_{N'} \leqslant \varphi_N$, d'où résulte tout de suite que $\varphi_{N'}$ est négligeable.

Proposition 7. <u>La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable</u>.

Soit (N_p) $(1 \leqslant p < +\infty)$ une suite d'ensembles négligeables. Posons $M_p = \bigcup_{q=1}^{p} N_q$. On a $\varphi_{M_p} = \overline{\text{borne}}_{1\leqslant q\leqslant p} \varphi_{N_q} \leqslant \sum_{q=1}^{p} \varphi_{N_q}$, et le dernier membre de cette égalité est une fonction négligeable en vertu de la proposition 4. Il en est donc de même de φ_{M_p}. Or, si $N = \bigcup_p N_p$, on a $\varphi_N = \lim_{p\to+\infty} \uparrow \varphi_{M_p}$, donc N est négligeable en vertu de la proposition 5.

Proposition 8. <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction</u> φ <u>définie sur</u> E <u>soit négligeable est que l'ensemble</u> N <u>des</u> $x \in E$ <u>tels que</u> $\varphi(x) \neq 0$ <u>soit négligeable</u>.

La proposition résulte des inégalités évidentes

$$|\varphi| \leqslant \lim_{p\to+\infty} \uparrow p\,\varphi_N \qquad \varphi_N \leqslant \lim_{p\to+\infty} \uparrow p\,|\varphi|$$

en tenant compte de la proposition 5.

Définition. <u>Soit</u> P <u>une propriété des éléments</u> $x \in E$. <u>On dit que le prédicat</u> P(x) <u>est vrai presque partout si l'ensemble des</u> x <u>tels que</u> P(x) <u>soit faux est négligeable</u>.

De même, on dira qu'une fonction φ est définie presque partout sur E si le complémentaire de son domaine de définition est négligea--ble. Une pareille fonction sera dite presque partout finie si l'en--semble des éléments du domaine de définition de φ en lesquels φ est infinie est négligeable. Nous désignerons par Φ la famille des fonctions définies presque partout.

f et g étant des fonctions de Λ, il résulte des propositions 3 et 8 qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f \equiv g$ (mod. $\mathcal{L}$) est que l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \neq g(x)$ soit négligeable. D'une manière générale, soient φ, ψ deux fonctions de Φ, et F, G leurs domaines de définition ; nous dirons qu'elles sont <u>égales presque partout</u> si l'ensemble N des éléments de $F \cap G$ en les--quels elles prennent des valeurs différentes est négligeable. Généralisant à ce cas la notation employée pour les fonctions de Λ nous écrirons alors $\varphi \overset{*}{\equiv} \psi$ (mod. $\mathcal{L}$).

La relation ainsi définie est une relation d'équivalence entre éléments de Φ. Soient en effet φ, ψ, θ trois fonctions de Φ, assujetties aux conditions $\varphi \overset{*}{\equiv} \psi$ (mod. $\mathcal{L}$), $\psi \overset{*}{\equiv} \theta$ (mod. $\mathcal{L}$), et F, G, H les domaines de définition de ces fonctions. Soient K l'ensemble des éléments $x \in F \cap G$ tels que $\varphi(x) = \psi(x)$, L celui des éléments $x \in G \cap H$ tels que $\psi(x) = \theta(x)$ a) si $x \in F$, on a $\varphi(x) = \varphi(x)$; b) si $x \in K$, on a $\psi(x) = \varphi(x)$ c) si $x \in K \cap L$ on a $\varphi(x) = \psi(x) = \theta(x)$. Or les ensembles $\complement F$, $\complement K = \complement F \cup (F-K)$ et

$\complement(K \cap L) = \complement K \cup \complement L$ sont négligeables en vertu de la proposition 7. D'où $\varphi \overset{*}{\equiv} \varphi$ (mod. $\mathcal{L}$), $\psi \overset{*}{\equiv} \varphi$ (mod. $\mathcal{L}$) et $\varphi \overset{*}{\equiv} \theta$ (mod. $\mathcal{L}$), ce qui démontre que notre relation est une relation d'équivalence.

Cette relation d'équivalence définit donc un partage en classes des éléments de Φ . Nous désignerons par F l'ensemble de ces classes. Les éléments de F seront désignés par une lettre grasse munie d'un astérisque. Il est clair que chacune de ces classes contient des fonctions définies sur E tout entier.

§ IV. OPERATIONS DANS L'ENSEMBLE F.

Nous allons voir, qu'on peut, dans une assez large mesure, étendre aux éléments de F les opérations que l'on pratique sur les fonctions. Pour cela, désignons par $\bar{R}^{\infty}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\bar{R}$ (c'est-à-dire le produit d'une famille dénombrable infinie d'ensembles identiques à $\bar{R}$). Supposons donnée une fonction Ψ définie sur une partie $\mathfrak{J}$ de $\bar{R}^{\infty}$, et à valeurs dans $\bar{R}$. Soit d'autre part Φ_e la famille des fonctions définies sur E tout entier et à valeurs dans $\bar{R}$. Si (φ_n) est une suite de fonctions de Φ_e telle que, pour tout $x \in E$, la suite ($\varphi_n(x)$) appartienne à $\mathfrak{J}$, on peut définir une fonction $\Psi_{(\varphi_n)}$ sur E par la formule

$$\Psi_{(\varphi_n)}(x) = \Psi((\varphi_n(x))$$

Nous dirons qu'une pareille suite (φ_n) est adaptée à la fonction Ψ. Définissons maintenant une relation $\mathfrak{R}$ entre éléments $\mathbf{f}^* \in$ F et suites ($\mathbf{f}_n^*$) d'éléments de F de la manière suivante : le prédi-cat $\mathfrak{R}(\mathbf{f}^*, (\mathbf{f}_n^*))$ sera par définition équivalent au suivant : il existe une suite (φ_n) adaptée à Ψ telle que $\varphi_n \in \mathbf{f}_n^* (1 \leq n < +\infty)$

et que $\psi_{\varphi_n} \in f^*$. Cette relation $\mathcal{A}$ est une relation fonctionnelle montrons en effet que les conditions $\mathcal{A}(f^*, (f_n^*))$, $\mathcal{A}(f'^*, (f_n^*))$ entraînent $f^* = f'^*$. Supposant ces conditions réalisées, pre--nons des suites (φ_n), (φ'_n) adaptées à ψ telles que $\varphi_n \in f_n^*$, $\varphi'_n \in f_n^*$ $(1 \leq n < +\infty)$ et que $\psi_{(\varphi_n)} \in f^*$, $\psi_{(\varphi'_n)} \in f'^*$. Il existe, pour chaque n, un ensemble A_n tel que $\complement A_n$ soit négligeable et s sur lequel φ_n et φ'_n sont égales. Soit $B = \bigcap_n A_n$: on a $\complement B = \bigcup_n \complement A_n$, et par suite $\complement B$ est négligeable.(proposition 7). Or, si $x \in B$, on a $\psi_{(\varphi_n)}(x) = \psi_{(\varphi'_n)}(x)$ d'où $\psi_{(\varphi_n)} \equiv \psi_{(\varphi'_n)} \pmod{\mathcal{L}}$ et $f^* = f'^*$. Notre relation $\mathcal{A}$ nous fournit donc une fonction ψ^* définie sur une partie $\mathfrak{D}^*$ de l'ensemble F^{∞} des suites d'éléments de F et à valeurs dans F : si $(f_n^*) \in \mathfrak{D}^*$ $\psi^*((f_n^*))$ est la classe qui contient toutes les fonctions $\psi_{(\varphi_n)}$ pour les suites (φ_n) adaptées à ψ telles que $\varphi_n \in f_n$ $(1 \leq n < +\infty)$.

Des considérations analogues peuvent se développer si on part d'une fonction ψ définie sur une partie $\mathfrak{D}$ de $\overline{R}^p$ (le produit de p ensembles identiques à $\overline{R}$). On obtient alors une fonction ψ^* définie sur une partie de F^p (il suffit de remplacer partout la considération des suites par celle de suites finies à p termes).

Nous appliquerons notre procédé de définition dans les cas suivants : 1) $\psi_1((x_n)) = \overline{\text{borne}}\,(x_n) = \overline{\text{borne}}_{1 \leq n < +\infty}\, x_n$; $\mathfrak{D}_1 = \overline{R}^{\infty}$
2) $\psi_2((x_n)) = \underline{\text{borne}}\,(x_n) = \underline{\text{borne}}_{1 \leq n < \infty}\, x_n$; $\mathfrak{D} = \overline{R}^{\infty}$
3) $\psi_3((x_n)) = \overline{\lim}\,((x_n)) = \overline{\lim}_{n \to \infty}\, x_n$; $\mathfrak{D}_3 = \overline{R}^{\infty}$; 4) $\psi_4((x_n)) = \underline{\lim}\,((x_n)) = \underline{\lim}_{1 \leq n < \infty}\, x_n$; $\mathfrak{D}_4 = \overline{R}^{\infty}$; 5) $\psi_5((x_n)) = \lim_{n \to \infty} x_n$; $\mathfrak{D}_5 =$ ensemble des suites convergentes dans $\overline{R}$; 6) $\psi_6(x) = |x|$; $\mathfrak{D}_6 = \overline{R}$; 7) $\psi_7(x) = x^+$; $\mathfrak{D}_7 = \overline{R}$; 8) $\psi_8(x) = x^-$; $\mathfrak{D}_8 = \overline{R}$.

9) si $a \in R$, $\text{Ч}_9(x) = ax$ ($\text{Ч}_9 = 0$ si $a = 0$) ; $\mathcal{D}_9 = \bar{R}$;

10) $\text{Ч}_{10}(x_1,x_2) = x_1+x_2$; $\mathcal{D}_{10} = (\bar{R} - \{-\infty\}) \times (\bar{R} - \{-\infty\})$;

11) $\text{Ч}_{11}(x_1,x_2) = x_1+x_2$; $\mathcal{D}_{11} = (\bar{R} - \{+\infty\}) \times (\bar{R} - \{+\infty\})$)?.

Nous obtiendrons de cette manière 11 fonctions Ч_i^* $(1 \leq i \leq 11)$.

(f_n^*) étant une suite d'éléments de F, nous poserons $\overline{\text{borne}}_{1 \leq n < +\infty} f_n^* = \text{Ч}_1^*((f_n^*))$; $\underline{\text{borne}}_{1 \leq n < +\infty} f_n^* = \text{Ч}_2^*((f_n^*))$; $\overline{\lim}_{n \to \infty} f_n^* = \text{Ч}_3^*((f_n^*))$; $\underline{\lim}_{n \to \infty} f_n^* = \text{Ч}_4^*((f_n^*))$; $\lim_{n \to \infty} f_n^* = \text{Ч}_5((f_n^*))$, le champ de définition de cette fonction étant appelé ensemble des suites convergentes d'éléments de F ; f^* étant un élément de F, nous poserons $|f^*| = \text{Ч}_6^*(f^*)$; $(f^*)^+ = \text{Ч}_7^*(f^*)$; $(f^*)^- = \text{Ч}_8(f^*)$, $af^* = \text{Ч}_9(f^*)$.

Désignons par F_+ l'ensemble des classes éléments de F qui contiennent des fonctions ne prenant pas la valeur $-\infty$, et par F_- l'ensemble des classes qui contiennent des fonctions ne prenant pas la valeur $+\infty$. Le champ de définition de Ч_{10}^* est $F_+ \times F_+$ celui de Ч_{11}^* est $F_- \times F_-$. L'intersection de ces champs de défini--tion est $F_1 \times F_1$, où $F_1 = F_+ \cap F_-$ est aussi l'ensemble des clas--ses qui contiennent des fonctions ne prenant aucune des valeurs $-\infty$, $+\infty$. De plus, si $f_1^* \in F_1$, $f_2^* \in F_1$, on a $\text{Ч}_{10}^*(f_1^*, f_2^*) = \text{Ч}_{11}^*(f_1^*, f_2^*)$. Si f_1^* et f_2^* appartenant ou bien tous deux à F_+, ou bien tous deux à F_-, nous poserons, dans le premier cas, $f_1^* + f_2^* = \text{Ч}_{10}^*(f_1^*, f_2^*)$ dans le second $f_1^* + f_2^* = \text{Ч}_{11}^*(f_1^*, f_2^*)$.

Les fonctions Ч_1^*, Ч_2^* définissent la $\overline{\text{borne}}$ et la $\underline{\text{borne}}$ d'une suite infinie. Il est évident qu'on pourrait définir de la même manière la $\overline{\text{borne}}$ et la $\underline{\text{borne}}$ d'une suite finie.

Nous allons maintenant énoncer certaines propriétés des diver--ses fonctions ψ_i^* que nous venons de définir, qui se déduisent immédiatement des propriétés correspondantes des fonctions ψ_i. Nous laisserons au lecteur le soin de faire les démonstrations.

La $\overline{\text{borne}}$ et la $\underline{\text{borne}}$ d'une suite ne dépendent que de l'ensemble des éléments de la suite. Γ étant une famille dénombrable d'éléments de F, on peut donc définir les expressions $\overline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma} f^*$ et $\underline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma} f^*$: ce sont la $\overline{\text{borne}}$ et la $\underline{\text{borne}}$ des suites que l'on obtient en rangeant dans un ordre quelconque les éléments de Γ .

Si Γ est la réunion d'une famille dénombrable $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ de parties de F (I étant un ensemble dénombrable d'indices), on a

$$\overline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma} f^* = \overline{\text{borne}}_{i \in I} \left(\overline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma_i} f^* \right) \; ; \; \underline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma} f^* = \underline{\text{borne}}_{i \in I} \left(\underline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma_i} f^* \right)$$

On a, en particulier,

$$\overline{\text{borne}} \left(\overline{\text{borne}}(f^*, g^*), h^* \right) = \overline{\text{borne}}\left(f^*, \overline{\text{borne}}(g^*, h^*)\right) = \overline{\text{borne}} (f^*, g^*, h^*)$$

Il en résulte que l'on peut définir dans F une structure d'ensemble semi-ordonné en définissant le prédicat " $f^* \leq g^*$ " comme équivalent au suivant : "$\overline{\text{borne}} (f^*, g^*) = g^*$ ", qui est d'ailleurs lui-même équivalent à "$\underline{\text{borne}} (f^* , g^*) = f^*$".

Γ étant une partie dénombrable de F, la condition $g^* \in \Gamma$ entraîne $\underline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma} f^* \leq g \leq \overline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma} f^*$. Inversement, h^* étant un élément de F, si la condition $g^* \in \Gamma$ entraîne $h^* \leq g^*$, on a $h^* \leq \underline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma} f^*$; si elle entraîne $h^* \geqslant g^*$, on a $h^* \geqslant \overline{\text{borne}}_{f^* \in \Gamma} f^*$.

On a

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} f_n^* = \underline{\text{borne}}_{1 \leq p < +\infty} \left(\overline{\text{borne}}_{p \leq n < +\infty} f_n^* \right)$$

$$\underline{\lim_{n \to +\infty}} f_n^* = \overline{\text{borne}}_{1 \leq p < +\infty} \left(\underline{\text{borne}}_{p \leq n < +\infty} f_n^* \right)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (f_n^*) converge est que $\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n^* = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n^*$. On a alors $\lim_{n\to\infty} f_n^* = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n^* = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n^*$.

Si deux suites (f_n^*) et (g_n^*) sont telles que $f_n^* \leqslant g_n^*$ $(1 \leqslant n < +\infty)$, on a

$$\overline{\text{borne}}_{1\leqslant n<+\infty} f_n^* \leqslant \overline{\text{borne}}_{1\leqslant n<+\infty} g_n^* ; \ \underline{\text{borne}}_{1\leqslant n<+\infty} f_n^* \leqslant \underline{\text{borne}}_{1\leqslant n<+\infty} g_n^* ; \ \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n^* \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} g_n^*$$
$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n^* \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} g_n^*$$

Une suite (f_n^*) est appelée <u>croissante</u> quand on a $f_n^* \leqslant f_{n+1}^*$ $(1 \leqslant n < +\infty)$. Une suite croissante est toujours convergente, et a pour limite $\overline{\text{borne}}_{1\leqslant n<+\infty} f_n^*$. De même, on appelle <u>décroissante</u> une suite (f_n^*) quand on a $f_{n+1}^* \leqslant f_n^*$ $(1 \leqslant n < +\infty)$: une suite ~~dénombrable~~ décroissante est toujours convergente et a pour limite $\underline{\text{borne}}_{1\leqslant n<+\infty} f_n^*$.

Les conditions $f^* \geqslant 0$ (0 étant bien entendu la classe qui contient la fonction nulle), $f^* = (f^*)^+$, $f^* = |f^*|$, $(f^*)^- = 0$ sont toutes équivalentes. En posant $-f^* = (-1).f^*$, il en est de même des conditions $f^* \leqslant 0$, $f^* = -(f^*)^-$, $f^* = -|f^*|$, $(f^*)^+ = 0$

Si a est un nombre $\geqslant 0$ et Γ une partie dénombrable de F, on a $\overline{\text{borne}}_{f^*\in\Gamma}\, a f^* = a\, \overline{\text{borne}}_{f^*\in\Gamma} f^*$ $\underline{\text{borne}}_{f^*\in\Gamma}\, a f^* = a\, \underline{\text{borne}}_{f^*\in\Gamma} f^*$. Au contraire, si $a \leqslant 0$, on a $\overline{\text{borne}}_{f^*\in\Gamma}\, a f^* = a\, \underline{\text{borne}}_{f^*\in\Gamma} f^*$, $\underline{\text{borne}}_{f^*\in\Gamma}\, a f^* = a\, \overline{\text{borne}}_{f^*\in\Gamma} f^*$. Quel que soit le nombre réel a, si la suite (f_n^*) est convergente, il en est de même de la suite $(a f_n^*)$ et on a $\lim_{n\to+\infty} a f_n^* = a \lim_{n\to+\infty} f_n^*$; de plus les suites $((f_n^*)^+)$, $((f_n^*)^-)$, $(|f_n^*|)$ sont convergentes et ont pour limites $(\lim_{n\to\infty} f_n^*)^+$, $(\lim_{n\to\infty} f_n^*)^-$, $|\lim_{n\to\infty} f_n^*|$.

Si $f^* \leqslant g^*$, a $\geqslant 0$, la condition $f^* \in F_+$ entraîne $af^* \in F_+$, $g^* \in F_+$; la condition $g^* \in F_-$ entraîne a $g^* \in F_-$, $f^* \in F_-$.

Au contraire, si a $\leqslant 0$, la condition $f^* \in F_+$ entraîne a $f^* \in F_-$, et la condition $f^* \in F_-$ entraîne a $f^* \in F_+$. Il résulte de là que l'ensemble F_+ (ainsi d'ailleurs que F_-) admet l'ensemble des nombres $\geqslant 0$ comme domaine d'opérateurs. L'ensemble F_1 admet, lui, l'ensemble des nombres réels comme domaine d'opérateurs. Si a, b sont des nombres réels quelconque, et si $f^* \in F$, on a $a.(b f^*) = ab. f^*$

L'addition dans F_+ est commutative et associative. La multiplication des éléments de F_+ par les nombres réels $\geqslant 0$ est distributive par rapport à l'addition des éléments de F_+ et par rapport à l'addition des nombres $\geqslant 0$. Les mêmes remarques s'appliquent à F_-.

Il importe de se souvenir qu'il n'y a dans F_+ (ni dans F_-) ni existence ni unicité de la soustraction : f^* et g^* étant des éléments de F_+, il n'y a en général aucun $h^* \in F$ tel que $g^* = f^* + h^*$ s'il y en a un, il y en a en général une infinité.

f^* et g^* étant des éléments de F_+ ou de F_-, une condition nécessaire et suffisante pour que $f^* \leqslant g^*$ est qu'il existe au moins un $h^* \geqslant 0$ tel que $g^* = f^* + h^*$.

Par contre, <u>l'addition dans F_1 et la multiplication des éléments de F_1 par les nombres réels définissent dans F_1 une structure d'espace vectoriel</u>.

f^*, f'^*, g^*, g'^*, étant des éléments de F_+ (ou de F_-), les conditions $f^* \leqslant f'^*$, $g^* \leqslant g'^*$ entraînent $f^* + g^* \leqslant f'^* + g'^*$.

Pour tout élément $f^* \in F$, on a $(f^*)^+ \in F_+$, $(f^*)^- \in F_+$, $|f^*| \in F_+$, et

$$|f^*| = (f^*)^+ + (f^*)^-$$

Si f^* et g^* sont des éléments de F_1, on a

$$f^* = (f^*)^+ - (f^*)^- \, ; \, (f^*)^+ = \tfrac{1}{2}|f^*| + \tfrac{1}{2}f^* \, ; \, (f^*)^- = \tfrac{1}{2}|f^*| - \tfrac{1}{2}f^*$$

$\overline{\text{borne}}\,(f^*, g^*) = f^* + (g^* - f^*)^+$; $\underline{\text{borne}}\,(f^*, g^*) = f^* + (g^* - f^*)^-$

Si f^* et g^* sont des éléments de F_+ (ou de F_-), on a, si $a \in R$,

$$|f^* + g^*| \leqslant |f^*| + |g^*| \, ; \quad |af^*| = |a|\,|f^*|$$

Une suite (f^*_n) composée d'éléments de F_+ et convergente ne converge pas nécessairement vers un élément de F_+ ; il en est cependant ainsi si la suite est croissante. De même, une suite décroissante d'éléments de F_- converge vers un élément de F_-.

Si les suites (f^*_n), (g^*_n), composées d'éléments de F_+ convergent vers des éléments de F_+, et si a, b sont des nombres réels $\geqslant 0$, la suite ($a f^*_n + b g^*_n$) converge, et on a

$$\lim_{n \to \infty} (a f^*_n + b g^*_n) = a.\lim f^*_n + b.\lim g^*_n$$

Cette égalité reste vraie si (f^*_n), (g^*_n) sont des suites d'éléments de F_1 convergeant vers des éléments de F_1, a et b pouvant alors être des nombres réels quelconques.

Considérons maintenant une suite (φ_n) de fonctions de Φ . Soit f^*_n la classe qui contient φ_n ($1 \leqslant n < +\infty$). Si la suite (f^*_n) est convergente, on dit que la suite (φ_n) <u>converge presque partout</u>. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'il existe un ensemble A, contenu dans les champs de définition de toutes les fonctions φ_n , dont le complémentaire soit négligeable, et en chaque élément x duquel la suite ($\varphi_n(x)$) converge.

De plus, si φ est la fonction dont le champ de définition est A, et qui est définie sur cet ensemble par $\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$, on a $\varphi \in \lim_{n \to \infty} f_n^*$.

D'autre part, on peut donner un critère pour qu'une suite (f_n^*) composée d'éléments de F_1 converge vers un élément de F_1. Ce cri--tère sera celui de la convergence au sens de Cauchy. Il exige, pour être formulé, la notion de la limite d'une suite à 2 indices ; cette notion pourrait se définir comme nous le venons de le faire pour celle de la limite d'une suite à un seul indice. On peut aussi l'en déduire de la manière suivante : la suite $(f_{m,n}^*)$ $(1 \leqslant m < +\infty, 1 \leqslant n < +\infty)$ est dite converger vers l'élément f^* si, $(m_k)_{1 \leqslant k < +\infty}$ et $(n_k)_{1 \leqslant k < +\infty}$ étant deux suites quelconques extraites de la suite des entiers, on a

$$\lim_{k \to +\infty} f_{m_k, n_k}^* = f^*$$

Ceci posé, une suite (f_n^*) composée d'éléments de F_1 ; sera dite convergente au sens de Cauchy si

$$\lim_{m,n \to +\infty} \left| f_m^* - f_n^* \right| = 0$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'il existe une suite (φ_n) de fonctions de Φ_e, ne prenant que des valeurs finies, telle que $\varphi_n \in f_n^*$ $(1 \leqslant n < +\infty)$ et que, pour tout $x \in E$, la suite $(\varphi_n(x))$ converge au sens de Cauchy. Il résul--te immédiatement de là que :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite (f_n^*) composée d'éléments de F_1 converge vers un élément de F_1 est qu'elle converge au sens de Cauchy.

Il suffit d'ailleurs, pour que cette condition soit réalisée, qu'il existe une suite (φ_n) de fonctions de Φ et un ensemble A tels que : 1) $\varphi_n \in f_n^*$ $(1 \leqslant n \leqslant +\infty)$; 2) A appartienne aux champs de définition de toutes les fonctions φ_n ; 3) toutes les fonctions φ_n soient partout finies sur A ; 4) en chaque $x \in A$, la suite $(\varphi_n(x))$ converge au sens de Cauchy. Une suite (φ_n) pour laquelle existe un ensemble A satisfaisant à ces conditions est dite presque partout convergente au sens de Cauchy.

§ V. LE PROLONGEMENT D'UNE FONCTIONNELLE LINEAIRE CROISSANTE.

Il résulte des propositions 3, 8 du § III que la relation " $\overset{*}{\equiv}$ (mod. $\mathcal{L}$)", dont on restreint le champ de définition aux éléments de Λ, devient équivalente à la relation " $\equiv$ (mod. $\mathcal{L}$)". Il résulte de là que tout élément $f \in L^1(\mathcal{L})$, considéré comme classe d'éléments de Λ, est contenu dans un élément de F, que nous désignerons par $\mathcal{C}(f)$, et que cette fonction $\mathcal{C}$, définie sur $L^1(\mathcal{L})$ et à valeurs dans F, est une application bi-univoque de $L^1(\mathcal{L})$ sur une partie de F, partie que nous désignerons par L. On a $L \subset F_1$, et l'application est une application linéaire, comme on le voit tout de suite. Elle réalise donc une isomorphie d'espaces vectoriels entre $L^1(\mathcal{L})$ et L. De plus, on a

$$\mathcal{C}(|f|) = |\mathcal{C}(f)|$$

ce qui montre que la condition $f \in L$ entraîne $|f| \in L$.

La correspondance $\mathcal{C}$ associe à la fonction $\mathcal{L}$ sur $L^1(\mathcal{L})$ une fonction linéaire que nous désignerons encore -par abus de langage- par $\mathcal{L}$ sur L, définie par

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}(f)) = \mathcal{L}(f)$$

f^* étant un élément de L, on a $\mathcal{L}(|f^*|) \geqslant 0$.

Si Λ' est l'ensemble des fonctions de Φ qui entrent dans les classes de L, l'ensemble Λ' se compose des fonctions de Λ et de celles qui n'en diffèrent que par des fonctions négligeables. La fonction $\mathcal{L}$ sur L définit une fonctionnelle $\mathcal{L}'$ sur Λ'. $\mathcal{L}'$ est un premier prolongement de $\mathcal{L}$, mais d'un intérêt médiocre.

Par contre, nous savons que la fonction $\mathcal{L}$ sur $L^1(\mathcal{L})$ peut être prolongée par une fonction $\bar{\mathcal{L}}$ sur $\bar{L}^1(\mathcal{L})$. Nous allons donc chercher à prolonger $\mathcal{C}$ par une application de $\bar{L}^1(\mathcal{L})$ dans F. Nous allons pour cela définir une relation $\mathcal{K}$ entre éléments $\bar{f} \in \bar{L}^1(\mathcal{L})$ et éléments $f^* \in F$ de la manière suivante :

<u>Définition</u>. <u>Le prédicat</u> $\mathcal{K}(\bar{f}, f^*)$ <u>est par définition équivalent au suivant</u> : <u>il existe une suite</u> (f_n) <u>d'éléments</u> de $L^1(\mathcal{L})$ <u>telle que l'on ait</u> $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = \bar{f}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{C}(f_n) = f^*$.

(La première de ces limites correspond à la notion de limite dans $L^1(\mathcal{L})$ définie par la structure d'espace de Banach ; la seconde correspond à la notion de limite définie au § précédent).

Nous nous proposons maintenant d'établir que la relation $\mathcal{K}$ est fonctionnelle, et qu'elle définit une application bi-univoque de $\bar{L}^1(\mathcal{L})$ dans F. Nous aurons besoin du

Lemme. <u>Soit</u> (u_k) <u>une suite de fonctions</u> $\geqslant 0$ <u>de</u> Λ <u>telle que</u> $\| u_k \| \leqslant 2^{-k}$ $(1 < k < +\infty)$. <u>Posons</u> $v_m = \sum\limits_{k=1}^{m-1} u_k$. <u>La suite</u> (v_m) <u>converge presque partout au sens de Cauchy</u>.

Soit en effet N l'ensemble des $x \in E$ en lesquels la suite $(v_m(x))$ ne converge pas au sens de Cauchy. ε étant un nombre > 0, choisissons un entier $s > 1$ tel que $2^{1-2s} < \varepsilon$. Désignons par $A_{s,\varepsilon}$

l'ensemble des $x \in E$ tels que $u_{s+p}(x) \geqslant 2^{-p}$, et posons $A_s = \bigcup_{p} A_{s,p}$. Si $x \in \complement A_s$, les conditions $s < m < n$ entraînent $\left|v_n(x) - v_m(x)\right| = \sum_{i=m}^{n-1} u_i \leqslant 2^s \sum_{i=m}^{n-1} 2^{-i} < 2^{s-m+1}$ et par suite la suite $(v_m(x))$ converge au sens de Cauchy : on a $x \in \complement N$. Donc $N \subset A_s$. On a

$$\mathcal{S}_N \leqslant \mathcal{S}_{A_s} = \overline{\text{borne}}_{1 \leqslant p < +\infty} \mathcal{S}_{A_{s,p}} \leqslant \lim_{p \to \infty} \sum_{i=1}^{p} \mathcal{S}_{A_{s,i}}$$

D'autre part, il résulte de la définition des $A_{s,i}$ que l'on a $\mathcal{S}_{A_{s,i}} \leqslant 2^i u_{s+i}$. Posons $w_p = \sum_{i=1}^{p} 2^i u_{s+i}$: on a $w_p \in \Lambda$, $w_p \geqslant 0$, $w_p \leqslant w_{p+1}$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ et

$$\mathcal{S}_N \leqslant \mathcal{S}_{A_s} \leqslant \lim_{p \to +\infty} \uparrow w_p$$

$$\mathcal{L}(w_p) = \sum_{i=1}^{p} 2^i \left\| u_{s+i} \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} 2^{-2s-i} < 2^{1-2s} < \varepsilon$$

Donc N est négligeable, ce qui démontre le lemme.

Proposition 1. *Soit* (f_n) *une suite d'éléments de* $L^1(\mathcal{L})$ *qui converge dans* $\overline{L}^1(\mathcal{L})$, *et soit* $f_n^* = \mathcal{C}(f_n)$ $(1 \leqslant n < +\infty)$. *On peut extraire de la suite* (f_n^*) *une suite partielle qui converge au sens de Cauchy*. *De plus, si* $\lim_{n \to +\infty} f_n = 0$, *on peut extraire de la suite* (f_n^*) *une suite qui converge vers 0*.

On a par hypothèse $\lim_{m,n \to +\infty} \left\| f_m - f_n \right\| = 0$. On peut donc extraire de la suite (f_n) une suite partielle $(f_{n_k})_{1 \leqslant k < +\infty}$ telle que

$$\left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\| < 2^{-2k} \quad (1 \leqslant k < +\infty).$$

Nous poserons $u_k^* = \left| f_{n_{k+1}}^* - f_{n_k}^* \right|$, $v_m^* = \sum_{k=1}^{m-1} u_k^* = \sum_{k=1}^{m-1} \left| f_{n_{k+1}}^* - f_{n_k}^* \right|$. Il résulte du lemme que la suite (v_m^*) converge au sens de Cauchy. Comme on a $\left| f_{n_\ell}^* - f_{n_k}^* \right| \leqslant \left| v_\ell^* - v_k^* \right|$, il en est de même de la suite $(f_{n_k}^*)$.

Si $\lim_{n \to +\infty} f_n = 0$, on a $\lim \left\| f_n \right\| = 0$, et on peut extraire de la suite (f_n) une suite partielle (f_{n_k}) telle que $\left\| f_{n_k} \right\| < 2^{-2k}$ $(1 \leqslant k < +\infty)$. Il résulte alors tout de suite du lemme que l'on a $\lim_{k \to +\infty} \left| f_{n_k}^* \right| = 0$.

Proposition 2. <u>Pour tout</u> $\bar{f} \in \bar{L}^1(\mathcal{L})$, <u>il existe un</u> $f^* \in F$ <u>tel que</u> $\mathcal{K}(\bar{f}, f^*)$.

Proposition 3. <u>La condition</u> $\mathcal{K}(\bar{f}, f^*)$ <u>entraîne</u> $f^* \in F_1$.

Ces propositions découlent immédiatement de la proposition 1. La proposition 3 étant acquise, il résulte tout de suite de la défi--nition de $\mathcal{K}$ que :

Proposition 4. a, b <u>étant des nombres réels, les conditions</u> $\mathcal{K}(\bar{f}_1, f_1^*)$, $\mathcal{K}(\bar{f}_2, f_2^*)$ <u>entraînent</u> $\mathcal{K}(a\bar{f}_1 + b\bar{f}_2, af_1^* + bf_2^*)$ <u>et</u> $\mathcal{K}(|\bar{f}_1|, |f_1^*|)$. <u>Si</u> $f \in L^1(\mathcal{L})$, <u>on a</u> $\mathcal{K}(f, \mathcal{C}(f))$.

Proposition 5. <u>Les conditions</u> $\mathcal{K}(\bar{f}, f_1^*)$, $\mathcal{K}(\bar{f}, f_2^*)$ <u>entraînent</u> $f_1^* = f_2^*$.

Il suffit en effet, en vertu de la proposition 4, de montrer que la condition $\mathcal{K}(0, f^*)$ entraîne $f^* = 0$. Soit donc (f_n) une suite d'éléments de $L^1(\mathcal{L})$ qui converge vers 0 dans $L^1(\mathcal{L})$ et telle que la suite $(\mathcal{C}(f_n))$ converge vers f^* dans F. On peut extraire de la suite $(\mathcal{C}(f_n))$ une suite qui converge vers 0. Donc $f^* = 0$.

Proposition 6. <u>Les conditions</u> $\mathcal{K}(\bar{f}_1, f^*)$, $\mathcal{K}(\bar{f}_2, f^*)$ <u>entraînent</u> $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$.

En vertu de la proposition 4, il suffit de montrer que la condi--tion $\mathcal{K}(\bar{f}, 0)$ entraîne $\bar{f} = 0$. Soit donc (f_n) une suite d'éléments de $L^1(\mathcal{L})$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = \bar{f}$ et que $\lim \mathcal{C}(f_n) = 0$. Posons $f_n^* = \mathcal{C}(f_n)$ $(1 \leq n < +\infty)$. On a $\lim\limits_{m,n \to +\infty} \|f_m - f_n\| = 0$; il est donc possible d'extraire de la suite (f_n) une suite partiel--le (f_{n_k}) telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 2^{-k}$ $(1 \leq k < +\infty)$.

Posons $u_k^* = |f^*_{n_{k+1}} - f^*_{n_k}|$, et remarquons que l'égalité $\lim\limits_{p \to +\infty} f^*_{n_p} = 0$ entraîne $f^*_{n_k} = \lim\limits_{p \to +\infty} (f^*_{n_k} - f^*_{n_p})$ d'où

$$|f^*_{u_k}| \leqslant \lim_{p \to +\infty} \sum_{i=k}^{p} v_i^*$$

Choisissons dans $f^*_{u_k}$ une fonction $f_{n_k} \in \Lambda$, et dans v_i^* une fonction $u_i \in \Lambda$ $(1 \leqslant k < +\infty,\ 1 \leqslant i < +\infty)$. L'ensemble N_k des x tels que $\left|f_{n_k}(x)\right| \geqslant \lim_{p \to +\infty} \sum_{i=k}^{p} u_i(x)$ est négligeable. Soit φ_k la fonction égale à $\left|f_{n_k}\right|$ sur N_k, à 0 sur $\complement N_k$. φ_k est une fonction négligeable. ε étant un nombre > 0, il existe une suite croissante $(g_{k,p})_{1 \leqslant p < +\infty}$ de fonctions $\geqslant 0$ de Λ telle que

$$\varphi_k \leqslant \lim_{p \to +\infty} \uparrow g_{k,p} \qquad \mathcal{L}(g_{k,p}) < \varepsilon .$$

On a

$$\left|f_{n_k}\right| \leqslant \lim_{p \to +\infty} \uparrow \left(\sum_{i=k}^{p} u_i + g_{k,p} \right)$$

d'où

$$\| f_{n_k} \| \leqslant \lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{i=k}^{p} \|u_i\| + \varepsilon \right) \leqslant 2^{1-k} + \varepsilon$$

Cette inégalité étant vraie quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $\|f_{n_k}\| \leqslant 2^{1-k}$ d'où $\|\bar{f}\| = \lim_{k \to +\infty} \|f_{u_k}\| = \lim_{k \to +\infty} \|f_{n_k}\| = 0$ et $\bar{f} = 0$.

Les propositions 2, 5, 6 montrent que la relation $\mathcal{K}$ définit une application bi-univoque de $\overset{-1}{L}(\mathcal{L})$ sur une partie de F, partie que nous désignerons par L^*. Nous conviendrons de désigner par $\mathcal{K}(\bar{f})$ l'élément de L^* qui correspond à un élément $\bar{f} \in \overset{-1}{L}(\mathcal{L})$. La proposition 3 montre que $L^* \subset F_1$; la proposition 4 montre que L^* est un sous-espace vectoriel de F_1 et que l'application bi-univoque définie par $\mathcal{K}$ est une isomorphie d'espaces vectoriels entre $\overset{-1}{L}(\mathcal{L})$ et L^*. De plus, elle montre que la condition $f^* \in L^*$ entraîne $|f^*| \in L^*$, et que la correspondance bi-univoque définie par $\mathcal{K}$ prolonge la correspondance $\mathcal{C}$.

Nous pouvons définir une fonction $\mathcal{L}^*$ sur L^* par la formule

$$\mathcal{L}^*(\mathcal{K}(\bar{f})) = \bar{\mathcal{L}}(\bar{f})$$

Cette fonction est linéaire sur L^* et prolonge la fonction $\mathcal{L}$ définie sur L. De plus, si $f^* \in L^*$, on a $\mathcal{L}^*(|f^*|) \geqslant 0$, et la condition $\mathcal{L}^*(|f^*|) = 0$ entraîne $f^* = 0$. En posant $\|f^*\| = \mathcal{L}^*(|f^*|)$ nous définissons dans L^* une structure d'espace de Banach isomorphe à $\overline{L}^1(\mathcal{L})$, donc complet.

§ VI. ETUDE DE LA FONCTIONNELLE PROLONGEE.

Comme nous n'aurons plus à nous occuper des espaces $L^1(\mathcal{L})$, $\overline{L}^1(\mathcal{L})$, en tant que distincts de L et de L^*, nous supprimerons à partir de maintenant de nos notations l'astérisque qui caractérisait les éléments de F.

La structure d'espace de Banach définie dans L^* apporte avec elle une topologie, et par suite aussi une notion de limite. Il faut avoir grand soin de distinguer cette notion de limite de celle introduite au § IV dans F. Quand une suite (f_n) d'éléments de L^* sera convergente au sens de la topologie définie par la structure d'espace de Banach, nous dirons qu'elle est convergente "au sens L^1" ; si, toujours au regard de cette topologie, elle a pour limite l'élément f, nous écrirons $f = \lim\ (L^1)\ f_n$. Par contre, nous conserverons les notations introduites au § IV en ce qui concerne la limite dans F.

Ceci dit, nous désignerons par Λ^* la famille des fonctions de Φ composant les classes qui appartiennent à L ; la donnée de la fonction $\mathcal{L}^*$ sur L^* définit une fonctionnelle sur Λ^* que nous désignerons encore - par abus de langage - par $\mathcal{L}^*$. Cette fonctionnelle prolonge $\mathcal{L}'$, qui elle-même prolongeait $\mathcal{L}$.

Soit Λ_0^* la famille des fonctions de Λ^* qui sont définies sur E tout entier et ne prennent que des valeurs finies. Comme $L^* \subset F_1$, il existe dans chaque classe de L^* des fonctions de Λ_0^*. De plus, il résulte des propriétés de L^* que Λ_0^* est une famille (W). Soit $\mathcal{L}_0^*$ la restriction à Λ_0^* de la fonctionnelle $\mathcal{L}^*$. $\mathcal{L}_0^*$ est évidemment une fonctionnelle linéaire croissante. Montrons qu'elle est continument croissante. Il suffit de démontrer la

Proposition 1. *Si* (f_n) *est une suite croissante d'éléments de* L^* *telle que* $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ *pappartienne encore à* L^*, *on a* $\mathcal{L}^*(f) = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{L}^*(f_n)$.

En effet, on a $|f_m - f_n| = \pm (f_m - f_n)$ d'où

$$\mathcal{L}^*(|f_m - f_n|) = |\mathcal{L}^*(f_m - f_n)| = |\mathcal{L}^*(f_m) - \mathcal{L}^*(f_n)|.$$

Or la suite $(\mathcal{L}^*(f_n))$ est croissante, et on a $\mathcal{L}^*(f_n) \leq \mathcal{L}^*(f)$ $(1 \leq n < +\infty)$; la suite $(\mathcal{L}^*(f_n))$ est donc con-vergente au sens de Cauchy, d'où $\lim_{m,n \to +\infty} \mathcal{L}^*(|f_m - f_n|) = 0$, ce qui prouve que la suite (f_n) est convergente au sens L^1. Posons $f' = \lim_{n \to +\infty} (L^1) f_n$ On a $f' - f_n = (f' - f) + (f - f_n)$ d'où $f' - f = \lim_{n \to \infty} (f' - f_n)$. Or on a $f' - f_n = \lim_{p \to +\infty} (L^1)(f_p - f_n)$, et, si $p \geq n$, $f_p - f_n \geq 0$, d'où $f_p - f_n = |f_p - f_n|$ et, en passant à la limite, $f' - f_n = |f' - f_n|$, ce qui signifie que $f' - f_n \geq 0$.

Ceci étant vrai quel que soit n, on a aussi $f' - f \geq 0$. Comme $f - f_n \geq 0$, on a $\mathcal{L}^*(|f' - f|) = \mathcal{L}^*(|f' - f|) \leq \mathcal{L}^*(f' - f_n)$ Or on a $\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}^*(f' - f_n) = 0$: on en déduit $f' = f$, ce qui démontre notre proposition.

Nous pouvons donc opérer sur la fonctionnelle $\mathcal{L}_0^*$ comme nous l'avons fait sur $\mathcal{L}^*$, et notamment définir la notion de fonction négligeable par rapport à $\mathcal{L}_0^*$. Mais nous allons voir que cette notion coïncide avec celle de fonction négligeable par rapport à $\mathcal{L}$. Tout d'abord, la condition $\varphi \equiv 0$ (mod. $\mathcal{L}$) entraîne évi-demment $\mathcal{L} \equiv 0$ (mod. $\mathcal{L}_0^*$). Pour démontrer la réciproque, nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 2. *Si* f *est un élément* $\geqslant 0$ *de* L_1^*, *et si* ε *est un nombre* > 0, *il existe une suite croissante* (f_n) *d'éléments* $\geqslant 0$ *de* L *telle que* $f \leqslant \lim_{n \to \infty} f_n$, $\mathcal{L}^*(f) \leqslant \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}(f_n) + \varepsilon$.

Nous savons qu'il existe une suite (g_n) d'éléments de L telle que l'on ait à la fois $f = \lim_{n \to \infty} g_n$, $f = \lim_{n \to \infty} (L^1)\, g_n$. On a donc $\lim_{m,n \to +\infty} \| g_m - g_n \| = 0$: on peut extraire de la suite (g_n) une suite partielle (g_{n_k}) telle que $\| g_{n_{k+1}} - g_{n_k} \| < 2^{-k}$ $(1 \leqslant k < +\infty)$. On a $\lim (L^1)\, g^+_{n_k} = \lim (L^1) \frac{1}{2}(g_{n_k} + |g_{n_k}|) = \frac{1}{2}(f + |f|) = f$. Choisissons un entier k tel que l'on ait simultanément $2^{1-k} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\| f - g^+_{n_k} \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $p > k$, on a

$$g_{n_p} \leqslant g_{n_k} + \sum_{i=k}^{p-1} |g_{n_{i+1}} - g_{n_i}| \leqslant g^+_{n_k} + \sum_{i=k}^{p-1} |g_{n_{i+1}} - g_{n_i}|$$

d'où

$$f \leqslant g^+_{n_k} + \lim_{p \to \infty} \sum_{i=k}^{p} |g_{n_{i+1}} - g_{n_i}|$$

Si nous posons $f_p = g^+_{n_k} + \sum_{i=k}^{p} |g_{n_{i+1}} - g_{n_i}|$, on a $f_p \in L$, $f_p \geqslant 0$, $f_p \leqslant f_{p+1}$ $(1 \leqslant p + \infty)$, et $f \leqslant \lim_{p \to \infty} f_p$, $\| f_p - g^+_{n_k} \| \leqslant \sum_{i=k}^{p+1} 2^{-i} < 2^{1-k} < \frac{\varepsilon}{2}$ (si $p > k$) d'où

$$| \mathcal{L}^*(f) - \mathcal{L}^*(f_p) | \leqslant \| f_p - f \| \leqslant \| f_p - g^+_{n_k} \| + \| g^+_{n_k} - f \| < \varepsilon$$

ce qui démontre notre proposition.

Proposition 3. φ *étant une fonction de* Φ, *la condition* $\varphi \equiv 0$ (mod. $\mathcal{L}_0^*$) *entraîne* $\varphi \equiv 0$ (mod. $\mathcal{L}$).

Soit ε un nombre > 0. Il existe par hypothèse une suite croissante (φ_n) de fonctions $\geqslant 0$ de Λ_0^*, telle que

$$|\varphi| \leqslant \lim_{n \to \infty} \uparrow \varphi_n \, , \quad \mathcal{L}(\varphi_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1 \leqslant n < + \infty)$$

Nous poserons de plus $\varphi_0 = 0$. Pour chaque n $\geqslant 0$ existe, en vertu de la proposition 2, une suite croissante $(f_{n,p})_{1 \leqslant p < + \infty}$ de fonctions $\geqslant 0$ de Λ telle que $\varphi_{n+1} - \varphi_n \leqslant \lim_{p \to + \infty} \uparrow f_{n,p}$; $\mathcal{L}(f_{n,p}) \leqslant \mathcal{L}^*(\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \varepsilon\, 2^{-n-2}$. Posons $g_p = \sum_{i=0}^{p} f_{i,p}$: on a $g_p \in \Lambda$, $g_p \geqslant 0$, $g_p \leqslant g_{p+1}$ $(1 \leqslant p < + \infty)$; si $p > n$, on a $\sum_{i=0}^{n} f_{i,p} \leqslant g_{pn'-1}$ d'où $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \leqslant \lim_{p \to \infty} \uparrow g_p$.
Ceci étant vrai pour tout n, on a $\varphi \leqslant \lim_{p \to \infty} \uparrow g_p$.
De plus, $\mathcal{L}(g_p) \leqslant \mathcal{L}(\varphi_p) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. On a donc $\varphi \equiv 0 \pmod{\mathcal{L}}$.

Il résulte de là que la relation " $\equiv \pmod{\mathcal{L}_0^*}$" entre éléments de Λ_0^* est équivalente à la relation " $\equiv \pmod{\mathcal{L}}$" restreinte aux éléments de Λ_0^*. L'espace $L^1(\mathcal{L}_0^*)$ est isomorphe à L^* , et est complet. Il en résulte que si on applique à $\mathcal{L}_0^*$ le procédé de prolongement qui a permis de passer de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{L}^*$, on retrouve $\mathcal{L}^*$.

Définition. <u>La fonctionnelle linéaire continument croissante $\mathcal{L}$ est appelée complète quand on a $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^*$.</u>

Pour qu'une fonctionnelle linéaire continument croissante soit complète, il faut et suffit que soient réalisés les conditions suivantes :

A. <u>L'espace de Banach $L^1(\mathcal{L})$ est complet.</u>

B. <u>Toute fonction partout définie et finie négligeable par rapport à $\mathcal{L}$ appartient au champ de définition de $\mathcal{L}$</u>.

En effet, $\mathcal{L}_0^*$ satisfait évidemment aux conditions A, B .

Inversement, supposons que $\mathcal{L}$ satisfasse à ces conditions. En vertu de A, on a $\bar{L}^1(\mathcal{L}) \equiv L_1(\mathcal{L})$, d'où $L^* = L$. En vertu de B. on a alors $\Lambda_0^* = \Lambda$.

Nous avons donc démontré le théorème suivant, qui faisait l'objet principal de ce chapitre :

Théorème 1. Toute fonctionnelle linéaire continûment croissante $\mathcal{L}$ peut être prolongée par une fonctionnelle complète $\mathcal{L}_0^*$.

D'ailleurs, $\mathcal{L}_0^*$ étant le prolongement que nous venons de construire, toute fonctionnelle linéaire continûment croissante complète $\mathcal{L}_0^{**}$ qui prolonge $\mathcal{L}$ prolonge aussi $\mathcal{L}_0^*$. En effet il est d'abord clair que toute fonction $\overset{*}{\equiv} 0$ (mod. $\mathcal{L}$) est aussi $\equiv 0$ (mod. $\mathcal{L}_0^{**}$). Soit L_1^{**} l'ensemble des éléments de F qui contiennent des fonctions appartenant au champ de définition Λ_0^{**} de $\mathcal{L}^{**}$: la valeur $\mathcal{L}_0^{**}(\varphi)$ est la même pour toutes les fonctions $\varphi \in \Lambda_0^{**}$ appartenant à une même classe de L^{**}. Donc $\mathcal{L}_0^{**}$ définit une fonction $\mathcal{L}^{**}$ sur L_1^{**}. D'ailleurs, comme Λ_0^{**} est une famille (W), on a $L^{**} \subset F_1$. Soit f un élément de L^{**} : il existe une suite (g_n) d'éléments de L telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} (L^1)\, g_n = f$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = f$. On a donc $\lim\limits_{m,n \to +\infty} \mathcal{L}(|g_m - g_n|) = 0$ et par suite la suite (g_n) converge aussi dans L^{**}, au sens de la topologie définie dans L^{**} par la structure d'espace de Banach qu'y apporte la fonction $\mathcal{L}^{**}$. En tenant compte de ce que $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = f$, et de la proposition 1, § V, on voit que la limite (au sens de la topologie définie par la structure d'espace de Banach) de la suite (g_n) dans L^{**} est f. On a donc $f \in L^{**}$, et $L^* \subset L^{**}$. De plus, les égalités $\mathcal{L}^{**}(f) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{L}(g_n) = \mathcal{L}^*(f)$ montrent que $\mathcal{L}^{**}$ prolonge $\mathcal{L}^*$. Si maintenant φ est une fonction de Λ_0^*, il existe, d'après ce qu'on vient de dire, une fonction $\varphi' \in \Lambda_0^{**}$ telle que $\varphi' \overset{*}{\equiv} \varphi$ (mod. $\mathcal{L}$), d'où $\varphi' - \varphi \overset{*}{\equiv} 0$ (mod. $\mathcal{L}$), la fonctionnelle $\mathcal{L}_0^{**}$ étant complète, on a $\varphi' - \varphi \in \Lambda_0^{**}$, d'où $\varphi \in \Lambda_0^{**}$ et $\Lambda_0^* \in \Lambda_0^{**}$. Il en résulte que $\mathcal{L}_0^{**}$ prolonge $\mathcal{L}_0^*$.

Définition. Le prolongement $\mathcal{L}_0^*$ qu'on vient de construire s'appelle le prolongement régulier de $\mathcal{L}$.

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Théorème 2. $\mathcal{L}$ étant une fonctionnelle linéaire continument croissante, toute fonctionnelle linéaire complète qui prolonge $\mathcal{L}$ prolonge aussi le prolongement régulier de $\mathcal{L}$.

Remarquons pour finir qu'on peut maintenant préciser la proposition 1 :

Proposition 3. Si (f_n) est une suite croissante ou décrois-sante d'éléments de L^*, et si la suite $(\mathcal{L}^*(f_n))$ est bornée, la limite f de la suite est dans L^* et la suite converge vers f au sens (L^1).

Prenons d'abord le cas d'une suite croissante. Exactement comme dans la démonstration de la proposition 1, on démontre que la suite (f_n) converge au sens (L^1). Si la suite est décroissante, la suite $(-f_n)$ est croissante, et converge au sens (L^1) : il en est donc de même de la suite (f_n). Soit $f' = \lim (L^1) f_n$. En vertu de la proposition 1 du § V, appliquée à $\mathcal{L}_0^*$, on peut extraire de la suite $(f' - f_n)$ une suite qui converge vers 0. Comme cette suite converge vers $f' - f$, on a $f' = f$, ce qui démontre notre proposition.

Remarque. La condition énoncée dans la proposition 3 est certai-nement vérifiée dans les cas suivants : si la suite (f_n) est crois-sante, et s'il existe un $g \in L^*$ tel que $f_n \leqslant g$ $(1 \leqslant n < +\infty)$, ou si la suite (f_n) est décroissante et s'il existe un $g \in L$ tel que $f_n \geqslant g$ $(1 \leqslant n < +\infty)$.

Chapitre III. L'INTEGRALE DEFINIE.

La théorie développée au chapitre II est grosse d'une théorie de l'intégration. Une fonction additive d'ensembles étant donnée sur une phratrie, il nous suffira de prolonger la fonctionnelle linéaire croissante $\mathcal{L}_\lambda$ définie au chapitre II, § I. Mais cela ne pourra se faire que si $\mathcal{L}_\lambda$ est continument croissante, ce qui impose une condition à λ, que nous allons maintenant examiner.

§ I. FONCTIONS CONTINUMENT CROISSANTES D'ENSEMBLES.

Considérons un type, dont nous désignerons l'ensemble des éléments par E. Soit $\mathfrak{S}$ une phratrie de parties de E, et soit λ une fonction additive croissante d'ensembles (au sens du chapitre I, § II) dont le champ de définition est $\mathfrak{S}$.

Définition. La fonction λ est appelée une fonction continument croissante d'ensembles si elle satisfait à la condition suivante : si une suite croissante (E_n) d'ensembles de $\mathfrak{S}$ a pour réunion un ensemble E de $\mathfrak{S}$, on a $\lambda(E) = \lim_{n \to +\infty} \lambda(E_n)$.

Proposition. λ étant une fonction additive continument croissante, γ son champ, si une suite décroissante (E_n) d'ensembles de γ a pour intersection un ensemble $E \in \gamma$ on a $\lambda(E) = \lim_{n \to \infty} \lambda(E_n)$.

En effet la suite $(E_1 - E_n)$ est une suite croissante d'ensembles de γ dont la réunion est $E_1 - E$, qui appartient à γ, d'où

$$\lambda(E_1) - \lambda(E) = \lambda(E_1 - E) = \lim_{n \to +\infty} \lambda(E_1 - E_n) = \lambda(E_1) - \lim_{n \to +\infty} \lambda(E_n)$$

Nous avons défini au chapitre I une fonction additive d'ensembles sur la phratrie de Borel $\mathfrak{S}$ dans R, que nous avons appelée "longueur". Montrons que cette fonction est continument croissante.

Supposons qu'un ensemble $E \in \mathcal{S}$ soit la réunion d'une suite croissante (E_n) d'ensembles de $\mathcal{S}$. Nous poserons $E_o = E$. En vertu de la pro--position 3, chap. I, § II, chacun des ensembles $E_n (0 \leqslant n < +\infty)$ est la réunion d'une famille finie $(\mathcal{F}_n)$ d'intervalles. Considérons l'ensemble A composé des origines et des extrêmités de tous les inter--valles de la famille $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Si a est un point d'accumulation de A, a appartient au plus petit ensemble fermé $\overline{E}$ contenant E ; donc ou bien a appartient à un ensemble E_n $(1 \leqslant n < +\infty)$, ou bien a est une extrêmité d'un intervalle de $\mathcal{F}_0$. En tous cas $a \in A$: A est un ensemble dénombrable fermé. Rangeons ses éléments en une suite (a_m) $1 \leqslant m < +\infty$. ε étant un nombre > 0, désignons par J_m l'intervalle de centre a_m, de longueur $\varepsilon 2^{-m}$. A est compact, et peut par suite être recouvert par la réunion d'un nombre fini des J_m ; soit donc M un entier tel que $A \subset \bigcup_{m=1}^{M} J_m$. Nous désignerons par U le second membre de cette inclusion : U est un ensemble ouvert de $\mathcal{S}$; l'en--semble $E \cap \complement U$ est dans $\mathcal{S}$ et ne contient aucun point de A ; il est donc la réunion d'une famille finie d'intervalles dont chacun est contenu dans l'un des ensembles E_n. La suite (E_n) étant croissante, il existe un indice N tel que $E \subset E_N + U$, d'où $\lambda(E) \leqslant \lambda(E_N) + \lambda(U)$ $\leqslant \lim_{n \to \infty} \lambda(E_n) + \varepsilon \sum_{m=1}^{M} 2^{-m} \leqslant \lim_{n \to +\infty} \lambda(E_n) + \varepsilon$. Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $\lambda(E) \leqslant \lim_{n \to +\infty} \lambda(E_n)$. Comme on a $\lambda(E_n) \leqslant \lambda(E)$ $(1 \leqslant n < +\infty)$, on a $\lambda(E) = \lim_{n \to \infty} \lambda(E_n)$.

L'intérêt des fonctions continument croissantes d'ensembles se révèle dans le théorème suivant :

Théorème 1. *λ étant une fonction additive croissante d'ensembles une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle $\mathcal{L}_\lambda$ soit continument croissante est qu'il en soit ainsi de λ.*

Désignons par $\mathcal{S}$ le champ de définition de λ , par Λ la famil-
-le des fonctions étagées attachées à $\mathcal{S}$: Λ est donc le champ de définition de $\mathcal{L}_\lambda$.

1) Supposons $\mathcal{L}_\lambda$ continûment croissante. Soit (X_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que $X = \bigcup_n X_n$ appartienne encore à $\mathcal{S}$. On a $\lambda(X) = \mathcal{L}_\lambda(\varphi_X)$, $\lambda(X_n) = \mathcal{L}_\lambda(\varphi_{X_n})$ $(1 \leqslant n < \infty)$ et $\varphi_X = \lim_{n \to \infty} \uparrow \varphi_{X_n}$ d'où

$$\lambda(X) = \mathcal{L}_\lambda(\varphi_X) = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}_\lambda(\varphi_{X_n}) = \lim_{n \to \infty} \lambda(X_n)$$

λ est donc continûment croissante.

2) Supposons λ continûment croissante. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions de Λ telle que $f = \lim_{n \to \infty} \uparrow f_n$ appartienne encore à Λ . Posons $g_n = f_n - f$. On a $g_n \leqslant 0$, $g_n \in \Lambda$, $g_n \leqslant g_{n+1}$ $(1 \leqslant n < +\infty)$.

Désignons par a la plus petite des valeurs prises par g_1, par Y_1 l'ensemble des x tels que $g_1(x) < 0$. ε étant un nombre > 0 désignons par X_n l'ensemble des x tels que $g_n(x) < -\varepsilon$: en vertu de la proposition 5, chap. II, § I, on a $Y_1 \in \mathcal{S}$, $X_n \in \mathcal{S}$. D'autre part, on a $g_n \geqslant a\,\varphi_{X_n} - \varepsilon\,\varphi_{Y_1}$, d'où

$$a\lambda(X_n) - \varepsilon\lambda(Y_1) \leqslant \mathcal{L}_\lambda(g_n) \leqslant 0$$

Or, la suite (X_n) est une suite décroissante d'ensembles de $\mathcal{S}$ dont l'intersection est $\emptyset$ (parce que $\lim_{n \to \infty} g_n = 0$). Il en résulte que $\lim_{n \to \infty} \lambda(X_n) = 0$ (proposition 1) et que $\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}_\lambda(g_n) \geqslant -\varepsilon\lambda(Y_1)$ Cette inégalité étant vraie quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}_\lambda(g_n) = 0$, d'où $\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}_\lambda(f_n) = \mathcal{L}_\lambda(f)$: $\mathcal{L}_\lambda$ est continu-
-ment croissante.

§ II. DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES DE L'INTEGRALE DEFINIE.

La théorie développée dans ce § comporte un type primitif, dont nous désignerons l'ensemble des éléments par E, et deux constantes primitives, qui sont : une famille $\mathcal{S}$ de parties de E, et une fonction λ définie sur $\mathcal{S}$ et à valeurs dans R. Les axiomes sont les suivants : 1) $\mathcal{S}$ est une phratrie 2) λ est une fonction additive continument croissante.

Soit Λ la famille des fonctions étagées attachées à $\mathcal{S}$. La donnée de la fonction d'ensembles λ permet de définir une fonctionnelle linéaire croissante $\mathcal{L}$ dont le champ de définition est Λ (chap. II, § I). $\mathcal{L}$ est continument croissante (th.1), et par suite nous avons une structure de la théorie développée au ch. II, § III et suivants, structure dont les constantes fondamen-tales sont Λ et $\mathcal{L}$. Nous transporterons telles quelles les notations adoptées au chap. II (avec la modification énoncée au début du § VI).

Définition. *On appelle sommables (par rapport à λ) les éléments de L^*, et également les fonctions dont les classes sont dans L^** .

Il en résulte immédiatement que :

Théorème 1. *Si f , g sont sommables, et si a, b sont des nombres réels, f^+ , f^- , $|f|$, $\overline{\text{borne}}\,(f, g)$, $\underline{\text{borne}}\,(f, g)$, $af + bg$ sont sommables.*

Il nous sera commode de procéder à un nouveau prolongement de la fonction $\mathcal{L}^*$. Pour cela, posons d'abord la définition suivante :

Définition. *On désignera par* M *l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de* L. *Les éléments de* M, *ainsi que les fonctions dont les classes sont dans* M, *seront appelés mesurables (par rapport à* λ).

Proposition 1. *Si* f , g *sont dans* M, *et si* $a \in R$, *on a* $f^+ \in M$, $f^- \in M$, $|f| \in M$, $af \in M$, $\overline{\mathrm{borne}}\,(f, g) \in M$ *et* $\underline{\mathrm{borne}}\,(f, g) \in M$.

En effet, il existe des suites (f_n), (g_n) d'éléments de L^* ayant pour limites f , g . On a $f^+ = \lim_{n \to +\infty} f_n^+$, $f^- = \lim_{n \to \infty} f_n^-$ $|f| = \lim_{n \to +\infty} |f_n|$, $af = \lim_{n \to +\infty} af_n$, $\overline{\mathrm{borne}}\,(f, g) = \lim_{n \to \infty} \overline{\mathrm{borne}}\,(f_n, g_n)$ $\underline{\mathrm{borne}}\,(f, g) = \lim_{n \to \infty} \underline{\mathrm{borne}}\,(f_n, g_n)$, ce qui prouve la proposi-tion en tenant compte du th. 1).

Il convient de remarquer que l'on n'a pas $M \subset F_0$, et que par suite les opérations linéaires ne sont pas définies dans M.

Proposition 2. *Si* $f \in M$, f^+ *et* f^- *sont limites de suites croissantes d'éléments de* L^* .

Soit (f_n) une suite d'éléments de L^* convergeant vers f . On a $f^+ = \lim_{n \to +\infty} f_n^+$; posons $g_{n,p} = \underline{\mathrm{borne}}_{0 \leq p \leq q} f^+_{n+p}$, $g_n = \underline{\mathrm{borne}}_{0 \leq p < +\infty} f^+_{n+p}$ $= \lim_{p \to +\infty} g_{n,p}$. La suite $(g_{n,p})_{0 \leq P < +\infty}$ est une suite décrois-sante d'éléments $\geqslant 0$ de L^* ; sa limite est g_n ; on a donc $g_n \in L^*$ (cf. chap. II, § VI, prop. 3 et la remarque qui la suit). On a $f^+ = \lim_{n \to +\infty} g_n$, et la suite (g_n) est croissante, ce qui démon-tre l'assertion relative à f^+. Celle relative à f^- s'en déduit en remarquant que $f^- = (-f)^+$.

Définition. *Nous désignerons par* L^*_+ *l'ensemble des limites de suites croissantes d'éléments de* L^* , *et par* L^*_- *l'ensemble des limites de suites décroissantes d'éléments de* L^* .

Proposition 4. <u>Les conditions</u> $\mathfrak{f}^+ \in L^*_+$, $\mathfrak{f}^- \in L^*_+$ <u>entraînent</u> $\mathfrak{f} \in M$.

En effet, soient $(\mathfrak{f}_n)$, $(\mathfrak{g}_n)$ des suites croissantes d'éléments de L^*,, ayant pour limites $\mathfrak{f}^+$ et $\mathfrak{f}^-$. Nous allons montrer que $\mathfrak{f} = \lim_{n \to +\infty} (\mathfrak{f}_n - \mathfrak{g}_n)$. Nous pouvons en effet choisir deux suites de fonctions (f_n) et (g_n) définies et finies sur E tout entier telles que $f_n \in \mathfrak{f}_n$, $g_n \in \mathfrak{g}_n$; $f_n \leqslant f_{n+1}$, $g_n \leqslant g_{n+1}$ $(1 \leqslant n < +\infty)$; soient f, g les limites de ces suites. On a $f \in \mathfrak{f}^+$, $g \in \mathfrak{f}^-$; il en résulte que l'ensemble N des x tels que f(x) et g(x) soient tous deux infinis est négligeable, et que, si $x \notin N$, on a $f(x) - g(x) = \lim_{n \to +\infty} (f_n(x) - g_n(x))$ ce qui prouve notre assertion.

Proposition 5. <u>La condition</u> $\mathfrak{f} \in L^*_+$ <u>est équivalente à</u> $(\mathfrak{f} \in M) \wedge (\mathfrak{f}^- \in L^*)$; <u>la condition</u> $\mathfrak{f} \in L^*_-$ <u>est équivalente à</u> $(\mathfrak{f} \in M) \wedge (\mathfrak{f}^+ \in L^*)$.

Si $\mathfrak{f} \in L^*_+$, $\mathfrak{f}$ est limite d'une suite croissante $(\mathfrak{f}_n)$ d'éléments de L^* ; la suite $(\mathfrak{f}^-_n)$ est une suite décroissante d'éléments $\geqslant 0$ de L^*, de limite $\mathfrak{f}^-$; on a donc $\mathfrak{f}^- \in L^*$. Inversement, si $\mathfrak{f} \in M$, $\mathfrak{f}^- \in L^*$, on a $\mathfrak{f}^+ = \lim_{n \to +\infty} \mathfrak{f}_n$, où $(\mathfrak{f}_n)$ est une suite croissante d'éléments de L^*, et $\mathfrak{f} = \lim_{n \to +\infty} (\mathfrak{f}_n - \mathfrak{f}^-)$, d'où $\mathfrak{f} \in L^*_+$, ce qui démontre la première partie de l'assertion. La seconde s'en déduit en remarquant que les conditions $\mathfrak{f} \in L^*_+$, $-\mathfrak{f} \in L^*_-$ sont équivalentes.

Proposition 6. <u>Si</u> $\mathfrak{f} \in L^*_+$, <u>s'il existe un élément</u> $\mathfrak{g} \in L^*$ <u>tel que</u> $\mathfrak{f} \leqslant \mathfrak{g}$, <u>on a</u> $\mathfrak{f} \in L^*$; <u>si</u> $\mathfrak{f} \in L_-$, <u>s'il existe un élément</u> $\mathfrak{g} \in L^*$ <u>tel que</u> $\mathfrak{f} \geqslant \mathfrak{g}$, <u>on a</u> $\mathfrak{f} \in L^*$.

Se déduit immédiatement des définitions de L^*_+ , de L^*_- , de la proposition 3, ch. II, § VI et de la remarque qui la suit.

On remarquera qu'il résulte tout de suite de la proposition 5 que $L^* = L^*_+ \cap L^*_-$: ce qui nous permet de poser la définition suivante :

Définition : *On appelle intégrale* (*de base* λ) *la fonction définie sur* $L^*_+ \cup L^*_-$ *comme étant égale à* $\mathcal{L}^*$ *sur* L^* , *à* $+\infty$ *sur* $L^*_+ - L^*$, *et à* $-\infty$ *sur* $L^*_- - L^*$. *On appelle sommables au sens large* (*par rapport à* λ) *les éléments du champ de définition de l'intégrale, ainsi que les fonctions dont les classes appartien- -nent à ce champ*. *Si l'élément* $\mathfrak{f}$ *ou la fonction* f *est sommable au sens large, on note* $\int_E \mathfrak{f} \,|\, \lambda$ *ou* $\int_E f \,|\, \lambda$ *la valeur de l'intégrale pour cet élément ou cette fonction*.

Il est souvent commode d'introduire une variable x de champ E, dite variable d'intégration, et de désigner l'intégrale par
$\int_E f(x) \,|\, \lambda_x$.

Théorème 2. *Si* $\mathfrak{f}$ *est mesurable, une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathfrak{f}$ *soit sommable est que* $|\mathfrak{f}|$ *le soit*. *S'il en est ainsi, on a*

$$\left| \int_E \mathfrak{f} \,|\, \lambda \right| \leq \int_E |\mathfrak{f}| \,|\, \lambda$$

La première partie de l'énoncé résulte tout de suite des pro- -positions 4, 5 et de la formule $|\mathfrak{f}| = \mathfrak{f}^+ + \mathfrak{f}^-$. L'inégalité est évidente en remarquant que, si $\mathfrak{f} \in L^*$, on a $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^+ - \mathfrak{f}^-$.

Théorème 3. *Si* $\mathfrak{f}$ *est mesurable, les éléments* $\mathfrak{f}^+$, $\mathfrak{f}^-$, $|\mathfrak{f}|$ *sont sommables au sens large*. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathfrak{f}$, *étant mesurable, soit sommable au sens large est que l'un de ces éléments au moins soit sommable*.

Résulte tout de suite de la proposition 5.

Théorème 4. <u>Si</u> f <u>est sommable au sens large, et si</u> $a \in R$ af <u>est sommable au sens large, et on a</u>

$$\int_E af \mid \lambda = a \int_E f \mid \lambda$$

à condition de remplacer le $2^{ème}$ membre par 0 si $a = 0$ (même si $\int_E f \mid \lambda = \pm\infty$).

En effet, on a $af \in M$; il résulte immédiatement de la proposition 5 que l'on a $af \in L^*_+ \cup L^*_-$; si $f \in L$, l'égalité à démontrer provient de la linéarité de $\mathcal{L}^*$; si $f \notin L^*$, $a \neq 0$ on a $af \notin L^*$, comme il résulte de l'égalité $f = \frac{1}{a}(af)$; les deux membres de l'égalité à démontrer sont infinis ; on vérifie tout de suite qu'ils sont de même signe. Si $a = 0$, les deux membres sont nuls.

Théorème 5. <u>Si</u> f, g <u>sont sommables au sens large, et si</u> $f \leqslant g$, <u>on a</u>

$$\int_E f \mid \lambda \leqslant \int_E g \mid \lambda$$

Si f, g sont sommables, on a $\int_E g \mid \lambda = \int_E f \mid \lambda + \int_E g - f \mid \lambda$ avec $g - f = |g - f|$, d'où $\mathcal{L}^*(g - f) \geqslant 0$, ce qui démontre l'inégalité dans ce cas. Si $g \in L^*_+ - L^*$, l'inégalité est évidente. Si $f \in L^*_+ - L^*$, on a aussi $g \in L^*_+ - L^*$, en vertu de la proposition 7, et les deux membres de l'inégalité sont égaux à $+\infty$.

Théorème 6. <u>Si</u> (f_n) <u>est une suite croissante d'éléments de</u> L^*_+, <u>sa limite</u> f <u>est dans</u> L^*_+ ; <u>si</u> (f_n) <u>est une suite décroissante d'éléments de</u> L^*_-, <u>sa limite</u> f <u>est dans</u> L^*_- ; <u>dans les deux cas, on a</u>

$$\int_E f \mid \lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \mid \lambda$$

Si (f_n) est une suite croissante d'éléments de L^*_+, il existe pour chaque n une suite croissante $(g_{n,p})_{1 \leq p < +\infty}$ d'éléments de L^* ayant pour limite f_n. Posons $h_p = \overline{\text{borne}}_{i \leq p, j \leq p}\, g_{i,j}$ on a $h_p \in L^*$, $h_p \leq h_{p+1}$, $h_p \leq f$ $(1 \leq p < +\infty)$, d'où $\lim_{p \to +\infty} h_p \leq f$. De plus, si $p > n$, $h_p \geq g_{n,p}$, d'où $\lim_{p \to +\infty} h_p \geq f_n$; cette iné-galité étant vraie quel que soit n, on a aussi $\lim_{p \to +\infty} h_p \geq f$, d'où $f = \lim_{p \to +\infty} h_p \in L^*_+$; si l'un des membres de l'égalité à démon-trer est fini, il en est de même de l'autre, en vertu de la proposi-tion 3, ch. II, § VI et de la remarque qui la suit, et les deux mem-bres sont égaux. Sinon, les deux membres sont égaux à $+\infty$. Si (f_n) est une suite décroissante d'éléments de L^*_-, $(-f_n)$ est une suite croissante d'éléments de L^*_+, ce qui permet de démontrer la seconde assertion de l'énoncé à partir de la première.

Théorème 7. <u>Si f et g sont dans L^*_+, il en est de même de $f+g$; si f et g sont dans L^*_-, il en est de même de $f+g$. Dans les deux cas, on a</u>

$$\int_E f+g \,|\, \lambda = \int_E f \,|\, \lambda + \int_E g \,|\, \lambda$$

Si f et g sont dans L^*_+, on a $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$, $g = \lim_{n \to +\infty} g_n$, (f_n) et (g_n) étant des suites croissantes d'éléments de L. On a $f+g = \lim_{n \to +\infty} (f_n + g_n)$, et la suite $(f_n + g_n)$ est une suite croissante d'éléments de L : d'où $f + g \in L^*_+$. L'égalité à démontrer s'obtient par passage à la limite à partir de l'égalité correspondante pour f_n et g_n, en tenant compte du th. 6. Démonstration analogue si $f, g \in L_-$.

Théorème 8, dit de Fischer-Riesz. <u>Si (f_n) est une suite d'éléments sommables qui converge au sens (L^1) vers une limite f, on peut en extraire une suite partielle qui converge vers f.</u>

En vertu de la prop. 1, § V, chap. II appliqué à $\mathcal{L}_0^*$, on peut extraire de la suite $(f_n - f)$ une suite partielle qui converge vers 0, ce qui démontre le théorème.

Théorème 9, dit de Lebesgue. <u>Si</u> (f_n) <u>est une suite d'éléments sommables qui converge vers un élément</u> f, <u>et s'il existe un élément sommable</u> g <u>tel que</u> $|f_n| \leqslant g$ $(1 \leqslant n < +\infty)$, <u>la suite</u> (f_n) <u>converge au sens</u> (L^1) <u>vers</u> f. <u>On a dans ce cas</u>

$$\int_E f \,|\, \lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_E f_n \,|\, \lambda$$

Posons $f'_n = \underline{\text{borne}}_{0 \leqslant p < +\infty} f_{n+p}$; on a $f'_n = \lim_{p \to +\infty} \underline{\text{borne}}_{0 \leqslant p \leqslant P} f_{n+p}$; or $\underline{\text{borne}}_{0 \leqslant p < P} f_{n+p} \in L^*$: on a donc $f'_n \in L^*_-$; comme $f'_n \geqslant -g$, on a $f'_n \in L^*$; la suite (f'_n) est croissante et a pour limite f. Donc $f'_n \in L^*_+$; comme $f \leqslant g$, on a $f \in L^*$, et la suite (f'_n) converge au sens (L^1) vers f. De même, si on pose $f''_n = \overline{\text{borne}}_{0 \leqslant p < +\infty} f_{n+p}$ on a $f''_n \in L^*$, $f = \lim (L^1) f''_n$. Or on a $f'_n \leqslant f_n \leqslant f''_n$

$$|f - f_n| \leqslant |f - f'_n| + |f - f''_n|$$

ce qui montre que $\lim (L^1) |f - f_n| = 0$, ce qui démontre le théorème.

Plus généralement, on peut étudier les familles d'éléments de L^* dépendant non pas d'un entier, mais d'un paramètre ξ. Supposons donné un espace topologique $\mathfrak{X}$, <u>satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité</u>. E étant une partie de $\mathfrak{X}$, supposons qu'à chaque $\xi \in E$ on ait fait correspondre un élément $f(\xi) \in L^*$. ξ_0 étant un point de $\overline{E}$, nous dirons que $f(\xi)$ tend vers une limite f_0 quand $\xi \to \xi_0$, et nous écrirons $f_0 = \lim_{\xi \to \xi_0} f(\xi)$, si, pour toute suite (ξ_n) d'éléments de E tendant vers ξ_0, on a $\lim_{n \to +\infty} f(\xi_n) = f_0$. Dans ces conditions on déduit tout de suite du théorème de Lebesgue que :

S'il existe un $g \in L^1$ tel que, pour tout $\xi \in \Xi$, $f(\xi) \leqslant g$ on a $f_0 \in L^1$ et $f(\xi)$ tend vers f_0 au sens (L^1). On a donc dans ce cas

$$\int_E f_0 \,|\, \lambda = \lim_{\xi \to \xi_0} \int_E f(\xi) \,|\, \lambda .$$

§ IV. CARACTERISATION DES INTEGRALES.

Toute la théorie développée au § II pourrait s'appliquer à une fonctionnelle linéaire continument croissante quelconque. Nous allons maintenant envisager des propriétés qui caractérisent plus spécifiquement les intégrales.

Soit φ une fonction définie dans R^n (ou dans $\bar{R}^n$) et à valeurs dans R. Nous avons vu qu'on peut lui faire correspondre une fonction φ^* définie sur F_0^n (ou sur F^n), à valeurs dans F^0.

Définition. La fonction φ est appelée lipschitzienne s'il existe des nombres A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que les conditions $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ entraînent l'inégalité

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} A_i \,|x_i - y_i|$$

Théorème 10. Soit φ une fonction lipschitzienne définie sur R^n et telle que $\varphi(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont sommables, il en est de même de $\varphi^*(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. De plus φ^* est uni-formément continue sur $(L^*)^n$, considéré comme produit de n espaces uniformes identiques à L^*.

En effet, il existe des suites $(g_{i,p})_{1 \leqslant p < +\infty}$ telles que : $f_i = \lim_{p \to +\infty} g_{i,p}$, $f_i = \lim_{p \to +\infty} (L^1)\, g_{i,p}$, et que $g_{i,p}$ contienne une fonction $f_{i,p} \in \Lambda$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant p < +\infty)$. En vertu de la prop. 5, chap. II, § I, la fonction $\varphi(f_{1,p}, f_{2,p}, \ldots, f_{n,p})$ est dans Λ

et par suite $\Psi^*(g_{1,p}, g_{2,p}, \ldots, g_{n,p}) \in L^*$. Or on a

$$\int_E |\Psi^*(g_{1,p}, g_{2,p}, \ldots, g_{n,p}) - \Psi^*(g_{1,q}, g_{2,q}, \ldots, g_{n,q})| \lambda \leq \sum_{i=1}^{n} A_i \int_E |g_{i,p} - g_{i,q}| \lambda$$

$$|\Psi^*(f_1, f_2, \ldots, f_n) - \Psi^*(g_{1,p}, g_{2,p}, \ldots, g_{n,p})| \leq \sum_{i=1}^{n} A_i |f_i - g_{i,p}|$$

On déduit de la première de ces inégalités que la suite $(\Psi^*(g_{1,p}, g_{2,p}, \ldots, g_{n,p}))_{1 \leq p < +\infty}$ converge au sens (L^1), de la seconde qu'elle converge vers $\Psi^*(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, ce qui établit la première partie de l'énoncé. La seconde se déduit de l'iné-galité

$$|\Psi^*(f_1, f_2, \ldots, f_n) - \Psi^*(g_1, g_2, \ldots, g_n)| \leq \sum_{i=1}^{n} A_i |f_i - g_i|$$

qui est vraie dès que $(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in F_o^n$; $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in F_o^n$.

Nous allons appliquer ceci au cas particulier de la fonction $\sqrt{}_{a,b}$ définie de la manière suivante sur $\bar{R}$: a, b étant des nombres réels tels que $0 \leq a < b$, on pose

$$\sqrt{}_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{b-a}{x-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

La fonction ainsi définie est évidemment lipschitzienne, car on a $\left| \sqrt{}_{a,b}(x) - \sqrt{}_{a,b}(x') \right| \leq \dfrac{|x' - x|}{b-a}$

De plus, l'inégalité $x \leq x'$ entraîne $\sqrt{}_{a,b}(x) \leq \sqrt{}_{a,b}(x')$.

A cette fonction, on peut faire correspondre une fonction définie sur F, à valeurs dans F_o : nous la désignerons encore par $\sqrt{}_{a,b}$

Proposition 1. <u>Si f est sommable, il en est de même de $\sqrt{}_{a,b}(f)$</u>

<u>Si f est sommable au sens large, il en est de même de $\sqrt{}_{a,b}(f)$</u>.

La première partie résulte du th.1. Si $f \in L^*_+$, f est la limite d'une suite croissante (f_n) d'éléments de L^* ; $\mathcal{J}_{a,b}(f)$ est la limite de la suite croissante $\mathcal{J}_{a,b}(f_n)$. Démonstration analogue si $f \in L^*_-$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant qui va caractériser en quelque sorte les intégrales parmi les fonctionnelles linéaires continument croissantes :

Théorème 11. Soit $\mathcal{L}$ une fonctionnelle linéaire continument croissante. Λ étant le champ de définition de $\mathcal{L}$, supposons que les conditions $f \in \Lambda$, $0 \leqslant a < b$ entraînent $\mathcal{J}_{a,b}(f) \in \Lambda$. Il existe alors une fonction additive continument croissante d'ensembles λ^* telle que l'intégrale de base λ^* prolonge $\mathcal{L}$, et que de plus le champ de définition du prolongement régulier de $\mathcal{L}$ soit identique à l'ensemble des fonctions sommables par rapport à λ^* qui sont partout définies et finies.

Nous désignerons par $\mathcal{L}_0^*$ le prolongement régulier de $\mathcal{L}$, par Λ_0^* le champ de définition de $\mathcal{L}_0^*$. Soit $\mathcal{S}$ la famille des ensembles X tels que $\varphi_X \in \Lambda_0^*$. Si X, Y sont des ensembles de $\mathcal{S}$, on a $\varphi_{X \cup Y} = \overline{\text{borne}}(\varphi_X, \varphi_Y) \in \Lambda_0^*$, d'où $X \cup Y \in \mathcal{S}$, si de plus $Y \subset X$, on a $\varphi_{X-Y} = \varphi_X - \varphi_Y \in \Lambda_0^*$ et $X-Y \in \mathcal{S}$: $\mathcal{S}$ est donc une phratrie. Soit λ^* la fonction dont le champ de définition est $\mathcal{S}$ et dont la valeur, pour $X \in \mathcal{S}$, est donnée par $\lambda^*(X) = \mathcal{L}_0^*(\varphi_X)$. Les conditions $X \in \mathcal{S}$, $Y \in \mathcal{S}$, $X \cap Y = \emptyset$ entraînent $\lambda^*(X \cup Y) = \mathcal{L}_0^*(\varphi_X + \varphi_Y) = \lambda^*(X) + \lambda^*(Y)$. λ^* est donc une fonction additive d'ensembles, d'ailleurs évidemment croissante. Si un ensemble X de $\mathcal{S}$ est la réunion d'une suite croissante (X_n) d'ensembles de $\mathcal{S}$,

φ_X est la limite de la suite croissante (φ_{X_n}), d'où $\lambda^*(X) = \lim\limits_{n \to +\infty} \lambda^*(X_n)$: λ^* est continument croissante. Nous pourrons donc parler de l'intégrale de base λ^* .

Soit Γ l'ensemble des fonctions partout définies et finies sommables par rapport à λ^*, et soit $\mathcal{J}$ la restriction à Γ de l'intégrale de base λ^*. Γ contient la famille Γ' des fonctions étagées attachées à $\mathcal{S}$; soit $\mathcal{J}'$ la restriction de $\mathcal{J}$ à la famille Γ'. Si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{X_i}$ ($a_i \in R$, $X_i \in \mathcal{S}$, $1 \leq i \leq n$), est une fonction de Γ', on a

$$\mathcal{J}'(f) = \mathcal{J}(f) = \int_E f \,|\, \lambda^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^*(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{L}_0^*(\varphi_{X_i}) = \mathcal{L}_0^*(f)$$

Comme d'autre part on a $\Gamma' \subset \Lambda_0^*$, on voit que $\mathcal{L}_0^*$ prolonge $\mathcal{J}'$. Comme $\mathcal{J}$ est le prolongement régulier de $\mathcal{J}'$, il résulte du th. 2, chap. II que $\mathcal{L}_0^*$ prolonge $\mathcal{J}$.

Il nous suffira maintenant de montrer que $\mathcal{J}$ prolonge $\mathcal{L}$, car, en vertu du théorème 2, chap. II, on en déduira que $\mathcal{J}$ prolonge $\mathcal{L}_0^*$, d'où $\mathcal{J} = \mathcal{L}_0^*$.

Soit donc f une fonction de Λ ; a étant un nombre > 0, posons $f_n = \overline{\diagup}_{a,a+\frac{1}{n}}(f)$: la suite (f_n) est une suite croissante de fonc--tions de Λ , dont la limite est la fonction caractéristique de l'ensemble X_a des éléments x tels que $f(x) > a$. De plus $f_n \leq \overline{\diagup}_{\frac{a}{2},a}(f)$ $(1 \leq n < +\infty)$. On a donc $\varphi_{X_a} \in \Lambda_0^*$ (prop. 3, chap. II, § VI, et la remarque qui la suit) ; d'où $X_a \in \mathcal{S}$. i et n étant des entiers > 0, soit $Y_{i,n}$ l'ensemble des x tels que $\frac{i}{2^n} < f(x) \leq \frac{i+1}{2^n}$. On a $Y_{i,n} = X_{\frac{i}{2^n}} - X_{\frac{i+1}{2^n}} \in \mathcal{S}$.

Posons
$$g_n = \sum_{i=1}^{2^{2n}} \frac{i}{2^n} \varphi_{Y_{i,n}}$$

On a $g_n \in \Gamma'$. D'autre part, si on remarque que $Y_{i,n} = Y_{2i,n+1} \cup Y_{2i+1,n+1}$ et que $Y_{2i,n+1} \cap Y_{2i+1,n+1} = \emptyset$, on voit que $g_n \leq g_{n+1}$

Supposons maintenant $f \geqslant 0$. Le nombre $g_n(x)$ est l'origine de celui des intervalles $\left[0, \frac{1}{2^n}\right)$, $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right)$, ..., $\left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right)$, $[1, +\infty)$ qui contient $f(x)$. Il en résulte que $f = \lim\limits_{n \to +\infty} g_n$. On a donc $\mathcal{L}(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{L}_0^*(g_n)$, ce qui prouve que la suite $(\mathcal{L}_0^*(g_n)) = (\mathcal{J}(g_n))$ est bornée, donc que f est sommable par rapport à λ^* et que

$$\mathcal{J}(f) = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{J}(g_n) = \mathcal{L}_0^*(f) = \mathcal{L}(f)$$

Si maintenant on ne suppose plus $f \geqslant 0$, on conclut de ce qui précède que f^+ et f^- sont sommables : il en est donc de même de f, et on a $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^+) - \mathcal{J}(f^-) = \mathcal{L}_0^*(f^+) - \mathcal{L}_0^*(f^-) = \mathcal{L}_0^*(f)$: le théorème est démontré.

De plus, la démonstration nous a appris plusieurs choses intéressantes. Soit $\lrcorner_a$ la fonction $\lim\limits_{n \to +\infty} \lrcorner_{a, a+\frac{1}{n}}$, fonction qu'on peut considérer comme définie sur F et à valeurs dans F_0. Nous avons les résultats suivants ; relatifs à une intégrale de base :

Proposition 2. *Les conditions* $f \in L^*$, $a > 0$ *entraînent* $\lrcorner_a(f) \in L^*$. *Les conditions* $a \geqslant 0$, $f \in L^*_+$ *entraînent* $\lrcorner_a(f) \in L^*_+$.

La première partie résulte de la démonstration précédente. Si $f \in L^*_+$, f est limite d'une suite croissante (f_n) d'éléments de L^* ; si $a > 0$, $\lrcorner_a(f)$, qui est limite de la suite croissante $(\lrcorner_a(f_n))$, est dans L^*_+ ; enfin, si $f \in L^*_+$, $\lrcorner_0(f)$ qui est limite de la suite croissante $(\lrcorner_{\frac{1}{n}}(f))$, est dans L^*_+.

On peut encore mettre la proposition 2 sous la forme suivante :

Proposition 2 bis. *Si* f *est une fonction sommable et si* $a > 0$, *la fonction caractéristique de l'ensemble des* x *du champ de définition de* f *tels que* $f(x) \geqslant a$ *est sommable*. *Si* f *est une fonction*

<u>mesurable et si</u> $a \geqslant 0$, <u>la fonctions caractéristique de l'ensemble des</u> x <u>du champ de définition de</u> f <u>tels que</u> $f(x) \geqslant a$ <u>est sommable au sens large</u>.

On remarque en effet que l'ensemble en question ne change pas si on remplace f par f^{+}.

----

1. (Chev. Phratries). Prop. 3 = Tout ensemble d'une phratrie engendrée par une famille s'obtient à partir d'un nombre fini d'ensembles de la famille par un nombre fini d'opérations élémentaires.

2. Chevalley propose:

Phratries et fonctions additives

Familles W , fonctionnelles linéaires croissantes

Compléter $L^1(\mathcal{L})$: pseudo-fonctions

Fonctions lipschitziennes de pseudo-fonctions

Convexité

Théorème de Lebesgue-Fubini.

2 bis. Cartan propose:

Phratries et fonctions additives	) passage de
	) l'une à
Familles W et fonctionnelles linéaires	) l'autre

Fonctions additives à variation bornée
= différence de deux fonctions positives

Fonctionnelles linéaires à variation bornée
= différence de deux fonctionn. lin. croissantes

Tribus et mesures.

Tribus de fonctions et fonctionnelles linéaires continument croissantes.

Déduire d'une mesure une fonct$^{\text{elle}}$ continument croissante (intégrale). Fonctions mesurables.

La suite ad libitum.