RÉDACTION NON NUMÉROTÉE

COTE DELR 004

TITRE LIVRE IV FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE
CHAPITRE I DÉRIVÉE-PRIMITIVE-INTÉGRALE
(MANUSCRIT AUTOGRAPHE DE DELSARTE, FRAGMENT)

FONDS JEAN DELSARTE

NOMBRE DE PAGES NUMÉRISÉES 40

NOMBRE DE FEUILLES PRISES EN COMPTE 24

2

DELR 004

dérivée première ?

? le corps des nbs. réels

? ——— nbs. complexes

[petites lettres

X+Y -X

Donner tout de suite l'exemple V = R^n et dire que ça correspond à n fonctions scalaires

remonter

fin des p. lettres]

termes géométriques: pentes asymptotes ...?

??

Livre IV. Fonctions d'une variable réelle ; (Théorie élémentaire)

Chapitre I

Dérivée - Primitive - Intégrale

§1.- Généralités ; dérivation

1/ Préliminaires.-

Les fonctions qui se rencontrent le plus fréquemment en analyse sont définies dans R ou dans C et prennent leurs valeurs dans des espaces vectoriels normés admettant respectivement R ou C comme domaines d'opérateurs. Ce livre est consacré à l'étude des propriétés les plus simples des fonctions d'une variable réelle. Certaines de ces propriétés, particulièrement celles dont il sera question dans le présent paragraphe s'étendent aux fonctions d'une variable complexe ~~et~~, plus généralement, aux fonctions définies sur un corps topologique K et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel ~~topologique~~ V admettant K comme domaine d'opérateurs. ~~et muni d'une topologie telle que les fonctions~~

~~Un tel espace V d'éléments f, g, h, ... sur un corps topologique K d'éléments x, y, z, ... est un espace topologique muni d'une structure d'espace vectoriel telle que les opérations f + g ; - f ; xf, soient continues.~~ Un tel espace est dit espace vectoriel topologique (déf)

Le cas des fonctions d'une variable complexe, très important en lui-même, fera l'objet de plusieurs livres ultérieurs. Le cas des fonctions d'une variable x décrivant un corps topologique K est d'un intérêt sensiblement moindre ; aussi nous bornerons nous à signaler sommairement, dans la suite, les définitions et propriétés restant alors valables. ~~[illegible]~~

Soit donc V un espace vectoriel sur le corps R des réels. Les éléments de V, ou vecteurs, seront désignés par des minuscules grasses, les nombres réels par des minuscules italiques ; la topologie dans V sera définie au moyen d'une norme, ~~[illegible]~~ satisfaisant comme de coutume, aux axiomes suivants : (Livre III, Chap. VII, par.)

$\| f \| > 0$ (pour $f \neq 0$) ; $\| f \| = 0$ (pour $f = 0$)

$\| x f \| = |x| \cdot \| f \|$; $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$;

Enfin V sera supposé complet, (particulièrement au cours du §2)

Soit alors $f(x)$ une fonction définie dans R, à valeurs dans V. Soit A la partie de R sur laquelle cette fonction est définie. L'image directe de A par la fonction $f(x)$ se nomme l'hodographe de cette fonction. Lorsque V se réduit à l'espace R^n, cet hodographe prend aussi le nom de courbe de l'espace à n dimensions. $f(x)$ sera souvent appelé : fonction vectorielle.

Lorsque V se réduit à R les fonctions considérées ont des valeurs réelles et prennent le nom de fonctions réelles de la variable réelle x ; on les désigne ~~alors par la notation~~ $f(x)$. ~~[illegible]~~ La partie de R^2 définie par les relations

$$x \in A \; ; \quad y = f(x)$$

DELROOY (with "ü" written above the "OO")

Livre IV

Chapitre I

Dérivée - Primitive - Intégrale

voisinage de x_0

ℓ vectorielle

première (ou simplement dérivée)

ens. ouvert

ℓ vectorielle

fonction affine tangente ??

droite tangente à l'hodographe ?

question de la continuité de la fonction dérivée

Dire ici que c'est vrai dans tout corps top. ?

$x+y$

linéarité de f ?

ibid.

renverser

$(x, y) \to \langle x . y \rangle$

se nomme la courbe représentative de cette fonction.

On notera que cette courbe est distincte de l'hodographe de $f(x)$, lequel se réduit ici à une partie de $\mathbb{R}$

2.- Dérivée d'une fonction; calcul formel des dérivées.-

Soit $f(x)$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$; ~~et prenant ses valeurs dans~~ soit x_0 un point non-isolé de A. Supposons $f(x)$ continue en x_0.

Définition 1.- Si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) - f(x_0) / x - x_0$$

existe, on lui donne le nom de dérivée de $f(x)$ au point x_0, et on la note $f'(x_0)$.

L'existence de la dérivée en un point x_0 implique donc que ce point n'est pas un point isolé du domaine de définition de la fonction.

Définition 2.- Si la dérivée de $f(x)$ existe en tout point d'une ~~partie~~ $B \subset A$, on dit que $f(x)$ est dérivable sur B. Cette dérivée $f'(x)$ est une nouvelle fonction de la variable réelle x, définie sur B et prenant ses valeurs dans V.

Exemples. 1 Si la fonction $f(x)$ est constante et égale à a, sa dérivée est partout nulle

.2 Si la fonction $f(x) = a\,x$, le vecteur a étant fixe, on a $f'(x) = a$

.3 Soit $f(x) = 1/x$; c'est une fonction à valeurs réelles définies dans $\mathbb{R}^*$; on a ici $f(x) - f(x_0) / x - x_0 = -1/x\,x_0$; la continuité de $1/x$ sur $\mathbb{R}^*$ entraîne donc $f'(x) = -1/x^2$.

Calcul formel des dérivées.- Proposition 1.- Si $f(x)$ et $g(x)$, toutes deux définies sur $A \subset \mathbb{R}$ et prenant leurs valeurs dans V ont respectivement une dérivée en x_0, la fonction $f(x) + g(x)$ a en ce point une dérivée égale à la somme $f'(x_0) + g'(x_0)$.

C'est une conséquence triviale de la continuité de $f + g$ en tout point de $V \times V$.

Proposition 2.- Si a est un nombre réel fixe, si $f(x)$ possède une dérivée en $x_0 \in A \subset \mathbb{R}$, la fonction $a\,f(x)$ possède en ce point une dérivée égale à $a\,f'(x_0)$.

C'est une conséquence triviale de la continuité de $a\,f$ en tout point f de V.

Considérons maintenant trois espaces vectoriels normés $V_1; V_2; V_3$, ~~tous trois sur le corps des réels~~, et une fonction continue

$$f_3 = [f_1 \cdot f_2]$$

définie sur $V_1 \times V_2$, à valeurs dans V_3, fonction que nous supposerons bilinéaire, c'est-à-dire

DELR 004

... représentative de cette fonction.

On se bornera ... l'hodographe de $f(x)$, lequel se réduit ici à ...

2- Dérivée d'une fonction ; calcul formel des dérivées.

ƒ vectorielles

Soit $f(x)$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, ...

ƒ vectorielle

et x_0 un point non-isolé de A. Supposons $f(x)$ continue en x_0.

Définition 1 - Si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} \left(f(x) - f(x_0)\right) / (x - x_0)$$

existe, on lui donne le nom de dérivée de $f(x)$ au point x_0, et on la note $f'(x_0)$.

L'existence de la dérivée en un point x_0 implique donc que ce point ne soit pas un point isolé de l'ensemble de définition de la fonction.

peut être un peu rapide ?

Définition 2 - Si la dérivée de $f(x)$ existe en tout point d'une partie $B \subset A$, on dit que $f(x)$ est dérivable sur B. La dérivée $f'(x)$ est une nouvelle fonction de la variable réelle, définie sur B, et prenant ses valeurs dans V.

non ; prendre le produit scalaire xZ défini dans $\mathbb{R} \times V$ d'abord

~~une fonction~~ $x \to$

le cas 3

Exemples : 1) Si $f(x)$ est une fonction constante et égale à a, sa dérivée est partout nulle.

2) La fonction $f(x) = x$ ...

3) $f(x) = 1/x$ ... ; on a ici $(f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) = -1/x x_0$; la continuité de $1/x$ sur ... entraîne donc $f'(x) = -1/x^2$.

le reste est cas particulier

donner aussi le produit scalaire dans l'esp. euclidien ou hermitien

Calcul formel des dérivées. Proposition 1 - Si $f(x)$ et $g(x)$ sont définies sur A et prennent leurs valeurs dans V, admettant des dérivées en x_0, la fonction $f(x) + g(x)$ admet en x_0 une dérivée égale à $f'(x_0) + g'(x_0)$.

C'est une conséquence triviale de la continuité de l'addition de $V \times V$.

ƒ vectorielle

Proposition 2 - Si a est un nombre réel ..., la fonction $a\,f(x)$ admet en x_0 une dérivée égale à $a\,f'(x_0)$.

C'est une conséquence triviale de la continuité de ... de V.

$g \circ f$

fâcheux prendre h par ex.

Considérons maintenant trois espaces vectoriels normés V_1, V_2, V_3 ...

... définie sur $V_1 \times V_2$ à valeurs dans V_3, fonction que nous supposerons ...

possédant les propriétés suivantes :

$$[x\,\mathbf{f}_1 \cdot y\,\mathbf{f}_2] = xy\,[\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2] ;$$

$$[(\mathbf{f}_1+\mathbf{g}_1)\cdot(\mathbf{f}_2+\mathbf{g}_2)] = [\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2]+[\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{g}_2]+[\mathbf{g}_1\cdot\mathbf{f}_2]+[\mathbf{g}_1\cdot\mathbf{g}_2] ;$$

Soient alors $\mathbf{f}_1(x)$ et $\mathbf{f}_2(x)$ deux fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, à valeurs dans V_1 et V_2 respectivement ; $\mathbf{f}_3(x) = [\mathbf{f}_1(x)\cdot\mathbf{f}_2(x)]$ est une fonction définie sur A, à valeurs dans V_3.

<u>Proposition 3.- Si $\mathbf{f}_1(x)$ et $\mathbf{f}_2(x)$ ont respectivement une dérivée</u> en $x_0 \in A$, $\mathbf{f}_3(x)$ <u>possède en ce point une dérivée égale à</u>

$$\mathbf{f}_3'(x_0) = [\mathbf{f}_1(x_0)\cdot\mathbf{f}_2'(x_0)] + [\mathbf{f}_1'(x_0)\cdot\mathbf{f}_2(x_0)]$$

En effet la bilinéarité de la fonction $[\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2]$ entraîne

$$\mathbf{f}_3(x)-\mathbf{f}_3(x_0) = [\mathbf{f}_1(x)\cdot(\mathbf{f}_2(x)-\mathbf{f}_2(x_0))] + [(\mathbf{f}_1(x)-\mathbf{f}_1(x_0))\cdot\mathbf{f}_2(x_0)]$$

La propriété annoncée résulte alors de la continuité de $[\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2]$ dans $V_1\times V_2$, puis de celle de $\mathbf{h}_3+\mathbf{k}_3$ dans $V_3\times V_3$.

<u>Exemples</u>. 1.- Si $\mathbf{a}$ est un élément fixe de V la fonction $\mathbf{f}(x) = \mathbf{a}\,x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ a pour dérivée en tout point de $\mathbb{R}$: $\mathbf{f}'(x) = n\,\mathbf{a}\,x^{n-1}$.
C'est ce qu'on a constaté plus haut pour $n=1$. La vérification par récurrence se fait en écrivant $\mathbf{f}(x) = x.(\mathbf{a}\,x^{n-1})$ et en regardant cette expression comme une fonction bilinéaire définie dans $\mathbb{R}\times V$.

2.- Soient $\mathbf{a}_0 ; \mathbf{a}_1 ; \ldots ; \mathbf{a}_{n-1} ; \mathbf{a}_n$, $n+1$ vecteurs fixes de V. La fonction $\mathbf{f}(x) = \mathbf{a}_0 x^n + \mathbf{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_{n-1} x + \mathbf{a}_n$ a pour dérivée, en tout point de $\mathbb{R}$; $\mathbf{f}'(x) = n\,\mathbf{a}_0 x^{n-1} + (n-1)\,\mathbf{a}_1 x^{n-2} + \ldots + \mathbf{a}_{n-1}$.
C'est une conséquence triviale de la proposition 1 et de l'exemple précédent.

3.- Soient $f(x)$ une fonction réelle, $\mathbf{g}(x)$ une fonction à valeurs dans V, toutes deux définies et dérivables sur $A \subset \mathbb{R}$, la fonction $\mathbf{f}(x) = f(x)\,\mathbf{g}(x)$ est dérivable sur A et admet pour dérivée

$$\mathbf{f}'(x) = f(x)\,\mathbf{g}'(x) + f'(x)\,\mathbf{g}(x).$$

C'est un aspect particulier de la proposition 3.

3.- <u>Théorème des fonctions composées. (Changement de variable)</u> -

Soit $f(x)$ une fonction <u>réelle</u> définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs sur une partie B de $\mathbb{R}$; soit $\mathbf{g}(y)$ une fonction définie sur B, prenant ses valeurs dans V, la fonction composée $\mathbf{g}\circ f$ est définie sur A et prend ses valeurs dans V. On dit souvent que cette fonction $\mathbf{h}(x) = \mathbf{g}(f(x))$ résulte de l'application du "<u>changement de variable</u>" $y = f(x)$ à la fonction $\mathbf{g}(y)$.

<u>Proposition 4.- Si</u> $f(x)$ <u>possède une dérivée au point</u> $x_0 \in A$, <u>et si</u> $\mathbf{g}(x)$ <u>possède une dérivée au point</u> $f(x_0)$ <u>de</u> B, $\mathbf{h}(x)$ <u>possède une dérivée au point</u> x_0, <u>égale à</u>

$$\mathbf{h}'(x_0) = \mathbf{g}'(f(x_0)).\,f'(x_0).$$

DELR004

dire plutôt : m^a

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \varphi(x)\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

avec $\varphi(x) = \{$

puis $\varphi(x) \to$ une limite

etc

f vectorielle

f vectorielles

Restriction à un sous-corps : la dérivée se conserve

f dans K'

En effet on peut écrire

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{si } f(x) \neq f(x_0)$$

On notera que ~~cette égalité~~ a encore un ~~sens~~ lorsque $x \neq x_0$, $f(x) = f(x_0)$; ~~elle devient en effet~~

et

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

~~et les deux membres en sont nuls~~ $f(x) = f(x_0)$. Lorsque x tend vers x_0 sur A, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ sur B, le passage à la limite est légitime par suite de la continuité de g dans $R \times V$, et il vient

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

C. Q. F. D.

Corollaire 1.- Soit $f(x)$ une fonction réelle ; si en un point x_0, $f(x_0)$ existe et n'est pas nulle, si $f'(x_0)$ est définie, la fonction $1/f$ possède une dérivée égale à

$$-f'(x_0) / f^2(x_0).$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de la valeur de la dérivée de la fonction réelle $1/x$.

Corollaire 2.- Soit $f(x)$ une fonction réelle, définie et différente de zéro au point x_0, possédant une dérivée en ce point, soit $g(x)$ une fonction, définie et dérivable au point x_0, la fonction $h(x) = g(x) / f(x)$ admet au point x_0 une dérivée égale à

$$h'(x_0) = \frac{g'(x_0)\, f(x_0) - g(x_0)\, f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3 et du corollaire précédent.

Remarque 1.- Les règles précédentes donnent en particulier le moyen de calculer les dérivées des polynomes réels et des fractions rationnelles réelles.

Remarque 2.- Les définitions, propositions, démonstrations et exemples précédents sont valables sans changement dans le cas des fonctions définies sur un corps topologique K et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel topologique sur K.

Relativement au théorème des fonctions composées, on doit alors supposer que V est un espace vectoriel topologique sur un corps topologique K', que $f(x)$ est une application d'un sous-corps topologique K de K', et que $g(x)$ définie dans K', prend ses valeurs dans V.

Plus spécialement les résultats précédents donnent les règles de dérivations des polynomes et des fractions rationnelles définies sur un corps topologique K et prenant leurs valeurs dans un sur-corps topologiques K' de K.

- $f(x_0)$ ne peut être un point isolé de B et la continuité de $f(x)$ en x_0 entraîne que $f(x)$ ne peut être constant au voisinage de x_0. Il existe donc des valeurs de x aussi voisines qu'on le veut de x_0 et rendant $f(x) - f(x_0) \neq 0$. Soit A' l'ensemble de ces valeurs ; pour $x \in A'$ on a

$$\frac{(x) - (x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x)) - (f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Par ailleurs x_0 appartient à $\bar{A}'$; faisant tendre x vers x_0 sur A', $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ sur B, et en passant à la limite on obtient l'égalité

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A'}} \frac{(x) - (x_0)}{x - x_0} = {}'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Lorsque $x \in A$ et $\notin A'$ on peut écrire

$$\frac{(x) - (x_0)}{x - x_0} = {}'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

? locales

?

10

DELR 004

se borner à un intervalle $[x_0, b[$

f vectorielle

$f(x)$ a une limite à droite égale à $f(x_0)$ quand $x \to x_0$ en restant dans A.

faire ensuite (en remarque petits l.) la généralis. à une partie requise

Cas de $f(-x)$

demi-tangentes ?

4.- Dérivées à droite, dérivées à gauche.

~~Dans tout ce qui suit nous ne considérerons plus que des fonctions f (x) définies dans R, prenant leurs valeurs dans un vectoriel normé V admettant R comme domaine d'opérateurs.~~

Reprenons une fonction f (x) définie sur une partie A de R et prenant ses valeurs dans V.

Définition 3.- Soit $x_0 \in A$ tel qu'il existe des points $x \in A$, aussi voisins qu'on le veut de x_0 et satisfaisant à $x > x_0$; f (x) est continue à droite pour $x = x_0$ si

$$\lim \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$$

lorsque $x \in A$ tend vers x_0 par valeurs supérieures à x_0. (limite à droite)

On définit de même la continuité à gauche, en remplaçant supérieur par inférieur.

Définition 4.- Soit $f(x)$ une fonction continue à droite, (resp. à gauche) en un point $x_0 \in A$; si la limite à droite, (resp. à gauche) de $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, quand x tend vers x_0, existe, on lui donne le nom de dérivée à droite, (resp. à gauche), de la fonction au point x_0, et on la note $f'_+(x_0)$, (resp. $f'_-(x_0)$).

Exemple.- La fonction réelle $f(x) = |x|$ possède, pour $x = 0$, une dérivée à droite égale à $+1$, et une dérivée à gauche égale à -1.

Proposition 5. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ ait une dérivée pour $x = x_0$ est qu'elle possède en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, ces deux dérivées étant égales. On a alors $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

C'est une conséquence triviale des définitions -

Toutes les propositions des numéros précédents s'appliquent aux dérivées à droite, (resp. à gauche). Il suffit partout de remplacer le mot dérivée par dérivée à droite (resp. à gauche). Il faut cependant modifier légèrement l'énoncé de la proposition 4, relative à la dérivation des fonctions composées : si on suppose seulement que $f(x)$ possède une dérivée à droite, (resp. à gauche) au point x_0, il faut supposer encore que $g(x)$ possède une dérivée au point $f(x_0)$, alors la fonction $h(x)$ possède une dérivée à droite, (resp. à gauche) donnée par la formule

$$h'_+(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'_+(x_0) \qquad \text{(resp. } -\text{)}$$

Il n'y a rien à changer aux démonstrations.

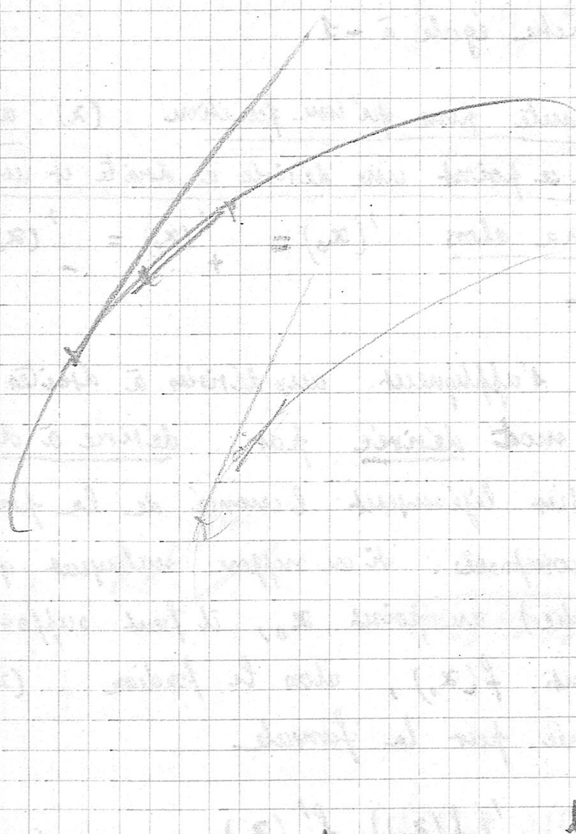
5.- Théorème de la moyenne.-

Dans tout ce qui précède on n'a fait qu'examiner des propriétés strictement ponctuelles des fonctions considérées : existence et calcul de leurs dérivées en un point x_0 de leur domaine de définition A. Les propriétés qui vont être envisagées maintenant font intervenir non-seulement un point x_0 et ses voisinages, mais encore un intervalle non-nul sur lequel la fonction doit être définie. Il est donc commode de ~~convenir mainte-~~

DELR 004

Crois un peu s'arrête

Remarquer d'abord que I n'est pas vide



en remarquer le cas où $\|x\|$ est remplacé par une fonction convexe ≥ 0

autre conséquence :

$$f(y)-f(x) = f'(a)(y-x) + \varepsilon(y-x)$$

uniformément en $y \neq x$ si f' continue

2 pour non continuité

ici l'exercice 10 ~~en proposition~~

d'abord dérivées infinies, exemples

extension du calcul formel au cas des dérivées ∞

nant que la partie A de R se réduit à un intervalle non nul I.

<u>Théorème de la moyenne</u>.- <u>Soit $f(x)$ une fonction vectorielle de la variable réelle x, définie</u> ~~sur~~ <u>l'intervalle I : $a \leq x \leq b$, continue</u> ~~sur I~~ <u>et</u> ~~y~~ <u>admettant une dérivée à droite pour $a \leq x < b$, cette dérivée vérifiant la condition</u>

$$\| f'_{+}(x) \| \leq M \qquad (a \leq x < b)$$

<u>où M désigne une constante réelle positive</u>. <u>On a alors</u>

$$\| f(b) - f(a) \| \leq M(b-a) .$$

Soit ε un nombre positif fixe. Considérons l'ensemble I' des $x \in I$ tels que l'on ait, pour $a \leq y \leq x$

$$\| f(y) - f(a) \| \leq (M+\varepsilon)(y-a) \qquad (1)$$

Soit z la borne supérieure de l'ensemble I'.

1°/ <u>I' contient z</u>.- En effet l'inégalité (1) est vérifiée pour tout $y < z$; la fonction f étant continue, le premier membre de (1) est fonction continue de y, par suite l'inégalité (1) est encore vérifiée à la limite, pour $y = z$.

2°/ <u>z est confondu avec b</u>.- En effet, dans le cas contraire, il existerait un $x' > z$ tel que l'on ait, pour tout x vérifiant les inégalités : $z \leq x \leq x' < b$,

$$\left\| \frac{f(x) - f(z)}{x-z} \right\| \leq \| f'_{+}(z) \| + \varepsilon$$

On aurait donc aussi

$$\| f(x) - f(z) \| \leq (x-z)\left[\| f'_{+}(z) \| + \varepsilon \right] \leq (M+\varepsilon)(x-z)$$

Puis, en tenant compte de (1) pour $y = z$,

$$\| f(x) - f(a) \| \leq \| f(x) - f(z) \| + \| f(z) - f(a) \| \leq (M+\varepsilon)(x-a)$$

Par suite x' appartiendrait à I' et z ne serait pas la borne supérieure de cet ensemble.

L'inégalité (1) est donc vraie pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $y \in I$, elle est donc vraie pour $\varepsilon = 0$.

C. Q. F. D.

<u>Corollaire</u>.- <u>Pour qu'une fonction vectorielle continue dans un intervalle ouvert I soit constante, il faut et il suffit qu'elle ait en tout point de I, une dérivée à droite nulle.</u>

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à tout intervalle compact contenu dans I.

6.- <u>Cas des fonctions</u> ~~vectorielles~~ <u>réelles ; complément au théorème de la moyenne ; variations de ces fonctions</u>.-

Considérons maintenant une fonction réelle $f(x)$ définie, continue et finie sur un intervalle compact $I = [a, b]$, et admettant une dérivée à droite finie en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ - Soient m et M les bornes inférieures et supérieures de cette dérivée. Les deux fonctions énoncer d'abord la prop

abréger en disant qu'il suffit de le faire d'un côté (en remplaçant f par − f)

affine

Proposition

$g(x) = M(x-a) - f(x)$; $\qquad h(x) = f(x) - m(x-a)$

ont pour dérivée à droite respectivement : $g_+(x) = M - f_+(x)$; $\quad h_+(x) = f_+(x) - m$

et on a

$$|g_+(x)| \leq M - m \qquad |h_+(x)| < M - m$$

L'application du théorème ~~des~~ de la moyenne aux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ donne donc

$$|M(b-a) - (f(b) - f(a))| \leq (M-m)(b-a) \; ; \quad |(f(b) - f(a)) - m(b-a)| \leq (M-m)(b-a)$$

et la comparaison de ces deux inégalités conduit à la suivante

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a). \qquad (2)$$

~~Plus généralement, on a pour $a \leq x < y \leq b$~~

~~$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x)$ (3)~~

Lorsque $M = m = k$, on a nécessairement $g_+(x) = h_+(x) = 0$, puis, par application du corollaire précédent, $f(x) = k(x-a) + f(a)$. ~~On dit alors que~~ $f(x)$ est une fonction linéaire de x.

Supposons ~~...~~ maintenant $f(x)$ non linéaire ; alors $m < M$, et il existe une valeur ~~...~~ ~~telle que $h(x) \neq f(a)$; appliquons successivement les inégalités (2) à la fonction $h(x)$ et aux intervalles $[a, x]$ et $[x, b]$, il vient~~ x comprise entre a et b telle que $h(x) \neq f(a)$; appliquons ~~l'inégalité~~ successivement les inégalités (2) à la fonction $h(x)$ et aux intervalles $[a ; x]$ et $[x ; b]$; il vient

$$0 < f(x) - f(a) - m(x-a) \leq (M-m)(x-a)$$

$$0 \leq f(b) - f(x) - m(b-x) \leq (M-m)(b-x)$$

ce qui donne par addition, l'inégalité stricte

$$m(b-a) < f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Le même procédé appliqué à la fonction $g(x)$ donne l'inégalité stricte

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) < M(b-a)$$

d'où par comparaison, ~~l'inégalité~~ les inégalités plus précises

$$m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a) \qquad (3)$$

pourvu que $f(x)$ soit non linéaire — On peut donc énoncer la proposition suivante. (théorème des accroissements finis)

<u>Proposition 6</u>. — <u>Soit $f(x)$ une fonction réelle, continue et finie, en tout point de $I = [a ; b]$, admettant une dérivée à droite sur tout l'intervalle ouvert correspondant. Si m et M sont les bornes inférieures et supérieures de cette dérivée, on a $m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a)$, hormis le cas où $f(x)$ est une fonction linéaire, pour lequel on doit remplacer le signe $<$ par le signe $=$.</u>

<u>Corollaire</u>. — <u>Soit $f(x)$ une fonction réelle continue finie, admettant en tout point d'un intervalle ouvert I une dérivée à droite ; pour qu'elle soit croissante dans I, il faut et il suffit que $f'_+(x) \geq 0$; pour qu'elle soit strictement croissante dans I, il faut et il suffit qu'il existe en outre ~~...~~ dans tout intervalle ouvert intérieur à I, un point x pour lequel $f'_+(x) > 0$.</u>

DELR004

16

? proposition 6

Non, le raisonnement suppose essentiellement le domaine fermé.

Rejeter ça en exercice comme conséquence de Rolle.

remonter

ensuite th. de Rolle ? (mais pas les accr. finis)

Proposition

La partie de cet énoncé concernant les fonctions croissantes résulte trivialement de la définition de la dérivée à droite, et des inégalités (3). Le corollaire indiqué au n° 5 montre de plus que $f(x)$ ne peut être strictement croissante si l'on a $f'_+(x) = 0$ en tout point d'un intervalle ouvert contenu dans I. Réciproquement, si $f(x)$ est croissante, mais non strictement croissante, elle est constante sur un intervalle ouvert contenu dans I, et $f'_+(x) = 0$ en tout point de cet intervalle.

Remarques. – 1. Dans le théorème de la moyenne, la proposition 6 et leurs corollaires, on peut remplacer partout "dérivée à droite" par "dérivée à gauche" ou "dérivée".

2. La ~~théorème de la moyenne~~ ? montre qu'une fonction continue ne peut avoir une dérivée à droite égale à $+\infty$ en tout point d'un intervalle

Variation des fonctions réelles. – La plupart des fonctions réelles continues intervenant dans les applications ont une dérivée à droite en tout point intérieur à leur intervalle de définition, cet intervalle se décomposant en un nombre fini d'intervalles partiels sur lesquels la dérivée est nulle, strictement positive ou strictement négative. La fonction considérée est alors constante, strictement croissante, strictement décroissante sur ces intervalles partiels ; on dit que l'on a "étudié les variations de la fonction" lorsqu'on a ainsi déterminé la décomposition de l'intervalle initial en intervalles partiels sur lesquels le "sens de variation" de la fonction est déterminé. Il faut pour cela rechercher les points de l'intervalle I en lesquels la fonction change de sens de variation. En ces points la dérivée à droite change de signe, ou devient nulle.

Définition 5. – On dit qu'une fonction réelle $f(x)$ définie dans un intervalle I admet un maximum relatif, (resp. maximum relatif strict, minimum relatif, minimum relatif strict) en un point $x_0 \in I$ s'il existe un voisinage V de x_0 dans I tel qu'en tout point $x \in V$ et différent de x_0, on ait $f(x) \leq f(x_0)$, (resp. $f(x) < f(x_0)$, $f(x) \geq f(x_0)$, $f(x) \geq f(x_0)$)

Remarques. 1. – Lorsqu'une fonction définie dans I atteint sa borne supérieure, (resp. sa borne inférieure) en un point de I, elle a un maximum relatif, (resp. minimum relatif) en ce point.

2. – Il ne faudrait pas croire que toute fonction continue et dérivable dans un intervalle rentre dans la catégorie examinée ci-dessus. On peut former des exemples de fonctions
2 continues et dérivables telles que, dans tout intervalle ouvert, leur dérivée prenne des valeurs strictement positives et strictement négatives.

Règle pratique. – Si, en un point intérieur à son intervalle de définition une fonction réelle $f(x)$ possède un maximum, (resp. minimum) relatif, et a en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, la dérivée à droite est négative, (resp. positive) et la dérivée à gauche positive, (resp. négative). En particulier, si f admet une dérivée en ce point, cette dérivée est nulle.

Conséquence de la prop. 7 : forme gle du th. de la moyenne (exerc. 4)

7.- ~~Théorème~~ Dérivation des fonctions ~~inverses~~ réciproques

Proposition 7.- Soit $f(x)$ une fonction réelle, strictement croissante et continue dans un intervalle I ; soit g sa fonction réciproque ; si, en un point x_0, f a une dérivée à droite $f'_+(x_0) \neq 0$, g a au point $y_0 = f(x_0)$ une dérivée à droite égale à $1/f'_+(x_0)$; si $f'_+(x_0) = 0$, g a encore une dérivée à droite égale à $+\infty$. Lorsque f est strictement décroissante et $f'_+(x_0) \neq 0$, $1/f'_+(x_0)$ est la dérivée à gauche de g au point y_0 ; si $f'_+(x_0) = 0$, g a une dérivée à gauche égale à $-\infty$. -

Cela résulte trivialement de la relation

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

où $y = f(x)$.

Si f est strictement croissante, (resp. décroissante) dans I et admet en tout point une dérivée à droite, la fonction dérivée à droite, (resp. à gauche) de $g(y)$ est donc $1/f'_+(g(y))$.

Remarque.- Revenant au ~~cas des fonctions~~ théorème du changement de variable dans le cas des fonctions vectorielles (g), (proposition 4), si on suppose que la fonction $y = f(x)$ définissant le changement de variable est strictement croissante, (resp. décroissante), on voit, sans rien changer au raisonnement fait à cet endroit, que l'hypothèse de l'existence de la dérivée à droite de la fonction f au point x_0, ainsi que celle de l'existence de la dérivée à droite, (resp. à gauche) de la fonction g au point $f(x_0)$ entraînent l'existence de la dérivée à droite de la fonction vectorielle $(x) = g(f(x))$ au point x_0, suivant la formule

$${}'_+(x_0) = g'_+(f(x_0)) \cdot f'_+(x_0)$$

.- Dans le cas particulier de la proposition 7, on a $g(f(x)) = x$, d'où par application de la remarque précédente

$$1 = g'_+(f(x_0)) \cdot f'_+(x_0)$$

ce qui permet de retrouver l'expression de la dérivée à droite de la fonction réciproque.

texte

Exercices.- 1/ Donner un exemple de fonction continue en un point, possédant en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche toutes deux infinies (de même signe ou de signes opposés)

2/ Donner un exemple de fonction continue en un point n'ayant ni

DELR004

20

exercice

texte

dérivée à droite, ni dérivée à gauche en ce point.

- 3. Si une fonction est dérivable en tous points d'un intervalle, les points de continuité de sa dérivée forment un ensemble inépuisable sur tout intervalle fermé contenu dans l'intervalle donné.

- 4. Soit (x) une fonction vectorielle et $g(x)$ une fonction réelle croissante, toutes deux définies sur un intervalle $I = [a, b]$, continues et admettant des dérivées à droites pour $a \leq x < b$; ces dérivées vérifiant la condition

$$\| {}'_{+}(x) \| \leq M\, g'_{+}(x) \qquad a \leqslant x < b$$

où M est une constante positive ; on a alors

$$\| (b) - (a) \| \leq M\,(g(b) - g(a)).$$

- 5. (1 Dieudonné)

- 6. (2 ")

- 7. (3 ")

- 8 - (Théorème ~~de Rolle~~ des accroissements finis). Soit f une fonction continue et finie dans un intervalle compact $I = [a, b]$, admettant en tout point de $]a b[$ une dérivée ; il existe un point c, $a < c < b$, tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$$

-9- Soient f et g deux fonctions continues et finies dans un intervalle compact $I = [a, b]$, ayant des dérivées finies en tout point de $]a, b[$, il existe un point c, $a < c < b$, tel que

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \\ f'(c) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$$

10- Soit f une fonction continue et finie, admettant une dérivée à droite en tout point d'un voisinage d'un point x_0 ; si f'_+ a une limite à droite au point x_0, la fonction $f'_+(x_0)$ est continue à droite en x_0 ; si f'_+ a une limite à gauche au point x_0, f a une dérivée à gauche égale à cette limite, au point x_0.

11, 12, 13 .... (4, 5, 6 .. Dieudonné)

§2.- Primitive.

1.- Position du problème. - Nous ne considérons dans ce paragraphe que des fonctions vectorielles ~~[illegible]~~ d'une variable réelle x, prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel V, normé, complet, admettant $\mathbb{R}$ comme domaine d'opérateurs.

Le problème qui donne naissance à la notion de primitive est celui-ci : Une fonction $f(x)$ étant définie sur un intervalle compact $I = [a; b]$, existe-t-il une fonction $g(x)$, également définie sur I et dont $f(x)$ soit la dérivée ?

Nous n'aborderons pas dans ce livre, ce problème dans sa généralité. Cependant, désignons par J et K respectivement les intervalles $[a; b[$ et $]a; b[$. On peut ~~[illegible]~~ remarquer immédiatement que, d'après la proposition 6 [illegible] du précédent paragraphe, si la fonction f possède en un point $x \in K$ une limite à droite ~~[illegible]~~ $f(x+0)$ et une limite à gauche $f(x-0)$, on a nécessairement $f(x-0) = f(x) = f(x+0)$. Plus généralement, si en un point $x \in K$, elle a une limite à droite ou une limite à gauche, $f(x)$ est nécessairement égal à cette limite.

Envisageons maintenant le problème suivant, un peu plus compréhensif que le précédent : Une fonction $f(x)$ étant définie sur un intervalle compact $I = [a, b]$, existe-t-il une fonction $g(x)$, également définie sur I et dont $f(x)$ soit la dérivée à droite sur J ?

La même proposition 6 montre cette fois que si en $x \in J$, $f(x+0)$ existe, on a nécessairement $f(x) = f(x+0)$; il n'y a plus aucune condition relative aux limites à gauche. Cette simplification des conditions imposées à $f(x)$ conduit à remplacer le premier problème par le second. Nous y trouverons dans la suite d'autres avantages.

Définition 1. - Une fonction vectorielle $f(x)$, définie sur un intervalle compact $I = [a, b]$ est dite continue à droite ~~lorsque [illegible]~~, ~~[illegible]~~ lorsque $f(x+0)$ existe en tout point de l'intervalle $[a, b[$, et se trouve égal à $f(x)$.

Toute fonction continue sur I est évidemment continue à droite.

Nous nous bornerons à considérer dans la suite l'ensemble $\mathfrak{A}$ des fonctions vectorielles $f(x)$ définies, bornées en normes, continues à droite sur I, et prenant leurs valeurs dans V.

Définition 2. On appelle primitive d'une fonction $f \in \mathfrak{A}$ toute fonction g définie sur I, telle qu'en tout point $x \in J$, ~~[illegible]~~ g ait une dérivée à droite égale à f.

Nous verrons que les primitives ne peuvent se définir que sur une partie seulement de l'ensemble $\mathfrak{A}$, mais ce champ de définition comprend toutes les fonctions se rencontrant dans les applications. Le problème général de la recherche des primitives sera considéré dans toute son ampleur au cours d'un livre ultérieur -

Remarque. Les fonctions $f(x)$ ~~[illegible]~~ prenant leurs valeurs dans un espace normé, sont finies en norme, en tout point de I ; mais une fonction continue à droite sur I n'est pas nécessairement bornée en norme sur I, comme le prouve l'exemple d'une fonction réelle $f(x)$, définie sur $[0;1]$, égale à $\frac{1}{1-x}$ sur $[0;1[$ et à 1 pour $x=1$; cette fonction est bien finie et continue à droite, mais elle n'est pas bornée. La restriction supplémentaire d'être bornées en norme que nous avons imposé aux fonctions de $\mathfrak{A}$ n'est donc pas surérogatoire ; elle jouera un rôle essentiel dans la suite.

Proposition 1. Si g_1 et g_2 sont deux primitives de la fonction f, la différence $g_2 - g_1$ est constante sur I. -

C'est une conséquence triviale du premier corollaire du théorème de la moyenne.
Inversement, si on connait une primitive g de la fonction f, toutes les primitives de f seront données par la formule $g + a$, où a désigne une fonction constante sur I.

Proposition 2 - Soit $x_0 \in I$; si la fonction f possède des primitives, il y en a une et une seule qui s'annule en x_0 ;

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. Si g est une primitive de f, la fonction $g(x) - g(x_0)$ est la primitive unique s'annulant en x_0.
Dans toute la suite de ce paragraphe nous fixerons x_0 quelconque dans I, et nous ne considérerons plus que les primitives s'annulant en x_0. Si une telle primitive existe, elle est unique. On la désignera souvent par la notation $g = \mathcal{I}(f)$ en la regardant comme une fonction définie dans $\mathfrak{A}$. Le domaine de définition $\mathcal{B}$ de cette fonction sera une partie de $\mathfrak{A}$.

Proposition 3. - $\mathcal{B}$ n'est pas vide.

En effet, considérons un polynome quelconque $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, où les $a_0 ; a_1 ; \dots ; a_{n-1} ; a_n$ sont des constantes. Ce polynome est évidemment un élément de $\mathfrak{A}$; or il est clair que, quelle que soit la constante a_{n+1}, le polynome $a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + \dots + a_{n-1} \frac{x^2}{2} + a_n \frac{x}{1} + a_{n+1}$, admet $f(x)$ pour dérivée, et l'on peut toujours choisir a_{n+1} de façon à annuler ce polynome pour $x = x_0$. - L'ensemble $\mathcal{B}$ contient donc toutes les fonctions polynomes.

Nous allons maintenant définir une topologie sur $\mathfrak{A}$. Il est d'abord évident que $\mathfrak{A}$ est un espace vectoriel sur le corps R des réels. Nous allons faire de cet espace, un espace vectoriel topologique en y définissant une norme. Nous posons, f étant un élément de $\mathfrak{A}$:

$$\| f \| = \sup_{x \in I} \| f(x) \|$$

qui est bien définie quelle que soit $f \in \mathfrak{A}$ ~~puisque les fonctions~~ puisqu'une telle fonction est bornée en norme sur I. $\| f \|$ est toujours positif, et $\| f \| = 0$ entraîne bien que $f(x)$ est partout nulle sur I ; on a trivialement $\| k f \| = |k| \cdot \| f \|$, enfin on sait, (Liv. III ; Chap. IV ; § 5 ; prop. 12), que

$$\sup_{x \in I} \| f_1(x) + f_2(x) \| \leq \sup_{x \in I} \left[\| f_1(x) \| + \| f_2(x) \| \right] \leq \sup_{x \in I} \| f_1(x) \| + \sup_{x \in I} \| f_2(x) \| ;$$

La fonction $\mathcal{I}(f)$ est donc définie sur une partie non vide $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel normé et elle prend ses valeurs dans l'ensemble des fonctions g, définies sur I, nulles en x_0 et ~~continues~~ dérivables à droite.

<u>Proposition 4</u>. – <u>Soit</u> $f \in \mathcal{B}$; <u>soit</u> $g = \mathcal{I}(f)$, <u>la fonction $g(x)$ est bornée en norme sur I</u>.

En effet, soit x appartenant à I ; appliquons le théorème de la moyenne à la fonction g et à l'intervalle compris entre les nombres x_0 et x ; désignons par M la borne supérieure de $\|f(x)\|$ sur I, il vient

$$\|g(x)\| \leq M|x - x_0|$$

Il en résulte immédiatement $\|g\| \leq M(b-a)$.

La fonction $\mathcal{I}(f)$ prend donc ses valeurs dans l'ensemble $\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$ constitué par les fonctions définies sur I, nulles en x_0, dérivables à droite, bornées en normes sur I. Cette fonction $\mathcal{I}(f)$ est donc définie sur une partie $\mathcal{B}$ de l'espace topologique $\mathcal{A}$ et prend ses valeurs dans une autre partie $\mathcal{B}'$ du même espace $\mathcal{A}$.

La proposition suivante sert de fondement à la construction que nous allons entreprendre de la fonction $\mathcal{I}(f)$:

~~Proposition 5~~. – <u>La fonction $\mathcal{I}(f)$ est ~~uniformément~~ linéaire et uniformément continue sur $\mathcal{B}$</u>.

1/ <u>Linéarité</u>. Soit $f \in \mathcal{B}$ et $g = \mathcal{I}(f)$; quelle que soit la constante réelle k, kg est nulle en x_0 et a pour dérivée à droite kf, de plus cette dernière fonction est continue à droite et bornée en norme sur I ; elle appartient donc à $\mathcal{B}$ et l'on a $\mathcal{I}(kf) = k\,\mathcal{I}(f)$.

Soient maintenant f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{B}$ et $g_1 = \mathcal{I}(f_1)$; $g_2 = \mathcal{I}(f_2)$; la fonction $g_1 + g_2$ est nulle en x_0 et a pour dérivée à droite $f_1 + f_2$, de plus cette dernière fonction est continue à droite et bornée en norme sur I ; elle appartient donc à $\mathcal{B}$ et l'on a $\mathcal{I}(f_1 + f_2) = \mathcal{I}(f_1) + \mathcal{I}(f_2)$. Ce qui achève d'établir, en même temps que la linéarité de la fonction $\mathcal{I}$, le fait que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ~~sont des~~ variétés linéaires dans $\mathcal{A}$.

2/ <u>Continuité</u>. La démonstration de la proposition 4 prouve que si $f \in \mathcal{A}$ et si $g = \mathcal{I}(f)$, on a $\|g\| \leq (b-a)\|f\|$; compte tenu de la linéarité de la fonction $\mathcal{I}$, on a aussi $\|g_1 - g_2\| \leq (b-a)\|f_1 - f_2\|$, ce qui établit l'<u>uniforme continuité</u> de la fonction $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{B}$, car g_1 et g_2 pourront être rendus aussi voisins qu'on le voudra en prenant les deux points <u>quelconques</u> f_1 et f_2 suffisamment voisins.

2.– <u>Les fonctions en escaliers</u>. –

Reprenons l'intervalle $I = [a ; b]$, soit $(a_n)_{n \in N}$ une famille <u>strictement</u> croissante de points de I ; supposons en outre que

$$\lim_{n \to -\infty} a_n = a \; ; \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = b$$

Nous dirons que I résulte de la juxtaposition des intervalles compacts $[a_n ; a_{n+1}]$.

Définition 3.- Supposons définie dans $[a_n ; a_{n+1}]$ pour tout $n \in$ une fonction $f_n(x)$ continue à droite. La fonction $f(x)$ définie dans I par l'égalité

$$f(x) = f_n(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in [a_n ; a_{n+1}[$$

est une fonction continue à droite résultant de la juxtaposition des fonctions f_n

Si les fonctions f_n sont bornées en norme sur leurs intervalles de définition respectifs, et si les bornes supérieures de leurs normes sont bornées dans leur ensemble, la fonction $f \in \mathfrak{A}$.

Définition 4.- Une fonction en escaliers sur I résulte de la juxtaposition de fonctions constantes, bornées en normes dans leur ensemble.

L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions en escaliers sur I fait donc partie de $\mathfrak{A}$; c'est évidemment une variété linéaire dans $\mathfrak{A}$.

Proposition 5.- $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{B}$. -

Soit f une fonction en escalier résultant de la juxtaposition de fonctions constantes et égales à c_n dans les intervalles $[a_n ; a_{n+1}]$; Nous définirons une primitive g de f par récurrence de la façon suivante ;

$$g(a_0) = 0 ; \qquad g(x) = g(a_n) + c_n(x - a_n) \quad \text{pour} \quad x \in [a_n ; a_{n+1}] ; \quad (n > 0)$$

$$g(x) = g(a_{n+1}) + c_n(x - a_{n+1}) \quad \text{pour} \quad x \in [a_n ; a_{n+1}] ; \quad (n < 0).$$

Il est clair que g est une primitive de f, par suite $\mathcal{I}(f) = g(x) - g(x_0)$; et $f \in \mathcal{B}$.

Considérons maintenant l'adhérence $\bar{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathfrak{A}$; $\mathcal{E}$ est partout dense dans $\bar{\mathcal{E}}$ relativement à la topologie induite, et il résulte du théorème I, que la fonction $\mathcal{I}(f)$ est uniformément continue sur $\mathcal{E}$ relativement à la structure uniforme induite dans $\mathcal{E}$ et dans $\bar{\mathcal{E}}$. Cette fonction prenant ses valeurs dans $\mathfrak{A}$ qui est séparé et complet, on peut lui appliquer le théorème du prolongement par continuité (Livre III, Chap. II, § 3, Th I), et définir ainsi sur $\bar{\mathcal{E}}$ une fonction $\bar{\mathcal{I}}(f)$ uniformément continue, et égale à $\mathcal{I}(f)$ sur $\mathcal{E}$.

Théorème II.- $\bar{\mathcal{E}}$ est contenu dans $\mathcal{B}$, et l'on a, sur $\bar{\mathcal{E}}$, $\bar{\mathcal{I}}(f) = \mathcal{I}(f)$

Soit f appartenant à $\bar{\mathcal{E}}$ sans appartenir à $\mathcal{E}$. Soit $g = \bar{\mathcal{I}}(f)$. Il faut montrer que $g(x)$ possède une dérivée à droite sur I égale à $f(x)$. Soit $\mathcal{E}'$ l'image directe de $\mathcal{E}$ par la fonction $\mathcal{I}$. f et g appartiennent à $\mathfrak{A}$ et sont donc définies sur I, continues à droite et bornées en normes; de plus $g \in \bar{\mathcal{E}}'$ et $g(x_0) = 0$. Donnons nous deux nombres

α et β strictement positifs et arbitrairement petits. Considérons l'ensemble W_α des fonctions h de $\mathcal{E}'$ qui sont telles que $\| h'_+ - f \| \leq \alpha$; ces fonctions sont les images par $\mathcal{I}$ des fonctions en escaliers approchant f en norme à α près ; leur ensemble n'est pas vide puisque $\mathcal{E}$ est partout dense dans $\bar{\mathcal{E}}$. De plus les W_α ; $(\alpha > 0)$ constituent une base du filtre des voisinages de g dans $\bar{\mathcal{I}}(\bar{\mathcal{E}})$, par suite de l'uniforme continuité de la fonction $\bar{\mathcal{I}}$ sur $\bar{\mathcal{E}}$. Soit alors $x \in I$; par suite de la continuité à droite de f, il existe k strictement positif tel que $\| f(y) - f(x) \| \leq \beta$ pour $x < y < x + k$; on a alors $\| h'_+(y) - f(y) \| \leq \alpha$; puis $\| h'_+(y) - f(x) \| \leq \alpha + \beta$. La fonction de y : $h(y) - y f(x)$ admet pour dérivée à droite $h'_+(y) - f(x)$, appliquons-lui le théorème de la moyenne sur $[x ; y]$; il vient

$$\left\| \frac{h(y) - h(x)}{y - x} - f(x) \right\| \leq \alpha + \beta$$

Faisons d'abord tendre α vers 0. Le filtre de base W_α ayant pour limite g il vient par passage à la limite

$$\left\| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} - f(x) \right\| \leq \beta$$

Faisons enfin tendre β vers 0. k tendra vers 0 par suite de la continuité à droite de la fonction f, y tend donc vers x et l'on voit que la fonction g possède au point x une dérivée à droite $g'_+(x) = f(x)$.

C. Q. F. D.

Nous poserons maintenant $\mathcal{B} = \bar{\mathcal{E}}$. Le procédé qui vient d'être exposé permet donc de définir les primitives des fonctions f ~~appartenant~~ appartenant à l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions limites uniformes, en normes, de fonctions en escaliers, bornées en normes.

3. – Propriétés de l'ensemble $\mathcal{B}$.

Le théorème I montre d'abord que $\mathcal{B}$ est une variété linéaire dans $\mathfrak{A}$.

Proposition 6 – $\mathcal{B}$ contient l'ensemble des fonctions continues sur I.

Notons d'abord que si f est une fonction continue sur I, $\| f(x) \|$ est une fonction réelle positive, finie et continue sur l'intervalle compact I ; d'après une propriété connue, (Livre III, Chap IV, § 6, Th. I) elle est bornée sur I et la fonction f appartient nécessairement à $\mathfrak{A}$. De plus f est une application continue du compact I dans l'espace uniforme V, donc f est uniformément continue dans I. (Livre III ; Chap. II ; § 4 ; Th. 2), par suite, étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit il existe $\eta > 0$ tel que, quelsque soient x et y appartenant tous deux à un intervalle quelconque contenu dans I et de longueur inférieure à η, on ait $\| f(x) - f(y) \| \leq \varepsilon$. Divisons alors I en un nombre fini d'intervalles de longueur inférieure à η ; considérons la fonction en escalier $g(x)$ obtenue par juxtaposition de fonctions constantes dans chacun de ces intervalles, la valeur de $g(x)$ dans chacun des intervalles étant égale à l'une des valeurs de $f(x)$ dans le même intervalle. On a évidemment $\|f - g\| \leq \varepsilon$. On peut donc approcher la fonction f en norme d'aussi près qu'on le veut par le moyen d'une fonction en escaliers, donc $f \in \bar{\mathcal{E}} = \mathcal{B}$.

On retrouve ainsi, en particulier, les polynomes que nous savons bien appartenir à $\mathcal{B}$.

~~Proposition 7~~ Définition 5. - On dit qu'une fonction est continue par morceaux et bornée en norme dans I, lorsqu'elle est juxtaposition de fonctions continues, (donc bornées en norme) les bornes en norme de ces fonctions étant bornées dans leur ensemble.

Proposition 7 - $\mathcal{B}$ contient l'ensemble des fonctions continues par morceaux et bornée en norme ~~sur~~ dans I.

Remarquons d'abord que, par définition, ces fonctions appartiennent bien à l'espace $\mathcal{O}\!\mathcal{C}$. Considérons alors une fonction f continue par morceau et bornée en norme dans I, soit f_1 l'une des fonctions continues sur un intervalle compact, intervenant dans la formation de f par juxtaposition. f_1 peut être approchée en norme à ε près par une fonction en escalier ~~H~~; soit h_1 cette dernière. Opérons de même sur les autres fonctions continues dont la juxtaposition fournit f, et juxtaposons à leur tour les fonctions en escalier telle que h_1; on obtient ainsi une nouvelle fonction en escalier approchant f en norme à ε près. Comme ε est arbitrairement petit, la proposition se trouve établie.

Remarque 1. La proposition précédente n'épuise pas ~~tout~~ le contenu de l'ensemble $\mathcal{B}$. On peut d'ailleurs caractériser intrinsèquement les fonctions appartenant à $\mathcal{B}$. (cf. Exercice ...). Cette caractérisation n'a qu'un intérêt théorique, d'ailleurs assez minime. La classe de fonctions définie par la proposition 7 étant d'une étendue plus que suffisante dans la plupart des applications, nous nous bornerons, conformément aux limitations que nous nous imposons dans ce livre, à la constatation de la présence de cette classe à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{B}$.

Remarque 2.- On peut toutefois, lorsque $V = R$, montrer que $\mathcal{B}$ contient aussi une autre classe importante de fonctions réelles, à savoir les fonctions monotones continues à droite et bornées. Soit en effet $f(x)$ la fonction monotone considérée, définie sur $I = [a\,;\,b[$; soient m et M ses bornes inférieure et supérieure, toutes deux finies, soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. On peut diviser l'intervalle $[m\,;\,M]$ en un nombre fini d'intervalles de longueur inférieure à ε ; les images inverses de ces intervalles par la fonction f sont aussi des intervalles (éventuellement vide ou se réduisant à un point) et l'intervalle I résulte de la juxtaposition de ceux de ces intervalles en nombre fini, qui sont de longueur non nulle. En procédant comme dans la démonstration de la proposition 6, on construit immédiatement une fonction en escalier approchant la fonction f à ε près en norme, ce qui établit la proposition.

Considérons maintenant trois espaces vectoriels normés complets $V_1\,;\,V_2\,;\,V_3$, puis, comme nous l'avons fait au cours du §1, (Prop. 3), une fonction bilinéaire continue

$$(x_1\,;\,x_2) \to [x_1 \cdot x_2]$$

définie dans $V_1 \times V_2$, à valeurs dans V_3. Soit toujours $I = [a\,;\,b[$; envisageons, comme plus haut, les espaces vectoriels normés $\mathfrak{A}_1\,;\,\mathfrak{A}_2\,;\,\mathfrak{A}_3$ respectivement formés par les fonctions définies sur I, continues à droite, bornées en normes et à valeurs dans $V_1\,;\,V_2\,;\,V_3$. Soient toujours $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ les ensembles de fonctions en escalier correspondantes, puis $\mathcal{B}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1\,;\,\mathcal{B}_2 = \overline{\mathcal{E}}_2\,;\,\mathcal{B}_3 = \overline{\mathcal{E}}_3$.

Proposition 8. Si $f_1 \in \mathcal{B}_1$ et si $f_2 \in \mathcal{B}_2$, la fonction $f_3 = [f_1 \cdot f_2]$ définie sur I, à valeurs dans V_3 appartient à $\mathcal{B}_3$. -

Il est d'abord évident que si ~~f~~ $f_1 \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 \in \mathcal{E}_2$, la fonction $f_3 = [f_1 \cdot f_2]$ appartient à $\mathcal{E}_3$. La continuité de la fonction bilinéaire et l'identité de $\mathcal{B}_1\,;\,\mathcal{B}_2\,;\,\mathcal{B}_3$ avec $\overline{\mathcal{E}}_1\,;\,\overline{\mathcal{E}}_2\,;\,\overline{\mathcal{E}}_3$ respectivement entraînent alors la proposition.

En particulier si $V_1 = V_2 = V_3 = R$ et si la fonction bilinéaire se réduit au produit ordinaire dans R^2, la proposition précédente s'exprime en disant que $\mathcal{B}$ est alors un anneau.

4.- Intégrales ; Notations ; propriétés –

Intégrales impropres

Soit I un intervalle quelconque, ouvert ou semi-ouvert dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $f(x)$ une fonction ~~de la variable~~ vectorielle de la variable réel x, définie sur I, prenant ses valeurs dans un espace vectoriel normé complet V, et ~~appartenant~~ limite uniforme de fonctions en escaliers sur tout intervalle compact J ~~inclus~~ contenu dans I ; désignons par u_J la valeur de l'intégrale définie $\int_J f(t)\,dt$;

Définition. – On dit que l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle ouvert I, si elle existe, et on désigne cette intégrale $u = \int_I f(t)\,dt$ sous le nom d'intégrale impropre

---

Intégrales impropres

Soit I un intervalle quelconque, non-vide, ouvert ou semi-ouvert dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $f(x)$ une fonction vectorielle de la variable ~~re~~ réelle x, définie sur I, prenant ses valeurs dans un espace vectoriel normé complet V, qui soit limite uniforme de fonctions en escaliers sur tout intervalle compact $J \subset I$.
On désignera dans la suite par u_J la valeur de l'intégrale définie $\int_J f(t)\,dt$, et par $\mathcal{F}$ le filtre ~~ayant pour base~~ sur I ayant pour base les complémentaires dans I, des intervalles compacts $J \subset I$.

Définition – On désigne sous le nom ~~de~~ d'intégrale impropre de la fonction f sur l'intervalle I, la limite, si elle existe, des u_J suivant le filtre $\mathcal{F}$.

On écrit alors

$$u = \lim_{\mathcal{F}} u_J = \int_I f(t)\,dt.$$

et on dit que l'intégrale impropre $\int_I f$ est convergente.

Proposition 1 – Pour que l'intégrale impropre de la fonction f sur l'intervalle I converge, ~~existe~~ il faut et il suffit qu'à tout ε ~~positif~~ strictement positif corresponde un intervalle compact $J \subset I$, tel que l'on ait, pour tout couple d'intervalles d'intervalles compacts J' et J'' satisfaisant à $J \subset J' \subset J'' \subset I$,

$$\| u_{J'} - u_{J''} \| \leqslant \varepsilon.$$

C'est une conséquence triviale de ce que l'espace V est uniforme et complet.

Propriétés des intégrales impropres

Elles résultent immédiatement, par passage à la limite, des propriétés des intégrales définies ordinaires _ On observera que, si dans les relations par lesquelles s'expriment ces propriétés, figurent 2 (resp. 3) intégrales impropres, il suffit de l'existence de l'une (resp. ~~de~~ deux) de ces intégrales, pour pouvoir conclure l'existence de la deuxième, (resp. troisième).

On a alors les énoncés suivants :

1/ Soit I un intervalle ouvert, ou semi ouvert, de $\bar{\mathbb{R}}$; a, un point appartenant à I et le partageant en deux intervalles semi-ouverts I_1 et I_2 ; si $f(x)$ est définie sur I, et si deux des trois intégrales impropres

$$\int_I f(t)\,dt \; ; \quad \int_{I_1} f(t)\,dt \; ; \quad \int_{I_2} f(t)\,dt$$

convergent ~~existent~~, la troisième converge ~~existe~~ aussi, et l'on a

$$\int_I f(t)\,dt = \int_{I_1} f(t)\,dt + \int_{I_2} f(t)\,dt .$$

on le voit par passage à la limite dans la relation

$$\int_J f(t)\,dt = \int_{J_1} f(t)\,dt + \int_{J_2} f(t)\,dt ,$$

où J est un compact contenant a, intérieur à I et partagé en deux intervalles compacts J_1 et J_2 par le point a.

2/ Si l'intégrale impropre $\int_I f(t)\,dt$ converge ~~existe~~, il en est de même de l'intégrale impropre $\int_I k\,f(t)\,dt$, et l'on a

$$\int_I k\,f(t)\,dt = k \cdot \int_I f(t)\,dt .$$

k désignant une constante réelle quelconque.

3/ Si $f = f_1 + f_2$ et si deux des trois intégrales impropres $\int_I f$; $\int_I f_1$; $\int_I f_2$ convergent ~~existent~~, la troisième converge ~~existe~~ aussi, et l'on a

$$\int_I f = \int_I f_1 + \int_I f_2$$

4/. Soient encore deux fonctions f et g définies, dérivables à droite sur l'intervalle ouvert ou semi-ouvert I, prenant leurs valeurs respectivement dans deux espaces vectoriels normés complets V et W, puis une fonction bilinéaire continue $(x;y) \to [x.y]$ définie dans $V \times W$, à valeurs dans un troisième espace vectoriel normé complet U; désignons par $[f.g]_J$ la variation de la fonction $[f.g]$ entre l'origine et l'extrémité de l'intervalle compact $J \subset I$; désignons aussi, si elle existe par $[f.g]_I$ la limite de $[f.g]_J$ suivant le filtre $\mathcal{F}$.

<u>Si deux des trois expressions</u> $\int_I [f(t).g'_+(t)]\,dt$; $\int_I [f'_+(t).g(t)]\,dt$; $[f.g]_I$ <u>convergent ~~existent~~</u>, <u>la troisième ~~aussi~~ ~~existe~~ aussi</u>, et l'on a

$$\int_I [f(t).g'_+(t)]\,dt = [f.g]_I - \int_I [f'_+(t).g(t)]\,dt.$$

5/ Soit $f(x)$ une fonction réelle définie et continue sur un intervalle ouvert, ou semi-ouvert, I, dérivable à droite sur tout semi ouvert à droite contenu dans I; Soit g une fonction vectorielle continue sur $f(I)$. <u>Si l'une des deux intégrales impropres</u>

$$\int_I g(f(t))\,f'_+(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_{f(I)} g(t)\,dt$$

<u>converge ~~existe~~</u>, <u>l'autre converge ~~existe~~ aussi, et ces deux ~~intervalles~~ intégrales sont égales</u>.

On a le même énoncé en supposant de plus $f(x)$ strictement croissante sur I, (ou strictement décroissante), et en demandant seulement que g soit tel que l'une des deux intégrales existe.

<u>Intégrales absolument convergentes</u>

Soit toujours $f(x)$ une fonction vectorielle définie sur un ouvert ou semi ouvert I, limite uniforme de fonctions en escalier sur tout ~~compact~~ ~~tout~~ intervalle compact contenu dans I. Il en est alors de même de la fonction réelle et positive $\|f(x)\|$

<u>Proposition</u> <u>Pour que l'intégrale impropre</u> $\int_I f(t)\,dt$ <u>converge, il suffit que l'intégrale impropre</u> $\int_I \|f(t)\|\,dt$ <u>converge également</u>.

Principe de comparaison des intégrales impropres :

En effet, sur tout ~~compact~~ intervalle compact $J \subset I$, on a
$$\left\|\int_J f(t)\,dt\right\| \leq \int_J \|f(t)\|\,dt$$
Si $J \subset J' \subset J''$ sont trois intervalles compacts contenus dans I, la différence $J''-J'$ est la somme de 2 intervalles compacts K et L contenus dans I, et on a
$$\left\|\int_{J''} f - \int_{J'} f\right\| = \left\|\int_K f + \int_L f\right\| \leq \left\|\int_K f\right\| + \left\|\int_L f\right\| \leq \int_K \|f\| + \int_L \|f\|$$
$$\leq \int_{J''} \|f\| - \int_{J'} \|f\|$$
ce qui établit notre assertion, d'après la proposition 1.

Formule de la moyenne pour les intégrales impropres.

Soit $f(x)$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert I, limite ~~..~~ uniforme de fonctions en escalier sur tout intervalle compact $J \subset I$, et telle de plus que pour tout $x \in I$, on ait
$$\|f(x)\| \leq M$$
M désignant une constante positive ; Soit de même $g(x)$ une fonction réelle, strictement positive, définie sur I, telle que l'intégrale impropre
$$\int_I g(t)\,dt$$
soit convergente ; il en est alors de même de $\int_I f(t)\,g(t)\,dt$ et on a
$$\left\|\int_I f(t)\,g(t)\,dt\right\| \leq M \int_I g(t)\,dt.$$
Si $J \subset J' \subset J''$ sont trois intervalles compacts contenus dans I, on a
$$\left\|\int_{J''} fg - \int_{J'} fg\right\| = \left\|\int_K fg + \int_L fg\right\| \leq \left\|\int_K fg\right\| + \left\|\int_L fg\right\|$$
$$\leq M\left[\int_K g + \int_L g\right] = M\left[\int_{J''} g - \int_{J'} g\right]$$
Ce qui établit l'existence de l'intégrale impropre $\int_I fg$; l'inégalité annoncée résulte alors d'un passage à la limite suivant le filtre $\mathcal{F}$, dans l'inégalité
$$\left\|\int_J f(t)\,g(t)\,dt\right\| \leq M \int_I g(t)\,dt.$$

Fonctions élémentaires d'une variable réelle. (Théorie élémentaire)

Chapitre I

Dérivée ; primitive ; intégrale.

§ 1.- Généralités - Dérivation.

1. Préliminaires

Les fonctions qui se rencontrent le plus fréquemment en analyse sont définies dans R ou dans C et prennent leurs valeurs dans un espace vectoriel admettant R ou C respectivement comme domaine d'opérateurs. Ce livre est consacré à l'étude des propriétés les plus simples et les plus importantes des fonctions ~~définies~~ d'une variable réelle. Certaines de ces propriétés, et particulièrement ~~spécialement~~ celles dont il sera question dans le présent paragraphe s'étendront immédiatement aux fonctions ~~définies d~~ d'une variable complexe, ~~(qui feront d'ailleurs l'objet d'une étude générale~~ et même plus généralement aux fonctions définies sur un corps topologique K et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel topologique V admettant K comme domaine d'opérateurs.

> Un espace vectoriel ~~topologique~~ V, d'éléments $\vec{f}$; $\vec{g}$; $\vec{h}$;... sur un corps topologique K d'éléments $x, y, z, \ldots$ est un espace topologique muni d'une structure d'espace vectorielle telle que les opérations
>
> $$\vec{f} + \vec{g} \;;\quad -\vec{f} \;;\quad x\vec{f}$$
>
> y soient continues.

Le cas des fonctions d'une variable complexe, très important en lui même, fera l'objet de plusieurs livres ultérieurs du présent traité. Le cas des fonctions d'une variable x décrivant un corps topologique K, est d'un intérêt infiniment moindre et ne semble pas mériter d'étude particulière, aussi nous bornerons-nous à signaler sommairement, dans la suite, les définitions et propriétés qui restent valables pour ce cas très général.

Soit donc V un espace vectoriel sur le corps R des nombres réels. Les éléments de V, ou <u>vecteurs</u>, seront désignés par des lettres ~~grasses~~ minuscules grasses, les nombres réels par des minuscules italiques. La topologie dans V sera définie au moyen d'une norme ~~[illegible]~~ possédant, comme il est bien connu les propriétés suivantes : (Liv. III, Chap. VII ; par.)

$\|\vec{f}\| > 0 ; \quad (\vec{f} \neq 0)$

$\|x\vec{f}\| = |x| \cdot \|\vec{f}\|$

$\|\vec{f} + \vec{g}\| \leq \|\vec{f}\| + \|\vec{g}\|$

Enfin V sera supposé complet.

Nous considérons donc les fonctions $\vec{f}(x)$ ~~à valeurs de~~ définies dans R, à valeurs dans V. ~~Lorsque x décrit la partie de R sur laquelle $\vec{f}(x)$ est défini~~ ~~[illegible]~~

l'image directe par $\vec{f}(x)$ de la partie de R sur laquelle cette fonction est définie, se nomme souvent « l'hodographe » de la fonction $\vec{f}(x)$.

Lorsque l'espace V se réduit à l'espace R^n, cet hodographe prend le nom de courbe de l'espace à n dimensions.

Lorsque V se réduit à R, les fonctions considérées ont des valeurs réelles, et prennent le nom de fonctions réelles de la variable réelle x ; on les désigne alors par la notation $f(x)$. Soit A la partie de R sur laquelle est définie la fonction ; l'ensemble représentatif, dans R^2, déterminé par les relations

$$x \in A ; \qquad y = f(x)$$

se nomme ~~souvent~~ la courbe représentative de la fonction $f(x)$. On notera que cette ~~représentation géométrique~~ courbe est distincte de l'hodographe de $f(x)$, lequel se réduit ici à une partie de R.

2.- Dérivée. Calcul formel - Soit $\vec{f}(x)$ une fonction définie sur une partie A de R et prenant ses valeurs dans V. Soit $x_0 \in A$, supposons un point non isolé de A.

$f(x)$ continue en x_0

Définition 1 si

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} \frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0)}{x - x_0}$$

existe, on lui donne le nom de dérivé de $\vec{f}$ au point x_0, et on la note $\vec{f}'(x_0)$.

$\boxed{*}$ restriction non vraie

Définition 2. Si la dérivée de $\vec{f}(x)$ existe en tout point d'une partie $B \subset A$, on dit que $\vec{f}(x)$ est dérivable sur B. Cette dérivée $\vec{f}'(x)$ est alors une nouvelle fonction de la variable réelle x, définie sur B et prenant ses valeurs dans V.

Exemples. Si la fonction $\vec{f}(x)$ est constante et égale à $\vec{a}$, sa dérivée est nulle.

.. Si la fonction $\vec{f}(x)$ se réduit à $\vec{a}\, x$, le vecteur $\vec{a}$ étant fixe, on a $\vec{f}'(x) = \vec{a}$.

Calcul formel des dérivées

Proposition 1. Si $\vec{f}(x)$ et $\vec{g}(x)$ toutes deux définies sur $A \subset R$ et prenant leurs valeurs dans V ont respectivement une dérivé en $x_0 \in A$, la fonction $\vec{f}(x) + \vec{g}(x)$ a en ce point une dérivé égale à la somme $\vec{f}'(x_0) + \vec{g}'(x_0)$.

C'est une conséquence immédiate de la continuité de $\vec{f} + \vec{g}$ en tout point de $V \times V$.

Proposition 2. Si a est un nombre réel fixe, et si $\vec{f}(x)$ possède une dérivé en $x_0 \in A \subset R$, la fonction $a f(x)$ possède en ce point une dérivé égale à $a f'(x_1)$

C'est une conséquence immédiate de la continuité de $a\vec{f}$ en tout point $\vec{f}$ de V.

Considérons maintenant trois espaces vectoriels normés : V_1 ; V_2 ; V_3, tous trois sur le corps des réels, et une fonction continue $\vec{f}_3 = [\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2]$ définie sur $V_1 \times V_2$, à valeurs dans V_3, fonction que nous supposerons bilinéaire, satisfaisant donc aux conditions :

$$[x\vec{f}_1 \cdot y\vec{f}_2] = xy[\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2] \; ; \qquad [(\vec{f}_1+\vec{g}_1)\cdot(\vec{f}_2+\vec{g}_2)] = [\vec{f}_1\cdot\vec{f}_2] + [\vec{f}_1\cdot\vec{g}_2] + [\vec{g}_1\cdot\vec{f}_2] + [\vec{g}_1\cdot\vec{g}_2]$$

Soient alors $\vec{f}_1(x)$ et $\vec{f}_2(x)$ deux fonctions définies sur une partie A de R, à valeurs dans V_1 et V_2 respectivement ; $\vec{f}_3(x) = [\vec{f}_1(x) \cdot \vec{f}_2(x)]$ est une fonction définie sur A, à valeurs dans V_3.

Proposition 3. Si $\vec{f}_1(x)$ et $\vec{f}_2(x)$ ont respectivement une dérivée en un point $x_0 \in A$, $\vec{f}_3(x)$ possède en ce point une dérivée égale à :

$$\vec{f}_3'(x_0) = [\vec{f}_1(x_0)\cdot\vec{f}_2'(x_0)] + [\vec{f}_1'(x_0)\cdot\vec{f}_2(x_0)].$$

En effet, la bilinéarité de la fonction $[\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2]$ entraîne :

$$\vec{f}_3(x) - \vec{f}_3(x_0) = [\vec{f}_1(x)\cdot(\vec{f}_2(x)-\vec{f}_2(x_0))] + [(\vec{f}_1(x)-\vec{f}_1(x_0))\cdot\vec{f}_2(x_0)]$$

La propriété annoncée résulte alors de la continuité de $[\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2]$ dans $V_1 \times V_2$, et de la continuité de $\vec{f}_3 + \vec{g}_3$ dans V_3.

Exemples. 1/ Soit $\vec{a}$ un élément fixe de V ; la fonction ~~f(x)=~~ $\vec{f}(x) = x^n \vec{a}$ a pour dérivée, en tout point de R : $\vec{f}'(x) = n x^{n-1}\vec{a}$. ($n \in Z$).

C'est ce qu'on a constaté plus haut pour $n = 1$. La vérification par récurrence se fait sans peine en écrivant $\vec{f}(x) = x.(x^{n-1}\vec{a})$ et en regardant cette expression comme une fonction bilinéaire définie dans R × V.

2/ Soient $\vec{a}_0$, $\vec{a}_1$; ... $\vec{a}_n$ n vecteurs fixes de V.

La fonction

$$\vec{f}(x) = x^n\vec{a}_0 + x^{n-1}\vec{a}_1 + \cdots + x\vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n$$

a pour dérivée, en tout point de R :

$$\vec{f}'(x) = n\, x^{n-1}\vec{a}_0 + (n-1)\, x^{n-2}\vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_{n-1} \; ;$$

c'est une conséquence immédiate de la proposition 1 et de l'exemple précédent.

3/ Soient $f(x)$ une fonction réelle, $\vec{g}(x)$ une fonction à valeurs dans V, toutes deux définies et dérivables sur $A \subset R$; la fonction $\vec{f}(x) = f(x)\,\vec{g}(x)$ est dérivable sur A et admet pour dérivée

$$\vec{f}'(x) = f'(x)\,\vec{g}(x) + f(x)\,\vec{g}'(x).$$

C'est un aspect particulier de la proposition 3.

Remarque. Les définitions, propositions, démonstrations et exemples précédents s'appliquent sans aucun changement au cas des fonctions définies sur un corps topologique K et à valeurs dans un espace vectoriel topologique sur K.

3.- Changement de variable. (Théorème des fonctions composées).-

Proposition 4. Soit $f(x)$ une fonction réelle définie sur une partie A de R et prenant ses valeurs dans une partie B de R, ayant une dérivée au point $x_0 \in A$, Soit $\vec{g}(x)$ une fonction définie sur B, prenant ses valeurs dans V, ayant une dérivée au point $f(x_0)$; la fonction $\vec{f}(x) = \vec{g}(f(x))$ ~~admet~~ ~~une~~ possède une dérivée au point x_0 égale à

$$\vec{f}'(x_0) = \vec{g}'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

La fonction $\vec{f} = f \circ \vec{g}$ résulte de la composition des fonctions f et $\vec{g}$. On dit aussi qu'elle résulte du changement de variable réelle $y = f(x)$ effectuée dans la fonction $\vec{g}(y)$. ~~[illegible]~~ Supposons d'abord que $f(x)$ ne se réduise pas à

$$\cancel{\frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0)}{x - x_0} = \frac{\vec{g}(f(x)) - \vec{g}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

 DELROOU.

une constante pour x voisin de x_0. Il existe alors des valeurs de x aussi voisines qu'on le veut de x_0 rendant $f(x) - f(x_0) \neq 0$, et on a

$$\frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0)}{x - x_0} = \frac{\vec{g}(f(x)) - \vec{g}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

lorsque x tend vers x_0 sur A, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ dans B, et en passant à la limite, on obtient bien l'égalité annoncée.

Cette égalité subsiste si $f(x)$ est une fonction constante, car il en est alors de même de la fonction $\vec{f}(x)$, de sorte que les deux membres de l'égalité sont nuls.

<u>Remarque</u>: La proposition et sa démonstration sont encore valables lorsque V étant un espace vectoriel topologique sur un corps topologique K', $f(x)$ est une application d'un sous corps K de K' dans K', et $\vec{g}(x)$ une fonction définie dans K', à valeurs dans V.

2. Considérons en particulier l'application $f(x) = \frac{1}{x}$ de la partie $K^* = K - \{0\}$ d'un corps topologique K, dans lui-même. Cette fonction est dérivable en tout point $x_0 \in A$; on a en effet

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-1}{x x_0}$$

puis

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in K^*}} \frac{-1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

d'après les axiomes des groupes topologiques. (livre III ; Chap. III ; § 5. n° 5).

<u>Corollaire 1.</u> – <u>Soit $f(x)$ une application d'un corps topologique K sur un sur-corps K' de K ; si en point x_0 de K, $f(x_0)$ existe et est $\neq 0$, et si f possède une dérivée, l'application $1/f$ possède aussi une dérivée égale à $-f'(x_0)/f^2(x_0)$.</u>

C'est ce qu'on vérifie immédiatement par application de la remarque précédente et de la proposition 4.