THEORIE DE LA MESURE ET DE L'INTEGRATION INTRODUCTION (ETAT 2)

Rédaction n° 014

Nombre de pages : 29

Nombre de feuilles : 29

Théorie de la Mesure

14

A 14 2
Livre VI

THEORIE DE LA MESURE ET DE L'INTEGRATION.

INTRODUCTION

Etat 2

Grandeurs, Mesure, Intégrale.

§1. La notion de grandeur.

Les notions de qualité, de quantité, de grandeur, et la notion de mesure, qui les relie à celle de nombre, sont apparues très tôt dans l'histoire de la pensée humaine. Elles sont à la base de la vie civilisée et de la science expérimentale actuelle ; quant aux mathématiques, elles doivent leur origine et leurs outils les plus essentiels (comme le nombre réel ou l'intégrale) aux problèmes que pose la mesure des grandeurs. Le but de cette introduction est de montrer comment, par une analyse de ces notions concrètes, on peut en dégager les problèmes mathématiques abstraits qui seront étudiés dans les chapitres suivants.

La définition des longueurs. Nous commencerons par examiner comment on peut tirer, des données expérimentales, la notion de longueur. La qualité "étendue" et la notion de déplacement sont à la base même de notre conception de l'univers. Quant à la notion (expéri-mentale) de droite, elle nous est fournie par les phénomènes classiques du fil fin tendu et du rayon lumineux. Enfin, la coïncidence de deux points dans le champ visuel (en donnant au mot "point" le sens expérimental d'objet où on ne peut distinguer de parties), est une donnée fondamentale du sens de la vue, qui, complétée par les impressions tactiles, nous permet de reconnaître la coïncidence de deux "points" dans l'espace : on peut ajouter que cette opération nous donne un très fort sentiment de certitude, qui n'est dépassé pour aucune autre impression sensorielle.

.....

Ces seules données nous permettent déjà de réaliser l'expérience élémentaire consistant à juxtaposer, par déplacement, deux fils fins tendus, en faisant coïncider leur origine, leur direction et leur sens, et à comparer les positions de leurs extrêmités. Si ces extrêmités coïncident, on dira que les deux segments de droite (représentés par les fils tendus) peuvent être mis en coïncidence. L'expérience montre alors que cette relation, qui est évidemment réflexive et symètrique de par sa définition, est aussi transitive : elle permet donc (Ensembles. ch. §) un partage en classes de l'ensemble des segments de droite, en rangeant dans une même classe deux segments pouvant être mis en coïncidence. Ce sont ces classes qu'on appelle longueurs.

Lorsque, dans l'expérience précédente, les extrêmités de deux fils A et B ne coïncident pas, on constate que l'une d'elles, par exemple celle de A, coïncide avec un point de l'autre fil B, différent de son extrêmité ; de plus, cette propriété subsiste lorsqu'on remplace A et B par des fils ayant respectivement même longueur. On est ainsi amené à dire que la longueur de A est inférieure à celle de B ; et l'expérience montre que cette relation ordonne l'ensemble des longueurs, les axiomes d'ordre (Ensembles, ch. §) étant satisfaits.

Une seconde expérience élémentaire sur deux fils A et B consiste à les juxtaposer bout à bout : la longueur obtenue ne dépend, comme on le constate expérimentalement, que des longueurs a, b de A et B ; autrement dit, cette expérience définit une opération de composition, l'addition des deux longueurs a, b, qu'on note a + b. On étend immédiatement cette opération à un nombre quelconque de longueurs,

....

et l'expérience montre que c'est une opération <u>commutative</u> et <u>associative</u>. On vérifie de plus que $a + b > a$; inversement, supposons qu'une longueur a soit inférieure à une longueur b ; dans l'expérience qui permet de comparer ces longueurs, si on sectionne le fil B au point coïncidant avec l'extrêmité du fil A, en maintenant juxtaposés les deux brins de fil obtenus, on voit que b est la somme de la longueur a et d'une autre longueur c ; l'expérience montre que c ne dépend que de a et b.

En résumé, les données expérimentales nous permettent de définir un ensemble L ayant les propriétés suivantes :

1) L est ordonné.

2) Il existe une opération de composition commutative et associative dans L, faisant correspondre à deux éléments a, b de L, un troisième élément bien déterminé $c = a + b$, tel que $c > a$ et $c > b$.

3) Si $b > a$, il existe un élément c et un seul de L tel que $b = a+c$.

<u>Critique de cette définition</u> : Il importe de signaler, avant d'aller plus loin, que ce processus d'abstraction est sujet à de graves critiques de principe, du point de vue expérimental. Sans même parler du principe philosophique d'induction, sur lequel on s'appuie à chaque pas, il est clair que les expériences purement schématiques et grossières décrites ci-dessus, soulèvent de nombreuses difficultés lorsqu'on passe à leur réalisation <u>concrète</u>. D'une part, la notion de coïncidence est <u>relative</u>, non seulement à l'observateur, mais aussi aux <u>moyens d'observation</u> : des verres grossissants séparent deux points confondus à l'oeil nu. D'autre part, la possibilité même des expériences décrites est limitée au cas où les longueurs envisagées ne sont, ni trop grandes, ni trop petites : <u>quel que soit</u>

le mode opératoire employé, il existera toujours deux longueurs Ω et ω telles qu'il soit impossible, par ce mode opératoire, de constater qu'une longueur est plus grande que Ω, ou plus petite que ω.

On serait ainsi conduit à admettre l'existence d'un premier élément ω et d'un dernier élément Ω pour l'ensemble des longueurs ; mais l'existence de Ω est en contradiction avec la propriété 2), et d'autre part, ω et Ω dépendent du mode opératoire employé. A ce point intervient alors une tendance naturelle à l'esprit humain, la tendance à l'extrapolation. Si on convient de dire qu'un procédé expérimental de comparaison des longueurs P est plus précis qu'un autre procédé P' lorsque toute égalité constatée par P reste égalité quand on la constate par P', cette tendance consiste ici à concevoir un procédé expérimental idéal, plus précis que tout procédé réel imaginable, qui permettrait de définir des classes "longueurs" dont l'ensemble satisferait aux conditions 1), 2), 3) et n'aurait ni premier, ni dernier élément. Il apparait ainsi que la notion de longueur ne résulte pas seulement d'une simple interprétation des données expérimentales, mais aussi d'une conception a priori de l'univers, conforme "en gros" à l'expérience, mais transcendant celle-ci : au lieu de suivre servilement les données de l'expérience l'esprit humain adopte la démarche consistant à imposer au réel une structure logique simple, quitte à vérifier à posteriori les conséquences qu'il en tire par voie déductive.

Autres propriétés des longueurs. Le rôle de cette conception a prio-ri apparaît plus nettement encore dans les autres propriétés qu'on attribue aux longueurs. Tout d'abord, la non-existence d'un premier élément est une conséquence de la propriété beaucoup précise

4) Etant donnée une longueur quelconque a, il existe une longueur b telle que $2b = b + b = a$.

C'est un fait d'expérience pour certaines longueurs (pliage d'un fil, construction géomètrique), qu'on extrapole encore à tout l'ensemble.

Il en est de même de la propriété fondamentale suivante (princi-pe d'Archimède).

5) Quelles que soient les deux longueurs a, b, il existe un entier n tel que $na > b$.

Enfin, une dernière propriété a un caractère encore bien plus abstrait que les précédentes : c'est le <u>principe des intervalles emboîtés</u>.

6) Etant données deux suites de longueurs $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ telles que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, il existe au moins une longueur a telle que $a_n \leq a \leq b_n$ quel que soit n.

Cette propriété est une conséquence de la définition des suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ si $a_n = a_{n+1}$ ou $b_n = b_{n+1}$ à partir d'un certain rang ; et elle est <u>invérifiable expérimentalement</u> s'il n'en est pas ainsi, aucun procédé expérimental réel ne permettant la perception simultanée d'une infinité d'objets.

On est donc certain de n'arriver à aucune contradiction avec l'expérience en n'admettant pas cette dernière propriété des lon-gueurs ; il en est de même si on admet l'existence d'un premier élément (ce qui entraîne la disparition de la propriété 4) sous sa forme générale). On a d'ailleurs très longtemps fait usage de la notion de longueur sans lui attribuer les propriétés 4 et 6) :

ce n'est qu'afin de pouvoir construire une géomètrie parfaitement rigoureuse, c'est-à-dire pour des raisons d'ordre exclusivement mathématique, qu'on a été amené à les introduire (ce qui n'a d'ailleurs pas été sans soulever de vives controverses).

La définition des poids : Le processus d'abstraction qui vient d'être exposé pour obtenir la notion de longueur s'étend à de nombreuses autres qualités physiques ; nous indiquerons seulement un second exemple, relatif à la notion de poids.

La qualité de "pesanteur" nous apparaît commune à tous les objets matériels, en liaison avec l'effort musculaire fourni pour les soulever, et le phénomène de la chute des corps. Mais on ne voit pas de moyen de comparaison des objets sous le rapport de cette qualité, aussi immédiat que pour les longueurs ; nous n'avons qu'un sentiment assez imprécis du "plus lourd", en raison du caractère vague des impressions cinesthésiques, et ce sentiment est tout à fait insuffisant pour définir une relation d'équivalence, car celle-ci ne serait pas transitive. C'est seulement grâce à l'existence d'un phénomène auxiliaire (comme la tension d'un ressort, dont la longueur varie suivant le corps suspendu), qu'on peut arriver à une notion précise, en utilisant les moyens déjà acquis qui permettent de comparer les longueurs. On range alors dans une même classe tous les objets qui donnent le même allonge--ment à un ressort déterminé : il est facile de constater que cette définition ne dépend pas du phénomène auxiliaire particulier choisi, ce qui conduit à admettre qu'elle correspond bien à une qualité intrinsèque des corps. On ordonne cet ensemble de classes, appelées poids, de la même manière que l'ensemble des longueurs auxquelles

....

elles correspondent, ce qu'on constate être bien conforme à notre sentiment vague du "plus lourd".

Si on a ainsi eu quelque difficulté pour définir l'égalité et l'inégalité des poids, on n'en a par contre aucune en ce qui concerne l'addition, la définition naturelle de la somme des poids de deux objets étant le poids de leur réunion, considérée comme nouvel objet. Il faut évidemment vérifier expérimentalement que cette définition ne dépend que des poids des objets considérés, et non de leurs autres qualités : la commutativité et l'associativité sont alors évidentes.

On obtient finalement un nouvel ensemble vérifiant les propriétés 1), 2), 3). Les critiques qu'on peut adresser à la notion de longueur s'appliquent également ici. Elles sont encore plus sérieuses envers les propriétés 4), 5), 6), qu'on attribue aussi généralement à la notion de poids : non seulement la base expérimentale de ces propriétés est-elle insuffisante, mais toute la physique moderne conduit à admettre l'existence d'un premier élément de l'ensemble des poids, ce qui entraîne l'inexactitude de 4) et 6) sous leur forme générale.

§2. Axiomatique et mesure des grandeurs.

Axiomatique des grandeurs.- Les deux exemples que nous venons de développer nous montrent que la science expérimentale est amenée à attacher à certaines qualités sensibles un ensemble de classes possédant les propriétés 1) à 6) (les trois premières résultant de vérifications expérimentales, les autres étant en général admises sans contrôle et un peu à la légère). Suivant l'esprit de la méthode axiomatique, nous allons faire l'étude mathématique des ensembles possédant ces propriétés, en faisant abstraction de leur origine concrète. Nous dirons qu'un ensemble G est l'ensemble des grandeurs d'une même espèce, ou plus brièvement un ensemble de grandeurs lorsqu'il satisfait aux axiomes suivants :

GI . G est ordonné.

G-II. On a défini dans G une loi de composition, appelée addition qui est commutative et associative.

Le résultat de l'addition de a et b est appelé comme d'habitude leur somme et se note $a+b$; on note par $n.a$ la somme de n éléments de G égaux à a (n entier positif quelconque).

G-III - Quels que soient a et b dans G, on a $a+b > a$; inversement, si, $c > a$, il y a un élément b et un seul de G tel que $c = a+b$; on écrit $b = c-a$.

G-IV . Quel que soit a dans G, il existe un élément b de G tel que $2b = a$.

G-V. Quels que soient a et b dans G, il y a un entier positif n tel que $na > b$.

G-VI . Si on a, dans G, deux suites $\{a_\nu\}$, $\{b_\nu\}$ telles que $a_\nu \leq a_{\nu+1} \leq b_{\nu+1} \leq b_\nu$ quel que soit ν, il existe un élément a de G tel que $a_\nu \leq a \leq b_\nu$ quel que soit ν .

Nous connaissons déjà un ensemble satisfaisant à ces axiomes, l'ensemble des nombres réels positifs $(o, +\infty)$ (Topologie, ch. §): celà n'a rien qui doive surprendre, les nombres réels positifs provenant de la notion de longueur et n'ayant été définis pendant longtemps qu'à l'aide de cette notion, considérée comme notion première.

Les théorèmes établis dans la théorie des nombres réels vont nous montrer de plus qu'il n'y a pas essentiellement d'autre ensemble vérifiant les axiomes G-I à G-VI, et différent du précédent. De façon précise, on a le théorème suivant :

Théorème. On peut, d'une manière et d'une seule, établir une correspondance biunivoque entre les éléments de G et les nombres réels positifs, de telle sorte qu'à la somme de deux éléments de G corresponde la somme des nombres homologues, et qu'à un élément donné U de G corresponde le nombre 1.

En effet, adjoignons à G un nouvel élément, que nous désignerons par ω, et soit $G' = G + \omega$. Ordonnons G' en conservant l'ordre relatif des éléments de G, et en posant $\omega < a$ quel que soit l'élément a de G ; prolongeons de même l'addition définie dans G en posant $\omega + a = a + \omega = a$ quelque soit a dans G'. On vérifie immédiatement que G' satisfait aux 6 axiomes des demi-groupes abéliens (Topologie, ch. §), donc est isomorphe d'une manière et d'une seule à l'ensemble des nombres réels non-négatifs, ω correspondant à 0 et U à 1, ce qui démontre le théorème.

L'élément U de G qui correspond au nombre 1 est appelé unité de grandeur de l'espèce de grandeurs envisagée ; le nombre x correspondant à la grandeur xU de G est la mesure de cette grandeur lorsque U est pris pour unité. Cette mesure est donc un nombre attaché d'une manière unique à toute grandeur de G lorsqu'on a choisi l'unité de grandeur ; si on prend une autre unité $U' = aU$, la nouvelle mesure x' est liée à l'ancienne par la formule $x' = \frac{x}{a}$ (Topologie, ch. §).

<u>Les problèmes physiques de la mesure des grandeurs.</u>

La notion de grandeur étant ainsi établie de façon précise, ainsi que ses relations avec l'ensemble des nombres réels, il devient possible de se représenter de façon plus claire les méthodes de la science expérimentale <u>quantitative</u>. La première tâche de l'observa--teur, devant un complexe de phénomènes, est d'y débrouiller les diverses <u>qualités</u> distinctes qui caractérisent l'aspect de ces phénomènes : ce travail, qui appartient à la partie <u>qualitative</u> de la science expérimentale, présente déjà dans certains ca-s de sérieuses difficultés (par exemple la distinction des qualités "chaleur" et "température" dans les phénomènes calorifiques, ou "potentiel" et "charge électrique" dans les phénomènes électriques). La partie <u>quantitative</u> commence lorsque l'on cherche à attacher une <u>grandeur</u> à une qualité déterminée ; d'après ce que nous avons vu, celà nécessite l'invention de <u>trois procédés expérimentaux</u> : le premier permettant un <u>partage en classes</u> des objets possédant la qualité étudiée (ou encore de reconnaître l'<u>égalité</u> de deux gran--deurs) ; le second permettant d'<u>ordonner</u> l'ensemble des classes obtenu (ou encore de reconnaître l'inégalité de deux grandeurs ; le même procédé expérimental permet souvent de reconnaître aussi bien l'égalité que l'inégalité des grandeurs considérées ; le troisième enfin permettant d'y définir l'<u>addition</u> de manière à satisfaire aux axiomes G-II et G-III. Un appareil avec lequel on peut réaliser ces trois opérations est dit <u>appareil de mesure</u> de la grandeur étudiée.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, on admet en général que l'ensemble des classes ainsi mises en évidence satisfait aussi aux axiomes G-IV, G-V, et G-VI ; en fait, et de même que pour les longueurs, il existe, relativement à tout appareil de mesure, un premier élément ω et un dernier élément Ω de l'ensemble des grandeurs qu'il permet de mesurer (par exemple, pour une balance, ω est la <u>sensibilité</u>, Ω la <u>force</u> de la balance). Comme il est possible de discerner le sens de l'inégalité de deux grandeurs dès que leur différence est au moins égale à ω, il existera toujours au plus deux multiples consécutifs de ω dont on ne pourra dire s'ils sont supérieurs ou inférieurs à une grandeur donnée : ces multiples sont dits <u>valeurs approchées à ω près, par défaut et par excès</u> de la grandeur mesurée ; ω est <u>l'erreur systématique</u> de l'appareil.

La définition et la mesure des diverses grandeurs physiques soulèvent des difficultés aussi nombreuses que variées. Il n'entre pas dans notre objet de les énumérer ; quelques exemples suffiront à en donner une idée.

<u>La notion de temps</u> : Lorsque l'on veut par exemple définir et mesurer le <u>temps</u>, les notions d'événements <u>simultanés</u>, <u>antérieurs</u> ou <u>postérieurs</u>, fournies par notre conscience, nous permettant de ranger les événements, <u>en un lieu déterminé</u>, en classes d'événements simultanés, dont l'ensemble I se trouve naturellement ordonné, et qu'on appelle des <u>instants</u> ; mais nous n'avons aucun moyen de définir, dans cet ensemble, une loi de composition qui ait un sens physique. Aussi ce ne sont pas les éléments de I qui vont constituer un ensemble de grandeurs, mais les intervalles de I. On rangera dans

....

une même classe deux intervalles pendant lesquels se sont déroulés deux phénomènes d'apparence identique ; la nature nous fournit ainsi un certain nombre de phénomènes qui se reproduisent, ou que l'on peut reproduire (trajectoire d'une étoile, clepsydre, oscillation d'un pendule), et on vérifie bien que le partage en classes des intervalles de I ne dépend pas du phénomène choisi pour le définir.

Il n'y a ensuite aucune difficulté à définir l'inégalité et la somme de deux intervalles de I, et on arrive ainsi à la notion de la grandeur "temps". On remarquera qu'on établit ainsi une isomor-phie entre I et une droite orientée (Topologie, ch. §), ou encore une isomorphie entre I et l'ensemble des nombres réels, qui est unique lorsqu'on a choisi les deux éléments de I qui corres-pondent aux nombres 0 et 1.

Les mêmes circonstances se produisent dans la définition du potentiel électrique, dont on ne peut aussi mesurer que les différences : le temps et le potentiel sont deux grandeurs dirigées à origine arbitraire (il existe aussi des grandeurs dirigées à à origine fixe, par exemple les quantités d'électricité).

La notion de température : La définition de la température présente une nouvelle difficulté. Notre notion du "plus chaud" et du "plus froid" étant insuffisante pour définir une grandeur attachée à cette notion, on a recours (comme pour le poids) à un phénomène auxiliaire, la dilatation linéaire des corps, qui permet aisément de ranger les corps en classes "températures" et d'ordonner l'ensemble de ces classes, conformément à notre notion grossière du "plus chaud". Mais ici, aucune expérience ne nous permet de définir la somme de deux températures, ni davantage de comparer ....

deux intervalles de l'ensemble des températures. Les phénomènes de dilatation montrent seulement que cet ensemble est topologiquement isomorphe à la droite : toute fonction continue monotone de la dilatation peut donc définir la température. En pratique, on prend une fonction linéaire, non seulement par raison de simplicité, mais aussi parce que l'on constate que les dilatations de corps d'espèces différentes sont, pour la plupart, fonctions linéaires de l'une d'elles. Toutefois, il y aurait abus de langage à parler de la température comme d'une grandeur, si on s'en tenait à ce qui précède : seules des considérations thermodynamiques assez profondes permettent de définir correctement une grandeur "température".

On a donc là un exemple de qualité physique à laquelle on n'est parvenu à attacher une grandeur que par des moyens très détournés ; un autre exemple est la qualité "couleur", où plusieurs siècles d'efforts ont été nécessaires, d'abord pour lui associer un ensemble ordonné, puis pour lui attacher une grandeur.

Enfin, il y a des qualités qui ont toujours résisté jusqu'ici à toute tentative de mesure ou même d'ordonnance : les odeurs en sont un exemple.

§ 3. Le problème mathématique de la mesure.

Parmi toutes les grandeurs physiques, il faut distinguer deux espèces, dont la mesure a conduit très tôt à de nouveaux et importants problèmes mathématiques : ce sont les aires et les volumes. Dans la plus grande partie de ce qui suit, nous ne parlerons que de la mesure des aires, le problème de la mesure des volumes étant tout à fait analogue.

Le problème physique de la mesure des aires :

L'intuition nous fournit à peu près simultanément la notion de plan, et la notion de la qualité "étendue plane", que possèdent certaines figures planes "simples" (par exemple, un domaine limité par un ou plusieurs contours "suffisamment réguliers"). Cette qualité est d'ailleurs liée à des représentations très concrètes : par exemple, l'étendue d'une plaque est liée à la "quantité de matière" contenue dans la plaque, l'étendue d'un champ à la "quantité" de terre retournée lorsqu'on le laboure.

Comme pour les autres qualités physiques, il s'agit d'attacher à cette qualité une grandeur, à laquelle on donnera le nom d'"aire" La liaison avec la notion de "quantité de matière" impose tout de suite deux conditions au partage en classes qui doit définir cette grandeur :

1) Deux figures planes déduites l'une de l'autre par déplacement doivent avoir une même aire.

2) La réunion de deux figures planes A, B, sans point intérieur commun, doit avoir pour aire la somme des aires de A et de B.

Mais, contrairement à ce qui se passe pour les longueurs, il se trouve qu'il existe des figures planes, ne se déduisant pas l'une de l'autre par déplacement, et auxquelles pourtant, en vertu des conditions 1) et 2), doit être attribuées la même aire. La difficulté consiste donc à trouver un procédé de comparaison des aires.

En fait, au point de vue physique, cette difficulté n'est pas très grande ; il suffit de faire intervenir la notion de poids, qui est, elle aussi, liée à l'idée vague de "quantité de matière".

On prendra, par exemple, pour mesure de l'aire d'une figure, un nombre proportionnel au poids d'une figure égale découpée dans une feuille de métal pur d'épaisseur uniforme (procédé dû à Archimède) ; la condition 2) est alors vérifiée d'elle-même, et on constate expérimentalement que la condition 1) est aussi vérifiée. Pour les figures trop étendues, on peut, au moins théoriquement, les recouvrir au moyen de figures toutes égales à une certaine figure simple donnée F (par exemple un carré, ou un triangle équilatéral, ou un hexagone régulier), sans que deux de ces figures aient un point intérieur commun ; tout revient alors à mesurer un nombre fini d'aires, toutes contenues dans F.

Le problème de la définition et de la mesure des aires peut donc être considéré comme résolu, au point de vue physique, pour les "figures simples" . Mais, ce faisant, nous avons totalement négligé un fait essentiel, reconnu dès les premiers essais d'arpentage en Egypte, en Chaldée et en Chine : c'est que les figures "les plus simples" sont entièrement déterminées (à un déplacement près) par la donnée d'un nombre fini de longueurs. Par suite, si on peut leur attacher un nombre qui mesure leur aire, ce nombre est une fonction bien déterminée des mesures de ces longueurs, et la connaissance de ces fonctions, pour les figures simples usuelles, présente le grand intérêt pratique de ramener une mesure d'aire à une mesure de longueurs ; c'est ce qui explique les efforts faits très tôt pour les déterminer, et qui ont, comme on sait, donné naissance à la géomètrie.

.....

Le problème mathématique de la mesure des aires.

Pour arriver au problème purement mathématique correspondant, il suffit d'introduire la notion mathématique de plan (c'est-à-dire l'ensemble R^2) et d'éliminer tout d'abord, faute de définition précise, la notion intuitive de "figure simple" : nous allons ainsi d'un seul coup au plus grand degré de généralité que puisse présenter le problème, en l'énonçant sous la forme initiale suivante :

Problème α . Trouver une fonction d'ensemble μE, dite mesure de l'aire de E (ou plus brièvement aire de E), définie pour toute partie E de R^2, prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty]$, et vérifiant en outre les conditions suivantes :

I. Si T est un déplacement quelconque dans R^2, et $E' = T(E)$, on a

(1) $$\mu E' = \mu E.$$

II. Si E_1 et E_2 sont deux ensembles sans point commun

(2) $$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2$$

III. μE est fini pour tout ensemble borné, et positif pour un ensemble borné au moins.

(Cette dernière condition a pour but d'éliminer les solutions triviales $\mu E = 0$ pour tout ensemble, et $\mu E = +\infty$ pour tout ensemble).

On ne sait pas encore à l'heure actuelle si le problème α a ou non des solutions. Mais des raisonnements très simples (qui ne sont autres que ceux de la "théorie des aires" en géomètrie élémentaire) permettent d'établir que, s'il existe une solution, elle a nécessairement, pour certains ensembles, une valeur bien déterminée lorsque

.....

sa valeur est donnée (arbitrairement) pour un ensemble choisi une fois pour toutes, par exemple le carré K : $\left(\begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}\right)$.

<u>L'aire des polygones</u>. Rappelons rapidement comment on procède. Tout d'abord, d'après II, si $E_1 \subset E_2$, $\mu E_1 \leqslant \mu E_2$; on en déduit que $\mu K > 0$, sans quoi, comme on peut recouvrir tout ensemble borné par un nombre fini d'ensembles déduits de K par déplacement, on aurait $\mu E = 0$ pour tout ensemble borné, contrairement à III. D'autre part, si μE est une solution du problème a, $c.\ \mu E$, ou c est un nombre positif quelconque, en est une autre. On peut donc supposer $\mu K = 1$. D'après I, l'aire de tout point du plan est la même ; comme K contient une infinité de points, cette mesure est <u>nulle</u>. Pour la même raison, l'aire d'un segment de droite de longueur < 1 est nulle, et par suite aussi, d'après II, l'aire de tout segment de droite de longueur finie.

Connaissant l'aire de K, on en déduit, d'après I et II, l'aire d'un rectangle à côtés rationnels, et par suite celle d'un rectangle quelconque R, en considérant deux rectangles à côtés rationnels R_1 et R_2, tels que $R_1 \subset R \subset R_2$ et que $\mu R_2 - \mu R_1$ soit aussi petit que l'on veut. On passe de là, comme on sait, à l'aire d'un triangle ; enfin, tout polygone (en prenant comme définition d'un polygone la réunion d'un nombre fini de points, de segments ouverts et de triangles ouverts, sans point commun deux à deux) pouvant être décomposé en triangles, on ne déduit l'aire d'un polygone, et on montre (voir, par exemple <u>Hadamard</u>, Géomètrie élémentaire) que le nombre obtenu est <u>indépendant de la décomposition du polygone en triangles</u> (remarquons que, s'il n'en était pas ainsi, on aurait montré l'impossibilité du problème a).

On peut interpréter ces raisonnements d'une manière différente.

Si on considère la famille $\mathcal{P}$ des polygones, on remarque que l'ensemble déduit d'un polygone par déplacement est un polygone, ainsi que la réunion de deux polygones sans point commun. Il en résulte que, si dans l'énoncé du problème α, on prend pour champ de définition de μE la famille $\mathcal{P}$ au lieu de la famille de tous les sous-ensembles de R^2, le reste de l'énoncé garde un sens, et on obtient ainsi un nouveau problème, le problème α_1. D'autre part, si P_1 et P_2 sont deux polygones tels que $P_1 \subseteq P_2$, la différence $P_2 - P_1$ est un polygone ; par suite, les raisonnements faits ci-dessus montrent l'existence et l'unicité de la solution du problème α_1 (avec la condition supplémentaire $\mu K = 1$).

Remarquons encore, relativement à la famille $\mathcal{P}$, que l'intersection (et par suite aussi la réunion) de deux polygones quelconques est encore un polygone.

Les ensembles quarrables. La notion mathématique de polygone est loin de correspondre à la notion intuitive de "figure simple", puisqu'elle ne comprend pas le cercle, qu'on peut considérer comme "la plus simple" de toutes les figures planes ; la famille $\mathcal{P}$ est donc un champ de définition trop restreint pour μE. Mais on sait qu'en supposant l'existence de l'aire d'un cercle Γ, on peut trouver sa mesure en montrant qu'il existe deux polygones P, P' tels que $P \subset \Gamma \subset P'$ et que $\mu P' - \mu P$ soit arbitraitement petit : le procédé est en principe le même que pour le rectangle ; à celà près que la forme des polygones P, P' varie.

Plus généralement, appelons ensemble quarrable tout ensemble E pour lequel, à tout nombre $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre deux ...

polygones P, P' tels que $P \subset E \subset P'$ et $\mu(P'-P) < \varepsilon$. Si on prend pour ε les termes d'une suite $\{\varepsilon_n\}$ tendant vers zéro, on a ainsi deux suites $\{P_n\}$, $\{P'_n\}$ de polygones tels que μP_n et $\mu P'_n$ tendent vers la même limite, qui est nécessairement égale à μE (en supposant l'existence de ce nombre) ; et on voit très aisément que cette limite ne dépend pas des suites $\{P_n\}$, $\{P'_n\}$. De plus, la réunion de deux ensembles quarrables sans point commun E_1, E_2 est encore un ensemble quarrable, ainsi que le transformé E' d'un ensemble quarrable E par un déplacement, et les égalités (1) et (2) sont bien vérifiées lorsque μE est défini par le passage à la limite précédente. Il en résulte l'existence et l'unicité de la solution du problème a_2, consistant à trouver une fonction μE qui vérifie les propriétés I, II, III, mais dont le champ de définition est la famille $\mathcal{Q}$ des ensembles quarrables (qui comprend évidemment la famille $\mathcal{P}$).

Ici encore, si Q_1 et Q_2 sont deux ensembles quarrables tels que $Q_1 \subset Q_2$, la différence $Q_2 - Q_1$ est un ensemble quarrable : en effet, soient P_1, P_2, P'_1, P'_2, quatre polygones tels que

$$P_1 \subset Q_1 \subset P'_1. \quad P_2 \subset Q_2 \subset P'_2. \quad \mu(P'_1 - P_1) < \varepsilon. \quad \mu(P'_2 - P_2) < \varepsilon$$

On peut toujours supposer $P_1 \subset P_2$ (il suffit de remplacer éventuellement P_2 par $P_1 \cup P_2$) ; on a alors (fig. 1)

$$P_2 - P_2 \cap P'_1 \subset Q_2 - Q_1 \subset P'_2 - P_1$$

Or $\quad (P'_2 - P_1) - (P_2 - P_2 \cap P'_1) = (P'_2 - P_2) \cup \left[P_2 \cap (P'_1 - P_1)\right]$

donc $\quad \mu\left[(P'_2 - P_1) - (P_2 - P_2 \cap P'_1)\right] \leq \mu(P'_2 - P_2) + \mu(P'_1 - P_1) < 2\varepsilon$

Plus aisément encore, on montre que l'<u>intersection</u> de deux ensembles quarrables est un ensemble quarrable, et par suite il en est de même de la <u>réunion</u> de deux ensembles quarrables.

On peut remarquer aussi que la <u>frontière</u> d'un ensemble quarrable est un ensemble quarrable d'<u>aire nulle</u>. Enfin, on ne sort pas de la famille des ensembles quarrables lorsque, dans la définition de ces ensembles, on remplace les polygones P, P' par deux ensembles quar--rables quelconques Q, Q'.

<u>Nouvelle position du problème de la mesure des aires.</u>

Avec la famille $\mathcal{Q}$, on a une classe d'ensembles qui contient tous ceux pour lesquels nous avons une notion intuitive de l'aire. Mais elle est loin de comprendre tous les ensembles plans ; si nous considérons, par exemple, l'ensemble E des points de K à coordonnées rationnelles, tout polygone <u>fermé</u> P' contenant E contient K, sans quoi un point M de K au moins appartiendrait au complémentaire de P', et par suite aussi un ensemble ouvert Ω contenant M et contenu dans K, ce qui est impossible, puisque E est partout dense dans K. D'autre part, les seuls polygones P contenus dans E sont formés d'un nombre fini de points : <u>E n'est donc pas quarrable</u>.

Rangeons les points de E en une suite $\{M_n\}$ et considérons l'ensemble E_ε formé par la réunion des carrés <u>ouverts</u> C_n de centre M_n et de côté $\frac{\varepsilon}{2^n}$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Il est clair que tout polygone fermé contenant E_ε contient K ; d'autre part, si un polygone <u>fermé</u> P est contenu dans E_ε, il est contenu, d'après le lemme de Borel-Lebesgue, dans un nombre fini de carrés C_n, donc $\mu P < \frac{\varepsilon^2}{3}$; E_ε <u>n'est pas quarrable</u>.

Ce dernier exemple est particulièrement instructif, car il montre qu'il existe des ensembles ouverts non quarrables ; et pourtant, tout ensemble ouvert, quarrable ou non, est réunion d'une suite croissante de polygones ouverts.

Aussi cette remarque nous amène-t-elle au tournant essentiel qui caractérise la théorie moderne de la mesure : il apparaît douteux, à la lumière des exemples précédents, qu'on puisse établir l'existence, et a fortiori l'unicité, d'une fonction μE satisfaisant aux conditions du problème α, si on n'impose pas à cette fonction une condition supplémentaire de continuité. On est ainsi conduit à remplacer le problème β, où on ajoute, aux conditions que doit vérifier μE, la condition

IV. Si un ensemble E est la réunion d'une suite croissante d'ensembles E_n, $\mu E = \lim \mu E_n$

Malheureusement, nous montrerons plus loin (ch. XI) que ce problème n'admet pas de solution : il n'existe pas de fonction μE, définie pour tous les ensembles plans, et possédant les propriétés I, II, III, IV.

On peut alors chercher à restreindre le champ de définition de μE, comme nous l'avons fait pour le problème α. Il est clair qu'une famille d'ensembles $\mathcal{F}$ ne peut être un champ de définition convenable pour μE que si elle vérifie au moins les trois conditions suivantes:

a) Si E est un ensemble de $\mathcal{F}$, et T un déplacement quelconque, $E' = T(E)$ est un ensemble de $\mathcal{F}$.

b) Si E_1 et E_2 sont deux ensembles de $\mathcal{F}$ sans point commun, $E_1 \cup E_2$ est un ensemble de $\mathcal{F}$.

.....

c) <u>Si $\{E_n\}$ est une suite croissante d'ensembles de $\mathcal{F}$</u>, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ <u>est un ensemble de $\mathcal{F}$</u>.

Remarquons déjà qu'il résulte de ces conditions que si $\mathcal{F}$ contient tous les carrés du plan, elle contient aussi tous les ensembles <u>ouverts</u>.

Par analogie avec les propriétés de la famille $\mathcal{Q}$, on impose encore deux autres conditions à la famille $\mathcal{F}$:

d) <u>Si E_1 et E_2 sont deux ensembles de $\mathcal{F}$ tels que</u> $E_1 \subset E_2$, $E_2 - E_1$ est un ensemble de $\mathcal{F}$.

e) <u>Si E_1 et E_2 sont deux ensembles de $\mathcal{F}$</u>, $E_1 \cap E_2$ <u>est un ensemble</u> de $\mathcal{F}$.

La condition d) est d'ailleurs nécessaire pour qu'on puisse comparer les aires de deux ensembles de $\mathcal{F}$ lorsque l'un est contenu dans l'autre. La nécessité de e) est moins évidente : en fait, on n'introduit cette condition que pour des raisons de commodité, afin de pouvoir raisonner sur $\mathcal{F}$ aussi aisément que sur $\mathcal{Q}$.

Le problème qui remplace le problème β est alors le suivant :

<u>Problème β_1</u>. <u>Trouver une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles de R^2</u> ; <u>possédant les propriétés a), b), c), d), e), et une fonction</u> μE, <u>définie pour tout ensemble de $\mathcal{F}$, et possédant les propriétés I, II, III, IV.</u>

Un problème plus général consisterait à trouver <u>toutes</u> les familles $\mathcal{F}$ et <u>toutes</u> les fonctions μE ayant ces propriétés ; ce problème ne présente guère qu'un intérêt théorique. Par contre, il est important de connaître <u>la plus grande famille</u> $\mathcal{F}$ <u>contenant la famille</u> $\mathcal{Q}$ et fournissant une solution du problème β_1.

.....

Généralisation à des ensembles quelconques.

Le problème fondamental de la mesure.

Tous ces problèmes se posent de la même manière pour les ensembles de R^1, pour ceux de R^3, et plus généralement pour ceux de R^n. Sans aucune modification dans l'énoncé des conditions que doivent vérifier $\mathcal{F}$ et μE.

Mais, dans de nombreuses branches de l'analyse, le besoin se fait sentir d'étendre encore la théorie de la mesure à des ensembles ne faisant pas partie d'un R^n. Or, si on examine les conditions portant sur $\mathcal{F}$ et μE, on s'aperçoit que seules la condition a) pour $\mathcal{F}$, la condition correspondante I et la condition III pour μE, impliquent qu'il s'agit d'ensembles dans un R^n ; les autres ne font intervenir que des relations qui gardent un sens pour des ensembles abstraits quelconques.

<u>Le problème fondamental de la mesure des ensembles</u>, dégagé de toute hypothèse spéciale, se pose donc finalement sous la forme suivante :

<u>Problème γ. Etant donné un ensemble fondamental $\mathcal{E}$, trouver une famille $\mathcal{F}$ de parties de $\mathcal{E}$ vérifiant les conditions b), c), d), e), et une fonction μE, définie pour tout ensemble de $\mathcal{F}$ et vérifiant les conditions II et IV.</u>

Une famille $\mathcal{F}$ vérifiant b), c), d), e), sera désignée sous le nom de <u>tribu</u> ; une fonction μE, prenant ses valeurs dans $[0, +\infty]$, définie pour tout ensemble d'une tribu, et possédant les propriétés II et IV est, par définition, une <u>mesure attachée à la tribu</u>.

Il importe de bien insister sur l'intérêt du problème γ. Tout d'abord, il met parfaitement en lumière les bases de la notion de mesure (et de celle d'intégrale, dont nous allons parler ci-dessous) en les dégageant nettement de toutes les notions topologiques qui paraissent inextricablement liées à la notion intuitive d'aire ou de volume. Mais là ne réside pas exclusivement son utilité mathéma--tique, et de récents et très importants progrès en Théorie des Groupes n'ont été possibles que grâce à cette extension de la notion de mesure.

§ 4. La notion d'intégrale.

La notion de mesure est à la base de toute la théorie que nous allons exposer : mais elle n'en constitue pas l'outil mathématique essentiel, ce rôle étant dévolu à une autre notion, étroitement liée à celle de mesure, la notion d'intégrale.

Bour montrer comment on peut arriver à cette notion, reprenons la méthode expérimentale d'Archimède pour la mesure des aires. Une feuille de métal pur d'épaisseur uniforme a, comme nous l'avons vu, la propriété que deux figures égales découpées dans cette feuille ont des poids égaux, ce qu'on exprime en disant que la feuille est homogène. Il en résulte que le poids d'un ensemble quarrable découpé dans cette feuille, est proportionnel à son aire ; le coefficient de proportionnalité d est appelé densité superficielle (ou plus brièvement densité) de la feuille métallique.

Considérons maintenant une feuille métallique E formée de plusieurs morceaux quarrables $E_1, E_2, \ldots, E_n$, homogène et de densité respectives $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Il est clair que le poids total de la feuille a pour valeur $P = d_1 . \mu E_1 + d_2 . \mu E_2 + \ldots + d_n . \mu E_n$.

A tout point M du plan, faisons alors correspondre le nombre 0 si M n'est pas dans E, la densité d_i du morceau E_i dans lequel se trouve M, si M est dans E. On a ainsi défini une fonction f(M) dans tout le plan, et la donnée de cette fonction détermine complétement la position dans le plan, la composition, et le poids de la feuille métallique. Le nombre P est donc une <u>fonctionnelle</u> de f(M), qu'on désigne sous le nom d'<u>intégrale</u> de f(M) relative à la mesure μ.

La transposition en termes abstraits de cette définition est immédiate, à condition qu'on ait une solution du problème γ pour l'ensemble fondamental $\mathcal{E}$ que l'on considère. On obtient ainsi une fonctionnelle I(f) dont le champ de définition est la famille des fonctions f définies sur $\mathcal{E}$ et qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs $\geqslant 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, les ensembles $\overset{-1}{f}(a_i)$ étant des ensembles de la tribu $\mathcal{F}$ si $a_i > 0$. Ces fonctions sont dites fonctions <u>étagées</u> par rapport à $\mathcal{F}$. De plus cette fonctionnelle est telle que, si f_1 et f_2 sont deux fonctions étagées, c_1 et c_2 deux constantes $\geqslant 0$, on ait

$$I(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 I(f_1) + c_2 I(f_2)$$

comme on le voit aisément en vertu des propriétés b),d),e), de $\mathcal{F}$. Autrement dit, I(f) est une fonctionnelle <u>linéaire</u> sur la famille des fonctions étagées.

L'intérêt de cette définition semble assez mince, étant donnée la nature très particulière des fonctions auxquelles elle s'applique. Pourtant, l'exemple concret donné plus haut montre qu'il doit y avoir une extension possible de ce champ de définition. Si on suppose que la feuille métallique est composée du même métal, mais a une épaisseur

....

variable, le cas considéré ci-dessus est celui où l'épaisseur de la feuille ne prend qu'un nombre fini de valeurs, proportionnelles à $d_1, d_2, \ldots, d_n$; il est naturel de considérer encore que le poids de la feuille est une fonctionnelle de son épaisseur, lorsque celle-ci peut prendre une infinité de valeurs.

Mais on n'a plus alors d'expression mathématique immédiate donnant ce poids en fonction de l'épaisseur : pour obtenir une telle expres--sion, il faut avoir recours à la notion de <u>limite</u>. On conçoit en effet que la limite f d'une suite $\{f_n\}$ de fonctions étagées puisse être une fonction beaucoup plus générale ; et il semble naturel de prendre pour définition de l'intégrale de f la limite de l'intégrale de f_n, pourvu que cette limite existe et ne dépende que de f, et non de la suite particulière de fonctions étagées tendant vers f. Ces restrictions indispensables amènent à ne définir l'intégrale qu'à l'aide de suites de fonctions étagées tendant vers f de façon parti--culière, à savoir les suites <u>croissantes</u>. La famille Φ des fonctions limites de ces suites a alors, comme nous le verrons, la propriété qu'une suite croissante de fonctions de Φ a pour limite une fonction de Φ, et que l'intégrale de la limite est égale à la limite de l'intégrale.

En résumé, une intégrale apparaît essentiellement comme la limite d'une suite de nombres réels $\{x_n\}$, dont chacun est la somme d'un nombre fini de termes N, <u>N augmentant indéfiniment avec n</u>. Partout ou s'introduira une telle suite, aussi bien en mathématiques pures que dans les applications, c'est la notion d'intégrale qui jouera un rôle prépondérant. Il ne nous est pas possible d'en donner

....

une idée plus précise ici ; au fur et à mesure du développement de la théorie, le lecteur se familiarisera avec cet outil mathématique aussi souple que puissant, et dont on peut dire que c'est véritablement la clé de l'Analyse.

Insistons cependant, en terminant, sur un second aspect fondamental de l'intégrale. Jusqu'ici, nous l'avons considérée comme une fonctionnelle linéaire et continue pour la limite croissante, définie sur la famille Φ (intégrale définie). Mais elle fait aussi correspondre à une fonction de point quelconque f de Φ, une fonction d'ensemble F(E) définie pour tout ensemble de la tribu $\mathcal{F}$, à savoir l'intégrale du produit $f.\varphi_E$, où E est un ensemble quelconque de $\mathcal{F}$, φ_E sa fonction caractéristique (intégrale indéfinie). Cette fonction possède toutes les propriétés d'une mesure (pour f = 1, elle se réduit d'ailleurs à $\mu(E)$; l'étude de ses relations avec f constitue une des branches les plus importantes de la théorie de l'Intégration.

§ 5. Plan général.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à l'étude préliminaire des tribus d'ensembles, d'une part, et des familles de fonctions limites de fonctions étagées, d'autre part (ces fonctions seront d'ailleurs définies de façon différente et plus générale).

Au chapitre III sont groupées toutes les propriétés de l'intégrale (considérée comme fonctionnelle linéaire), qui ne dépendent pas de la propriété de continuité pour la limite croissante, et appartiennent par suite à une classe plus étendue de fonctionnelles qui nous seront utiles par la suite.

....

Le chapitre IV définit de façon précise les notions de mesure et d'intégrale, montre l'existence et l'unicité d'une intégrale relative à une mesure et à une tribu données, et expose ses propriétés fondamentales en tant que fonctionnelle. Le chapitre V au contraire, est consacré à l'étude de l'intégrale en tant que fonction d'ensemble.

Jusqu'à ce point, les tribus et mesures sur lesquelles on a raisonné sont supposées données. Pour les applications, il faut naturellement pouvoir construire tribu et mesure dans l'ensemble que l'on considère. Les chapitres qui suivent sont consacrés à ce problème et à l'étude approfondie des tribus et mesures définies dans certains ensembles particuliers.

Au chapitre VI est développé un procédé général qui, à partir d'une fonctionnelle du type étudié au chapitre III, permet d'obtenir à la fois une tribu, une mesure et l'intégrale attachée à cette mesure. Ce procédé est appliqué dans les chapitres VII à X à l'étude de mesures particulières dans certains types d'ensembles d'une importance fondamentale dans les applications : les produits d'ensembles, les espaces topologiques, et en particulier les espaces R^n. Enfin le chapitre XI est consacré à l'étude approfondie de la mesure de Lebesgue (et de l'intégrale qui lui est attachée), mesure qui résout le problème β_1 posé plus haut.

Le dernier chapitre contient les applications élémentaires de la théorie au Calcul des Probabilités.
