LIVRE IV
FONCTION D'UNE VARIABLE REELLE
(THEORIE ELEMENTAIRE)
CHAPITRE I-II (ETAT 2)

Rédaction n° 003

Nombre de pages : 70

Nombre de feuilles : 70

Livre IV || Fonctions d'une variable réelle

Chap I. (Dérivées - primitives intégrales)

 Chapitres I-II A 3

2

LIVRE IV

Fonctions d'une variable réelle, (Théorie élémentaire).

(Ancien CHAPITRE I.) Etat 2

Dérivée. Primitive. Intégrale.

Paragraphe 1.- Généralités, dérivée première.

1.- Préliminaires.

Les fonctions qui se rencontrent le plus souvent en analyse sont définies dans le corps R des nombres réels, ou dans le corps C des nombres complexes, et prennent leurs valeurs dans des espaces vectoriels normés admettent respectivement R ou C comme domaine d'opérateurs.

Rappelons qu'un espace vectoriel V sur le corps des réels R (ou sur le corps des complexes C), dont les éléments, ou vecteurs, sont désignés par des minuscules grasses, alors que les nombres réels (resp. complexes) le sont par des minuscules italiques, est dit normé, lorsqu'on attache à chaque élément x de l'espace, un nombre réel positif, appelé norme de l'élément considéré, et désigné par la notation $\|x\|$, cette norme possédant les propriétés suivantes : (Livre III, Chap.VII,par.)

$$\|x\| > 0, \text{ (pour } x \neq 0) ; \qquad \|x\| = 0 , \text{ (pour } x = 0) ;$$

$$\|kx\| = |k| \cdot \|x\| ; \qquad \|x+y\| < \|x\| + \|y\| ;$$

Une telle norme définit sur V une structure d'espace métrique, donc une topologie et une structure uniforme, pour laquelle les fonctions kx et $x+y$ sont continues.

Définition 1.- On appelle fonction vectorielle une fonction définie dans R ou dans C et prenant ses valeurs dans un espace vectoriel normé complet sur R ou sur C respectivement.

Ce livre est spécialement consacré à l'étude des propriétés les plus simples des fonctions vectorielles d'une variable réelle, mais certaines de ces propriétés, particulièrement celles dont il sera question dans le présent paragraphe s'étendent aux fonctions d'une variable complexe.

Plus généralement, elles s'étendent aux fonctions définies sur un corps topologique commutatif K et prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel V admettant K comme domaine d'opérateurs et muni d'une topologie telle que les fonctions $x+y$; $-x$; kx, $(k \in K)$; soient continues. Un tel espace V est dit espace vectoriel topologique ; (Livre VI).

Le cas des fonctions d'une variable complexe, très important en lui-même fera l'objet de plusieurs livres ultérieurs ; le cas des fonctions vectorielles d'une variable décrivant un corps topologique est d'un intérêt sensiblement moindre, aussi nous bornerons-nous à signaler sommairement, dans la suite, les définitions et propriétés restant alors valables.

Soit $f(x)$ une fonction vectorielle définie dans R, à valeurs dans V. Lorsque V se réduit à R, cette fonction prend le nom de fonction réelle ou scalaire de la variable x. Un cas important est celui où V se réduit à R^n ; l'étude de la fonction vectorielle $f(x)$ revient alors à la considération simultanée de n fonctions scalaires de la variable x.

Si A est la partie de R sur laquelle est définie la fonction vectorielle $f(x)$, l'image directe de A par cette fonction se nomme l'hodographe de $f(x)$; lorsque V se réduit à l'espace R^n, cet hodographe prend aussi le nom de courbe de l'espace à n dimensions.

On donne le nom de fonction vectorielle affine à toute fonction $f(x)$ de la forme $f(x) = a x + b$. L'hodographe d'une fonction affine est une droite dans l'espace V.

Lorsque V se réduit à R , la partie de R^2 définie par les relations

$$x \in A \ ; \qquad y = f(x)$$

se nomme la <u>courbe représentative</u> de la fonction.

On notera que cette courbe est distincte de l'hodographe, lequel se réduit alors à une partie de R .

La courbe représentative d'une fonction scalaire affine est une droite.

2.- <u>Dérivée d'une fonction vectorielle</u> ; <u>calcul formel des dérivées</u>.

Soit $f(x)$ une fonction vectorielle définie sur un voisinage A du point x_0 dans R ; supposons $f(x)$ continue en x_0 .

<u>Définition 2. Si</u> $\lim\limits_{x \to x_0 ;\, x \neq x_0 ;\, x \in A} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ <u>existe, on lui donne le nom de dérivée première</u>, (ou plus simplement <u>dérivée</u>) <u>de la fonction</u> $f(x)$ <u>au point</u> x_0 , <u>et on la note</u> $f'(x_0)$.

<u>Définition 3. Si la dérivée de</u> $f(x)$ <u>existe en tout point d'un ensemble ouvert</u> $B \subset A$, <u>on dit que</u> $f(x)$ <u>est dérivable sur</u> B . <u>Cette dérivée</u> $f'(x)$ <u>est une nouvelle fonction vectorielle de la variable</u> x <u>, définie sur</u> B <u>et prenant ses valeurs dans</u> V . Cette fonction se note aussi parfois Df .

<u>Exemples</u>. 1) Si la fonction $f(x)$ est constante et égale à a , sa dérivée est nulle.

2) Si la fonction $f(x) = a x$, le vecteur a étant fixe, on a : $f'(x) = a$. La dérivée d'une fonction linéaire est donc constante.

3) Soit $f(x) = 1/x$; c'est une fonction à valeurs réelles définie dans R^* ; on a ici $(f(x)-f(x_0))/(x-x_0) = -1/xx_0$; la continuité de $1/x$ sur R^* entraîne donc $f'(x) = -1/x^2$.

<u>Remarque</u>.- Une fonction dérivée n'est pas nécessairement continue en tout point où elle existe : * c'est ce que montre l'exemple de la fonction $x^2 \sin(1/x)$; elle a partout une dérivée, mais celle-ci est discontinue pour $x = 0$. *

<u>Proposition 1</u>. <u>Si</u> $f(x)$ <u>et</u> $g(x)$, <u>toutes deux définies sur un voisinage</u> A <u>de</u> x_0 <u>dans</u> R <u>et prenant leurs valeurs dans</u> V , <u>ont respectivement une dérivée en</u> x_0 , <u>la fonction</u> $f(x) + g(x)$ <u>a en ce point une dérivée égale à la somme</u> $f'(x_0) + g'(x_0)$.

C'est une conséquence triviale de la continuité de $x + y$ dans $V \times V$.

<u>Proposition 2</u>. <u>Si a est un nombre réel fixe et si</u> $f(x)$ <u>définie sur un voisinage</u> A <u>de</u> x_0 <u>dans</u> R , <u>a une dérivée en</u> x_0, <u>la fonction</u> $a f(x)$ <u>possède en ce point une dérivée égale à</u> $a f'(x_0)$.

C'est une conséquence triviale de la continuité de ax en tout point de V .

Considérons alors les fonctions vectorielles $f(x)$ définies et dérivables sur un intervalle $A \subset R$; les deux propositions précédentes expriment que l'application $f \to f' = Df$ de cet ensemble dans l'ensemble des fonctions vectorielles définies dans A est <u>linéaire</u>.

Envisageons maintenant trois espaces vectorielles normés V, W, U, et une fonction <u>bilinéaire</u>

$$(x, y) \to [x.y]$$

définie dans $V \times W$ et à valeurs dans U ; cette fonction satisfait donc aux conditions suivantes :

$$[ax.by] = ab\,[x.y]$$

$$[(x+x').(y+y')] = [x.y] + [x.y'] + [x'.y] + [x'.y']$$

Cette fonction sera de plus supposée <u>continue</u>. Soit alors $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions vectorielles définies sur un voisinage A de x_0

dans R et prenant leurs valeurs respectivement dans V et dans W ; $h(x) = [f(x).\ g(x)]$ est une fonction vectorielle définie sur A , à valeurs dans U .

<u>Proposition 3</u>. <u>Si</u> $f(x)$ <u>et</u> $g(x)$ <u>ont respectivement une dérivée en</u> x_0 , $h(x)$ <u>possède en ce point une dérivée égale à</u>

$$h'(x_0) = [f(x_0).\ g'(x_0)] + [f'(x_0).\ g(x_0)]$$

En effet la bilinéarité de la fonction $[f.g]$ entraîne

$$h(x) - h(x_0) = [f(x).(g(x) - g(x_0))] + [(f(x)-f(x_0)).\ g(x_0)]$$

La propriété annoncée résulte alors de la continuité de $[X,Y]$ dans $V\times W$, puis de celle de $Z + Z'$ dans $U\times U$.

<u>Exemples</u>.- 1) Soient f(x) une fonction réelle, $g(x)$ une fonction vectorielle, toutes deux définies et dérivables sur un ouvert $A \subset R$; la fonction vectorielle $h(x) = f(x)g(x)$ est dérivable sur A et admet pour dérivée

$$h'(x) = f(x)\ g'(x) + f'(x)\ g(x)$$

C'est un aspect particulier de la proposition 3, avec $U = R\times V$.

2) Si a est un élément fixe de V , la fonction $f(x) = ax^n$, où $n \in N^*$, a pour dérivée en tout point de R : $f'(x) = a\,nx^{n-1}$. C'est ce qu'on a constaté plus haut pour $n=1$; la vérification par récurrence se fait en appliquant l'exemple précédent à la fonction bilinéaire xy définie dans $R\times V$, la fonction $g(x)$ étant prise égale à ax^{n-1} .

3) Soient $a_0 ; a_1 ; \dots ; a_{n-1} ; a_n$; n+1 vecteurs fixes de V . La fonction $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ a pour dérivée en tout point de R : $f'(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$. C'est une conséquence triviale de la proposition 1 et de l'exemple précédent.

4) Prenons pour V l'espace euclidien E_n ; on a défini dans $E_n \times E_n$ une fonction bilinéaire symétrique : Le produit scalaire $(x.y)$ à valeurs dans R. (Liv.II Chap. , par.).
Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions vectorielles à valeurs dans E_n et possédant des dérivées au point x_0, la fonction scalaire $h(x)=(f(x).g(x))$ a aussi une dérivée en x_0 donnée directement par la proposition 3 ; il en est de même du produit scalaire à symétrie hermitienne de deux fonctions vectorielles dérivables prenant leurs valeurs dans l'espace hermitien à n dimensions H_n.

3. <u>Théorème des fonctions composées</u>. (<u>Changement de variable</u>).

Soit $f(x)$ une fonction <u>réelle</u> définie sur un ouvert A de R, et prenant ses valeurs dans un ouvert B de R ; soit $g(y)$ une fonction vectorielle définie sur B et prenant ses valeurs dans V ; la fonction composée $g \circ f$ est définie sur A et prend ses valeurs dans V. On dit souvent que cette fonction $h(x) = g(f(x))$ résulte de l'application du "<u>changement de variable</u>" $y = f(x)$ à la fonction $g(y)$.

<u>Proposition 4</u>. <u>Si</u> $f(x)$ <u>possède une dérivée au point</u> $x_0 \in A$, <u>et si</u> $g(y)$ <u>possède une dérivée au point</u> $f(x_0)$ <u>de</u> B, $h(x)$ <u>possède au point</u> x_0 <u>une dérivée égale à</u> $h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

En effet on peut écrire $\dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = k(x)\, \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, avec

$k(x) = g'(f(x_0))$, si $f(x) = f(x_0)$; ou $k(x) = \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$, si $f(x) \neq f(x_0)$.

Lorsque x tend vers x_0 sur A, $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ sur B ; $k(x)$ tend vers $g'(f(x_0))$, le passage à la limite dans la formule précédente est légitime grâce à la continuité de xy dans $R \times V$, et il vient

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0 \\ x \in A}} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

C.Q.F.D.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Soit</u> $f(x)$ <u>une fonction réelle ; si en un point</u> x_0, $f(x_0)$ <u>existe et n'est pas nulle, et si</u> $f'(x_0)$ <u>est définie, la fonction</u> $1/f(x)$ <u>possède une dérivée égale à</u> $-f'(x_0)/f^2(x_0)$.

C'est une conséquence immédiate de la propositéon précédente et de la valeur de la dérivée de la fonction réelle $1/x$.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Soit</u> $f(x)$ <u>une fonction réelle définie et différente de</u> 0 <u>au point</u> x_0, <u>possèdant une dérivée en ce point ; soit</u> $g(x)$ <u>une fonction vectorielle définie et dérivable au point</u> x_0 ; <u>la fonction</u> $h(x) = g(x)/f(x)$ <u>admet au point</u> x_0 <u>une dérivée égale à</u>

$$h'(x_0) = \frac{g'(x_0)f(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3 et du corollaire précédent.

<u>Remarque 1</u>. Les règles qui viennent d'être établies donnent en particulier le moyen de calculer les dérivées des polynomes réels et des fractions rationnelles réelles. On notera que la dérivée d'un polynome n'est autre que le polynome dérivé tel qu'on l'a défini en algèbre (Livre II, Chap. , par.).

<u>Remarque 2</u>. Les définitions, propositions, démonstrations et exemples qui précèdent sont valables sans changement dans le cas des fonctions vectorielles définies sur un corps topologique K, prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel topologique sur K.

Relativement au théorème des fonctions composées, on doit alors supposer que V est un espace vectoriel topologique sur un corps topologique K', que $f(x)$ est une application d'un sous-corps topologique K de K' dans K', et que $g(x)$, définie dans K', prend ses valeurs dans V.

Plus spécialement, on voit que les règles de dérivation des polynomes et des fractions rationnelles établies dans le corps R des réels, s'étendent aux polynomes et aux fractions rationnelles définies sur un corps topologique K et prenant leurs valeurs dans un sur-corps topologique K' de K.

Enfin les définitions montrent immédiatement que si une fonction vectorielle $f(x)$ définie sur un corps topologique K, et prenant ses valeurs dans un espace vectoriel topologique sur K, possède une dérivée en $x_0 \in K$, la <u>restriction</u> $g(x)$ de cette fonction à un sous-corps topologique H de K, dépourvu de point isolé et contenant x_0, a pour dérivée en ce point $f'(x_0)$.

4.- <u>Dérivées à droite, dérivées à gauche</u>.

Reprenons une fonction vectorielle $f(x)$ définie sur un intervalle $A = [x_0, b[$ de R et prenant ses valeurs dans V.

<u>Définition 4</u>. <u>La fonction</u> $f(x)$ <u>est dite continue à droite en</u> x_0 <u>si</u> $f(x)$ <u>a une limite à droite égale à</u> $f(x_0)$ <u>quand</u> x <u>tend vers</u> x_0 <u>en restant dans</u> A.

On définit de même la continuité à gauche en remplaçant limite à droite par limite à gauche.

<u>Définition 5</u>. <u>Soit</u> $f(x)$ <u>une fonction continue à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>) <u>en un point</u> x_0 ; <u>si la limite à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>) <u>de</u> $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ <u>quand</u> x <u>tend vers</u> x_0, <u>existe, on lui donne le nom de dérivée à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>) et on la note $f'_+(x_0)$, (resp. $f'_-(x_0)$).

<u>Exemple</u>.- La fonction réelle $f(x) = |x|$ possède pour $x=0$ une dérivée à droite égale à +1, et une dérivée à gauche égale à -1 .

<u>Remarque</u>. Il résulte immédiatement de la définition que si une fonction vectorielle $f(x)$ possède au point x_0 une dérivée <u>à droite</u> $f'_+(x_0)$, (resp. une dérivée <u>à gauche</u> $f'_-(x_0)$), la fonction $f(-x)$ possède au point $-x_0$, une dérivée <u>à gauche</u> égale à $-f'_+(-x_0)$ (resp. une dérivée <u>à droite</u> égale à $-f'_-(-x_0)$).

Il arrive parfois que l'on ait à considérer des fonctions vectorielles $f(x)$ définies sur une partie quelconque A de R. La dérivée à droite d'une telle fonction en un point $x_0 \in A$ se définit, lorsqu'elle existe, par le même procédé, en faisant tendre $x \in A$ vers x_0, par valeurs supérieures. La fonction doit naturellement être continue à droite sur A, dans la topologie induite. Nous n'aurons pas à envisager cette généralisation dans le présent Livre.

<u>Proposition 5</u>.- <u>La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ ait une dérivée pour $x = x_0$ est qu'elle possède en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, ces deux dérivées étant égales</u>. On a alors $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

C'est une conséquence triviale des définitions.

Toutes les propositions des numéros précédents s'appliquent aux dérivées à droite (resp. à gauche) ; il suffit de remplacer partout le mot <u>dérivée</u> par <u>dérivée à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>). Il faut cependant modifier légèrement l'énoncé de la proposition 4, relative à la dérivation des fonctions composées : Si on suppose seulement que f(x) possède une dérivée à droite, (resp. à gauche) au point x_0, il faut supposer encore que $g(y)$ possède une <u>dérivée</u> au point $f(x_0)$; alors la fonction $h(x)$ possède une dérivée à droite, (resp. à gauche) donnée par la formule :

$$h'_+(x_0) = g'(f(x_0)).f'_+(x_0) \; ; \quad \text{resp.} \quad h'_-(x_0) = g'(f(x_0)).f'_-(x_0) .$$

Il n'y a rien à changer aux démonstrations.

5.- **Théorème de la moyenne**.-

Dans tout ce qui précède on n'a fait qu'examiner les propriétés locales des fonctions considérées : existence et calcul de leur dérivée en un point x_0 de leur domaine de définition. Les propriétés qui vont être envisagées maintenant ont un caractère différent : elles font intervenir non seulement un point x_0 et ses voisinages, mais encore un intervalle non nul sur lequel la fonction doit être définie ; aussi conviendrons-nous maintenant que le domaine de définition des fonctions considérées est un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Théorème. (Théorème de la moyenne).- Soit $f(x)$ une fonction vectorielle de la variable réelle x , définie sur l'intervalle I : $a \leqslant x \leqslant b$, continue sur cet intervalle et admettant une dérivée à droite pour $a < x < b$, cette dérivée vérifiant la condition

$$\| f'_+(x) \| \leqslant M \ ; \qquad (a < x < b)$$

où M désigne une constante réelle positive. On a alors pour tout x et y satisfaisant à $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$,

$$\| f(y) - f(x) \| \leqslant M(y-x)$$

Soit ε un nombre positif fixe. Considérons l'ensemble J des $u \in I$ et supérieurs à x tels que l'on ait, pour $x \leqslant v \leqslant u$,

$$\| f(v) - f(x) \| \leqslant (M+\varepsilon)(v-x) \ ; \qquad (1)$$

Cet ensemble J n'est pas vide car il contient au moins le point x ; soit alors z la borne supérieure de l'ensemble J .

1°) J contient z.- En effet l'inégalité (1) est vérifiée pour tout $v < z$; la fonction $f(v)$ étant continue, le premier membre de (1) est fonction continue de v, par suite l'inégalité (1) est encore vérifiée à la limite pour $v = z$.

2°) z <u>est confondu avec</u> b .- En effet, dans le cas contraire, il existerait un $u' > z$ tel que l'on ait, pour tout u vérifiant les inégalités : $z \leqslant u \leqslant u' < b$,

$$\left\| \frac{f(u) - f(z)}{u - z} \right\| \leqslant \| f'_{+}(z) \| + \varepsilon$$

on aurait donc aussi

$$\| f(u) - f(z) \| \leqslant (u-z) \left[\| f'_{+}(z) \| + \varepsilon \right] \leqslant (M+\varepsilon)(u-z) ;$$

puis en tenant compte de (1) pour $v = z$,

$$\| f(u) - f(x) \| \leqslant \| f(u) - f(z) \| + \| f(z) - f(x) \| \leqslant (M+\varepsilon)(u-x)$$

par suite u' appartiendrait à J et z ne serait pas la borne supérieure de cet ensemble. L'inégalité (1) est donc vraie pour tout y supérieur à x appartenant à I et pour tout $\varepsilon > 0$; le principe du prolongement des inégalités montre donc qu'elle est encore vraie pour $\varepsilon = 0$, et on a bien quels que soient x et y intérieurs à I

$$\| f(y) - f(x) \| \leqslant M(y - x)$$

inégalité dans laquelle on peut passer à la limite et faire $x = a$, et $y = b$.

C.Q.F.D.

<u>Remarque</u>.- Le théorème précédent est encore valable dans le cas plus général où $f(z)$ est une fonction vectorielle définie dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et prenant ses valeurs dans un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, qu'on suppose toujours normé. On suppose alors la fonction définie dans un domaine de $\mathbb{C}$ contenant deux points a et b, ainsi que le <u>segment</u> joignant ces deux points, c'est-à-dire le lieu des points $z = a + t(b-a)$, lorsque le nombre <u>réel</u> t décrit l'intervalle $i = [0,1]$, la fonction $f(z)$ étant dérivable sur ce segment, et sa dérivée satisfaisant à l'inégalité $\| f'(z) \| \leqslant M$, où M est un nombre réel positif. On a alors, comme dans le cas réel

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant M \, |b-a| ;$$

Il suffit, pour le voir, de poser sur le segment $\overline{ab}$, $g(t)=f(a+t(b-a))$; d'où, par application de la remarque 2 du N° 3, $g'(t)=(b-a).f'(z)$, puis $\|g'(t)\| \leqslant M|b-a|$; l'application du théorème de la moyenne à la fonction $g(t)$ sur l'intervalle $[0,1]$ conduit alors à l'inégalité annoncée.

<u>Corollaire</u>.- <u>Pour qu'une fonction vectorielle continue sur un intervalle ouvert</u> I <u>soit constante, il faut et il suffit qu'elle ait en tout point de I une dérivée à droite nulle</u>.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à tout intervalle compact contenu dans I .

<u>Proposition 6</u>. <u>Soit</u> $f(x)$ <u>une fonction vectorielle de la variable réelle</u> x <u>définie, continue et admettant une dérivée à droite en tout point d'un voisinage</u> I <u>d'un point</u> x_0 ; <u>si</u> $f'_+(x)$ <u>a une limite à droite au point</u> x_0 , <u>la fonction</u> $f'_+(x)$ <u>est continue à droite en ce point</u> ; <u>si</u> $f'_+(x)$ <u>a une limite à gauche au point</u> x_0 , $f(x)$ <u>a une dérivée à gauche au point</u> x_0 , <u>égale à cette limite</u>.

Désignons en premier lieu par a la limite à droite de $f'_+(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures ; étant donné un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $h > 0$ tel que pour tout nombre k satisfaisant à $0 < k \leqslant h$, et pour tout nombre x satisfaisant à $x_0 < x \leqslant x_0+k$, on ait $\|f'_+(x)-a\| \leqslant \varepsilon$; considérons alors la fonction $g(x)=f(x)-ax$; on a $g'_+(x) = f'_+(x)-a$; appliquons le théorème de la moyenne à la fonction $g(x)$ dans l'intervalle $]x_0,x_0+k]$; il vient

$$\left\| \frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k} - a \right\| \leqslant \varepsilon$$

et cela quel que soit k strictement positif inférieur à h ; par suite la dérivée à droite $f'(x_0)$ est bien égale à a .

Soit en second lieu b la limite à gauche de $f'_+(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures ; un raisonnement identique montre que la dérivée à gauche $f'_-(x_0)$ existe et est égale à b .

Corollaire.- Si en un point x_0 , $f'_+(x)$ est continue, $f(x)$ admet une dérivée en ce point.

Proposition 7. Soit $f(x)$ une fonction vectorielle de la variable réelle x définie et dérivable sur un intervalle ouvert I, sa dérivée étant de plus continue sur I . Soit $a \in I$; étant donné un nombre ε positif arbitrairement petit, il existe un intervalle ouvert J contenant a et contenu dans I , tel que l'on ait, quels que soient x et y appartenant à J ,

$$f(y) - f(x) = f'(a)(y-x) + h.(y-x) \ ;$$

avec $\| h \| \leqslant \varepsilon$.

En effet la continuité de la dérivée dans I entraîne qu'étant donnés $a \in I$ et $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert J contenant a et contenu dans I, tel que l'on ait

$$\| f'(x) - f'(a) \| \leqslant \varepsilon$$

quel que soit x appartenant à J . Considérons alors la fonction $g(x) = f(x) - x f'(a)$. Sa dérivée dans I est égale à $g'(x) = f'(x) - f'(a)$; on a donc dans J , $\| g'(x) \| \leqslant \varepsilon$; appliquons le théorème de la moyenne à la fonction $g(x)$ et à deux nombres $x < y$ appartenant tous deux à J ; il vient

$$\| f(y) - f(x) - f'(a)(y-x) \| \leqslant \varepsilon |y-x| \ ;$$

ce qui établit la proposition.

L'hypothèse de la continuité de la dérivée joue un rôle essentiel ; *prenons au contraire $f(x)$ réelle et égale à $x^2 \sin . 1/x$; la fonction dérivée a pour valeur $-\cos 1/x + 2x \sin 1/x$, si x n'est pas nul ;

pour $x=0$, la dérivée est nulle. Le calcul de h, qui est ici un nombre réel, en prenant a et x positifs, y nul, montre que ce nombre peut être rendu aussi voisin qu'on le veut de l'unité. *

6.- Cas des fonctions réelles : complément au théorème de la moyenne ; variations de ces fonctions.-

Considérons maintenant une fonction réelle $f(x)$ définie, continue et finie sur un intervalle compact $I = [a;b] \subset \mathbb{R}$; sa dérivée à droite (resp. à gauche) en un point $x_0 \in I$ se définit, lorsqu'elle existe, comme dans le cas d'une fonction vectorielle ; mais il peut se faire que la valeur de la limite donnant cette dérivée, soit infinie ; on dit alors que la dérivée existe et est infinie. De même si la dérivée à droite (resp. à gauche) existe en tout point de I, la fonction dérivée à droite (resp. à gauche) est définie sur I et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$:

Exemple.- Les dérivées à droite et à gauche d'une fonction réelle continue en un point peuvent être toutes deux infinies, avec des signes opposées ou avec le même signe, (auquel cas la dérivée existe et est infinie) : c'est ce que montrent les exemples des fonctions $x^{1/3}$ et $|x|^{1/3}$ pour $x = 0$. *

On voit facilement que toutes les propositions relatives au calcul formel des dérivées s'étendent immédiatement au cas des fonctions réelles ayant des dérivées infinies, pourvu que les relations exprimant ces propositions conservent un sens.

Proposition 8. (Complément au théorème de la moyenne). Soit $f(x)$ une fonction réelle continue et finie en tout point de $I = [a;b]$, admettant une dérivée à droite finie sur tout l'intervalle ouvert correspondant. Si m et M sont les bornes inférieures et supérieures de cette dérivée, on a

$$m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a)$$

hormis le cas où $f(x)$ est une fonction affine, pour lequel on doit remplacer le signe $<$ par le signe $=$.

Considérons les deux fonctions

$$g(x) = M(x-a)-f(x) \; ; \qquad h(x) = f(x)-m(x-a) \; ;$$

elles ont respectivement pour dérivées à droite $g'_+(x) = M-f'_+(x)$; et $h'_+(x) = f'_+(x)-m$; on a donc $|g'_+(x)| \leqslant M-m$; et $|h'_+(x)| \leqslant M-m$. L'application du théorème de la moyenne aux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sur l'intervalle I donne donc les inégalités

$$|M(b-a)-(f(b)-f(a))| \leqslant (M-m)(b-a) \; ; \qquad |(f(b)-f(a))-m(b-a)| \leqslant (M-m)(b-a) \; ;$$

dont la comparaison fournit la suivante

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a). \qquad (1)$$

Lorsque $M = m = k$, on a nécessairement $g'_+(x) = h'_+(x) = 0$, puis $f(x) = k(x-a) + f(a)$, et la fonction $f(x)$ est affine.

Supposons au contraire $f(x)$ non affine ; alors $m < M$, et il existe une valeur $x \in I$ telle que $h(x) \neq f(a)$; appliquons successivement les inégalités (1) à la fonction $h(x)$ et aux deux intervalles $[a;x]$ et $[x;b]$; il vient

$$0 < f(x) - f(a) - m(x-a) \leqslant (M-m)(x-a) \; ;$$

$$0 \leqslant f(b) - f(x) - m(b-x) \leqslant (M-m)(b-x) \; ;$$

d'où par addition la double inégalité

$$m(b-a) < f(b) - f(a) \leqslant M(b-a) \; ;$$

Le même procédé appliqué à la fonction $g(x)$ donne la double inégalité

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) < M(b-a) \; ;$$

d'où par comparaison les inégalités plus précises

$$m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a). \qquad (2)$$

pourvu que f ne soit pas une fonction affine.

Proposition 9.- Soit $f(x)$ une fonction réelle continue finie admettant en tout point d'un intervalle ouvert I une dérivée à droite ; pour qu'elle soit strictement croissante dans I il faut et il suffit qu'il existe en outre dans tout intervalle ouvert intérieur à I un point x pour lequel $f'_+(x) > 0$.

La partie de cet énoncé concernant les fonctions croissantes résulte trivialement de la définition de la dérivée à droite, et des inégalités (2). Le corollaire au théorème de la moyenne indiqué au n°5 montre de plus que $f(x)$ ne peut être strictement croissante si l'on a $f'_+(x) = 0$ en tout point d'un intervalle ouvert contenu dans I . Réciproquement, si $f(x)$ est croissante, mais non strictement croissante, elle est constante sur un intervalle ouvert contenu dans I , et $f'_+(x) = 0$ en tout point de cet intervalle.

Remarque.- Dans les deux propositions précédentes on peut partout remplacer "dérivée à droite" par "dérivée à gauche" ou "dérivée".

Variations des fonctions réelles.- La plupart des fonctions réelles continues intervenant dans les applications ont une dérivée à droite en tout point intérieur à leur intervalle de définition, cet intervalle se décomposant en un nombre fini d'intervalles partiels sur lesquels cette dérivée est nulle, strictement positive ou strictement négative. La fonction considérée est alors constante, strictement croissante, ou strictement décroissante sur ces intervalles partiels. On dit que l'on a "étudié les variations de la fonction" lorsqu'on a ainsi déterminé la décomposition de l'intervalle initial en intervalles partiels sur lesquels le "sens de variation" de la fonction est déterminé. Il faut pour cela rechercher les points de l'intervalle de définition en lesquels la fonction change de sens de variation : ce sont les points où la dérivée à droite change de signe ou devient nulle.

Remarque.- Il ne faudrait pas croire que toute fonction continue et dérivable dans un intervalle rentre dans la catégorie examinée ci-dessus. On peut former des exemples de fonctions continues et dérivables telles que, dans tout intervalle ouvert, leur dérivée prenne des valeurs strictement positives et strictement négatives.

2

Définition 6.- On dit qu'une fonction réelle $f(x)$ définie sur un intervalle I, admet un maximum relatif, (resp. maximum relatif strict, minimum relatif, minimum relatif strict) en un point $x_0 \in I$ s'il existe un voisinage V de x_0 dans I tel qu'en tout point $x \in V$ et différent de x_0 on ait $f(x) \leqslant f(x_0)$, (resp. $f(x) < f(x_0)$, $f(x) \geqslant f(x_0)$, $f(x) > f(x_0)$).

Remarque.- Lorsqu'une fonction définie dans I atteint sa borne supérieure, (resp. sa borne inférieure) en un point de I, elle a un maximum relatif (resp. minimum relatif) en ce point.

Proposition 10.- Si, en un point intérieur à son intervalle de définition, une fonction réelle $f(x)$ possède un maximum (resp. minimum) relatif, et a en ce point une dérivée à droite et une dérivée à gauche, la dérivée à droite est négative, (resp. positive) et la dérivée à gauche positive (resp. négative) . En particulier, si $f(x)$ admet une dérivée en ce point, cette dérivée est nulle.

De cette proposition, qui résulte trivialement des définitions, on déduit la proposition suivante (Théorème de Rolle) :

Proposition 11. Soit $f(x)$ une fonction continue et finie sur un intervalle compact $I = [a,b]$, nulle aux deux extrémités de l'intervalle, et admettant en tout point de $]a,b[$ une dérivée. Il existe un point c tel que $a < c < b$ et $f'(c) = 0$.

La proposition est évidente si la fonction est nulle ; sinon elle prend, par exemple, des valeurs strictement positives, et atteint donc sa borne supérieure en un point c intérieure à I ; comme la fonction a en ce point un maximum relatif, on a nécessairement $f'(c) = 0$.

7.- Dérivation des fonctions réciproques.

Proposition 12.- Soit $f(x)$ une fonction réelle, strictement croissante et continue dans un intervalle I ; soit $g(y)$ sa fonction réciproque ; si en un point x_0, la fonction $f(x)$ possède une dérivée à droite $f'_+(x_0) \neq 0$, la fonction $g(y)$ a au point $y_0 = f(x_0)$ une dérivée à droite égale à $1/f'_+(x_0)$; si $f'_+(x_0) = 0$, la fonction $g(y)$ a encore au même point une dérivée à droite égale à $+\infty$. Lorsque $f(x)$ est strictement décroissante et $f'_+(x_0) \neq 0$, $1/f'_+(x_0)$ est la dérivée à gauche de $g(y)$ au point y_0 ; si $f'_+(x_0)=0$, $g(y)$ a au point y_0 une dérivée à gauche égale à $-\infty$.

Cela résulte trivialement de la relation

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Si $f(x)$ est strictement croissante, (resp. décroissante) dans I et admet en tout point de I une dérivée à droite, la fonction dérivée à droite, (resp. à gauche) de $g(y)$ est donc $1/f'_+(g(y))$.

Exemple. Si $n \in N^*$, la fonction $x^{1/n}$ a pour dérivée, en tout point $x > 0$, $1/(nx^{1-1/n})$.

On en déduit aisément, moyennant le théorème du changement de variable, que la fonction $x^{p/q}$, $(q \neq 0)$ a une dérivée égale à $(p/q)x^{(p/q)-1}$, pour $x > 0$, p et q étant deux entiers quelconques.

Remarque.- Revenant au théorème du changement de variable dans le cas d'une fonction vectorielle $\mathfrak{g}(y)$, (proposition 4), si on suppose que la fonction $y = f(x)$ définissant le changement de variable est strictement croissante (resp. décroissante), on voit, sans rien changer au raisonnement fait à cet endroit, que l'hypothèse de l'existence de la dérivée à droite de la fonction $f(x)$ au point x_0, ainsi que celle de l'existence de la dérivée à droite (resp. à gauche) de la fonction $\mathfrak{g}(y)$ au point $f(x_0)$ entraîne l'existence de la dérivée à droite de la fonction vectorielle $\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{g}(f(x))$ au point x_0, suivant la formule

$$\mathfrak{h}'_+(x_0) = \mathfrak{g}'_+(f(x_0)).f'_+(x_0) \ ; \quad \text{resp.} \quad \mathfrak{h}'_+(x_0) = \mathfrak{g}'_-(f(x_0)).f'_+(x_0).$$

Dans le cas particulier de la proposition 12, on a $g(f(x)) = x$, d'où par application de la remarque précédente

$$1 = g'_+(f(x_0)).f'_+(x_0) \ ;$$

ce qui permet de retrouver l'expression de la dérivée à droite de la fonction réciproque.

Forme générale du théorème de la moyenne dans le cas des fonctions vectorielles.

Proposition 13. Soit $\mathfrak{f}(x)$ une fonction vectorielle de la variable réelle x et $g(x)$ une fonction réelle strictement croissante, toutes deux définies sur l'intervalle $I : a \leqslant x \leqslant b$, continues sur cet intervalle et admettant des dérivées à droite pour $a < x < b$, ces dérivées vérifiant la condition

$$\|\mathfrak{f}'_+(x)\| \leqslant M g'_+(x)$$

M étant une constante réelle positive. On a alors pour tout x et y satisfaisant à $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$,

$$\|\mathfrak{f}(y) - \mathfrak{f}(x)\| \leqslant M(g(y) - g(x)) .$$

En effet soit $h(u)$ la fonction réciproque de $g(x)$; faisons le changement de variable $u = g(x)$ et posons $f(x) = f(h(u)) = e(u)$; on a $f'_+(x) = e'_+(g(x)).g'_+(x)$, et par conséquent $\| e'_+(u) \| \leqslant M$, pour $u \in \left]g(a) ; g(b)\right[$. L'application du théorème de la moyenne sous sa forme primitive à la fonction $e(u)$ dans l'intervalle $[g(a) ; g(b)]$, conduit immédiatement à la propriété annoncée.

<u>Exercices</u>.- 1) Si une fonction est dérivable en tous points d'un intervalle, les points de continuité de sa dérivée forment un ensemble inépuisable sur tout intervalle fermé contenu dans l'intervalle donné.

2) Soit $f(x)$ une fonction continue et finie dans un intervalle compact $[a,b]$ et admettant une dérivée à droite en tout point de $]a,b[$. Soient m et M les bornes inférieures et supérieures de cette dérivée dans $]a,b[$. Montrer que l'ensemble des valeurs de $(f(y)-f(x))/(x-y)$ lorsque x et y parcourent $[a,b]$ (de sorte que $x \neq y$) est identique à m,M lorsque f n'est pas linéaire. (Il suffira d'établir que si $f'_+(x)$ prend deux valeurs de signes contraires en deux points c et d de $]a;b[$, il existe deux points distincts de l'intervalle $]c;d[$ où $f(x)$ prend la même valeur.

3) Soit $f(x)$ une fonction continue et dérivable dans un intervalle ouvert I . Montrer que l'image par la fonction $f'(x)$ de tout intervalle contenu dans I est un intervalle. (Utiliser l'exerc. 2).

4) Montrer que si une fonction $f(x)$ continue sur un intervalle compact $[a,b]$, admet en tout point de $]a,b[$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche, les bornes inférieures (resp. supérieures) de ces deux dérivées dans $]a,b[$ sont égales.

5) (Théorème des accroissements finis). Soit $f(x)$ une fonction continue et finie dans un intervalle compact $[a,b]$, admettant en tout point de $]a;b[$ une dérivée ; il existe un point c, tel que $a<c<b$ et que $f(b)-f(a) = (b-a).f'(c)$.

6) Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues et finies dans un intervalle compact $[a,b]$, ayant des dérivées finies en tout point de $]a,b[$, il existe un point c tel que $a<c<b$, et que

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \\ f'(c) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$$

7) Une fonction continue ne peut avoir une dérivée à droite égale à $+\infty$ en tous points d'un intervalle.

8) Soit $f(x)$ une fonction <u>complexe</u> continue dans un intervalle ouvert I, ne s'y annulant pas, et admettant en tout point de I une dérivée à droite. Pour que $|f(x)|$ soit croissante dans I, il faut et il suffit que $\mathcal{R}(f'_+(x)/f(x)) \geqslant 0$ dans I.

9) Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions strictement positives, continues et dérivables dans $[a,b]$. Montrer que si $f'(x)$ et $g'(x)$ sont strictement positives, et si $f'(x)/g'(x)$ est strictement croissante dans $[a,b]$, ou bien $f(x)/g(x)$ est strictement monotone dans $[a,b]$, ou bien il existe un nombre c tel que $a<c<b$, et que $f(x)/g(x)$ soit strictement décroissante dans $[a,c]$ et strictement croissante dans $[c,b]$.

10) Soit $f(x)$ une fonction dérivable en un point x_0. Montrer que $f(x)-f(y)/(x-y)$ tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures, et que y tend vers x_0 par valeurs inférieures. La proposition est encore vraie sans aucune restriction sur la façon dont x et y tendent vers x_0 lorsque f est dérivable dans un voisinage V de x_0 et

que $f'(x)$ est continue dans V. Montrer sur un exemple que la proposition est inexacte si on ne fait pas ces restrictions.

11) Soit $f(x)$ une fonction admettant une dérivée à droite en tout point d'un intervalle I. Montrer que l'ensemble des points x tels que $f'_+(x) > 0$ ne peut admettre de points isolés.

Paragraphe 2.- Primitives et intégrales.

1.- Position du problème.- Nous ne considérerons dans ce para-graphe, que des fonctions vectorielles d'une variable réelle, prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel V, normé, complet, admettant R comme domaine d'opérateurs.

Le problème qui donne naissance à la notion de primitive est le suivant:

Problème A.- Une fonction $f(x)$ étant donnée sur un intervalle compact $I = [a,b]$, existe-t-il une fonction $g(x)$ également définie sur I, dont $f(x)$ soit la dérivée ?

Désignons par J et K respectivement les intervalles $[a,b[$ et $]a,b]$. On peut remarquer que, d'après la proposition 6 du précédent paragraphe, si la fonction f possède en un point $x \in J$ une limite à droite $f(x+)$, ou en un point $x \in K$ une limite à gauche $f(x-)$, alors $f(x)$ est nécessairement égale à cette limite. Le problème A ne se pose donc pas pour une fonction aussi simple que la fonction réelle égale à -1 sur $[-1,0[$ et à $+1$ sur $[0,1]$, fonction qui apparait naturellement lorsqu'on dérive la fonction réelle égale à $|x|$. Ceci conduit à substituer au problème A le suivant :

Problème B.- Une fonction $f(x)$ étant donnée sur un intervalle compact $I = [a,b]$, existe-t-il une fonction $g(x)$, également définie sur I, et dont $f(x)$ soit la dérivée à droite sur J ?

La même proposition 6 montre cette fois que si en $x \in J$, $f(x+)$ existe, on a nécessairement $f(x) = f(x+)$; mais il n'y a plus aucune condition relativement aux limites à gauche. En particulier la fonction réelle considérée plus haut est la dérivée à droite de la fonction égale à $|x|$.

Nous désignerons dans la suite, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions vectorielles $f(x)$ <u>définies et de norme bornée sur</u> $I = [a,b]$, $(a < b)$.

<u>Définition 1</u>.- <u>On appelle primitive d'une fonction</u> $f \in \mathcal{A}$, <u>toute fonction</u> g <u>définie sur</u> I, <u>telle qu'en tout point</u> $x \in J$, g <u>ait une dérivée à droite égale à</u> f .

Nous désignerons par $\mathcal{B}$ la partie de $\mathcal{A}$ sur laquelle sont définies les primitives. Nous ne caractériserons pas ici cette partie ; nous nous bornerons en fait, à définir les primitives sur une partie seulement de $\mathcal{B}$, mais cette partie comprendra toutes les fonctions se rencontrant dans les applications.

<u>Proposition 1</u>.- <u>Si</u> g_1 <u>et</u> g_2 <u>sont deux primitives de la fonction</u> f , <u>la différence</u> $g_1 - g_2$ <u>est constante sur</u> I .

C'est une conséquence triviale du premier corollaire du théorème de la moyenne ; inversement, si l'on connait une primitive g de la fonction f , toutes les primitives de f sont données par la formule $g + a$, où a désigne un élément constant arbitraire de V .

<u>Corollaire</u>.- <u>Soit</u> x_0 <u>appartenant à</u> I ; <u>si la fonction</u> f <u>possède des primitives, il y en a une et une seule qui s'annule en</u> x_0 .

C'est une conséquence triviale de la proposition précédente. Si g est une primitive de f , la fonction $g(x) - g(x_0)$ est la primitive unique s'annulant en x_0

Dans la plus grande partie de ce paragraphe, nous fixerons x_0 quelconque dans I, et nous ne considérerons que les primitives s'annulant en x_0 .

Si une telle primitive existe, elle est unique. Nous la désignerons provisoirement par la notation $g = \mathcal{J}(f)$, en la regardant comme une fonction définie sur $\mathcal{B}$.

<u>Proposition 2</u>.- <u>Les primitives sont définies sur l'ensemble des polynomes</u>.

Considérons en effet le polynome $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ où les a_0 ; a_1 ;...; a_{n-1} ; a_n sont des éléments constants de V . La fonction f appartient évidemment à $\mathcal{A}$; or, il est clair, quelle que soit la constante a_{n+1} que le polynome

$$a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + \ldots + a_{n-1} \frac{x^2}{2} + a_n \frac{x}{1} + a_{n+1}$$

admet $f(x)$ comme dérivée, et l'on peut toujours choisir le vecteur a_{n+1} de façon à annuler ce nouveau polynome pour $x = x_0$.

L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynomes est donc contenu dans $\mathcal{B}$.

2.- <u>Propriétés générales de l'ensemble</u> $\mathcal{B}$ <u>et de la fonction</u> $\mathcal{J}(f)$.

Rappelons d'abord (Livre III, chap.8, par.) que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel topologique sur le corps R , la topologie y étant définie au moyen de la norme suivante :

$$\| f \| = \sup_{x \in I} \| f(x) \| ;$$

Relativement à la structure uniforme correspondante, l'espace $\mathcal{A}$ est complet.

<u>Proposition 3</u>. <u>Soit</u> $f \in \mathcal{B}$; <u>soit</u> $g = \mathcal{J}(f)$; <u>la fonction</u> g <u>est de norme bornée sur</u> I .

En effet, soit x appartenant à I ; appliquons le théorème de la moyenne à la fonction g et à l'intervalle compris entre les nombres x et x_0 ; pour y appartenant à cet intervalle, on a $\| f(y) \| \leqslant \| f \|$, et, par suite $\| g(x) \| \leqslant |x - x_0| \cdot \| f \|$ d'où résulte immédiatement

$$\| g \| \leqslant (b-a) \| f \| \qquad (1)$$

ce qui établit l'assertion.

La fonction $\mathcal{J}$ prend donc ses valeurs sur une partie $\mathcal{B}'$ de $\mathfrak{A}$ formée de fonctions nulles en x_0 et dérivables à droite sur J .

<u>Théorème</u>.- <u>La variété</u> $\mathcal{B}$ <u>est une variété linéaire fermée dans</u> $\mathfrak{A}$, <u>sur laquelle la fonction</u> $\mathcal{J}(f)$ <u>est une fonction linéaire uniformément continue</u>.

1) <u>Linéarité de</u> $\mathcal{B}$ <u>et de</u> $\mathcal{J}(f)$.- Soient f_1 et f_2 appartenant à $\mathcal{B}$, puis g_1 et g_2 les primitives de ces deux fonctions nulles en x_0 ; soit k une constante réelle quelconque ; il est clair que $k g_1$, $g_1 + g_2$, sont nulles en x_0, de norme bornée sur I, et ont pour dérivées à droite respectivement $k f_1$ et $f_1 + f_2$. D'où la linéarité de la variété $\mathcal{B}$ et de la fonction $\mathcal{J}(f)$ sur $\mathcal{B}$.

2) <u>Uniforme continuité de</u> $\mathcal{J}(f)$ sur $\mathcal{B}$.- La démonstration de la proposition 3 prouve que si $f \in \mathcal{B}$ et si $g = \mathcal{J}(f)$, on a, (relation 1), $\|g\| \leqslant (b-a)\,\|f\|$; compte tenu de la linéarité de la fonction $\mathcal{J}(f)$, on a aussi $\|g_1 - g_2\| \leqslant (b-a)\,\|f_1 - f_2$, g_1 et g_2 peuvent donc être rendus aussi voisins qu'on le veut en prenant les deux points <u>quelconques</u> f_1 et f_2 suffisamment voisins. L'uniforme continuité en découle.

3) $\mathcal{B}$ <u>est fermée dans</u> $\mathfrak{A}$.- Supposons le contraire. Soit alors f appartenant à l'adhérence de $\mathcal{B}$ sans appartenir à $\mathcal{B}$. $\mathcal{J}$ étant uniformément continue sur $\mathcal{B}$ relativement à la structure uniforme induite, et prenant ses valeurs dans $\mathfrak{A}$ qui est séparé et complet, on peut prolonger cette fonction par uniforme continuité à tout point de l'adhérence de $\mathcal{B}$. Soit g la valeur de ce prolongement en f . Il suffira de montrer que g possède en tout point de J , une dérivée à droite égale à f , ce qui contredit le fait que $\mathcal{B}$ est la variété maximale sur laquelle est définie la fonction $\mathcal{J}$.

Il est d'abord évident que $g(x_0)=0$. Donnons-nous deux nombres α et β strictement positifs et arbitrairement petits. Considérons les ensembles W_α et W_β respectivement formés par les fonctions h et k de $\mathcal{B}'$ qui sont telles que $\| h'_+ - f \| \leqslant \alpha$ et que $\| k'_+ - f \| \leqslant \beta$. Ces ensembles sont les images par la fonction $\mathcal{J}$ des ensembles de points de $\mathcal{B}$ approchant f en norme à α et β près respectivement. Les W_α , $(\alpha > 0)$ constituent une base du filtre des voisinages de g , par suite de la continuité de la fonction $\mathcal{J}$.

Pour tout x appartenant à I , on a

$$\| h'_+(x) - f(x) \| \leqslant \alpha \ ; \qquad \| k'_+(x) - f(x) \| \leqslant \beta \qquad (1)$$

ce qui entraîne $\| h'_+(x) - k'_+(x) \| \leqslant \alpha + \beta$, puis, par application du théorème de la moyenne sur un intervalle quelconque non nul $[x,y]$ intérieur à I ,

$$\left\| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} - \frac{k(x) - k(y)}{x - y} \right\| \leqslant \alpha + \beta$$

Faisons maintenant tendre β vers 0 ; le filtre de base W_β ayant pour limite g , il vient par passage à la limite suivant ce filtre

$$\left\| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} - \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right\| \leqslant \alpha \qquad (2)$$

Fixons maintenant le point x ; il existe un nombre u strictement positif tel que l'on ait, quel que soit y satisfaisant aux inégalités $x < y < x+u$,

$$\left\| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} - h'_+(x) \right\| \leqslant \alpha$$

d'où, par combinaison avec l'inégalité (2),

$$\left\| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} - h'_+(x) \right\| \leqslant 2\alpha \qquad (3)$$

Tenons compte ensuite de l'inégalité (1), il vient

$$\left\| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} - f(x) \right\| \leqslant 3a \qquad (4)$$

Lorsque a tend vers zéro, il en est de même de u ; y tend donc vers x par valeurs supérieures, et l'inégalité (4) prouve que la dérivée à droite de la fonction g existe et est égale, au point x, à $g'_+(x) = f(x)$. Comme x peut être choisi arbitrairement dans J, le théorème est établi.

Remarque.- 1) Le théorème précédent permet de définir la primitive en utilisant le procédé du prolongement par continuité uniforme ; si, en effet, la fonction $\mathcal{J}$ est déjà connue sur un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, cette fonction sera automatiquement déterminée par prolongement, sur l'adhérence $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$, et on aura $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{B}$. C'est ainsi, par exemple, que la primitive est connue, ainsi qu'on l'a vu plus haut sur la variété linéaire $\mathcal{P}$ formée par les fonctions polynomes ; on peut donc la regarder aussi comme définie sur la variété linéaire $\overline{\mathcal{P}}$ constituée par les fonctions qui sont limites uniformes de polynomes sur I .

Les polynomes étant des fonctions continues sur I, il en sera de même des fonctions de $\overline{\mathcal{P}}$; on ne peut donc obtenir par ce moyen en partant des polynomes, que des primitives de fonctions continues. *En fait, comme nous le verrons dans un prochain paragraphe, la variété $\overline{\mathcal{P}}$ est constituée par toutes les fonctions continues sur I*.

2) Tout ce qui vient d'être dit dans le présent paragraphe, s'applique sans presqu'aucune modification au cas des fonctions vectorielles d'une variable complexe z prenant leurs valeurs dans un espace vectorid normé complet sur le corps $\mathcal{C}$. Il faut seulement prendre garde qu'on ne peut traiter alors que le problème A , au lieu du problème B , puisque la notion de dérivée à droite disparait. De plus il faut cette fois remplacer l'intervalle I par une partie Δ de $\mathcal{C}$ qu'on peut supposer compacte - afin de se trouver d'emblée dans le cas le plus important -

mais qu'il est nécessaire de supposer *convexe*, de manière à ce qu'il soit toujours possible d'appliquer le théorème de la moyenne entre deux points quelconques de ce domaine. (cf. la remarque succédant au théorème de la moyenne dans le précédent paragraphe). L'application du théorème 2 à la variété $\mathcal{P}_n$ des polynomes conduit alors à définir les primitives des fonctions de la variété $\overline{\mathcal{P}_n}$, * cette variété constituant alors, comme on le verra dans un autre livre, un espace fonctionnel d'une importance fondamentale : l'espace des *fonctions analytiques holomorphes* dans Δ . *

3.- *Les fonctions en escaliers*.-

Reprenons l'intervalle $I = [a,b]$, soit (a_p),$(p = 1;2;\ldots;n.)$ une famille finie strictement croissante de points de I ; supposons en outre que $a_1 = a$, et que $a_n = b$. Nous dirons que I résulte de la *juxtaposition* des intervalles compacts $[a_p, a_{p+1}]$; $(p = 1,2,\ldots,n-1)$.

Définition 2. *Supposons définie dans* $[a_p, a_{p+1}]$, *pour* $p=1,2,\ldots,n-1$; *une fonction* $f_p(x)$ *de norme bornée*. *La fonction* $f(x)$ *définie dans* I *par l'égalité*

$$f(x) = f_p(x) \quad \text{pour} \quad x \in [a_p, a_{p+1}[\quad (p = 1,2,\ldots,n-1)$$

est une fonction de norme bornée résultant de la juxtaposition des fonctions f_p *par la droite*.

Si les fonctions f_p sont continues (ou continues à droite) la fonction qui résulte de leur juxtaposition par la droite est continue à droite.

On définit de même la juxtaposition par la gauche, qui, appliquée à des fonctions continues (ou continues à gauche) donne des fonctions continues à gauche.

Définition 3.- *Une fonction en escaliers sur I résulte de la juxtaposition de fonctions constantes*.

La juxtaposition par la droite donne les fonctions en escaliers continues à droite ; elles sont évidemment de normes bornées, et appartiennent par suite à l'espace $\mathcal{A}$ dans lequel elles forment visiblement une variété linéaire $\mathcal{E}$.

<u>Proposition 4.- Les primitives sont définies sur</u> $\mathcal{E}$.

Soit f une fonction en escaliers résultant de la juxtaposition par la droite de fonctions constantes et égales à c_p dans les intervalles $[a_p, a_{p+1}]$. Nous définirons une primitive g de f , par récurrence, comme suit :

$$g(a_1) = 0 \; ; \qquad g(x) = g(a_p) + c_p(x - a_p) \quad \text{pour} \quad x \in [a_p, a_{p+1}]$$

Il est clair que g est une primitive de f ; par suite $\mathcal{J}(f) = g - g(x_0)$.

<u>Théorème.- Les primitives sont définies pour les fonctions limites uniformes de fonctions en escaliers</u>.

Il suffit d'appliquer le procédé du prolongement par uniforme continuité à la variété $\mathcal{E}$; la fonction $\mathcal{J}(f)$ se trouve ainsi définie sur $\overline{\mathcal{E}}$, adhérence de $\mathcal{E}$.

4.- <u>Propriétés spéciales de la variété</u> $\overline{\mathcal{E}}$.

<u>Proposition 5.- Les fonctions de</u> $\overline{\mathcal{E}}$ <u>sont continues à droite</u> .

Elles sont en effet limites uniformes de fonctions continues à droite. Comme dans le cas des fonctions continues, l'uniformité de la convergence entraîne la continuité à droite des fonctions limites.

<u>Proposition 6.- Les fonctions de</u> $\overline{\mathcal{E}}$ <u>ont des limites à gauche en tout point x appartenant à l'intervalle</u> $]a,b]$. <u>Si</u> $f \in \overline{\mathcal{E}}$ <u>et si</u> $g = \mathcal{J}(f)$ <u>la fonction</u> g <u>possède, en tout point du même intervalle, une dérivée à gauche égale à</u> $f(x-)$.

Il est clair que toutes les fonctions de $\mathcal{E}$ ont des limites à gauche en tout point x appartenant à l'intervalle $]a,b]$. Soit alors donné un nombre a strictement positif aussi petit qu'on le voudra, et considérons une fonction f de $\overline{\mathcal{E}}$ n'appartenant pas à $\mathcal{E}$. Il existe une fonction h appartenant à $\mathcal{E}$ telle que l'on ait $\|f-h\| \leqslant a$. Prenons maintenant x quelconque appartenant à $]a,b]$. Il existe, puisque h possède une limite à gauche au point x , un nombre strictement positif k , tel que, quels que soient y et z appartenant à l'intervalle $]x-k,x[$, on ait $\|h(y)-h(z)\| \leqslant a$; on a donc dans les mêmes conditions, $\|f(y)-f(z)\| \leqslant 3a$, ce qui assure évidemment l'existence d'une limite à gauche au point x, pour la fonction f . Il résulte ensuite de la proposition 6 du précédent paragraphe, que, si $g = \mathcal{J}(f)$, $g'_{-}(x)$ existe et est égal à $f(x-)$.

Toutes les primitives des fonctions de $\overline{\mathcal{E}}$ sont donc à la fois dérivables à droite et dérivables à gauche.

Or, on constate aisément que la fonction $f(x-)$ est limite uniforme, sur I , de fonctions en escaliers <u>continues à gauche</u> ; considérons alors le <u>problème</u> C qui s'énonce en remplaçant les mots <u>dérivées à droite</u> par ceux de <u>dérivées à gauche</u>, et l'intervalle J par l'intervalle K , dans l'énoncé du <u>problème</u> B . Le procédé du prolongement par continuité uniforme donne toujours le moyen de résoudre ce nouveau problème, et la primitive de $f(x-)$ ainsi obtenue, ayant $f(x-)$ comme dérivée à gauche, ne peut être que g . L'application de la méthode à la recherche des primitives des fonctions limites uniformes de fonctions en escaliers conduit au même ensemble de primitives, à la fois dérivables à droite et dérivables à gauche, que l'on résolve le problème B pour les limites uniformes de fonctions en escaliers continues à droite, ou le problème C pour les limites uniformes de fonctions en escaliers continues à gauche.

<u>Proposition 7.- $\overline{\mathcal{E}}$ contient l'ensemble des fonctions continues sur</u> I .

Notons d'abord que si f est une fonction continue sur I , $\|f(x)\|$ est une fonction <u>réelle</u>, <u>positive</u>, <u>finie</u> et <u>continue</u> sur l'intervalle compact I ; d'après une propriété connue, (Livre III, Chap.4, par.6, Théor.1) elle est bornée sur I et la fonction f appartient nécessairement à $\mathcal{A}$. De plus, f est une application continue du compact I dans l'espace uniforme V, donc f est uniformément continue dans I, (Livre III, Chap.2,par.4,Théor.2), par suite, étant donné $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\eta > 0$ tel que, quels que soient x et y appartenant tous deux à un intervalle quelconque contenu dans I et de longueur inférieure à η , on ait $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \epsilon$. Divisons alors I en un nombre fini d'intervalles de longueurs inférieures à η ; considérons la fonction en escalier $h(x)$ obtenue par juxtaposition de fonctions constantes dans chacun de ces intervalles ; prenons la continue à droite, et choisissons sa valeur dans chacun d'eux, égale à l'une des valeurs de f dans le même intervalle. On a visiblement $\|f-h\| \leqslant \epsilon$. On peut donc approcher f en norme d'aussi près qu'on le veut par le moyen d'une fonction appartenant à $\mathcal{E}$; donc $f \in \overline{\mathcal{E}}$.

En particulier les polynomes sont contenus dans $\overline{\mathcal{E}}$.

<u>Définition 4</u>.- <u>On dit qu'une fonction</u> f <u>définie sur</u> I , <u>à valeurs dans</u> V , <u>est continue par morceaux sur I , lorsqu'elle est juxtaposition de fonctions continues</u>.

Une telle fonction est de norme bornée sur I, puisqu'elle résulte de la juxtaposition d'un nombre fini de fonctions continues, qui sont donc de normes bornées sur chacun de leurs intervalles de définition.

Si la juxtaposition est faite par la droite, la fonction f est continue à droite, et appartient à $\mathcal{A}$.

<u>Proposition 8</u>.- $\overline{\mathcal{E}}$ <u>contient l'ensemble des fonctions continues par morceaux, continues à droite sur</u> I .

Soit f une telle fonction ; soit f_1 l'une des fonctions continues sur un intervalle compact, intervenant dans la formation de f par juxtaposition par la droite ; f peut-être approchée en norme à ε près, par une fonction en escaliers appartenant à $\mathcal{E}$; soit h_1 cette dernière . Opérons de même sur les autres fonctions continues dont la juxtaposition fournit f , et juxtaposons à leur tour, par la droite, les fonctions en escaliers telles que h_1 ; on obtient une nouvelle fonction en escaliers appartenant à $\mathcal{E}$ et approchant f en norme à ε près ; ε étant arbitrairement petit, la proposition se trouve établie.

<u>Remarque 1</u>.- La proposition précédente n'épuise pas le contenu de l'ensemble $\overline{\mathcal{E}}$. On peut caractériser intrinsèquement les fonctions appartenant à $\overline{\mathcal{E}}$; (cf. Exercice). Cette caractérisation n'a qu'un intérêt théorique, d'ailleurs assez minime. L'ensemble des fonctions continues par morceaux, qui forme une variété linéaire dans $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$, étant d'une étendue très suffisante pour la plupart des applications, nous nous bornerons, conformément aux limitations que nous nous imposons dans ce livre, à la constatation de son inclusion dans $\overline{\mathcal{E}}$.

<u>Remarque 2</u>.- On peut toutefois, lorsque V = R , montrer que $\overline{\mathcal{E}}$ contient aussi un autre ensemble important de fonctions réelles, à savoir <u>les fonctions monotones continues à droite et bornées</u>. Remarquons d'abord qu'une fonction monotone ayant partout une limite à droite, les fonctions monotones appartenant à $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ sont nécessairement continues à droite. Soit alors f(x) la fonction monotone considérée ; soient m et M ses bornes inférieures et supérieures, toutes deux finies. On peut diviser

l'intervalle $[m,M]$ en un nombre fini d'intervalles de longueurs inférieures à ε positif arbitrairement petit. Les images inverses de ces intervalles par la fonction f sont aussi des intervalles, (éventuellement vides ou se réduisant à des points), et l'intervalle I résulte de la juxtaposition de ceux de ces intervalles, en nombre fini, qui sont de longueur non nulle. En procédant comme dans la démonstration de la proposition 7, on construit immédiatement une fonction en escaliers approchant la fonction f à ε près en norme, ce qui établir l'assertion.

Considérons maintenant trois espaces vectoriels normés complets : V_1, V_2, V_3, puis, comme nous l'avons fait au cours du paragraphe 1, (Prop.3), une fonction bilinéaire continue

$$(x_1, x_2) \longrightarrow [x_1 . x_2]$$

définie dans $V_1 \times V_2$, à valeurs dans V_3. Envisageons comme plus haut les espaces vectoriels normés $\mathcal{O}\!\iota_1$, $\mathcal{O}\!\iota_2$, $\mathcal{O}\!\iota_3$ respectivement formés par les fonctions définies sur I, à valeurs dans V_1, V_2, V_3, bornées en normes, continues à droite lorsquelles ont une limite à droite. Soient toujours $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ les ensembles de fonctions en escaliers correspondants.

<u>Proposition 9</u>.- <u>Si</u> $f_1 \in \overline{\mathcal{E}}_1$ <u>et si</u> $f_2 \in \overline{\mathcal{E}}_2$ <u>la fonction</u> $f_3 = [f_1 . f_2]$ <u>définie sur</u> I , <u>à valeurs dans</u> V_3 , <u>appartient à</u> $\overline{\mathcal{E}}_3$.

Il est clair que si $f_1 \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 \in \mathcal{E}_2$, la fonction $f_3 \in \mathcal{E}_3$. La continuité de la fonction bilinéaire entraîne alors trivialement la proposition.

En particulier, si $V_1 = V_2 = V_3 = R$ et si la fonction bilinéaire se réduit au produit ordinaire dans R^2 , la proposition précédente s'exprime en disant que $\overline{\mathcal{E}}$ est un <u>anneau</u> .

5.- Intégrales ; notations ; propriétés.-

Soit f un élément de $\overline{\mathcal{E}}$. A partir de maintenant nous désignerons par $\int_{x_0} f$ ou $\int_{x_0} f(t).dt$ la primitive de la fonction f que l'on a désigné jusqu'alors par $\mathcal{J}(f)$, et qui s'annule au point $x_0 \in I$.

Si $x \in I$, la valeur de cette primitive au point x sera désignée par $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Si g est une primitive quelconque de f , on a

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = g(x)-g(x_0) \quad \text{(ce qui se note aussi } g(t)\Big|_{x_0}^{x}\text{)}.$$

Si x et y sont deux points quelconques appartenant à I, on a par suite

$$\int_{x}^{y} f(t)\,dt + \int_{y}^{x} f(t)dt = 0$$

De même si x, y et z sont trois points quelconques appartenant à I, on a

$$\int_{x}^{y} f(t)\,dt + \int_{y}^{z} f(t)dt + \int_{z}^{x} f(t)\,dt = 0$$

formule qui se généralise aisément de proche en proche dans le cas d'un nombre fini quelconque de points appartenant à I .

On donne le nom d'<u>intégrale indéfinie</u> de la fonction f à toute primitive de cette fonction ; on donne le nom d'<u>intégrale définie</u> de la fonction f sur l'intervalle I, au vecteur

$$u = \int_{a}^{b} f(t)\,dt \quad ;$$

L'intégrale définie est donc un élément de l'espace V ; on utilise parfois la notation

$$u = \int_{I} f(t)\,dt$$

On donne souvent le nom de <u>somme</u> au signe $\int$. Ces diverses dénomination sont empruntées au calcul intégral qui constitue, sous certains de ses aspects, une généralisation étendue de la théorie précédente.

<u>Propriétés de linéarité du signe somme</u>.-

D'une façon générale, les propriétés de l'intégrale indéfinie ou définie ne sont que des traductions, dans un langage différent, des propriétés des dérivées. Elles expriment certaines qualités de la relation existant entre une fonction et sa dérivée, ou entre une fonction et l'une de ses primitives.

C'est ainsi que les propriétés de linéarité de la fonction $\mathcal{J}(f)$ deviennent en notation intégrale :

$$\int_{x_0} k.f = k\int_{x_0} f\,; \qquad \int_{x_0}(f+g) = \int_{x_0} f + \int_{x_0} g$$

quelles que soient la constante réelle k et les fonctions f et g appartenant à $\overline{\mathcal{E}}$.

<u>Théorème de la moyenne pour une intégrale définie</u>.-

De même, si f appartient à $\overline{\mathcal{E}}$ et si $g = \mathcal{J}(f)$ est une primitive de f, on a vu que le théorème de la moyenne entrainait l'inégalité $\|g\| \leqslant (b-a)\|f\|$; prenons en particulier la primitive nulle pour $x = a$; cette inégalité donne alors

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leqslant (b-a)\|f\|$$

qui est l'expression du théorème de la moyenne pour les intégrales définies. On en déduit immédiatement la forme équivalente, pour x_0 et x appartenant à I ,

$$\left\| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right\| \leqslant |x-x_0|.\|f\|$$

qui est l'expression du théorème de la moyenne pour les intégrales indéfinies.

Ces formules comportent diverses généralisations. En premier lieu, d'après la forme générale du théorème de la moyenne pour les fonctions vectorielles, (Par.1; prop.13), si $f(x)$ est une fonction vectorielle et g(x) une fonction réelle strictement croissante, toutes deux dérivables à droite, et si

$$\|f'_+(x)\| \leqslant M\,g'_+(x)$$

M désignant une constante positive, on a pour $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$,

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant M(g(y) - g(x))$$

La traduction en notation intégrale est immédiate : <u>Si</u> $f(x)$ <u>est une fonction vectorielle définie sur</u> I <u>et appartenant à</u> $\overline{\mathcal{E}}$ <u>, et si</u> g(x) est une fonction réelle strictement positive, limite uniforme de fonctions en escaliers réelles continues à droite ; si de plus il existe une constante positive M telle que

$$\| f(x) \| \leqslant M\, g(x)$$

pour tout x appartenant à I , on a quels que soient x_0 et x dans I ,

$$\left\| \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right\| \leqslant M . \left| \int_{x_0}^{x} g(t)dt \right| .$$

Ce résultat peut encore s'énoncer de façon un peu difféfente, souvent plus commode dans les applications : Si $f(x)$ est une fonction vectorielle définie sur I et appartenant à $\overline{\mathcal{E}}$, et si $g(x)$ est une fonction réelle strictement positive, limite uniforme de fonctions en escaliers, si de plus il existe une constante M positive telle que

$$\| f(x) \| \leqslant M$$

pour tout x appartenant à I , on a quels que soient x_0 et x dans I ,

$$\left\| \int_{x_0}^{x} f(t)\, g(t)\, dt \right\| \leqslant M \left| \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt \right|$$

Il suffit pour le voir, de remplacer dans l'énoncé précédent, $f(x)$ par $f(x).g(x)$, en notant que, d'après la propositèon 9, le produit $f(x).g(x)$ appartient bien à $\overline{\mathcal{E}}$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas des fonctions réelles. On a donné plus haut, (Par.1; prop.8), un complément au théorème de la moyenne seulement valable alors. La traduction en langage intégral s'énonce ainsi : Soit $f(x)$ une fonction réelle bornée définie sur I et limite uniforme de fonctions en escaliers continues à droite. Soit m et M les bornes inférieures et supérieures de cette fonction ; quels que soient $x_0 \leqslant x$ appar§enant à I , on a

$$m(x-x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \leqslant M(x-x_0)$$

sauf si f est constante, auquel cas il faut remplacer les signes $<$ par $=$.

Ce dernier énoncé entraîne trivialement les conséquences suivantes :

<u>Si</u> f(x) <u>appartenant à</u> $\overline{\mathcal{E}}$ <u>est positif dans</u> I , <u>on a</u> $\int_{x_0}^{x} f(t)dt > 0$ <u>pour</u> $x > x_0$ <u>sauf si</u> f(x) <u>est partout nulle dans</u> I, <u>auquel cas l'intégrale est nulle</u>.

<u>Si</u> $f(x) \geqslant g(x)$ <u>en tout point de I, et si ces deux fonctions appartiennent à</u> $\overline{\mathcal{E}}$, <u>on a</u>

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt > \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad \underline{\text{pour}} \quad x > x_0$$

<u>sauf si les deux fonctions sont identiques</u>.

<u>Soient</u> f(x) <u>et</u> g(x) <u>deux fonctions appartenant à</u> $\overline{\mathcal{E}}$, <u>la seconde étant positive</u> ; <u>soient</u> m <u>et</u> M <u>les bornes inférieures et supérieures de la première sur</u> I <u>on a</u>

$$m\int_{x_0}^{x} g(t)dt < \int_{x_0}^{x} f(t)\,g(t)dt < M\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad \underline{\text{pour}} \quad x > x_0$$

(On notera que, d'après la proposition 9, le produit f(x)g(x) appartient bien à $\overline{\mathcal{E}}$.)

<u>La formule d'intégration par parties</u>.-

Cette formule n'est que la traduction en notation intégrale de la formule de dérivation d'une fonction bilinéaire. (Par.1;prop.3). Reprenons comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, trois espaces vectoriels normés et complets : V, W, U. Soit une fonction bilinéaire continue $(x\,;y) \to [x\,.\,y]$ définie dans $V \times W$, prenant ses valeurs dans U ; considérons les variétés linéaires $\overline{\mathcal{E}}$; $\overline{\mathcal{F}}$; $\overline{\mathcal{G}}$ respectivement constituées par les fonctions définies sur I, à valeurs dans V, W, U, et qui sont limites uniformes de fonctions en escaliers de même nature. Soient alors deux fonctions $f \in \overline{\mathcal{E}}$ et $g \in \overline{\mathcal{F}}$; supposons les toutes deux dérivables à droite en tout point de J, f'_+ appartenant encore à $\overline{\mathcal{E}}$ et g'_+ appartenant à $\overline{\mathcal{F}}$. La fonction $h = [f\,.\,g]$ possède une dérivée à droite en tout point de J et l'on a

$$[f(x).\,g'_+(x)] = h'_+(x) - [f'_+(x).\,g(x)]$$

Or on a vu (prop.9) que les fonctions $[f \cdot g'_+]$ et $[f'_+ \cdot g]$ ~~n'~~appartenaient toutes deux à $\mathcal{G}$. Prenons alors une même primitive des deux membres de la relation précédente, et observons que $[f \cdot g]$ est évidemment une primitive de h'_+, il vient

$$\int_{x_0}^{x}[f(t) \cdot g'_+(t)]dt = [f(t) \cdot g(t)]\Big|_{x}^{x_0} - \int_{x_0}^{x}[f'_+(t) \cdot g(t)]\,dt \; ; \quad (x; x_0 \in I)$$

C'est la formule dite d'intégration par parties. Elle est d'une très grande utilité pratique.

<u>Changement de variable dans les intégrales définies et indéfinies</u>.-

Les formules que nous allons obtenir ici sont les traductions en notations intégrales de la formule de dérivation d'une fonction composée. Or nous avons vu que cette dernière présentait deux aspects différents : dans un premier cas, $f(x)$ est une fonction réelle <u>dérivable à droite</u> en x_0 , et $g(y)$ est une fonction vectorielle <u>dérivable</u> en $f(x_0)$; alors la fonction $g(f(x))$ admet une dérivée à droite en x_0 égale à $g'(f(x_0)).f'_+(x_0)$. Dans un autre cas la fonction $f(x)$ est une fonction réelle <u>strictement croissante dérivable à droite</u> en x_0, et $g(y)$ est une fonction vectorielle <u>dérivable à droite</u> en $f(x_0)$; alors la fonction $g(f(x))$ admet une dérivée à droite en x_0 égale à $g'_+(f(x_0)).f'_+(x_0)$.

A ces deux aspects vont correspondre deux règles différentes relatives au changement de variable dans une intégrale.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas. Soit $f(x)$ une fonction réelle définie sur I et dérivable à droite sur J, telle de plus que $f(I)$ soit un intervalle compact. Soit g une fonction vectorielle définie sur $f(I)$; cette fonction doit être la dérivée d'une fonction h ; on prendra donc g limite uniforme de fonctions en escaliers continues à droite sur $f(I)$, et pour que h ait en tout point de $f(I)$ sa dérivée à droite égale à sa dérivée à gauche, il faudra prendre g continue ; ce sera suffisant et toutes les conditions seront remplies (cf. prop.6) ; $h(f(x))$ sera alors une primitive de $g(f(x)).f'_+(x)$, et on pourra écrire pour tout x et tout y appartenant à I

$$\int_x^y g(f(t)).\ f'_+(t)dt = \int_{f(x)}^{f(y)} g(t)\ dt \ ;$$

Il y a lieu de noter qu'en général, la fonction sous le signe somme au premier membre, n'appartiendra nullement à la variété $\overline{\mathcal{E}}$ relativement à l'intervalle I. On peut toutefois affirmer qu'il en est ainsi lorsque f(x) est continue et admet une dérivée à droite continue par morceaux sur I .

Arrivons maintenant au deuxième cas. Supposons f(x) définie sur I dérivable à droite et, par exemple, strictement croissante. Imposons encore la condition supplémentaire que f(I) soit un intervalle ; on voit aisément que cela entraîne la continuité de la fonction f , puis le fait que f(I) est compact. La fonction vectorielle g sera prise appartenant à l'ensemble des fonctions limites uniformes de fonctions en escaliers continues à droite sur f(I) ; elle sera alors la dérivée à droite d'une fonction h ; $h(f(x))$ sera la primitive de $g(f(x)).f'_+(x)$, et on pourra écrire pour tout x et tout y appartenant à I

$$\int_x^y g(f(t)).\ f'_+(t)dt = \int_{f(x)}^{f(y)} g(t)\ dt \ ;$$

Ici encore, la fonction sous le signe somme, au premier membre n'appartient pas en général à la variété $\overline{\mathcal{E}}$ relativement à l'intervalle I; c'est ce qui arrive cependant si g est continue par morceaux sur f(I) et si f(x) admet une dérivée à droite continue par morceaux sur I .

<u>Remarque</u>.- Dans la plupart des cas, la fonction f(x) est continue, ce qui entraîne que f(I) est un intervalle compact.

6.- Intégrales impropres.-

Soit $I = \left]a,b\right[$, $(a<b)$, un intervalle quelconqee, ouvert dans R, dont les extrémités peuvent appartenir à $\overline{R}$. Soit $f(x)$ une fonction vectorielle de la variable réelle x, définie sur I, prenant ses valeurs dans un espace vectoriel normé complet V, et qui soit limite uniforme de fonctions en escaliers sur tout intervalle compact $J \subset I$. On désignera dans la suite par U_J la valeur de l'intégrale définie $\int_J f(t)dt$, et par $\mathcal{F}$ le filtre sur I ayant pour base les complémentaires, dans I, des intervalles compacts $J \subset I$.

Définition 5.- On désigne sous le nom d'intégrale impropre de la fonction f sur l'intervalle I, la limite, si elle existe, des U_J suivant le filtre $\mathcal{F}$.

On écrit alors

$$U = \mathrm{Lim}_{\mathcal{F}}\, U_J = \int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

et on dit que cette intégrale est convergente.

Proposition 10.- Pour que l'intégrale impropre de la fonction f sur l'intervalle I converge, il faut et il suffit qu'à tout ε strictement positif corresponde un intervalle compact $J \subset I$ tel que l'on ait pour tout couple d'intervalles compacts J' et J'' satisfaisant à $J \subset J' \subset J'' \subset I$,

$$\left\| U_{J''} - U_{J'} \right\| \leqslant \varepsilon$$

C'est une conséquence triviale du critère de Cauchy.

Exemple 1. Considérons la fonction réelle égale à $1/x^2$ et l'intervalle semi-ouvert $I = \left[1;+\infty\right[$; l'intégrale impropre correspondante est convergente et égale à 1.

Exemple 2. Considérons une suite de nombres réels (u_n) ; $(n \in N^*)$; puis la fonction en escaliers réelle $f(x)$ définie par

$$f(x) = u_n \qquad (x \in \left[n,n+1\right[).$$

L'intégrale impropre de la fonction f(x) sur l'intervalle semi-ouvert $I = [0; +\infty[$, est convergente ou non suivant que la série de terme général u_n est ou non convergente.

Propriétés des intégrales impropres.-

Elles résultent par passage à la limite, des propriétés des intégrales définies ordinaires. On observera que, si dans les relations par lesquelles s'expriment ces propriétés, figurent deux (resp.trois) intégrales impropres, il suffit de l'existence de l'une (resp. deux) de ces intégrales, pour pouvoir conclure l'existence de la deuxième (resp. troisième).

On a alors les énoncés suivants :

1) Soit I un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$, ayant a et b , $(a<b)$ comme extrémités, et c un point appartenant à I et le partageant en deux intervalles non nuls I_1 et I_2 ; si $f(x)$ est définie sur I , et si deux des trois intégrales impropres

$$\int_I f(t)dt \quad ; \quad \int_{I_1} f(t)dt \quad ; \quad \int_{I_2} f(t)dt$$

convergent, il en est de même de la troisième, et l'on a

$$\int_I f(t)\,dt = \int_{I_1} f(t)\,dt + \int_{I_2} f(t)\,dt$$

On le voit immédiatement par passage à la limite dans la relation

$$\int_J f(t)\,dt = \int_{J_1} f(t)\,dt + \int_{J_2} f(t)\,dt$$

où J est un intervalle compact contenant c, intérieur à I , et partagé en deux intervalles compacts J_1 et J_2 par le point c .

2) Si l'intégrale impropre $\int_I f(t)\,dt$ converge, il en est de même de l'intégrale impropre $\int_I k\,f(t)\,dt$, k désignant une constante réelle quelconque, et l'on a

$$\int_I k\,f(t)\,dt = k\int_I f(t)\,dt$$

3) Si $f = f_1 + f_2$ et si deux des trois intégrales impropres $\int_I f$; $\int_I f_1$; $\int_I f_2$ convergent, il en est de même de la troisième, et l'on a :

$$\int_I f = \int_I f_1 + \int_I f_2$$

4) Soient encore deux fonctions f et g définies, dérivables à droite sur l'intervalle ouvert I , d'extrémités a et b , ($a<b$), et prenant leurs valeurs dans deux espaces vectoriels normés complets V et W ; puis une fonction bilinéaire $(x;y) \rightarrow [x.y]$ définie dans $V \times W$, à valeurs dans un troisième espace vectoriel normé complet U . Désignons par $[f.g]_J$ la variation de la fonction $[f.g]$ entre l'origine et l'extrémité de l'intervalle compact $J \subset I$; désignons aussi, si elle existe, par $[f.g]_I$ ou $[f.g]\Big|_a^b$ la limite de $[f.g]$ suivant le filtre $\mathcal{f}$.

<u>Si deux des trois expressions</u> $[f.g]\Big|_a^b$; $\int_a^b [f(t).g'_+(t)]dt$; $\int_a^b [f'_+(t).g(t)]\,dt$ <u>convergent, la troisième converge aussi,</u> et on a

$$\int_a^b [f(t).\,g'_+(t)]\,dt = [f.g]\Big|_a^b - \int_a^b [f'_+(t).\,g(t)]\,dt \ .$$

5) Soit $f(x)$ une fonction réelle définie et continue sur un intervalle ouvert I ; dérivable à droite sur tout semi-ouvert à droite contenu dans I . Soit $g(y)$ une fonction vectorielle continue sur $f(I)$.

<u>Si l'une des deux intégrales impropres</u>

$$\int_I g(f(t))\, f'_+(t)dt \qquad \text{et} \qquad \int_{f(I)} g(t)\,dt$$

<u>converge, l'autre converge aussi, et ces deux intégrales sont égales.</u>

Ont le même énoncé en supposant de plus $f(x)$ strictement croissante (ou décroissante) sur I , et en demandant seulement que g soit tel que l'une des deux intégrales existe.

<u>Cas des intégrales impropres de fonctions réelles.</u>-

<u>Proposition 11.- Soit</u> $f(x)$ <u>une fonction réelle définie sur l'intervalle ouvert</u> $I \subset R$, <u>finie, positive, limite uniforme de fonctions en escalier sur tout intervalle compact</u> $J \subset I$; <u>pour que l'intégrale impropre</u> $\int_I f(t)\,dt$ <u>soit convergente, il faut et il suffit que l'ensemble des intégrales</u> $u_J = \int_J f(t)\,dt$ <u>soit majoré dans</u> R .

En effet, $f(x)$ étant positif, la relation $J \subset J'$ entraîne $u_J \leqslant u_{J'}$. En d'autres termes, l'application $J \longrightarrow u_J$ est croissante sur l'ensemble filtrant des intervalles compacts contenus dans I . (Livre III ; chap.4 ; para.5 ; théor.2) .

De plus, la borne supérieure des u_J est la valeur de l'intégrale impropre.

Proposition 12.- (Principe de comparaison).- Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions réelles et positives définies sur l'intervalle ouvert I , satisfaisant toutes deux aux hypothèses de la proposition 11, telles de plus que $f(x) \leqslant g(x)$ sur I . Si l'intégrale impropre de $g(x)$ sur I est convergente, il en est de même de celle de $f(x)$, et on a $\int_I f(t)\,dt \leqslant \int_I g(t)\,dt$; si en outre il existe un intervalle compact J_o sur lequel $f(x) < g(x)$, on a $\int_I f(t)\,dt < \int_I g(t)\,dt$.

L'hypothèse entraîne que, pour tout intervalle compact J contenu dans I , on ait

$$u_J = \int_J f(t)\,dt \leqslant V_J = \int_J g(t)\,dt$$

d'où la première partie de l'énoncé, d'après la proposition 11. L'inégalité sur les sommes résulte du principe de prolongement des inégalités, (Livre III, chap.4, para.5, théor.1). Si de plus $f(x) < g(x)$ sur J_o , on a en décomposant J en trois intervalles I_1, J_o, I_2 par les extrémités de J_o , $\int_{I_1} f(t)dt \leqslant \int_{I_1} g(t)dt$, $\int_{J_o} f(t)dt < \int_{J_o} g(t)dt$, $\int_{I_2} f(t)dt \leqslant \leqslant \int_{I_2} g(t)dt$ d'où la proposition, en ajoutant ces inégalités membre à membre.

Application ; règle de convergence de Cauchy-Mac.Laurin.-

Soit $f(x)$ une fonction réelle positive décroissante définie sur $I = \left[0; +\infty\right[$. Soit (u_n) la série de terme général $u_n = f(n)$; $(n \in N^*)$. Pour que cette série soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale impropre $\int_I f(t)\,dt$ le soit.

Envisageons en effet les fonctions en escaliers suivantes :

$$g(x) = f(n) \; ; \quad (x \in [n, n+1[) . \qquad h(x) = f(n) \; ; \quad (x \in [n-1, n[).$$

D'après une remarque antérieure, (Ex.2, supra), la convergence de la série (u_n) équivaut à celle de l'une ou l'autre des intégrales impropres

$$\int_I g(t)\,dt \qquad \text{ou} \qquad \int_I h(t)\,dt$$

or on a visiblement, par suite de la décroissance de la fonction f ,

$$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

La règle résulte alors de la proposition 12.

<u>Intégrales absolument convergentes</u>.-

Reprenons maintenant une fonction vectorielle $\mathbf{f}(x)$ définie sur un ouvert I , limite uniforme de fonctions en escaliers sur tout intervalle compact contenu dans I . Il en est alors de même de la fonction réelle et positive $\|\mathbf{f}(x)\|$.

<u>Proposition 13</u>.- <u>Pour que l'intégrale impropre</u> $\int_I \mathbf{f}(t)\,dt$ <u>converge, il suffit que l'intégrale impropre</u> $\int_I \|\mathbf{f}(t)\|\,dt$ <u>soit convergente. L'intégrale proposée est dite alors absolument convergente</u>.

En effet, sur tout intervalle compact $J \subset I$, on a, d'après le théorème de la moyenne

$$\left\| \int_J \mathbf{f}(t)\,dt \right\| \leqslant \int_J \|\mathbf{f}(t)\|\,dt .$$

Soient alors $J' \subset J''$ deux intervalles compacts contenus dans I , ayant respectivement pour origine et extrémités $\alpha \; ; \; \beta$ et $\gamma \; ; \; \delta$. La différence $J''-J'$ est alors la somme des deux intervalles compacts $[\gamma \; ; \; \alpha]$ et $[\beta \; ; \; \delta]$, et l'on a

$$\left\| \int_{J''} f - \int_{J'} f \right\| = \left\| \int_{\gamma}^{\alpha} f(t)\,dt + \int_{\beta}^{\delta} f(t)\,dt \right\| \leqslant \left\| \int_{\gamma}^{\alpha} f(t)\,dt \right\| + \left\| \int_{\beta}^{\delta} f(t)\,dt \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\gamma}^{\alpha} \|f(t)\|\,dt + \int_{\beta}^{\delta} \|f(t)\|\,dt = \int_{J''} \|f\| - \int_{J'} \|f\| ;$$

ce qui établit la proposition, moyennant la proposition 10.

Corollaire.- (Théorème de la moyenne pour les intégrales impropres).- Soit $f(x)$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle ouvert I, limite uniforme de fonctions en escaliers sur tout intervalle compact $J \subset I$, et telle de plus, que l'on ait pour tout $x \in I$,

$$\| f(x) \| \leqslant M$$

M désignant une constante positive. Soit de même $g(x)$ une fonction réelle, strictement positive, définie sur I, telle que l'intégrale impropre

$$\int_I g(t)\,dt$$

soit convergente ; il en est alors de même de l'intégrale $\int_I f(t)\,g(t)dt$ et l'on a

$$\left\| \int_I f(t)\,g(t)\,dt \right\| \leqslant M \int_I g(t)\,dt .$$

On a évidemment $\| f(x)\,g(x) \| \leqslant M\,g(x)$ ce qui prouve, d'après les propositions 12 et 13 la convergence absolue de l'intégrale impropre

$$\int_I f(t)\,g(t)\,dt \;;$$

L'inégalité annoncée s'obtient alors par prolongement de l'inégalité

$$\int_J f(t)\,g(t)\,dt \leqslant M \int_J g(t)\,dt$$

qui résulte du théorème de la moyenne pour les intégrales ordinaires.

Remarque.- Une intégrale impropre peut naturellement être convergente sans être absolument convergente, comme le montre l'exemple suivant :

*Soit $f(x)$ une fonction réelle positive décroissante définie sur $I = [0;+\infty[$, et limite uniforme de fonctions en escaliers sur tout intervalle compact contenu dans I ; on suppose de plus que $\lim\limits_{x\in I;\,x\to+\infty} f(x) = 0$. L'intégrale impropre

$$\int_I f(x)\sin x.dx$$

est alors convergente. En effet, posons

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\sin t\,dt = (-1)^k u_k \quad \text{avec} \quad u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t).|\sin t|.dt$$

On a manifestement, d'après les hypothèses faites sur la fonction $f(x)$,

$$u_k \leqslant u_{k+1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} u_k = 0$$

La série de terme général I_k est donc une série alternée convergente, (Livre II, chap.4, para.7, n°6), et il en est de même de l'intégrale impropre considérée car, en posant $s_k = \sum\limits_{p=0}^{p=k} I_p$, il existe pour tout $x \in I$, un entier positif k tel que

$$s_k \leqslant \int_0^x f(t)\sin t\,dt \leqslant s_{k+1}\,.$$

Or, il est aisé de voir, par un choix convenable de la fonction $f(x)$, que l'intégrale peut ne pas être absolument convergente ; on prendra par exemple

$$f(x) = 1/n \quad \text{pour} \quad \frac{x}{\pi} \in [n-1;n]\,.$$

On a alors $I_k = 2/(k+1)$; la suite $(1/n)$ n'étant pas sommable dans R , l'intégrale n'est pas absolument convergente.*

Exercices.- 1) Soit $f(x)$ une fonction réelle continue dans $[a;b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, et admettant en tout point de $]a;b[$ une dérivée à droite. Montrer que

$$\frac{1}{4}(b-a)^2 . \operatorname*{Inf.}_{a<x<b} f'_+(x) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \frac{1}{4}(b-a)^2 \operatorname*{Sup.}_{a<x<b} f'_+(x) .$$

Dans quel cas peut-il y avoir égalité.

2) Soit $f(x)$ une fonction réelle continue strictement croissante dans un intervalle $[0;a]$, et telle que $f(0) = 0$; soit g sa fonction réciproque définie dans $[0;f(a)]$; montrer que si $0 < x < a$, $0 < y < f(a)$, on a

$$xy - \int_0^x f(t)dt - \int_0^y g(t)\,dt \leqslant 0$$

l'égalité n'ayant lieu que si $y = f(x)$. (Etudier la variation du premier membre en fonction de x, y restant fixe).

3) Soient $k > 1$; $k' = k/(k-1)$; montrer que l'on a, quels que soient $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

$$1 + xy - (1+x^k)^{1/k}.(1+y^{k'})^{1/k'} \leqslant 0$$

$$xy \leqslant ax^k + by^{k'} \quad \text{si } a > 0,\ b > 0 \quad \text{et} \quad (ka)^{k'}\ (k'b)^k \geqslant 1$$

$$(x+y)^k \leqslant ax^k + by^k \quad \text{si } a > 0,\ b > 0 \quad \text{et} \quad 1/a^{k-1} + 1/b^{k-1} \leqslant 1 .$$

(Méthode de l'exercice 2).

4) Pour qu'une fonction vectorielle f définie sur un intervalle compact I soit limite uniforme de fonctions en escaliers, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble des points de I où l'<u>oscillation</u> de f est $\geqslant \alpha$, soit un ensemble <u>fini</u>.

Paragraphe 3.- Dérivées d'ordre supérieur.

1.- Définitions.-

Soit $f(x)$ une fonction vectorielle de la variable réelle x, continue dans un intervalle ouvert I et y admettant en tout point une dérivée f'. Si f' est continue dans un voisinage de $x_0 \in I$, et admet en ce point une dérivée première, cette dérivée est encore appelée la dérivée seconde de f au point x_0, et se note $f''(x_0)$, ou $D^2 f(x_0)$. Si cette dérivée seconde existe en tout point de I, c'est une nouvelle fonction vectorielle qu'on désigne par les notations f'' ou $D^2 f$. Par récurrence, on définit de même la dérivée $n^{\text{ème}}$ (ou dérivée d'ordre n) de la fonction f qu'on note $f^{(n)}$ ou $D^n f$; sa valeur en un point x_0 est égale à la dérivée de la fonction $f^{(n-1)}$. Cette définition suppose l'existence de $f^{(n-1)}$ dans un voisinage de x_0 et la dérivabilité de cette fonction en x_0.

Il se peut évidemment que $f^{(n-1)}$ ait en un point une dérivée à droite, mais non une dérivée. La notion de dérivée $n^{\text{ème}}$ à droite présente peu d'intérêt.

Dans les formules qui suivent, et qui expriment les propriétés de la dérivée $n^{\text{ème}}$, f et g désignent deux fonctions vectorielles continues dans I, admettant en un point de I toutes les dérivées figurant dans les formules, ce qui implique la continuité, dans un voisinage de ce point, de celles de ces dérivées dont l'ordre est inférieure à l'ordre maximum des dérivées considérées.

a) Dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une somme.- On a $D^n(f+g) = f^{(n)} + g^{(n)}$ (1)

Les fonctions f et g prennent ici leurs valeurs dans le même espace vectoriel ; la formule résulte de proche en proche, de la formule analogue concernant les dérivées premières. De même, si k désigne une constante, on a $D^n(kf) = kf^{(n)}$.

b) Dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction bilinéaire.- On a

$$D^n[f.g] = [f^{(n)}.g] + \binom{n}{1}[f^{(n-1)}.g'] + \binom{n}{2}[f^{(n-2)}.g''] + \ldots\ldots + \\ \ldots + \binom{n}{n-1}[f'.g^{(n-1)}] + [f.g^{(n)}]; \quad (2)$$

Ici, comme dans les paragraphes précédents, f et g sont deux fonctions vectorielles à valeurs dans des espaces vectoriels V et W, tandis que $(x;y) \to [x.y]$ désigne une fonction bilinéaire continue définie dans $V \times W$ et prenant ses valeurs dans un troisième espace vectoriel U. La formule (2), connue sous le nom de formule de Leibniz se démontre aisément par récurrence en tenant compte de la relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n-1}{p-1}$ entre les coefficients binomiaux.

Il faut encore noter la formule suivante

$$[f^{(n+1)}.g] + (-1)^n[f.g^{(n+1)}] = D.\Big\{[f^{(n)}.g] - [f^{(n-1)}.g'] + [f^{(n-2)}.g''] - \\ \ldots\ldots + (-1)^n[f.g^{(n)}]\Big\}; \quad (3)$$

d'un grand intérêt pratique, et qui entraîne comme nous le verrons ci-dessous la formule d'intégration par parties d'ordre n ; elle se vérifie sans peine par un calcul direct, compte tenu de la formule de dérivation d'une fonction bilinéaire.

2.- Formule de Taylor.

Soit f une fonction vectorielle définie sur un intervalle ouvert I, et dérivable en $a \in I$; l'existence de la dérivée $f'(a)$ implique qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $h > 0$ tel que $|x-a| \leqslant h$ entraîne

$$\|f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)\| \leqslant \varepsilon|x-a|$$

ce qui peut encore s'écrire

$$f(x) = f(a) + (x-a)[f'(a) + \alpha], \quad \text{avec} \quad \|\alpha\| \leqslant \varepsilon .$$

L'existence de la dérivée première permet donc de donner une expression approximative de la fonction $f(x)$ au voisinage du point a, par le moyen de la fonction affine $f(a)+(x-a) f'(a)$. De même, si l'on postule l'existence de la dérivée $n^{\text{ème}}$ au point a , la formule de Taylor permet de donner une expression approximative de la fonction au voisinage de ce point, par le moyen d'un <u>polynome vectoriel de degré n</u> par rapport à la variable. D'une façon précise, à tout nombre positif ε arbitrairement petit, correspond un nombre positif h tel que $|x-a| < h$ entraîne

$$\left\| f(x)- f(a)- \frac{x-a}{1!} f'(a)- \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)-\ldots- \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\right\| \leqslant \varepsilon \frac{|x-a|^n}{n!};$$

Montrons-le par récurrence sur n . Supposons donc l'énoncé exact lorsqu'on y remplace n par n-1, et appliquons-le à la fonction f' qui possède par hypothèse une dérivée d'ordre n-1 au point a ; on a, pour $|y-a| < h$,

$$\left\| f'(y)- f'(a)- \frac{y-a}{1!} f''(a)- \frac{(y-a)^2}{2!} f'''(a)-\ldots- \frac{(y-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a)\right\| \leqslant \varepsilon \frac{|y-a|^{n-1}}{(n-1)!}$$

Tenons compte du théorème de la moyenne généralisée, (Paragraphe 1, n° 5 et 6, prop.13), appliquons-le dans l'intervalle $[a,x]$, (avec $|x-a| < h$), à la fonction figurant au premier membre ; notons que, pour n pair, $|y-a|^{n-1}$ est la dérivée de la fonction strictement croissante $\operatorname{sgn.}(y-a). \frac{|y-a|^n}{n}$; il vient alors l'inégalité annoncée

$$\left\| f(x)- f(a)- \frac{(x-a)}{1!} f'(a)- \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)-\ldots- \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)\right\| \leqslant \varepsilon \frac{|x-a|^n}{n!} ;$$

dont la relation

$$f(x) = f(a)+ \frac{(x-a)}{1!} f'(a)+ \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a)+\ldots+ \frac{(x-a)^n}{n!} \left[f^{(n)}(a)+\alpha\right],$$

avec $\|\alpha\| \leqslant \varepsilon$

est une forme équivalente. Cette dernière formule est la <u>formule de Taylor d'ordre n</u> . Son rôle est capital en analyse. Le dernier terme du du second membre, le seul qui soit de formation irrégulière, à savoir $\frac{(x-a)^n}{n!}\alpha$ est appelé <u>reste</u> de la formule de Taylor. Dans le cas général, on ne sait rien sur α, sinon qu'on peut le rendre en norme aussi petit qu'on le veut en prenant x suffisamment voisin de a. Mais en précisant les hypothèses faites sur la fonction et ses dérivées, on peut déterminer plus explicitement ce reste :

<u>Formule d'intégration par partie d'ordre n : forme intégrale du reste.</u>

Soient f et g deux fonctions vectorielles définies et continues sur I, dérivables jusqu'à l'ordre n, leurs dérivées $n^{\text{èmes}}$ étant continues. La formule (3) donne, pour a et x dans I,

$$\int_a^x [f^{(n)}(t).\ g(t)]\,dt = \Big\{[f^{(n-1)}(t).\ g(t)] - [f^{(n-2)}(t).\ g'(t)] + \ldots + \ldots + (-1)^{n-1}[f(t).\ g^{(n-1)}(t)]\Big\}\Big|_a^x + (-1)^n\int_a^x [f(t).\ g^{(n)}(t)]\,dt\ ;$$

formule dite "<u>d'intégration par parties d'ordre n</u>". Appliquons-là en particulier au cas où, la fonction bilinéaire $(x\,;y) \to [x.y]$ se réduisant au produit d'un nombre réel par un élément de l'espace V, on prend pour g la dérivée f' d'une fonction vectorielle définie dans I et y possédant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n+1, la fonction réelle figurant dans la formule étant égale à $(t-x)^n/n!$. Il vient alors, par un calcul facile

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt\ ;$$

On retrouve la formule de Taylor d'ordre n, la forme du reste étant cette fois précisée par $\alpha = \int_a^x \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^n f^{n+1}(t)dt$. C'est la <u>forme intégrale du reste</u>. Elle permet souvent de donner des majorations simples de ce reste ; si l'on a par exemple, dans tout l'intervalle I, $\|f^{(n+1)}\| \leqslant M$, il vient par application du théorème de la moyenne pour les intégrales définies (Paragr.2, n°5 in.fine), $\|\alpha\| \leqslant \frac{M|x-a|}{n+1}$.

On peut améliorer cette limitation dans le cas des fonctions réelles. Si m et M sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle ouvert I , on a

$$m\,\frac{x-a}{n+1} \leqslant \alpha \leqslant M\,\frac{x-a}{n+1}\quad , \text{(pour } x>a \text{ ; échanger le sens des inégalités dans le cas où } a>x\text{)}$$

comme on le voit en appliquant le théorème de la moyenne pour les intégrales définies de fonctions réelles sous la forme correspondante (Paragr.2, n° 5, in.fine). Les inégalités sont à remplacer par des égalités seulement si la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ est une constante.

<u>Primitives d'ordre supérieur</u>. Une primitive g d'une fonction f , limite uniforme de fonctions en escaliers sur I, est continue dans I , donc y admet une primitive ; une quelconque de ces primitives est dite <u>primitive seconde</u> de f . Plus généralement on appelle <u>primitive d'ordre n</u> de f une primitive ~~plus~~ d'une primitive d'ordre n-1 de f . On voit immédiatement, par récurrence sur n , que la différence de deux primitives d'ordre n de f est un <u>polynome vectoriel de degré au plus égal à n-1</u> . Une primitive d'ordre n de f est entièrement déterminée si l'on se donne en un point a , sa valeur et celles de ses (n-1) premières dérivées.

On désigne en particulier par la notation $\int_a^{(n)} f$ celle des primitives d'ordre n de la fonction f qui est nulle au point a , ainsi que ses n-1 premières dérivées. La formule de Taylor d'ordre n-1 appliquée à cette fonction, montre que

$$\int_a^{(n)x} f = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(t)\, dt$$

et ramène donc la détermination des primitives d'ordre n au calcul d'une intégrale définie.

<u>Exercices</u>.- (N.B.- Pour éviter des longueurs, on suppose une fois pour toutes que, dans les énoncés qui suivent, chaque fois qu'il s'agit, dans les formules, des valeurs d'une fonction et d'un certain nombre de ses dérivées en un certain nombre de points, la fonction et les dérivées considérées sont définies dans un intervalle ouvert contenant tous ces points. S'il y a des hypothèses supplémentaires, elles sont mentionnées explicitement).

1) Montrer que

$$[f\cdot g^{(n)}]=[f\cdot g]^{(n)}-\binom{n}{1}[f'\cdot g]^{(n-1)}+\dots+(-1)^p\binom{n}{p}[f^{(p)}\cdot g]^{(n-p)}+\dots+\dots+(-1)^n[f^{(n)}\cdot g].$$

2) Soient $a_0\ ;\ a_1\ ;\dots;a_n$ et f des fonctions vectorielles d'une variable x ; on pose

$$[a_0\cdot f]-[a_1\cdot f]'+[a_2\cdot f]''+\dots+(-1)^n[a_n\cdot f]^{(n)}=[b_0\cdot f]+[b_1\cdot f']+\dots+[b_n\cdot f^{(n)}]\ ;$$

Montrer que

$$[b_0\cdot f]-[b_1\cdot f]'+[b_2\cdot f]''+\dots+(-1)^n[b_n\cdot f]^{(n)}=[a_0\cdot f]+[a_1\cdot f']+\dots+[a_n\cdot f^{(n)}].$$

3) Si l'on pose $D^n(u/v)=(-1)^n\ f_n/v^{n+1}$ montrer que

$$f_n=\begin{vmatrix} u & ;\ v & ;\ 0 & ;\ 0 & ;\ \dots\dots & ;\ 0 \\ u' & ;\ v' & ;\ v & ;\ 0 & ;\ \dots\dots & ;\ 0 \\ u'' & ;\ v'' & ;\ 2v' & ;\ v & ;\ \dots\dots & ;\ 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & ; \\ u^{(n)} & ;\ v^{(n)} & ;\ \binom{n}{1}v^{(n-1)} & ;\ \binom{n}{2}v^{n-2} & ;\dots\dots & ;\ \binom{n}{n-1}v' \end{vmatrix}$$

4) Montrer que

$$\frac{1}{x^{n+1}}\ f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\ D^n\left[x^{n-1}\ f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

5) Montrer que

$$D^n\left[\varphi(f(x))\right]=\sum \frac{n\,!}{m_1!\;m_2!\ldots m_q!}\;\varphi^{(p)}(f(x)).\left(\frac{f'(x)}{1!}\right)^{m_1}\left(\frac{f''(x)}{2\,!}\right)^{m_2}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left(\frac{f^{(q)}(x)}{q!}\right)^{m_q}$$

la sommation étant étendue à tous les systèmes d'entiers strictement positifs $(m_1,m_2,\ldots,m_q)$ tels que

$$m_1+2m_2+3m_3+\ldots+qm_q=n$$

et p étant égal à $m_1+m_2+\ldots+m_q$.

6) Montrer que

$$D^n\left[\varphi(f(x))\right]=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}\,\varphi^{(p)}(f(x)).\left[\sum_{q=1}^{p}\binom{p}{q}.\left[-f(x)\right]^{p-q}.D^n\left[(f(x))^q\right].\right].$$

7) On considère le déterminant (dit wronskien des fonctions $f_1;\,f_2;\ldots;\,f_n$)

$$W(f_1,f_2,\ldots,f_n)=\begin{vmatrix} f_1 & f'_1 & f''_1 & \ldots\ldots & f_1^{(n-1)}\\ f_2 & f'_2 & f''_2 & \ldots\ldots & f_2^{(n-1)}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_n & f'_n & f''_n & \ldots\ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Démontrer les formules :

a)

$$W\left[f_1(g(x)),f_2(g(x)),\ldots,f_n(g(x))\right]=\left[g'(x)\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}W\left[f_1(y),f_2(y),\ldots,f_n(y)\right]$$

où il faut remplacer y par $g(x)$ dans le second membre, une fois les dérivations effectuées par rapport à y ;

b)

$$W\,(gf_1,\,gf_2,\ldots,gf_n)=g^nW\,(f_1,f_2,\ldots,f_n)$$

c)

$$\frac{1}{f_1^n}\,W(f_1,f_2,\ldots,f_n)=W\left[\left(\frac{f_2}{f_1}\right)',\left(\frac{f_3}{f_1}\right)',\ldots\ldots,\left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right]$$

d)
$$D\left[\frac{W(f_1,..,f_{n-2},f_n}{W(f_1,..,f_{n-2},f_{n-1}}\right] = \frac{W(f_1,..,f_{n-2}).\ W(f_1,..,f_{n-2},f_{n-1},f_n}{\left[W(f_1,....,f_{n-2},f_{n-1})\right]^2}$$

8) On pose $\Delta_{h_1} f(x)=f(x+h_1)-f(x)$, $\Delta^2_{h_1,h_2} f(x)=\Delta_{h_2}(\Delta_{h_1} f(x))$

et, en général, $\Delta^p_{h_1,h_2,..,h_p} f(x) = \Delta_{h_p}(\Delta^{p-1}_{h_1,h_2,..,h_{p-1}} f(x))$

Montrer que
$$\Delta^p_{h_1,h_2,...,h_p} f(x)=h_1h_2...h_p f^{(p)}(x+\theta_1h_1+\theta_2h_2+...+\theta_p h_p)$$
les nombres $\theta_1,\theta_2,...,\theta_p$ étant compris entre 0 et 1 .

9) Soit f une fonction définie dans un intervalle I , $x_1,x_2,...,x_p$ des points de I tels qu'au point x_i $(i=1,2,...,p)$, f et ses n_i-1 premières dérivées s'annulent. Montrer que, si on pose $n=n_1+n_2+...+n_p$, il existe un point ξ intérieur au plus petit intervalle contenant les points x_i et tel que $f^{(n-1)}(\xi)=0$.

10) Avec les mêmes notations qu'à l'exerc.9, on suppose maintenant f quelconque. Soit g le polynome de degré n tel qu'au point x_i $(i=1,2,..,p)$ g et ses n_i-1 premières dérivées soient respectivement égaux à f et ses n_i-1 premières dérivées. Montrer qu'on a
$$f(x) = g(x) + \frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}...(x-x_p)^{n_p}}{n\,!} f^{(n)}(\xi)$$
où ξ est intérieur au plus petit intervalle contenant les points $x_1,x_2,...,x_p$ et x .

(On appliquera l'exercice précédent à la fonction de t
$$f(t)-g(t)-A\ \frac{(t-x_1)^{n_1}(t-x_2)^{n_2}...(t-x_p)^{n_p}}{n\,!}$$
où A est la constante déterminée par l'équation
$$f(x)-g(x)-A\ \frac{(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}...(x-x_p)^{n_p}}{n\,!} = 0$$

11) Soit φ une fonction admettant une dérivée continue finie, et $\neq 0$ dans l'intervalle $[a,x]$; si $f^{(n+1)}$ est continue et finie dans $[a,x]$, montrer que l'on peut écrire le reste de la formule de Taylor d'ordre n sous la forme

$$R_n(x) = \left[\varphi(x)-\varphi(a)\right] \frac{(x-\xi)^n}{n\,!} \, \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

avec $a < \xi < x$.

12) Soit g une fonction <u>impaire</u>. Montrer qu'on a

$$g(x) = \frac{x}{3}\left[g'(x)+2g'(0)\right] - \frac{x^5}{180}\, g^{(5)}(\xi) \qquad (\xi = \theta x\ ,\ 0<\theta<1)$$

(on procédera d'une manière analogue à celle de l'exerc.10).

En déduire que

$$f(b)-f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880}\, f^{(5)}(\xi) \quad (a<\xi<b)$$

(formule de Simpson).

13) Soient $x_1 < x_2 \ldots < x_n$. Le rapport des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \ldots & f_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & \ldots & g_1(x_n) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & \ldots & g_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & \ldots & g_n(x_n) \end{vmatrix}$$

est égal au rapport des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} f_1(\xi_1) & f_1'(\xi_2) \ldots & f_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ f_2(\xi_1) & f_2'(\xi_2) \ldots & f_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(\xi_1) & f_n'(\xi_2) \ldots & f_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} g_1(\xi_1) & g_1'(\xi_2) \ldots & g_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ g_2(\xi_1) & g_2'(\xi_2) \ldots & g_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n(\xi_1) & g_n'(\xi_2) \ldots & g_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix}$$

où $\xi_1 = x_1\ ,\quad \xi_1 < \xi_2 < x_2\ ,\quad \xi_2 < \xi_3 < x_3, \ldots,\ \xi_{n-1} < \xi_n < x_n$

Appliquer au cas où

$$g_1(x) = 1 \quad , \quad g_2(x) = x \ ,\ldots, g_n(x) = x^{n-1} \ .$$

14) Soient p et q deux nombres strictement positifs, a et b deux nombres réels tels que $a < b$, $b-a \geqslant 2\sqrt{p/q}$. Soit f une fonction admettant une dérivée seconde dans $[a,b]$, et telle qu'en tout point x de $[a,b]$, $|f(x)| < p$, $f''(x) \leqslant q$. Montrer que $f'(a) \geqslant -2\sqrt{pq}$, $f'(b) < 2\sqrt{pq}$.

15) Montrer que, si $x > 1$ et $t > 1$, on a

$$x^t - 1 > t(x-1) + \frac{1}{2}\, t(t-1)(x-1)^2/x^2$$

En déduire que, si $0 < p < 1$, et si $a > 0$ et $b > 0$

$$a^p b^{1-p} < pa + (1-p)b \qquad \text{sauf pour} \quad a = b$$

puis qu'en général, si les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont strictement positifs, et $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} < p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n$$

sauf si tous les a_i sont égaux .

Paragraphe 4.- Intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre. Différentiation et intégration sous le signe somme.

1.- Cas des intégrales ordinaires.-

Soit I un intervalle compact de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Considérons une famille de fonctions vectorielles $f_a(x)$, ou f_a, définies sur I, prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel normé complet V, et dépendant par ailleurs d'un indice a décrivant un ensemble d'indices E sur lequel est défini un filtre $\mathcal{f}$. Nous supposerons que, pour toutes valeurs de a, la fonction f_a appartient à l'ensemble $\mathcal{B}_I$ des fonctions limites uniformes de fonctions en escaliers définies sur I. On a vu plus haut, (Paragraphe 2, n° 2) que l'ensemble $\mathcal{B}_I$ était fermé dans l'espace $\mathcal{O}_I$ des fonctions définies et bornées en normes sur I, la topologie dans $\mathcal{O}_I$ étant définie au moyen de la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in I} \|f(x)\|$$

Si donc la famille de fonctions f_a converge suivant le filtre $\mathcal{f}$ vers une fonction g au sens de la topologie précédente, cette fonction g appartient à $\mathcal{B}_I$, et l'on a

$$\operatorname{Lim}_{\mathcal{f}} \int_x^y f_a(t)\, dt = \int_x^y g(t)\, dt$$

quels que soient x et y appartenant à I.

Si l'on passe aux fonctions dérivées, le résultat s'énonce ainsi :

Soit $f_a(x)$ une fonction vectorielle de la variable réelle x, définie et dérivable en x, en tout point d'un intervalle compact I, et dépendant d'un paramètre a décrivant un ensemble d'indices E muni d'un filtre $\mathcal{f}$. Si les limites

$$\operatorname{Lim}_{\mathcal{f}} f_a(x) = g(x) \; ; \qquad \lim_{\mathcal{f}} f'_a(x) = h(x)$$

existent au sens de la topologie de la norme sur $\mathcal{O}_I$, on a en tout point de I

$$g'(x) = h(x).$$

Voici deux conséquences importantes des propriétés précédentes :

a) <u>Continuité sous le signe somme</u>.- Supposons que l'ensemble d'indices E soit un espace topologique et que le filtre des voisinages d'un point a_0 de E soit le filtre $\mathcal{F}$. <u>Si la fonction</u> f_a <u>définie dans</u> E , <u>à valeurs dans</u> $\mathcal{C}_I$ <u>est une fonction continue de</u> a <u>au point</u> a_0 , <u>il en est de même de</u> $\int_x^y f_\alpha(t)\,dt$, <u>regardée comme fonction de</u> a , <u>quels que soient</u> x <u>et</u> y <u>dans</u> I , pourvu naturellement que les f_a appartiennent à $\mathcal{B}_I$ dans un voisinage de a_0.

b) <u>Limite des intégrales des fonctions d'une suite</u>.- Supposons que l'ensemble des indices soit l'ensemble N des entiers positifs, et que $\mathcal{F}$ soit le filtre de Fréchet. Soit (f_n) la suite de fonctions envisagées, toutes appartenant à $\mathcal{B}_I$. <u>Si cette suite a une limite</u> g <u>dans</u> $\mathcal{C}_I$, <u>cette limite appartient à</u> $\mathcal{B}_I$ <u>et l'on a, pour tout</u> x <u>et tout</u> y <u>dans</u> I ,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_x^y f_n(t)\,dt = \int_x^y g(t)\,dt\,.$$

2.- <u>Cas des intégrales impropres</u> ; <u>intégrales uniformément convergentes</u>.-

Soient maintenant I un intervalle ouvert dans R , et (f_a) une famille de fonctions vectorielles définies dans I , à valeurs dans un espace vectoriel normé complet, et dont les restrictions à tout intervalle compact J contenu dans I soient des éléments de l'espace $\mathcal{B}_J$ des fonctions limites uniformes de fonctions en escaliers sur J , et cela pour toute valeur de l'indice a décrivant l'ensemble d'indices E muni du filtre $\mathcal{F}$. Postulons de plus la convergence, pour tout a , de l'intégrale impropre $\int_I f_a(t)\,dt$, et supposons encore l'existence d'une limite g de f_a suivant le filtre $\mathcal{F}$ sur tout intervalle compact J contenu dans I , au sens de la topologie de la norme dans $\mathcal{C}_J$.

Il est clair que cette dernière hypothèse entraîne l'existence d'une limite $g(x)$ de $f_a(x)$ suivant le filtre $\mathcal{F}$ en tout point $x \in I$, au sens de la topologie dans V. On est souvent conduit à examiner la validité de la formule suivante :

$$\operatorname{Lim}_{\mathcal{F}} \cdot \int_I f_a(t)\,dt = \int_I g(t)\,dt \quad . \qquad (1)$$

Observons d'abord que les deux membres de cette relation se présentent en fait comme des doubles limites, le premier s'écrivant

$$\operatorname{Lim}_{\mathcal{F}} \left[\operatorname{Lim}_{J \to I} \cdot \int_J f_a(t)\,dt \right] ;$$

la limite entre crochets étant prise suivant le filtre des complémentaires des intervalles compacts dans I, tandis que le second s'écrit de même

$$\operatorname{Lim}_{J \to I} \left[\operatorname{Lim}_{\mathcal{F}} \cdot \int_J f_a(t)\,dt \right] ;$$

d'après l'hypothèse faite de l'existence de la limite g sur tout intervalle compact J contenu dans I.

La question qui se pose est donc celle de l'<u>interversion des deux limites</u> de $\int_J f_a(t)\,dt$ suivant le filtre $\mathcal{F}$ et suivant le filtre des complémentaires des intervalles compacts dans I, respectivement.

Cette interversion n'est pas légitime en général ; c'est ce que prouve l'exemple suivant :

<u>Exemple</u>.- * Prenons a réel, et soit $\mathcal{F}$ le filtre des voisinages de 0, origine dans $\mathbb{R}$. La fonction considérée sera une fonction réelle ayant pour valeur en tout point de l'intervalle $I = [0,+\infty[$, $f_a(x) = \frac{\sin ax}{x}$. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t}\,dt$ est convergente, ainsi qu'on l'a vu plus haut, (Paragraphe 2, n°6, in fine) ; soit $i(a)$ sa valeur. Le changement de variable $t \to at$ montre immédiatement que $i(a)$ est égal à la constante

$A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ pour $\alpha > 0$, et à $-A$ pour $\alpha < 0$; de plus $i(0)=0$.
La fonction $i(\alpha)$ est donc discontinue pour $\alpha=0$, et il n'est pas légitime d'échanger les limites dans l'expression

$$\operatorname{Lim}_{\mathcal{f}} \left[\operatorname{Lim}_{\ell \to +\infty} \int_0^{\ell} \frac{\sin \alpha t}{t}\, dt \right]$$

le premier membre de (1) étant ici égal à $\pm A$, suivant que α tend vers 0 positivement ou négativement, tandis que le second membre est nul*.

Nous nous bornerons ici à indiquer une condition <u>suffisante</u> pour la validité de la relation (1) .

<u>Intégrales uniformément convergentes</u>.- Conservant les mêmes notations, nous poserons encore

$$U_J(\alpha) = \int_J f_\alpha(t)\, dt \; ; \qquad U_I(\alpha) = \int_I f_\alpha(t)\, dt$$

<u>Définition</u>.- <u>On dit que l'intégrale impropre</u> $U_I(\alpha)$ <u>est uniformément convergente si, à tout nombre strictement positif</u> ε , <u>il est possible de faire correspondre un intervalle compact</u> J_ε <u>contenu dans</u> I <u>et tel que l'on ait</u>

$$\left\| U_I(\alpha) - U_J(\alpha) \right\| \leqslant \varepsilon \qquad (2)$$

<u>pour tout intervalle compact</u> J <u>contenant</u> J_ε <u>et contenu dans</u> I , <u>cet intervalle</u> J_ε <u>pouvant être choisi indépendamment de</u> α <u>dans</u> E .

D'après ce qui a été supposé sur la fonction f_α et ce qui a été dit au numéro précédent, $U_J(\alpha)$ a une limite suivant le filtre $\mathcal{f}$ qui n'est autre que $U_J = \int_J g(t)dt$. Or, l'hypothèse de l'uniforme convergence explicitée ci-dessus entraîne d'abord $\left\| U_{J'}(\alpha) - U_{J''}(\alpha) \right\| \leqslant 2\varepsilon$ pour $J_\varepsilon \subset J' \subset J'' \subset I$, puis par passage à la limite suivant le filtre $\mathcal{f}$, $\left\| U_{J'} - U_{J''} \right\| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui implique, comme on sait la convergence de l'intégrale impropre $U_I = \int_I g(t)dt$. Il vient ensuite

$\| v_I - v_J \| \leqslant 2\varepsilon$ pour $J \supset J_\varepsilon$. Par ailleurs, on peut trouver un ensemble $X_\varepsilon \in \mathcal{f}$ tel que $a \in X_\varepsilon$ entraîne $\| v_J - v_J(a) \| \leqslant \varepsilon$; par combinaison avec (2) et avec la précédente inégalité il vient $\| v_I - v_I(a) \| \leqslant 4\varepsilon$ pour $a \in X_\varepsilon$; donc v_I est aussi la limite de $v_I(a)$ suivant le filtre $\mathcal{f}$, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.- Si l'intégrale impropre $\int_I f_\alpha(t)dt$ existe et est uniformément convergente quel que soit α , si de plus la fonction f_a a une limite g suivant le filtre $\mathcal{f}$ sur tout intervalle compact J contenu dans I , au sens de la topologie de la norme dans $\mathcal{A}_J$, on a

$$\operatorname{Lim}_{\mathcal{f}} \int_I f_a(t)\, dt = \int_I g(t)\, dt$$

les conditions précitées étant suffisantes pour l'existence et l'unicité des deux membres de cette égalité.

Les conséquences de cette proposition sont les mêmes que dans le cas des intégrales ordinaires :

a) Continuité sous le signe somme.- L'ensemble des indices étant un espace topologique E , et $\mathcal{f}$ étant le filtre des voisinages d'un point a_0 de cet espace, si la fonction $f_a(x)$ donne par restriction à tout intervalle compact J contenu dans I , une fonction de a continue au point a_0 au sens de la norme dans l'espace $\mathcal{A}_J$, si de plus l'intégrale impropre $\int_I f_a(t)dt$ existe et est uniformément convergente dans un voisinage de a_0 , cette intégrale impropre est une fonction continue de a au point a_0 .

b) Limite des intégrales impropres des fonctions d'une suite.- Supposons que l'ensemble des indices soit l'ensemble N des entiers positifs, et que $\mathcal{f}$ soit le filtre de Fréchet. Soit (f_n) la suite de fonctions envisagées ; si les restrictions de ces fonctions à tout intervalle compact J contenu dans I , appartiennent à $\mathcal{B}_J$, si la suite de ces restrictions

<u>est convergente dans</u> $\mathcal{A}_J$ <u>au sens de la topologie de la norme, vers une fonction</u> g <u>nécessairement définie dans</u> I, <u>si enfin l'intégrale impropre</u> $\int_I f_n(t)\,dt$ <u>converge uniformément relativement à l'indice</u> n , <u>alors la suite d'intégrales impropres</u>

$$v_n = \int_I f_n(t)\,dt$$

<u>est convergente dans l'espace</u> V , <u>et a pour limite l'intégrale impropre</u> $\int_I g(t)dt$.

3.- <u>Différentiation sous le signe somme ; cas des intégrales ordinaires</u>.-

Nous supposerons dorénavant, que l'ensemble d'indices E , est un intervalle compact du corps des réels $\mathbb{R}$, ou une partie compacte et convexe du corps des complexes $\mathbb{C}$. La fonction f , désignée maintenant par la notation $f(x;a)$ sera définie sur l'ensemble produit $E\times I$ de E par un intervalle compact I de $\mathbb{R}$; elle sera supposée appartenir à $\mathcal{B}_I$ quel que soit a dans E , et être fonction continue de a dans E , quelque soit x dans I . D'après ce qui précède, la fonction $g(a) = \int_J f(t;a)dt$ est alors fonction continue de a dans E , quel que soit l'intervalle compact, indépendant de a , J , contenu dans I .

Supposons encore la fonction $f(t;a)$ dérivable par rapport à a en tout point de E ; soit $f'_a(t;a)$ cette dérivée. La question se pose naturellement de l'existence et de l'expression de la dérivée de la fonction $g(a)$. Le théorème suivant donne une réponse à cette question :

<u>Théorème</u>.- <u>Pour que la fonction</u> $g(a)$ <u>possède en tout point de</u> E <u>une dérivée donnée par la formule</u>

$$g'(\alpha) = \int_J f'_\alpha(t;\alpha)\,dt$$

<u>il suffit que la dérivée</u> $f'_\alpha(t;\alpha)$ <u>existe et soit continue dans</u> $E\times I$.

$E\times I$ étant compact, la fonction $f'_\alpha(x;\alpha)$ est uniformément continue sur cet ensemble ; si donc on se donne un nombre positif arbitrairement petit ε , il existe un nombre positif η tel que $|\beta-\alpha| \leqslant \eta$ entraîne $\| f'_\beta(x;\beta) - f'_\alpha(x;\alpha) \| \leqslant \varepsilon$ pour tout x appartenant à I et tout α appartenant à E . On peut donc écrire, en appliquant une proposition antérieure, (Paragraphe 1, n° 5, Prop.7),

$$f(x;\beta) - f(x;\alpha) = f'_\alpha(x;\alpha).(\beta-\alpha) + h.(\beta-\alpha)$$

avec $\|h\| \leqslant \varepsilon$, ce qui implique, par application du théorème de la moyenne,

$$\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} = \int_J f'_\alpha(t;\alpha)\,dt + k$$

avec $\|k\| \leqslant \ell\varepsilon$, ℓ désignant la longueur de l'intervalle J . Notre assertion en résulte, en faisant tendre ε vers zéro.

<u>Cas des limites variables</u>.- Il arrive souvent que les limites de l'intervalle d'intégration $J = [a;b]$ soient elles-mêmes des fonctions du paramètre α ; on a alors, en désignant par $a(\alpha)$ et $b(\alpha)$ ces limites,

$$g(\beta) - g(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \left[f(t;\beta) - f(t;\alpha) \right] dt + \int_{b(\alpha)}^{b(\beta)} f(t;\beta)\,dt - \int_{a(\alpha)}^{a(\beta)} f(t;\beta)\,dt \ ;$$

Divisons les deux membres par $\beta-\alpha$ et faisons tendre β vers α ; sous les mêmes hypothèses que pour le précédent théorème, le premier terme du second membre de l'égalité obtenue tend vers $\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(t;\alpha)\,dt$, le second terme s'écrit, en désignant par $h(x;\alpha)$ une primitive de $f(x;\alpha)$ sur I ,

$$\frac{h[b(\beta);\beta] - h[b(\alpha);\beta]}{b(\beta) - b(\alpha)} \cdot \frac{b(\beta)-b(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Supposons la fonction réelle $b(\alpha)$ dérivable en tout point de E ; $h(x,\alpha)$ ayant pour dérivée par rapport à x la fonction $f(x,\alpha)$ qui est uniformément continue sur $E \times I$, il est possible, aussi petit que soit ε positif, d'assigner un nombre positif η tel que, pour tout x dans I et tout α dans E, $|y-x| < \eta$ entraîne

$$\left\| \frac{h(y;\beta) - h(x;\beta)}{y - x} - f(x;\beta) \right\| \leqslant \varepsilon$$

$b(\beta)$ et $f(x,\beta)$ étant par ailleurs des fonctions continues de β, on voit qu'on pourra prendre β assez voisin de α pour que $\dfrac{h[b(\beta);\beta] - h[b(\alpha);\beta]}{b(\beta) - b(\alpha)}$ diffère d'aussi peu qu'on le voudra de $f[b(\alpha);\alpha]$. La limite du terme considéré lorsque β tend vers α est donc $f[b(\alpha);\alpha].b'(\alpha)$. Un raisonnement analogue montrerait que la limite du troisième terme est $-f[a(\alpha);\alpha]\,a'(\alpha)$. Il vient donc, sous les conditions indiquées

$$g'(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(t;\alpha)dt + f[b(\alpha);\alpha].b'(\alpha) - f[a(\alpha);\alpha].\,a'(\alpha)$$

C'est la formule générale de différentiation sous le signe somme.

<u>Intégration sous le signe somme</u>.- Supposons ici que l'ensemble E se réduise à un intervalle compact de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ; bornons-nous de plus à ne considérer que des fonctions vectorielles $f(x;\alpha)$ continues dans le rectangle $E \times I$. La signification de l'expression

$$\int_I dt.\left[\int_E f(t;\alpha)\,d\alpha\right]$$

est bien claire : t ayant une valeur déterminée, l'intégrale $\int_E f(t;\alpha)\,d\alpha$ est, d'après ce qui précède, une fonction continue de t sur l'intervalle I ; on l'intègre ensuite sur cet intervalle. Je dis qu'il est légitime, dans cette expression, d'échanger l'ordre des intégrations sans modifier le résultat ; on a donc

$$\int_I dt \left[\int_E f(t;a)\,da\right] = \int_E da \left[\int_I f(t;a)\,dt\right] ;$$

qui est la <u>formule d'intégration sous le signe somme</u>.

Soit en effet $I = [a;b]$ et $E = [c;d]$. Remplaçons dans cette formule, b par un nombre variable x appartenant à I ; l'égalité à vérifier devient

$$\int_a^x dt \left[\int_E f(t;a)da\right] = \int_E da \left[\int_a^x f(t;a)\,dt\right] ;$$

Les deux membres de cette relation sont des fonctions vectorielles de x qui sont visiblement nulles pour $x=a$; il suffira donc de prouver que leurs dérivées, par rapport à x , existent et sont égales. Soit donc

$$g(t) = \int_E f(t;a)\,da \quad ; \qquad h(x;a) = \int_a^x f(t;a)\,dt \;;$$

la relation à vérifier devient

$$\int_a^x g(t)\,dt = \int_E h(x\,;\,a)\,da \;.$$

or, les dérivées des deux membres par rapport à x sont comme l'on sait, $g(x)$ et $\int_E h'_x(x;a)da$, elles sont toutes deux égales à $\int_E f(x;a)da$, ce qui établit notre assertion.

4.- <u>Différentiation sous le signe somme ; cas des intégrales impropres</u>.

Les résultats du numéro précédent sont en général inexacts dans le cas des intégrales impropres ;* c'est ainsi que revenant au cas de l'intégrale $i(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin.at}{t}\,dt$, étudiée en exemple au n°2, on constate que la dérivée $i'(a)$ est partout définie et égale à 0, sauf pour $a=0$, alors que la différentiation sous le signe somme, effectuée brutalement, conduit à la relation

$$i'(a) = \int_0^{+\infty} \cos at\,dt$$

dont le second membre n'a aucun sens. * Ici encore, comme au n°2, nous donnerons seulement des conditions <u>suffisantes</u> pour que l'opération de différentiation sous le signe somme reste légitime dans le cas d'une intégrale impropre.

Supposons, comme au n° 3 que E soit, ou un intervalle compact du corps des réels R, ou une partie compacte et convexe du corps des complexes C. Par ailleurs, I sera maintenant un intervalle ouvert dans R. On a le théorème suivant :

Théorème.- Soit $f(x;a)$ une fonction vectorielle définie dans $E \times I$, à valeurs dans un espace vectoriel normé complet, (sur le corps des réels ou sur le corps des complexes suivant que E est une partie de R ou de C) ; cette fonction sera supposée appartenir à $\mathfrak{B}_J$ quel que soit a dans E, et quel que soit le compact J contenu dans I, relativement à sa restriction à l'intervalle J ; elle sera supposée dérivable en a, en tout point de E et quel que soit x appartenant à I, cette dérivée étant continue dans $E \times I$; enfin les intégrales impropres $u_I(a) = \int_I f(t;a)dt$ et $v_I(a) = \int_I f'_a(t;a)\,dt$ seront supposées uniformément convergentes ; dans ces conditions, on a $u'_I(a) = v_I(a)$ l'accent dénotant la dérivation en a.

Posons en effet

$$u_J(a) = \int_J f(t;a)\,dt \quad ; \qquad v_J(a) = \int_J f'_a(t;a)\,dt$$

pour tout intervalle compact J contenu dans I. D'après les conclusions du n° 3, on a $u'_J(a) = v_J(a)$. D'autre part $u_J(a)$ et $v_J(a)$ convergent respectivement vers $u_I(a)$ et $v_I(a)$ suivant le filtre des complémentaires des intervalles compacts dans I, et cela uniformément par rapport à a dans E. Cela revient à dire que les fonctions u_J et u'_J convergent vers u_I et v_I relativement à la topologie de la norme dans l'espace des fonctions vectorielles bornées en normes, à valeurs dans V, et définies sur le compact E. Il suffit alors d'appliquer le résultat du n° 1, relatif aux fonctions dérivées, pour pouvoir conclure que $u'_I(a) = v_I(a)$. On notera qu'ici, c'est le filtre des complémentaires des intervalles compacts qui joue le rôle du filtre $\mathcal{F}$, le rôle de l'ensemble filtré du n° 1 étant joué par l'ensemble des couples d'extrémités d'intervalles compacts J contenus dans I .

Remarque.- Nous venons d'utiliser les résultats du n°1 dans un cas où l'ensemble compact I peut être une partie compacte convexe du corps des complexes, au lieu d'un intervalle compact du corps des réels. C'est l'occasion de dire que les résultats des numéros 1 et 3, relatifs aux intégrales ordinaires, s'appliquent sans modification au cas des fonctions d'une variable complexe prenant leurs valeurs dans un espace vectoriel normé complet sur $\mathbb{C}$, définies dans une partie I compacte et convexe du corps $\mathbb{C}$, et limites uniformes sur I, de polynomes ; (cf. Paragraphe 2, n° 2, in fine).

Intégration sous le signe somme ; cas des intégrales impropres.- La formule d'intégration sous le signe somme s'étend aussi, sous certaines conditions, aux intégrales impropres. Soit $f(x;\alpha)$ une fonction des deux variables réelles x et α définie et continue dans le rectangle $E \times I$, E désignant ici un intervalle compact, et I un intervalle ouvert, du corps des réels $\mathbb{R}$: Si l'intégrale impropre $v_I(\alpha) = \int_I f(t;\alpha)dt$ est uniformément convergente dans E , on a

$$\int_I dt \left[\int_E f(t;\alpha)d\alpha\right] = \int_E d\alpha \left[\int_I f(t;\alpha)dt\right]$$

Soit en effet J un intervalle compact contenu dans I ; d'après la formule d'intégration sous le signe somme dans le cas des intégrales ordinaires, (n° 3,supra) on a

$$\int_J dt \left[\int_E f(t;\alpha)\, d\alpha\right] = \int_E d\alpha \left[\int_J f(t;\alpha)\, dt\right]$$

Lorsque l'intervalle J tend vers l'intervalle ouvert I, le second membre de cette relation a pour limite

$$\int_E v_I(\alpha)\, d\alpha$$

car la différence de ces deux expressions n'est autre que

$$\int_E \left[v_I(\alpha) - \int_J f(t;\alpha)\, d\alpha\right] d\alpha$$

vecteur dont la norme est inférieure à $\ell\epsilon$, ℓ désignant la longueur de l'intervalle compact E , pourvu que l'intervalle J soit suffisamment voisin de I , comme il résulte de l'uniforme convergence de l'intégrale $U_I(a)$. Le premier membre de l'égalité précédente a donc une limite quand J tend vers I , ce qui prouve la convergence de l'intégrale impropre $\int_I dt \left[\int_E f(t;a)dt \right]$ et établit en même temps notre assertion.

<u>Convergence normale des intégrales impropres dépendant d'un paramètre</u>.- Il arrive fréquemment, lorsqu'on étudie une intégrale impropre $\int_I f(t;a)dt$ dépendant d'un paramètre a qui décrit un ensemble E , que l'on puisse trouver une fonction positive réelle $g(x)$, définie sur I , et telle que l'on ait pour tout x dans I et tout a dans E , $\| f(x;a) \| \leqslant g(x)$, l'intégrale impropre $\int_I g(t)dt$ étant de plus convergente. Dans ces conditions, on a, d'après le théorème de la moyenne, (Paragraphe 2, N°5, in fine), et pour tout intervalle compact J contenu dans I ,

$$\left\| \int_J f(t;a)dt \right\| \leqslant \int_J g(t)dt$$

ce qui entraîne immédiatement l'uniforme convergence sur E de l'intégrale proposée, puisque l'intégrale impropre de $g(x)$ sur I est elle-même convergente. Lorsque ces circonstances se présentent, on dit que l'intégrale $\int_I f(t;a)dt$ est <u>normalement convergente</u>.
