

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

78-07

DEFAUT DE STABILITE

D'OPERATIONS COHOMOLOGIQUES

par

Saïd ZARATI

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

78-07

DEFAUT DE STABILITE

D'OPERATIONS COHOMOLOGIQUES

par

Saïd ZARATI

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance à mon Professeur Jean LANNES pour son enseignement, pour m'avoir initié à la topologie algébrique, pour avoir dirigé mes recherches et pour les conseils qu'il m'a prodigués.

Je remercie vivement Monsieur François LATOUR pour avoir, lui aussi, lu ce travail et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Jean CERF de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Enfin, je remercie Mmes BARBICHON, LAUNAY et ZIELINSKI d'avoir assuré avec compétence la réalisation technique de ce travail.

CHAPITRE I

CALCUL DES CARRES DE STEENROD DANS LA COHOMOLOGIE DE $\mathbb{C}_2 X$

I - ETUDE DU COMPLEXE DES CHAINES DE $\mathbb{C}_n X$.

- A) Définitions et notations
- B) Groupe et catégorie
- C) Application du théorème des modèles acycliques

II - DESCRIPTION DE $H^*(\mathbb{C}_2 X ; \mathbb{Z}/2)$.

- A) Le transfert
- B) Définition de la cochaîne P_{tr}
- C) L'homomorphisme $H^*(\mathbb{C}_n ; \Pi) \rightarrow H^*(\mathbb{C}_n X ; \Pi)$.
- D) Conclusion

III - CALCUL DES CUP-PRODUITS DANS $H^*(\mathbb{C}_2 X ; \mathbb{Z}/2)$.

IV - CALCUL DES CARRES DE STEENROD DANS $H^*(\mathbb{C}_2 X ; \mathbb{Z}/2)$.

- A) L'application de chaînes de $V \otimes C_*(\mathbb{C}_2 X)$ vers $C_*(\mathbb{C}_2 X) \otimes C_*(\mathbb{C}_2 X)$
- B) Calcul de $\text{Sq}^i P_2 u$
- C) Carrés de Steenrod et transfert

V - RELATIONS D'ADEM.

CHAPITRE II

DEFAUT DE STABILITE

I - DEFINITIONS ET NOTATIONS.

II - L'HOMOLOGIE DE $\mathcal{G}_n X$ ET DE QX .

- A) L'homologie de $\mathcal{G}_n X$
- B) L'homologie de QX

III - DEFAUT DE STABILITE.

- A) Opérations cohomologiques externes
- B) Exemples d'opérations cohomologiques externes

IV - CALCUL DU r -DEFAUT DE STABILITE DES OPERATIONS COHOMOLOGIQUES GENERALISEES DE PONTRJAGIN

- A) Les opérations γ_p
- B) Enoncé du théorème 6
- C) Démonstration du théorème 6
- D) Application du théorème 6

V - STABILITE D'UNE OPERATION COHOMOLOGIQUE INTERNE.

- A) Position du problème
- B) Définitions et notations
- C) L'homéomorphisme $H^{t-1}(QK_n, K_n) \rightarrow D^t(n)$

VI - UN ISOMORPHISME.

- A) Une suite exacte courte
- B) L'application $P : X \wedge \mathcal{G}_2 Y \rightarrow \mathcal{G}_2(X \wedge Y)$
- C) Démonstration du théorème 8.

CHAPITRE I

CALCUL DES CARRES DE STEENROD

DANS LA COHOMOLOGIE DE \mathfrak{S}_2^X

I - ETUDE DU COMPLEXE DES CHAINES DE \mathfrak{S}_n^X .

A) Définitions et notations.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par \mathfrak{S}_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, \mathfrak{S}_0 étant le groupe trivial.

Si E est un ensemble, le groupe \mathfrak{S}_n opère à droite sur $E^n = E \times \dots \times E$ (n-fois) par :

$$\sigma \cdot (e_1, \dots, e_n) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n) .$$

2. On note $E\mathfrak{S}_n \rightarrow B\mathfrak{S}_n$ le \mathfrak{S}_n -fibré principal universel de Milnor, $E\mathfrak{S}_n$ est un espace contractile sur lequel opère librement le groupe \mathfrak{S}_n .

Soit X un espace topologique. \mathfrak{S}_n opère alors librement sur $E\mathfrak{S}_n \times X^n$ et l'on désigne par \mathfrak{S}_n^X l'espace quotient $E\mathfrak{S}_n \times X^n / \mathfrak{S}_n$.

3. Remarque : Une version simpliciale de la définition de l'espace \mathfrak{S}_n^X est donnée dans [2]. Pour X un ensemble simplicial :

$$\mathfrak{S}_n^X = W\mathfrak{S}_n \times X^n / \mathfrak{S}_n ,$$

où $W\mathfrak{S}_n$ est le groupe simplicial contractile associé au groupe \mathfrak{S}_n .

4. On note W une résolution libre de \mathbb{Z} (considéré comme un \mathfrak{S}_n -module trivial) sur $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$. D'après la définition de $E\mathfrak{S}_n$, on a une

équivalence de chaînes \mathfrak{S}_n -équivariante entre le complexe des chaînes singulières de $E\mathfrak{S}_n$, $C_*(E\mathfrak{S}_n)$ et W . Dans toute la suite, on désigne par $C_*(X)$ le complexe des chaînes singulières d'un espace topologique X .

D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber, on a une équivalence de chaînes :

$$C_*(E\mathfrak{S}_n X^n / \mathfrak{S}_n) \sim C_*(E\mathfrak{S}_n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} C_*(X^n)$$

où on a noté $C_*(E\mathfrak{S}_n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} C_*(X^n)$ le quotient de $C_*(E\mathfrak{S}_n) \otimes_{\mathbf{Z}} C_*(X^n)$ par l'action du groupe \mathfrak{S}_n .

Il en résulte :

$$C_*(\mathfrak{S}_n X) \sim W \otimes_{\mathfrak{S}_n} C_*(X^n).$$

Notre but est d'exprimer le complexe des chaînes singulières $C_*(\mathfrak{S}_n X)$ en fonction de W et de $C_*(X)$. D'après le théorème d'Eilenberg-Zilber, les deux foncteurs $X \rightarrow C_*(X^n)$ et $X \rightarrow C_*(X) \otimes \dots \otimes C_*(X)$ (n -fois) sont équivalents, mais il n'existe pas de transformations naturelles \mathfrak{S}_n -équivariantes entre ces deux foncteurs sinon il n'y aurait pas d'opérations de Steenrod. (Pour la définition de l'action de \mathfrak{S}_n sur le complexe $C_*(X) \otimes \dots \otimes C_*(X)$ (n -fois), voir le paragraphe II, B) .)

On va appliquer le théorème des modèles acycliques pour avoir une équivalence de chaînes entre $W \otimes_{\mathfrak{S}_n} C_*(X^n)$ et $W \otimes_{\mathfrak{S}_n} C_*^{n\otimes}(X)$.

B) Groupe et catégorie.

1. Action d'un groupe sur une catégorie.

Soit G un groupe et \mathcal{C} une catégorie ; on dit que \mathcal{C} est une G -catégorie si, pour tout élément g de G , il existe un foncteur :

$$\Phi_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

vérifiant :

$$(i) \quad \Phi_e = \text{id}_{\mathcal{C}} \quad (e \text{ désigne l'élément neutre de } G)$$

$$(ii) \quad \Phi_{gg'} = \Phi_g \circ \Phi_{g'} \quad (g, g' \in G) .$$

Pour une G -catégorie \mathcal{C} , on note $G \times \mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les objets de \mathcal{C} et dont les morphismes sont définis par :

$$\text{Hom}_{G \times \mathcal{C}}(A, B) = \bigsqcup_{g \in G} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi_g A, B) \quad (A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})) .$$

Le composé de deux morphismes $f : \Phi_g A \rightarrow B$ et $h : \Phi_{g'} B \rightarrow C$ dans la catégorie $G \times \mathcal{C}$ est défini par :

$$\Phi_{g'g} A \xrightarrow{\Phi_{g'} f} \Phi_{g'} B \xrightarrow{h} C$$

Exemple : Soient G et H deux groupes. On suppose donné un morphisme de G vers le groupe des automorphismes de H . On associe canoniquement au groupe H une catégorie notée \underline{H} telle que :

$$\text{Ob}(\underline{H}) = * \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\underline{H}}(*, *) = H .$$

Par définition, il est clair que la catégorie \underline{H} est une G -catégorie et on vérifie que la catégorie $G \times \underline{H}$ est associée au groupe $G \rtimes H$ produit semi-direct des groupes G et H .

2. Extension de foncteurs.

Si \mathcal{C} est une G -catégorie, alors il existe un foncteur

$$i : \mathcal{C} \rightarrow G \times \mathcal{C}$$

défini par : $i(A) = A$ pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

$$i(f) = f \quad \text{pour tout } f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) .$$

Si g est fixé dans G , alors l'ensemble $\text{Hom}_{G \times \mathcal{C}}(A, \Phi_g A) = \bigsqcup_{h \in G} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi_h A, \Phi_g A)$ possède un élément privilégié $\iota_g(A)$ correspondant, pour $h = g$, à l'identité de $\Phi_g A$.

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi_g A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}_{G \times \mathcal{C}}(A, B) \\ f & \longmapsto & i(f) \circ \iota_g(A) \end{array}$$

est l'inclusion naturelle.

DEFINITION. Soient \mathcal{C} une G -catégorie, \mathcal{C}' une catégorie et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur covariant. On dit que F s'étend à la catégorie $G \times \mathcal{C}$ s'il existe un foncteur covariant \hat{F} rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{i} & G \times \mathcal{C} \\ F \searrow & & \swarrow \hat{F} \\ & \mathcal{C}' & \end{array}$$

Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ se prolonge à la catégorie $G \times \mathcal{C}$, alors on définit pour tout $g \in G$ une transformation naturelle :

$$T_g : F \longrightarrow F \circ \Phi_g$$

par : $T_g(A) = \hat{F}[\iota_g(A)]$ pour tout $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

On vérifie que :

- (i) $T_e = \text{id}$
- (ii) $T_{gg'}(A) = T_g(\Phi_{g'}A) \circ T_{g'}(A) \quad (A \in \text{Ob}(\mathcal{C}) ; g, g' \in G) .$

Inversement, l'existence d'une telle transformation $T_g : F \rightarrow F \circ \Phi_g$ pour tout $g \in G$ vérifiant les conditions (i) et (ii) implique que le foncteur F s'étend à la catégorie $G \times \mathcal{C}$ en posant :

- (iii) $\hat{F}(A) = F(A) \quad \text{pour tout } A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- (iv) $\hat{F}(i(f) \circ \iota_g(A)) = F(f) \circ T_g(A) \quad \text{pour tout } f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi_g A, B) .$

DEFINITION. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ qui se prolonge à la catégorie $G \times \mathcal{C}$ est dit un \times_G -foncteur.

Soit $(\mathcal{C}, \mathfrak{M})$ une catégorie avec modèles, \mathcal{C}' la catégorie des \mathbf{Z} -modules, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur covariant, représentable (au sens de [7], page 28) et L un G -module libre.

LEMME 1. Si \mathcal{C} est une G -catégorie et F un \times_G -foncteur, alors le foncteur $L \otimes F$ s'étend à la catégorie avec modèles $(G \times \mathcal{C}, \mathfrak{M})$ en un foncteur $\widehat{L \otimes F}$ représentable.

Démonstration. Soit $T'_g : L \otimes F \rightarrow (L \otimes F) \circ \Phi_g$ la transformation naturelle définie par :

$$T'_g(A)(e \otimes x) = g \cdot e \otimes T_g(A) \cdot x \quad (g \in G, x \in F(A), A \in \text{Ob}(\mathcal{C}))$$

où T_g est la transformation naturelle correspondant au prolongement de F . T'_g vérifie les conditions (i) et (ii), ce qui montre que $L \otimes F$ est un \times_G -foncteur.

Puisque le foncteur F est représentable, pour chaque $M \in \mathfrak{M}$, il existe un ensemble $B_M \subset F(M)$ tel que, pour chaque $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, le \mathbf{Z} -module $F(A)$ admette pour base la famille des éléments $F(f) \cdot m$, où m décrit les divers ensembles B_M et où, pour $m \in B_M$, f décrit l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A)$.

Soit $\{e_i, i \in I\}$ une base de L , pour montrer que le foncteur $\widehat{L \otimes F}$ est représentable sur la catégorie avec modèles $(G \times \mathcal{C}, \mathfrak{M})$, on considère pour chaque $M \in \mathfrak{M}$ le sous-ensemble $\{e_i \otimes m, i \in I, m \in B_M\}$ de $(\widehat{L \otimes F})(M) = L \otimes_{\mathbf{Z}} F(M)$. Pour chaque $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, on a :

$$\begin{aligned} (\widehat{L \otimes F})(f)(e_i \otimes m) &= [(L \otimes F)(f) \circ T'_g(A)](e_i \otimes m) \\ &= g \cdot e_i \otimes (F(f) \circ T_g(A)) \cdot m ; \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} g \in G, i \in I, m \in B_M \\ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi_g M, A) \end{array} \right)$$

D'après la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{F[\Phi_{g^{-1}}(f)]} & F(\Phi_{g^{-1}}(A)) \\ T_g(M) \downarrow & & \downarrow T_g(A) \\ F(\Phi_g(M)) & \xrightarrow{F(f)} & F(A) \end{array}$$

on a :
$$(\widehat{L \otimes F})(f) \cdot (e_i \otimes m) = g \cdot e_i \otimes (T_g(A) \circ F[\Phi_{g^{-1}}(f)]) \cdot m .$$

Comme F est représentable, pour $\Phi_{g^{-1}}(A) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, la famille des éléments $F[\Phi_{g^{-1}}(f)] \cdot m$ où m décrit les divers ensembles B_M et où, pour $m \in B_M$, $\Phi_{g^{-1}}(f)$ décrit l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \Phi_{g^{-1}}A)$, est une base pour le \mathbb{Z} -module $F[\Phi_{g^{-1}}(A)]$, $T_g(A)$ étant un isomorphisme donc la famille des éléments $(T_g(A) \circ F[\Phi_{g^{-1}}(f)]) \cdot m$ est une base pour $F(A)$. On en déduit que la famille des éléments $(\widehat{L \otimes F})(f) \cdot (e_i \otimes m)$ est une base pour le \mathbb{Z} -module $(\widehat{L \otimes F})(A) = L \otimes_{\mathbb{Z}} F(A)$ où $i \in I$, m décrit les ensembles B_M et où, pour $m \in B_M$, f décrit l'ensemble $\text{Hom}_{G \times \mathcal{C}}(M, A)$.

COROLLAIRE 1. Soit G un groupe, M un G -module libre sur \mathbb{Z} et L un G -module libre, alors $L \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est un G -module (pour l'action diagonale) libre.

Démonstration. On prend pour \mathcal{C} la catégorie telle que :

$$\text{Ob}(\mathcal{C}) = * \quad \text{et} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(*, *) = \{\text{id}\} ,$$

C) Application du théorème des modèles acycliques.

1. Soit $(\mathcal{C}, \mathfrak{m})$ une catégorie avec modèles \mathfrak{m} , \mathfrak{D} la catégorie des complexes de chaînes augmentés et applications de chaînes conservant l'augmentation et P et R deux foncteurs covariants de $(\mathcal{C}, \mathfrak{m})$ vers \mathfrak{D} . Le théorème des modèles acycliques s'énonce ainsi (les notions de foncteurs représentables, acycliques et catégories avec modèles sont exposées dans [5], [7] et [15]).

THEOREME 1. Avec les notations précédentes, si P est représentable et R acyclique, il existe une transformation naturelle :

$$T : P \longrightarrow R$$

unique à homotopie algébrique et fonctorielle près.

2. On désigne par \mathcal{T} la catégorie des espaces topologiques et applications continues avec comme modèles les Δ_q , $q \geq 0$. La catégorie $\mathcal{T}^n = \mathcal{T} \times \dots \times \mathcal{T}$ (n-fois) est naturellement une \mathfrak{S}_n -catégorie avec comme modèles les $(\Delta_{q_1}, \dots, \Delta_{q_n})$, $q_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$.

On note P , C , $C \circ P$ et S les foncteurs covariants suivants :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}^n & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ (X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & X_1 \times \dots \times X_n \end{array}$$

$$C : \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ X & \longmapsto & C_*(X) \end{array}$$

$$C \circ P : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}^n & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & C_*(X_1 \times \dots \times X_n) \end{array}$$

$$S : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}^n & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ (X_1, \dots, X_n) & \longmapsto & C_*(X_1) \otimes \dots \otimes C_*(X_n) . \end{array}$$

Les foncteurs $W \otimes C \circ P$ et $W \otimes S$ libres et acycliques sont de façon évidente des $\mathfrak{K}_{\mathfrak{S}_n}$ -foncteurs qui s'étendent à la catégorie $\mathfrak{S}_n \times \mathcal{T}^n$ avec comme modèles les $(\Delta_{q_1}, \dots, \Delta_{q_n})$ $q_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$ en des foncteurs $\widehat{W \otimes C \circ P}$ et $\widehat{W \otimes S}$ libres et acycliques.

D'après le théorème des modèles acycliques, il existe une équivalence d'homotopie fonctorielle, déterminée à homotopie algébrique fonctorielle près :

$$F : \widehat{W \otimes C \circ P} \longrightarrow \widehat{W \otimes S}$$

En particulier, soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et X_1, \dots, X_n n-espaces topologiques, le diagramme suivant est strictement commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
W \otimes C_*(X_1 \times \dots \times X_n) & \xrightarrow{F(X_1, \dots, X_n)} & W \otimes C_*(X_1) \otimes \dots \otimes C_*(X_n) \\
\downarrow (\widehat{W \otimes C \circ P})[\iota_\sigma(X_1, \dots, X_n)] & & \downarrow (\widehat{W \otimes S})[\iota_\sigma(X_1, \dots, X_n)] \\
W \otimes C_*(X_{\sigma(1)}^{-1} \times \dots \times X_{\sigma(n)}^{-1}) & \xrightarrow{F(X_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, X_{\sigma(n)}^{-1})} & W \otimes C_*(X_{\sigma(1)}^{-1}) \otimes \dots \otimes C_*(X_{\sigma(n)}^{-1})
\end{array}$$

Soient f l'application de $X_1 \times \dots \times X_n$ vers $X_{\sigma(1)}^{-1} \times \dots \times X_{\sigma(n)}^{-1}$ qui, à (x_1, \dots, x_n) fait correspondre $(x_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, x_{\sigma(n)}^{-1})$ et g l'application de $C_*(X_1) \otimes \dots \otimes C_*(X_n)$ vers $C_*(X_{\sigma(1)}^{-1}) \otimes \dots \otimes C_*(X_{\sigma(n)}^{-1})$ définie par :

$$g(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n) = \text{signe} \cdot \alpha_{\sigma(1)}^{-1} \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma(n)}^{-1} \quad \begin{array}{l} (\alpha_i \in C_*(X_i) ; \\ 1 \leq i \leq n) \end{array}$$

où le signe comporte le facteur $(-1)^{|\alpha_1| \cdot |\alpha_j|}$ chaque fois que α_i et α_j sont échangés ($|\alpha_i| = \text{dimension de } \alpha_i ; 1 \leq i \leq n$).

Notons h_σ l'application de W vers W qui à w associe $\sigma \cdot w$. On a :

$$(\widehat{W \otimes C \circ P})[\iota_\sigma(X_1, \dots, X_n)] = h_\sigma \otimes f_*$$

$$(\widehat{W \otimes S})[\iota_\sigma(X_1, \dots, X_n)] = h_\sigma \otimes g$$

Le diagramme strictement commutatif précédent s'écrit :

$$\begin{array}{ccc}
W \otimes C_*(X_1 \times \dots \times X_n) & \xrightarrow{F(X_1, \dots, X_n)} & W \otimes C_*(X_1) \otimes \dots \otimes C_*(X_n) \\
\downarrow h_\sigma \otimes f_* & & \downarrow h_\sigma \otimes g \\
W \otimes C_*(X_{\sigma(1)}^{-1} \times \dots \times X_{\sigma(n)}^{-1}) & \xrightarrow{F(X_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, X_{\sigma(n)}^{-1})} & W \otimes C_*(X_{\sigma(1)}^{-1}) \otimes \dots \otimes C_*(X_{\sigma(n)}^{-1})
\end{array}$$

On en déduit l'existence d'une équivalence d'homotopie fonctorielle, déterminée à homotopie algébrique fonctorielle près entre les foncteurs

$$X \rightarrow W \otimes_{\mathbb{C}_n} C_*^*(X^n) \quad \text{et} \quad X \rightarrow W \otimes_{\mathbb{C}_n} C_*^{n\otimes}(X)$$

définis sur la catégorie \mathfrak{J} .

D'après I. A, 4), on a :

$$C_*^*(\mathbb{C}_n X) \sim W \otimes_{\mathbb{C}_n} C_*^*(X^n) \sim W \otimes_{\mathbb{C}_n} C_*^{n\otimes}(X) .$$

On a donc établi le résultat suivant :

PROPOSITION 1. Si X est un espace topologique, alors on a une équivalence de chaînes fonctorielle entre le complexe des chaînes singulières de $\mathbb{C}_n X$, $C_*^*(\mathbb{C}_n X)$ et $W \otimes_{\mathbb{C}_n} C_*^{n\otimes}(X)$ où W est une résolution libre de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z}[\mathbb{C}_n]$.

II - DESCRIPTION DE $H^*(\mathbb{C}_2 X ; \mathbb{Z}/2)$

A) Le transfert.

1. Soit (Y, p, X) un revêtement fini à r -feuilletés ; on définit un transfert tr de $C_*^*(X)$ vers $C_*^*(Y)$ qui, à un simplexe singulier de X , associe la somme de ses r relevés dans Y .

2. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G d'indice fini et M un G -module à gauche. On note M_G le quotient de M par l'action de G et M^G le sous-module de M formé des éléments invariants par G . On définit deux transferts :

(i) L'un de M_G vers M_H qui, à la classe de $m \in M$ modulo G , associe la classe de l'élément $(g_1 \cdot m + \dots + g_r \cdot m) \in M$ modulo H où r est l'indice de H dans G et où les g_i ($1 \leq i \leq r$) sont les représentants dans G des classes de $H \backslash G$.

(ii) L'autre de M^H vers M^G qui, à $m \in M^H$, associe l'élément $(g_1 m + \dots + g_r m) \in M$ où les g_i ($1 \leq i \leq r$) sont les représentants dans G des classes de G/H .

3. Remarque. Si (Y, p, X) est un revêtement fini à r -feuilletés, on considère $Z = \bigcup_{x \in X} F_x$ où F_x est l'ensemble des bijections de $p^{-1}(x)$ vers $\{1, 2, \dots, r\}$ muni de la topologie telle que $\bigcup_{x \in V} F_x$ soit un ouvert de Z dès que V est un ouvert trivialisant. Le groupe \mathfrak{S}_r opère librement sur Z par :

$$\sigma \cdot f = \sigma \circ f \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_r, f \in Z).$$

L'application de Z vers Y qui, à $f \in Z$, fait correspondre l'élément $f^{-1}(y)$ de Y est \mathfrak{S}_{r-1} -équivariante et induit un homéomorphisme de $\mathfrak{S}_{r-1} \backslash Z$ vers Y . De même, l'application de Z vers X qui, à $f \in Z$, fait correspondre l'élément x de X tel que $f \in F_x$ est \mathfrak{S}_r -équivariante et induit un homéomorphisme de $\mathfrak{S}_r \backslash Z$ vers X . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_{r-1} \backslash Z & \xrightarrow{\sim} & Y \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ \mathfrak{S}_r \backslash Z & \xrightarrow{\sim} & X \end{array}$$

ce qui montre que le revêtement (Y, p, X) est homéomorphe au revêtement $(\mathfrak{S}_{r-1} \backslash Z, q, \mathfrak{S}_r \backslash Z)$. Le transfert de $C_*(X)$ vers $C_*(Y)$ défini à l'aide de 2. (i), coïncide avec celui défini au 1.

4. Pour n un entier, considérons le revêtement $(E\mathfrak{S}_n \times X^n, p, \mathfrak{S}_n X)$. On a en cohomologie un transfert :

$$\text{tr} : H^*(X^n; \Pi) \longrightarrow H^*(\mathfrak{S}_n X; \Pi)$$

où Π est un groupe abélien.

Soient $u_i \in H^{P_i}(X; \Pi_i)$ ($1 \leq i \leq n$); on note (u_1, \dots, u_n) l'élément $\text{tr}(u_1 \times \dots \times u_n)$ de $H^{P_1 + \dots + P_n}(\mathfrak{S}_n X; \Pi_1 \otimes \dots \otimes \Pi_n)$.

B) Définition de la cochaîne P_n .

Soit Π un groupe abélien muni de l'action triviale de \mathfrak{S}_n , d'après la proposition 1, $C^*(\mathfrak{S}_n X; \Pi)$ est équivalent au complexe $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(W \otimes C_*^{n\otimes}(X), \Pi)$ des cochaînes \mathfrak{S}_n -équivariantes de $W \otimes C_*^{n\otimes}(X)$ à valeurs dans Π .

Pour $u \in C^p(X; \Pi)$, on définit la cochaîne $u^n = u \otimes \dots \otimes u$ (n -fois) de $C_*^{n\otimes}(X)$ vers $\Pi^{n\otimes}$.

Le groupe \mathfrak{S}_n opère sur $C_*^{n\otimes}(X)$ par :

$$\sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \text{signe} \cdot x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}$$

Le signe qui apparaît comporte le facteur $(-1)^{|x_i| \cdot |x_j|}$ chaque fois que x_i et x_j sont échangés où on a noté $|x_i| = \text{dimension de } x_i$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$). L'action de \mathfrak{S}_n sur $\Pi^{n\otimes}$ est définie par :

$$\sigma \cdot (g_1 \otimes \dots \otimes g_n) = \begin{cases} g_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes g_{\sigma(n)} & \text{si } p \equiv 0 \quad (2) \\ \epsilon(\sigma) \cdot g_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes g_{\sigma(n)} & \text{si } p \equiv 1 \quad (2) \end{cases} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$$

On note $\mathfrak{S}_n(\Pi, p)$ le quotient de $\Pi^{n\otimes}$ par cette action de \mathfrak{S}_n . On en déduit que :

$$u^n[\sigma \cdot (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)] = \sigma \cdot u^n(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$$

et que la cochaîne

$$W \otimes C_*^{n\otimes}(X) \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} C_*^{n\otimes}(X) \xrightarrow{u^n} \Pi^{n\otimes}$$

est \mathfrak{S}_n -équivariante, où ϵ désigne l'augmentation de W et $\Pi^{n\otimes}$ est muni de l'action de \mathfrak{S}_n définie précédemment. On a ainsi construit une application :

$$P_n : C^p(X; \Pi) \longrightarrow C^{np}(\mathfrak{S}_n X; \mathfrak{S}_n(\Pi, p))$$

qui induit en cohomologie [19] une application notée encore P_n :

$$P_n : H^p(X; \Pi) \longrightarrow H^{np}(\mathfrak{S}_n X; \mathfrak{S}_n(\Pi, p)) .$$

C) L'homomorphisme $H^*(\mathfrak{S}_n; \Pi) \rightarrow H^*(\mathfrak{S}_n X; \Pi)$

L'application de chaînes \mathfrak{S}_n -équivariante :

$$W \otimes C_*^{n\otimes}(X) \xrightarrow{\text{id} \otimes \epsilon^{n\otimes}} W$$

induit une application de chaînes $W \otimes_{\mathfrak{S}_n} C_*^{n\otimes}(X) \rightarrow W/\mathfrak{S}_n$ qui correspond géométriquement à l'application

$$s : \mathfrak{S}_n X \rightarrow \mathfrak{S}_n(\text{point}) = B\mathfrak{S}_n .$$

Si X est un espace topologique non vide, le choix d'un point x_0 dans X détermine une section pour l'application s . On en déduit que l'homomorphisme $s^* : H^*(\mathfrak{S}_n; \Pi) \rightarrow H^*(\mathfrak{S}_n X; \Pi)$ est injectif, ce qui permet d'identifier $H^*(\mathfrak{S}_n; \Pi)$ avec son image dans $H^*(\mathfrak{S}_n X; \Pi)$.

D) Conclusion.

On est en mesure maintenant de décrire la cohomologie de $\mathfrak{S}_2 X$ à coefficients $\mathbb{Z}/2$. Dans ce paragraphe, $C_*(X)$ désigne le complexe des chaînes singulières de X à coefficients $\mathbb{Z}/2$; $H_*(X)$ l'homologie de X à coefficients $\mathbb{Z}/2$.

Comme $\mathbb{Z}/2$ est un corps, il existe une équivalence de chaînes de $C_*(X)$ vers $H_*(X)$ (considéré comme un complexe muni de la différentielle nulle) qui induit l'identité en homologie, unique à homotopie près. Elle induit une équivalence de chaînes de $W \otimes_{\mathfrak{S}_2} C_*^{2\otimes}(X)$ vers $W \otimes_{\mathfrak{S}_2} H_*^{2\otimes}(X)$ bien déterminée à homotopie près, ceci résulte d'un lemme dû à Steenrod [17], page 204. On en déduit :

$$(i) \quad \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2} (W \otimes C_*^{2\otimes}(X), \mathbb{Z}/2) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{S}_2} (W, H^*(X) \otimes H^*(X))$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad H^p(\mathfrak{S}_2 X; \mathbb{Z}/2) = & \bigoplus_{\substack{k+l=p \\ k < l}} H^0(\mathfrak{S}_2; H^k(X) \otimes H^l(X) \oplus H^l(X) \otimes H^k(X)) \oplus \\
& \bigoplus_{\substack{r+k+l=p \\ r > 0, k < l}} H^r(\mathfrak{S}_2; H^k(X) \otimes H^l(X) \oplus H^l(X) \otimes H^k(X)) \oplus \\
& \bigoplus_{r+2s=p} H^r(\mathfrak{S}_2; H^s(X) \otimes H^s(X)) .
\end{aligned}$$

Pour $k < l$, on peut écrire :

$$H^k(X) \otimes H^l(X) \oplus H^l(X) \otimes H^k(X) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_2], H^k(X) \otimes H^l(X))$$

ce qui montre [3], page 118-120 :

$$H^0(\mathfrak{S}_2; H^k(X) \otimes H^l(X) \oplus H^l(X) \otimes H^k(X)) = H^k(X) \otimes H^l(X)$$

$$H^r(\mathfrak{S}_2; H^k(X) \otimes H^l(X) \oplus H^l(X) \otimes H^k(X)) = 0, \text{ pour tout } r > 0 .$$

Il en résulte :

$$H^p(\mathfrak{S}_2 X; \mathbb{Z}/2) = \left(\bigoplus_{\substack{k+l=p \\ k < l}} H^k(X) \otimes H^l(X) \right) \oplus \left(\bigoplus_{r+2s=p} H^r(\mathfrak{S}_2; H^s(X) \otimes H^s(X)) \right) .$$

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2$ de base $\{e_i; i \in I\}$, on suppose I totalement ordonné ; $H^r(\mathfrak{S}_2; E \otimes E)$ admet pour base la réunion disjointe des deux ensembles suivants :

$$*\{e_i \otimes e_i; i \in I\}$$

$$*\{e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i; (i,j) \in I^2 \text{ et } i < j\} .$$

On en déduit (voir remarque III, 3)) :

PROPOSITION 2. Soit $\{x_i; i \in I\}$ une base de $H^*(X; \mathbb{Z}/2)$, on suppose que I est totalement ordonné (on peut supposer que $i < j$ si le degré de x_i est strictement inférieur au degré de x_j) ; $H^*(\mathfrak{S}_2 X; \mathbb{Z}/2)$ admet pour base la réunion disjointe des trois ensembles suivants :

* $\{(x_i, x_j) ; (i;j) \in I^2 \text{ avec } i < j\}$ où (x_i, x_j) désigne le transfert de $x_i \times x_j$.

* $\{P_2 x_i ; i \in I\}$

* $\{e^r \cup P_2 x_i ; r \geq 1 \text{ et } i \in I\}$.

III - CALCUL DES CUP-PRODUITS DANS $H^*(\mathfrak{S}_2 X ; \mathbb{Z}/2)$

1. Une approximation de la diagonale pour $C_*(\mathfrak{S}_2 X)$.

On considère sur la catégorie $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{J}^2$ le foncteur covariant, libre et acyclique $W \otimes S$ (les notations sont celles du paragraphe I, C), le théorème des modèles acycliques donne l'existence d'une transformation naturelle :

$$D : \widehat{W \otimes S} \longrightarrow (\widehat{W \otimes S})^{2\otimes}$$

On a donc pour objet (X_1, X_2) de $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{J}^2$ une application de chaînes :

$$D_{(X_1, X_2)} : W \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2) \longrightarrow (W \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2))^{2\otimes}$$

qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} W \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2) & \xrightarrow{D_{(X_1, X_2)}} & (W \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2))^{2\otimes} \\ h_\sigma \otimes g \downarrow & & \downarrow [h_\sigma \otimes g]^{2\otimes} \\ W \otimes C_*(X_2) \otimes C_*(X_1) & \xrightarrow{D_{(X_2, X_1)}} & (W \otimes C_*(X_2) \otimes C_*(X_1))^{2\otimes} \end{array}$$

où $h_\sigma : W \rightarrow W$ est définie par $h_\sigma(\omega) = \sigma \cdot \omega$ (σ le générateur de \mathfrak{S}_2),

$$g : C_*(X_1) \otimes C_*(X_2) \rightarrow C_*(X_2) \otimes C_*(X_1)$$

est définie par : $g(x_1 \otimes x_2) = (-1)^{|x_1||x_2|} x_2 \otimes x_1$.

On en déduit que D induit une transformation naturelle notée encore D .

$$D : W \otimes_{\mathfrak{S}_2} C^{2\otimes} \longrightarrow (W \otimes_{\mathfrak{S}_2} C^{2\otimes})^{2\otimes}$$

Pour prouver que D permet le calcul des cup-produits dans $H^*(\mathbb{C}_2 X; \mathbb{Z}_2)$, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 W \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2) & \xrightarrow{D(X_1, X_2)} & (W \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2))^{2\otimes} \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 W \otimes C_*(X_1 \times X_2) & & [W \otimes C_*(X_1 \times X_2)]^{2\otimes} \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 C_*(E\mathbb{C}_2 \times X_1 \times X_2) & \xrightarrow{D'(E\mathbb{C}_2 \times X_1 \times X_2)} & [C_*(E\mathbb{C}_2 \times X_1 \times X_2)]^{2\otimes}
 \end{array}$$

où $D' : C \rightarrow C^{2\otimes}$ est l'approximation de la diagonale de la catégorie \mathcal{J} et les flèches verticales sont les équivalences d'homotopie algébriques données au paragraphe I. Le théorème des modèles acycliques appliqué aux foncteurs :

$(X_1, X_2) \rightarrow C_*(E\mathbb{C}_2 \times X_1 \times X_2)$, représentable et

$(X_1, X_2) \rightarrow [W \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2)]^{2\otimes}$, acyclique

donne l'existence d'une transformation naturelle du premier foncteur vers le second, unique à homotopie algébrique fonctorielle près, ce qui prouve que le diagramme précédent est homotopiquement commutatif. Par conséquent, l'application de chaînes D de $W \otimes_{\mathbb{C}_2} C^{2\otimes}$ vers $[W \otimes_{\mathbb{C}_2} C^{2\otimes}]^{2\otimes}$ permet le calcul des cup-produits dans $H^*(\mathbb{C}_2 X; \mathbb{Z}/2)$.

2. Construction de D .

Le groupe \mathbb{C}_2 opère diagonalement sur le complexe $W \otimes W$. Le \mathbb{C}_2 -complexe W est libre, le \mathbb{C}_2 -complexe $W \otimes W$ est acyclique ; il existe donc une application de chaînes D_W \mathbb{C}_2 -équivariante, conservant l'augmentation, de W vers $W \otimes W$.

Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques. On note $D_{(X_1, X_2)}$ la composée :

$$W \otimes C_*^*(X_1) \otimes C_*^*(X_2) \xrightarrow{D_W^* \otimes D_{X_1}^* \otimes D_{X_2}^*} W^{2\otimes} \otimes C_*^{2\otimes}(X_1) \otimes C_*^{2\otimes}(X_2) \xrightarrow{E} \\ \xrightarrow{E} [W \otimes C_*^*(X_1) \otimes C_*^*(X_2)]^{2\otimes}$$

où E est l'échange des facteurs. On a ainsi défini une transformation naturelle :

$$D : \widehat{W \otimes S} \longrightarrow (W \otimes S)^{2\otimes} .$$

3. Remarque. Soit ϵ^j le générateur du $H^j(\mathfrak{S}_2; \mathbb{Z}/2)$ ($j \geq 0$) (dans toute la suite, ϵ^j désigne à la fois la classe de cohomologie et le cocycle équivariant qui la représente). Si $x \in H^*(\mathfrak{S}_2 X; \mathbb{Z}/2)$, on note $\epsilon^j \cup x$ l'élément $s^*(\epsilon^j) \cup x$ du $H^*(\mathfrak{S}_2 X; \mathbb{Z}/2)$ où s^* est l'homomorphisme défini au paragraphe II, C). Soient $u \in H^*(X; \mathbb{Z}/2)$ et z un cocycle qui représente u , alors $\epsilon^j \cup P_2 u$ est représenté par la cochaîne équivariante $\epsilon^j \otimes z \otimes z$. En effet, $\epsilon^j \cup P_2 u = \{\epsilon^j \otimes \epsilon \otimes \epsilon\} \cup \{\epsilon \otimes z \otimes z\}$ (si v est une cochaîne équivariante de $W \otimes C_*^{2\otimes}(X)$, on note $\{v\}$ la classe de cohomologie de $\mathfrak{S}_2 X$ qu'elle représente ; ϵ désigne génériquement l'augmentation).

$$\epsilon^j \cup P_2 u = \{(D_W^* \otimes D_{X_1}^* \otimes D_{X_2}^*)(\epsilon^j \otimes \epsilon \otimes z \otimes \epsilon \otimes z)\}$$

$$\epsilon^j \cup P_2 u = \{D_W^*(\epsilon^j \otimes \epsilon) \otimes D_{X_1}^*(\epsilon \otimes z) \otimes D_{X_2}^*(\epsilon \otimes z)\} .$$

Or $D_{X_1}^*(\epsilon \otimes z)$ diffère de z par un cobord et $D_W^*(\epsilon^j \otimes \epsilon)$ diffère de ϵ^j par un cobord équivariant ; il en résulte toujours d'après le lemme de Steenrod [17] , page 204 :

$$\epsilon^j \cup P_2 u = \{\epsilon^j \otimes z \otimes z\} .$$

On peut éviter d'avoir recours à ce lemme de Steenrod en choisissant $D_{X_1}^*$, W et D_W^* de façon à ce qu'on ait $D_{X_1}^*(\epsilon \otimes z) = z$ et $D_W^*(\epsilon^j \otimes \epsilon) = \epsilon^j$.

PROPOSITION 3. Pour u, v, x, y, x' et y' des éléments de $H^*(X; \mathbb{Z}/2)$, on a :

$$(i) \quad [\epsilon^j \cup P_2 u] \cup [\epsilon^k \cup P_2 v] = \epsilon^{j+k} \cup P_2(u \cup v)$$

$$(ii) \quad [\epsilon^j \cup P_2 u] \cup (x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ (u \cup x, u \cup y) & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

$$(iii) \quad (x, y) \cup (x', y') = (x \cup x', y \cup y') + (x \cup y', y \cup x') .$$

Démonstration. Soient z et z' les cocycles représentant respectivement u et v ; on a :

$$\begin{aligned} [\epsilon \cup P_2 u] \cup [\epsilon \cup P_2 v] &= \{ (D_W^* \otimes D_X^* \otimes D_X^*) (\epsilon \otimes \epsilon \otimes z \otimes z' \otimes z \otimes z') \} \\ &= \{ \epsilon \otimes z \cup z' \otimes z \cup z' \} \\ &= \epsilon \cup P_2(u \cup v) . \end{aligned}$$

Comme $\epsilon^j \cup \epsilon^k = \epsilon^{j+k}$ dans $H^*(\mathbb{Z}/2 ; \mathbb{Z}/2)$, on a démontré la formule (i).

Avant de démontrer les formules (ii) et (iii), on va prouver le résultat suivant :

LEMME 2. Si (Y, p, X) est un revêtement fini, alors, pour $u \in H^*(X ; \mathbb{Z}/2)$ et $v \in H^*(Y ; \mathbb{Z}/2)$, on a : $u \cup \text{tr}(v) = \text{tr}(p^* u \cup v)$ où tr est le transfert associé au revêtement (Y, p, X) .

Démonstration. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & Y \times Y & \\ & \swarrow d \quad \searrow p \times \text{id} & \\ Y & \xrightarrow{p \times \text{id}} & X \times Y \\ p \downarrow & & \downarrow \text{id} \times p \\ X & \xrightarrow{d} & X \times X \end{array}$$

où d est l'application diagonale.

Si tr' est le transfert associé au revêtement $(X \times Y, \text{id} \times p, X \times X)$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
C_* (X \times X) & \xrightarrow{\sim} & C_* (X) \otimes C_* (Y) \\
\text{tr}' \downarrow & & \downarrow \text{Id} \otimes \text{tr} \\
C_* (X \times Y) & \xrightarrow{\sim} & C_* (X) \otimes C_* (Y)
\end{array}$$

où les flèches horizontales sont les équivalences de chaînes données par le théorème d'Eilenberg-Zilber. D'après la functorialité du transfert, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
d^* \circ \text{tr}' (u \times v) &= \text{tr} \circ d^* (p^* u \times v) \\
&= d^* (u \times \text{tr} v) .
\end{aligned}$$

Il en résulte :

$$u \cup \text{tr}(v) = \text{tr}(p^* u \cup v) .$$

Les formules (ii) et (iii) découlent du lemme 2 appliqué au revêtement $(E\mathfrak{S}_2 \times X^2, p, \mathfrak{S}_2 X)$; en effet :

$$\begin{aligned}
[\epsilon^j \cup P_2 u] \cup (x, y) &= [\epsilon^j \cup P_2 u] \cup \text{tr}(x \times y) \\
&= \text{tr} [p^*(\epsilon^j \cup P_2 u) \cup (x \times y)] .
\end{aligned}$$

On a $p^*(\epsilon^j \cup P_2 u) = p^*(\epsilon^j) \cup p^*(P_2 u)$, $p^*(P_2 u) = u \times u$ et comme $E\mathfrak{S}_2$ est contractile, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
E\mathfrak{S}_2 \times X^2 & \xrightarrow{\quad} & E\mathfrak{S}_2 \\
p \downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{S}_2 X & \xrightarrow{s} & B\mathfrak{S}_2
\end{array}$$

montre : $p^*(\epsilon^j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ 1 & \text{si } j = 0 \end{cases} .$

On en déduit :

$$[\epsilon^j \cup P_2 u] \cup (x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0 \\ (u \cup x, u \cup y) & \text{si } j = 0 \end{cases} .$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}(x, y) \cup (x', y') &= \text{tr}(x \times y) \cup \text{tr}(x' \times y') \\ &= \text{tr}[p^*(\text{tr}(x \times y)) \cup x' \times y'] .\end{aligned}$$

Or $p^*(\text{tr}(x \times y)) = x \times y + y \times x$ modulo 2, donc on a :

$$(x, y) \cup (x', y') = (x \cup x', y \cup y') + (x \cup y', y \cup x') .$$

IV - CALCUL DES CARRÉS DE STEENROD DANS LA COHOMOLOGIE DE \mathfrak{S}_2^X .

Soit X un espace topologique. Dans toute la suite, $C_*^*(X)$ désignera le complexe des chaînes singulières de X à coefficients $\mathbb{Z}/2$. On note V la résolution libre de $\mathbb{Z}/2$ sur $\mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}/2]$ telle que $V_i = \mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}/2]$ ($i \geq 0$) engendré par v_i , $d_i(v_i) = (1 + T)v_{i-1}$ ($i > 0$; T le générateur de $\mathbb{Z}/2$) et $\epsilon(v_0) = 1$ (ϵ est l'augmentation de V).

Soit τ' la transformation naturelle, $\mathbb{Z}/2$ -équivariante de $V \otimes C$ vers $C \otimes C$, donnée par le théorème des modèles acycliques appliqué aux foncteurs $V \otimes C$ représentable et $C \otimes C$ acyclique, définis sur la catégorie \mathfrak{F} . L'action du groupe $\mathbb{Z}/2$ sur $V \otimes C_*^*(X)$ et $C_*^*(X) \otimes C_*^*(X)$ est définie respectivement par :

$$T \cdot (v \otimes x) = T \cdot v \otimes x \quad \text{et} \quad T(x_1 \otimes x_2) = x_2 \otimes x_1 .$$

En cohomologie les carrés de Steenrod sont induits par les applications Sq^i de $C^p(X)$ vers $C^{p+i}(X)$ ($i \geq 0$) définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\langle Sq^i u, \sigma \rangle &= \langle u \otimes u, \tau_X'(v_{p-i} \otimes \sigma) \rangle \quad \text{si } i \leq p \\ &= 0 \quad \text{si } i > p .\end{aligned}$$

A) L'application de chaînes de $V \otimes C_*(\mathcal{C}_2 X)$ vers $C_*(\mathcal{C}_2 X) \otimes C_*(\mathcal{C}_2 X)$.

1. Sur la catégorie $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{J}^2$ avec comme modèles les $(\Delta_{q_1}, \Delta_{q_2})$, $q_1, q_2 \geq 0$, on considère le foncteur $\widehat{W \otimes S}$ libre et acyclique (les notations sont celles du paragraphe I, C), 2. Le théorème des modèles acycliques appliqué aux $\mathbb{Z}/2$ -foncteurs $V \otimes (\widehat{W \otimes S})$ et $(\widehat{W \otimes S})^{2\otimes}$ (l'action de $\mathbb{Z}/2$ est celle définie précédemment) donne l'existence d'une transformation naturelle $\mathbb{Z}/2$ -équivariante :

$$\tau : V \otimes (\widehat{W \otimes S}) \longrightarrow (\widehat{W \otimes S})^{2\otimes} .$$

D'après la définition de la catégorie $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{J}^2$, τ induit une transformation naturelle $\mathbb{Z}/2$ -équivariante notée encore τ :

$$\tau : V \otimes (W \otimes_{\mathcal{C}_2} C^{2\otimes}) \longrightarrow (W \otimes_{\mathcal{C}_2} C^{2\otimes})^{2\otimes} .$$

Le même raisonnement que dans III, 1., montre que τ peut être utilisé pour calculer les carrés de Steenrod dans $H^*(\mathcal{C}_2 X; \mathbb{Z}/2)$.

2. Construction de τ .

Le groupe $\mathbb{Z}/2 \times \mathcal{C}_2$ opère sur les complexes $V \otimes W$ et $W^{2\otimes} \otimes V^{2\otimes}$ de la façon suivante :

$$\text{sur } V \otimes W \quad \left\{ \begin{array}{l} (T, \text{id})(v \otimes w) = T \cdot v \otimes w \\ (\text{id}, \sigma)(v \otimes w) = v \otimes \sigma w \end{array} \right.$$

$$\text{sur } W^{2\otimes} \otimes V^{2\otimes} \quad \left\{ \begin{array}{l} (T, \text{id})(w_1 \otimes w_2 \otimes v_1 \otimes v_2) = w_2 \otimes w_1 \otimes T v_1 \otimes T v_2 \\ (\text{id}, \sigma)(w_1 \otimes w_2 \otimes v_1 \otimes v_2) = \sigma w_1 \otimes \sigma w_2 \otimes v_2 \otimes v_1 . \end{array} \right.$$

Le $\mathbb{Z}/2 \times \mathcal{C}_2$ -complexe $V \otimes W$ est libre, le $\mathbb{Z}/2 \times \mathcal{C}_2$ -complexe $W^{2\otimes} \otimes V^{2\otimes}$ est acyclique ; il existe donc une application de chaînes F $\mathbb{Z}/2 \times \mathcal{C}_2$ -équivariante, conservant l'augmentation, de $V \otimes W$ vers $W^{2\otimes} \otimes V^{2\otimes}$.

Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques. On note τ_{X_1, X_2} la composée :

$$\begin{aligned} V \otimes W \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2) &\xrightarrow{F \otimes \text{Id}} W^{2\otimes} \otimes V^{2\otimes} \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2) \xrightarrow{E_1} \\ &\longrightarrow W^{2\otimes} \otimes [V \otimes C_*(X_1)] \otimes [V \otimes C_*(X_2)] \xrightarrow{\text{Id} \otimes \tau'_{X_1} \otimes \tau'_{X_2}} \\ &\longrightarrow W^{2\otimes} \otimes C_*^{2\otimes}(X_1) \otimes C_*^{2\otimes}(X_2) \xrightarrow{E_2} [W \otimes C_*(X_1) \otimes C_*(X_2)]^{2\otimes} \end{aligned}$$

où E_1 et E_2 correspondent à l'échange des facteurs.

On a ainsi défini une transformation naturelle $\mathbb{Z}/2$ -équivariante :

$$\tau : V \otimes (\widehat{W \otimes S}) \longrightarrow (\widehat{W \otimes S})^{2\otimes} .$$

B) Calcul de $\text{Sq}^i P_2 u$.

THEOREME 2. Soit $u \in H^p(X ; \mathbb{Z}/2)$, on a :

$$\text{Sq}^i P_2 u = \sum_{k < i/2} \binom{k}{i-k} (\text{Sq}^k u, \text{Sq}^{i-k} u) + \sum_{0 \leq j \leq i/2} \binom{i-2j}{p-j} \epsilon^{i-2j} \cup P_2 \text{Sq}^j u .$$

Démonstration. Notons z la cochaîne représentant la classe de cohomologie u .

Par définition des carrés de Steenrod, on a :

$$\langle \text{Sq}^i P_2 z, c \rangle = \langle P_2 z \otimes P_2 z, \tau(v_{2p-i} \otimes c) \rangle$$

où τ est l'application de chaînes construite au paragraphe IV, A) 2.,

$v_{2p-i} \in V_{2p-i}$, $c \in C_{2p+i}(\cong_2 X)$ et $P_2 z = \epsilon \otimes z \otimes z$.

Par linéarité des Sq^i ($i \geq 0$) , il suffit de calculer $\alpha_{i,j} = \langle \text{Sq}^i P_2 z, w_j \otimes x \otimes y \rangle$

où $w_j \in W_j$, x et y sont deux éléments de $C_*(X)$. En remplaçant τ par son expression donnée au paragraphe IV, A) 2., on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \langle \epsilon \otimes \epsilon \otimes z \otimes z \otimes z \otimes z, (\text{Id} \otimes \tau'_X \otimes \tau'_X) \circ (F \otimes \text{Id}) (v_{2p-i} \otimes w_j \otimes x \otimes y) \rangle \\ &= \langle z \otimes z \otimes z \otimes z, (\tau'_X \otimes \tau'_X) \circ (\epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{Id}) \circ (F \otimes \text{Id}) (v_{2p-i} \otimes w_j \otimes x \otimes y) \rangle \\ &= \langle z \otimes z \otimes z \otimes z, (\tau'_X \otimes \tau'_X) \circ (\tau_V \otimes \text{Id}) (v_{2p-i} \otimes w_j \otimes x \otimes y) \rangle \end{aligned}$$

où τ_V est la composée :

$$V \otimes W \xrightarrow{F} W^{2\otimes} \otimes V^{2\otimes} \xrightarrow{\epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{Id}} V^{2\otimes} .$$

En considérant $V^{2\otimes}$ comme un module sur $\mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2]$, on peut écrire :

$$\tau_V(v_i \otimes w_j) = \sum_{k+\ell=i+j} \lambda_{i,j,k,\ell} v_k \otimes v_\ell$$

où $\lambda_{i,j,k,\ell} \in \mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2]$.

On obtient :

$$\alpha_{i,j} = \langle z \otimes z \otimes z \otimes z, \sum_{k+\ell=2p+j-i} \lambda_{2p-i,j,k,\ell} [\tau_X^1(v_k \otimes x) \otimes \tau_X^1(v_\ell \otimes y)] \rangle .$$

Le groupe $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ opère sur le complexe $C^{2\otimes} \otimes C^{2\otimes}$ par l'action produit ($\mathbb{Z}/2$ opère sur $C^{2\otimes}$ par l'échange des facteurs). La cochaîne $z \otimes z \otimes z \otimes z$ est équivariante pour cette action ; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \sum_{k+\ell=2p+j-i} \bar{\lambda}_{2p-i,j,k,\ell} \langle z \otimes z, \tau_X^1(v_k \otimes x) \rangle \langle z \otimes z, \tau_X^1(v_\ell \otimes y) \rangle \\ &= \sum_{k+\ell=2p+j-i} \bar{\lambda}_{2p-i,j,k,\ell} \cdot \text{Sq}^{p-k}(z)(x) \cdot \text{Sq}^{p-\ell}(z)(y) \end{aligned}$$

où $\bar{\lambda}_{2p-i,j,k,\ell}$ est l'image par l'augmentation de $\lambda_{2p-i,j,k,\ell}$.

On en déduit :

$$\text{Sq}^i P_2 z = \sum_{\substack{k+\ell=2p-i+j \\ j}} \bar{\lambda}_{2p-i,j,k,\ell} \epsilon^j \otimes \text{Sq}^{p-k} z \otimes \text{Sq}^{p-\ell} z .$$

D'après la proposition 3, pour $j \neq 0$ et $k \neq \ell$, $\epsilon^j \otimes (\text{Sq}^{p-k} u, \text{Sq}^{p-\ell} u) = 0$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \text{Sq}^i P_2 z &= \sum_{k+\ell=2p-i} \bar{\lambda}_{2p-i,0,k,\ell} \text{Sq}^{p-k} z \otimes \text{Sq}^{p-\ell} z + \sum_{\substack{2k=2p-i+j \\ j \neq 0}} \epsilon^j \otimes \text{Sq}^{p-k} z \otimes \text{Sq}^{p-k} z + \\ &+ \text{cobords } (*) . \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration du théorème, on a besoin des valeurs de $\bar{\lambda}_{2p-i,0,k,\ell}$ et $\bar{\lambda}_{2p-i,j,k,\ell}$ qui sont données par le lemme suivant.

LEMME 3. (i) $\bar{\lambda}_{k+\ell, 0, k, \ell} = 1$

(ii) $\bar{\lambda}_{i, j, k, k} = C_k^{k-j}$ (dans $\mathbb{Z}/2$).

Démonstration.

(i) L'application de chaînes D_V de V vers $V \otimes V$ définie par $D_V(v_i) = \tau_V(v_i \otimes w_0)$ ($i \geq 0$) induit \bar{D}_V de $V/\mathbb{Z}/2$ vers $V/\mathbb{Z}/2 \otimes V/\mathbb{Z}/2$ qui permet le calcul des cup-produits dans $H^*(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Z}/2)$. On a :

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \epsilon^k \cup \epsilon^\ell, \bar{v}_{k+\ell} \rangle \quad (\bar{v}_i \text{ désigne la classe de } v_i \text{ dans } V/\mathbb{Z}/2, i \geq 0) \\ &= \langle \epsilon^k \otimes \epsilon^\ell, \bar{D}_V(\bar{v}_{k+\ell}) \rangle \\ &= \sum_{m+n=k+\ell} \bar{\lambda}_{k+\ell, 0, m, n} \langle \epsilon^k \otimes \epsilon^\ell, \bar{v}_m \otimes \bar{v}_n \rangle \\ &= \bar{\lambda}_{k+\ell, 0, k, \ell} \end{aligned}$$

(ii) Soit $\bar{\tau}_V$ l'application de chaînes de $V/\mathbb{Z}/2 \otimes W$ vers $V/\mathbb{Z}/2 \otimes V/\mathbb{Z}/2$, \mathbb{S}_2 -équivariante induite par τ_V , elle permet le calcul des carrés de Steenrod dans la cohomologie du groupe $\mathbb{Z}/2$. On a :

$$\begin{aligned} C_k^{k-j} &= \langle Sq^{k-j}(\epsilon^k), \bar{v}_i \rangle \quad (i = 2k - j) \\ &= \langle \epsilon^k \otimes \epsilon^k, \bar{\tau}_V(\bar{v}_i \otimes w_j) \rangle \\ &= \langle \epsilon^k \otimes \epsilon^k, \sum_{\ell+m=j+i} \lambda_{i, j, \ell, m} \bar{v}_\ell \otimes \bar{v}_m \rangle \\ &= \bar{\lambda}_{i, j, k, k} \end{aligned}$$

La formule (*) s'écrit alors :

$$Sq^i P_2 \mathbb{Z} = \sum_{k+\ell=2p-i} Sq^{p-k} \mathbb{Z} \otimes Sq^{p-\ell} \mathbb{Z} + \sum_{\substack{2k=2p-i+j \\ j \neq 0}} C_k^{k-j} \epsilon^j \otimes Sq^{p-k} \mathbb{Z} \otimes Sq^{p-k} \mathbb{Z} + \text{cobords}$$

qui s'écrit encore en posant $i - j = 2m$.

$$\begin{aligned}
\text{Sq}^i P_2 z &= \sum_{\substack{k+l=2p-i \\ k < l}} \left(\text{Sq}^{p-k} z \otimes \text{Sq}^{p-l} z + \text{Sq}^{p-l} z \otimes \text{Sq}^{p-k} z \right) + \sum_{0 \leq m \leq i/2} C_{p-m}^{i-2m} \epsilon^{i-2m} \otimes \text{Sq}^m z \otimes \text{Sq}^m z \\
&\quad + \text{cobords} \\
&= \sum_{n < i/2} \left(\text{Sq}^n z \otimes \text{Sq}^{i-n} z + \text{Sq}^{i-n} z \otimes \text{Sq}^n z \right) + \sum_{0 \leq m \leq i/2} C_{p-m}^{i-2m} \epsilon^{i-2m} \otimes \text{Sq}^m z \otimes \text{Sq}^m z \\
&\quad + \text{cobords} .
\end{aligned}$$

En passant en cohomologie, on a démontré le théorème 2.

COROLLAIRE 2. Soit $u \in H^p(X; \mathbb{Z}/2)$, on a :

$$\text{Sq}^i(\epsilon^j \cup P_2 u) = \sum_{k; \ell} C_j^\ell C_{p-2k}^{i-\ell-2k} \epsilon^{i+j-2k} \cup P_2 \text{Sq}^k u .$$

Démonstration. La formule de CARTAN permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\text{Sq}^i(\epsilon^j \cup P_2 u) &= \sum_{\ell+m=i} \text{Sq}^\ell \epsilon^j \cup \text{Sq}^m P_2 u \\
&= \sum_{\ell+m=i} C_j^\ell \epsilon^{j+\ell} \cup \left[\sum_{n < m/2} \left(\text{Sq}^n u, \text{Sq}^{m-n} u \right) + \sum_k C_{p-k}^{m-2k} \epsilon^{m-2k} \cup P_2 \text{Sq}^k u \right] \\
&= \sum_{\substack{\ell+m=i \\ k}} C_j^\ell C_{p-k}^{m-2k} \epsilon^{m-2k+j+\ell} \cup P_2 \text{Sq}^k u .
\end{aligned}$$

On remplace m par $i - \ell$ et on trouve :

$$\text{Sq}^i(\epsilon^j \cup P_2 u) = \sum_{k, \ell} C_j^\ell C_{p-k}^{i-\ell-2k} \epsilon^{i+j-2k} \cup P_2 \text{Sq}^k u .$$

C) Carrés de Steenrod et transfert.

Soient u et v deux éléments du $H^*(X; \mathbb{Z}/2)$; par définition, $(u, v) = \text{tr}(u \times v)$ dans $H^*(\mathcal{C}_2 X; \mathbb{Z}/2)$. Donc, pour calculer $\text{Sq}^i(u, v)$, on va commencer par étudier en toute généralité le comportement des carrés de Steenrod par rapport au transfert.

PROPOSITION 4. Le transfert commute avec les carrés de Steenrod.

Démonstration. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G d'indice fini et X un G espace à gauche. Au paragraphe II, A, 2., on a défini un transfert tr de $G \setminus C_*(X)$ vers $H \setminus C_*(X)$ qui, à la classe de $x \in C_*(X)$ modulo G , associe la classe de l'élément $(g_1 \cdot x + \dots + g_r \cdot x)$ de $C_*(X)$ modulo H où r est l'indice de H dans G et les g_i ($1 \leq i \leq r$) sont les représentants dans G des classes de $H \setminus G$.

Si $u \in H^p(H \setminus X; \mathbb{Z}/2)$ est représenté par le cocycle équivariant z , on a :

$$\begin{aligned} \langle \text{tr Sq}^i z, x \rangle &= \langle \text{Sq}^i z, \sum_{1 \leq j \leq r} g_j \cdot x \rangle \\ &= \sum_{1 \leq j \leq r} \langle z \otimes z, \tau_X^i(v_{p-i} \otimes g_j \cdot x) \rangle \end{aligned}$$

où τ_X^i de $V \otimes C_*(X)$ vers $C_*(X) \otimes C_*(X)$ est l'application de chaînes $\mathbb{Z}/2 \times G$ -équivariante qui permet par passage au quotient le calcul des carrés de Steenrod dans $H^*(G \setminus X; \mathbb{Z}/2)$ (le complexe V est la résolution libre de $\mathbb{Z}/2$ sur $\mathbb{Z}/2[\mathbb{Z}/2]$ définie dans IV). On obtient :

$$(1) \quad \langle \text{tr Sq}^i z, x \rangle = \sum_{1 \leq j \leq r} \langle z \otimes z, (g_j \times g_j) \tau_X^i(v_{p-i} \otimes x) \rangle$$

De même, par définition des carrés de Steenrod, on a :

$$\begin{aligned} \langle \text{Sq}^i \text{tr} z, x \rangle &= \langle \text{tr} z \otimes \text{tr} z, \tau_X^i(v_{p-i} \otimes x) \rangle \\ &= \sum_{1 \leq k, \ell \leq r} \langle z \otimes z, (g_k \times g_\ell) \tau_X^i(v_{p-i} \otimes x) \rangle \\ &= \sum_{1 \leq k \leq r} \langle z \otimes z, (g_k \times g_k) \tau_X^i(v_{p-i} \otimes x) \rangle + \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq k, \ell \leq r \\ k \neq \ell}} \langle z \otimes z, (g_k \times g_\ell) \tau_X^i(v_{p-i} \otimes x) \rangle . \end{aligned}$$

La seconde sommation peut s'écrire :

$$\sum_{\substack{1 \leq k, \ell \leq r \\ k \neq \ell}} \langle z \otimes z, (g_k \times g_\ell) \tau_X^i(v_{p-i} \otimes x) \rangle = \sum_{1 \leq k < \ell \leq r} \langle (1+T)(z \otimes z), (g_k \times g_\ell) \tau_X^i(v_{p-i} \otimes x) \rangle$$

et comme $(1 + T)(z \otimes z) = 0$ modulo 2 , on en déduit :

$$(2) \quad \langle Sq^i \text{tr } z, x \rangle = \sum_{1 \leq k \leq r} \langle z \otimes z, (g_k \times g_k) \tau_X^i(v_{p-i} \otimes x) \rangle \text{ (modulo 2) } .$$

Les égalités (1) et (2) montrent bien que $Sq^i \circ \text{tr} = \text{tr} \circ Sq^i$.

Remarque : Ce résultat est démontré dans [6] et peut être considéré comme une conséquence d'un résultat plus général de [12] , à savoir que les opérations de Steenrod commutent avec les morphismes induits par les applications stables .

COROLLAIRE 3. Soient u et v deux éléments de $H^*(X ; \mathbb{Z}/2)$, on a :

$$Sq^i(u, v) = \sum_{0 \leq j \leq i} (Sq^j u, Sq^{i-j} v) .$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} Sq^i(u, v) &= Sq^i \text{tr}(u \times v) = \text{tr} Sq^i(u \times v) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{0 \leq j \leq i} Sq^j u \times Sq^{i-j} v \right) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i} (Sq^j u, Sq^{i-j} v) . \end{aligned}$$

V - RELATIONS D'ADEM

Comme conséquence du calcul des carrés de Steenrod dans la cohomologie de $\mathbb{C}_2 X$, on va établir les relations d'Adem.

Soit X un espace topologique . Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E\mathbb{C}_2 \times X & \xrightarrow{\text{Id} \times d} & E\mathbb{C}_2 \times X^2 \\ \Pi \times \text{Id} \downarrow & & \downarrow p \\ B\mathbb{C}_2 \times X & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}_2 X \end{array}$$

Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 W/\mathbb{C}_2 \otimes C_*(X) & \longrightarrow & W \otimes_{\mathbb{C}_2} C_*(X^2) & \xrightarrow{\sim} & W \otimes_{\mathbb{C}_2} C_*^{2\otimes}(X) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \uparrow \\
 C_*(B\mathbb{C}_2 \times X) & \xrightarrow{D_*} & C_*(\mathbb{C}_2 X) & & \\
 (\Pi \times \text{Id})_* \uparrow & & \uparrow p_* & & \\
 C_*(E\mathbb{C}_2 \times X) & \xrightarrow{(\text{Id} \times d)_*} & C_*(E\mathbb{C}_2 \times X^2) & & \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \\
 W \otimes C_*(X) & \xrightarrow{\text{Id} \otimes d_*} & W \otimes C_*(X^2) & \xrightarrow{\sim F} & W \otimes C_*^{2\otimes}(X)
 \end{array}$$

montre :

$$\begin{aligned}
 \langle D^*(P_2 z), \bar{w}_i \otimes x \rangle &= \langle \epsilon \otimes z \otimes z, F_0(\text{Id} \otimes d_*)(w_i \otimes x) \rangle \quad (\bar{w}_i \text{ est la classe de } w_i) \\
 &= \langle z \otimes z, (\epsilon \otimes \text{Id}) \circ F_0(\text{Id} \otimes d_*)(w_i \otimes x) \rangle \\
 &= \langle z \otimes z, G(w_i \otimes x) \rangle \\
 &= \langle \text{Sq}^{p-i} z, x \rangle
 \end{aligned}$$

où z est le cocycle représentant u . On en déduit :

$$D^*(P_2 z) = \sum_{0 \leq i \leq p} \epsilon^i \otimes \text{Sq}^{p-i} z .$$

PROPOSITION 6. Soit $u \in H^p(X; \mathbb{Z}/2)$, on a :

$$\sum_{0 \leq j \leq p} C_{p-j}^{k-p+j} \text{Sq}^{p-k+i-j} \text{Sq}^j u = \sum_{0 \leq \ell \leq i/2} C_{p-\ell}^{p-i+\ell} \text{Sq}^{p+i-\ell-k} \text{Sq}^\ell u .$$

Démonstration. La functorialité des carrés de Steenrod implique :

$$(1) \quad D^* \text{Sq}^i P_2 u = \text{Sq}^i D^* P_2 u .$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \text{Sq}^i D^* P_2 u &= \sum_{0 \leq j \leq p} \text{Sq}^i (\epsilon^{p-j} \times \text{Sq}^j u) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq p \\ s+r=i}} \text{Sq}^r \epsilon^{p-j} \times \text{Sq}^s \text{Sq}^j u \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq j \leq p \\ r+s=i}} C_{p-j}^r \epsilon^{p-j+r} \times \text{Sq}^s \text{Sq}^j u .
 \end{aligned}$$

$$D^* S_q P_2^i u = D^* \left[\sum_{n < i/2} \binom{n}{S_q u, S_q u} + \sum_{0 \leq \ell \leq i/2} C_{p-\ell}^{p-i+\ell} \epsilon^{i-2\ell} \cup P_2 S_q u^\ell \right]$$

Comme $D^* \circ \text{tr} = 0$ modulo 2, l'égalité précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} (3) \quad D^* S_q P_2^i u &= \sum_{0 \leq \ell \leq i/2} C_{p-\ell}^{p-i+\ell} D^*(\epsilon^{i-2\ell} \cup P_2 S_q u^\ell) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq \ell \leq i/2 \\ 0 \leq m \leq p+\ell}} C_{p-\ell}^{p-i+\ell} (\epsilon^{i-2\ell} \times 1) \cup (\epsilon^{p+\ell-m} \times S_q S_q u^m) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq \ell \leq i/2 \\ 0 \leq m \leq p+\ell}} C_{p-\ell}^{p-i+\ell} \epsilon^{p+i-\ell-m} \times S_q S_q u^m \end{aligned}$$

L'égalité (1) peut se mettre sous la forme :

$$(4) \quad \sum_{\substack{0 \leq j \leq p \\ r+s=i}} C_{p-j}^r \epsilon^{p-j+r} \times S_q S_q u^s = \sum_{\substack{0 \leq \ell \leq i/2 \\ 0 \leq m \leq p+\ell}} C_{p-\ell}^{p-i+\ell} \epsilon^{p+i-\ell-m} \times S_q S_q u^m$$

soit encore :

$$\sum_k \epsilon^k \times \left(\sum_{0 \leq j \leq p} C_{p-j}^{k-p+j} S_q^{p-k+i-j} S_q^j u \right) = \sum_k \epsilon^k \times \left(\sum_{0 \leq \ell \leq i/2} C_{p-\ell}^{p-i+\ell} S_q^{p+i-\ell-k} S_q^\ell u \right)$$

en posant $k = p - j + r$ dans la première sommation et $k = p + i - \ell - m$ dans la seconde. On obtient :

$$\sum_{0 \leq j \leq p} C_{p-j}^{k-p+j} S_q^{p-k+i-j} S_q^j u = \sum_{0 \leq \ell \leq i/2} C_{p-\ell}^{p-i+\ell} S_q^{p+i-\ell-k} S_q^\ell u .$$

Pour retrouver les relations d'Adem sous la forme classique, on termine comme dans [16] page 119 et on obtient, pour $n < 2m$:

$$S_q^n S_q^m u = \sum_r C_{m-r-1}^{n-2r} S_q^{n+m-r} S_q^r u .$$

CHAPITRE II

DEFAUT DE STABILITEI - DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Dans toute la suite, on désigne par \mathcal{T}^* la catégorie des espaces topologiques pointés et applications basées. Pour un espace topologique pointé X , on note :

ΩX l'espace des lacets de X ,

ΣX la suspension réduite de X ,

$$QX = \lim_{p \rightarrow +\infty} \Omega^p \Sigma^p X = \Omega^\infty \Sigma^\infty X .$$

On note $X \rightarrow \underline{X}$ le foncteur d'oubli de \mathcal{T}^* dans \mathcal{T} . (\mathcal{T} désigne la catégorie des espaces topologiques et applications continues).

On note $*$ le point base de X et on considère Y' le sous-ensemble de X^n :

$$Y' = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n / \exists i : x_i = *, 1 \leq i \leq n\} .$$

Soit Y le sous-espace $E\mathbb{C}_n \times Y' / \mathbb{C}_n$ de $\mathbb{C}_n \underline{X}$, on pose :

$$\mathbb{C}_n X = \mathbb{C}_n \underline{X} / Y$$

où $\mathbb{C}_n \underline{X}$ est défini au premier chapitre I.A.2.

II - L'HOMOLOGIE DE $\mathbb{C}_n X$ et de QX .A) L'homologie de $\mathbb{C}_n X$.

1. Avant d'étudier le complexe des chaînes singulières de $\mathbb{C}_n X$, nous allons rappeler les définitions suivantes dues à Steenrod [18] et May [9].

DEFINITIONS. a) Soient X un espace topologique et A un sous-espace fermé.

On dit que (X,A) est une SNDR-paire (Strong Neighborhood Deformation Retracts) s'il existe :

1° Une application $u : X \rightarrow [0,1]$ telle que $A = u^{-1}(0)$,

2° Une homotopie $h_t : X \rightarrow X$ ($0 \leq t \leq 1$) vérifiant :

i) $h_0 = \text{id}_X$

ii) $h_t(x) = x$ pour tout $x \in A$ ($0 \leq t \leq 1$)

iii) $h_1(x) \in A$ pour tout x tel que $u(x) < 1$

iv) $u[h_t(x)] < 1$ dès que $u(x) < 1$ ($0 \leq t \leq 1$).

b) On dit que la paire (X,A) est représentée par (h,u) .

c) Si A est un point, on dit que X admet un bon point base.

LEMME 4. Si (X,A) est une SNDR-paire, alors l'application de chaînes :

$$C_{*}(X)/C_{*}(A) \longrightarrow \tilde{C}_{*}(X/A)$$

induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration. Le lemme découle du fait que le sous-espace A de X est un rétracte par déformation stricte de son voisinage ouvert $V = u^{-1}([0,1[)$. La rétraction est donnée par $r : V \rightarrow A$ telle que $r(x) = h_1(x)$.

Le résultat suivant est dû à Steenrod [18, théorème 6.3, page 144] et May [9, lemme A, page 164] :

PROPOSITION 7. Soit (X,A) une SNDR-paire représentée par (h,u) . La paire $(X^p, \bigcup_{i=1}^p X^{i-1} \times A \times X^{p-i})$ est une SNDR-paire représentée de manière \mathfrak{S}_p -équivariante par (k,v) telle que :

1° $v(x_1, \dots, x_p) = u(x_1) \cdot \dots \cdot u(x_p)$

2° $k_t(x_1, \dots, x_p) = (h_{t_1}(x_1), \dots, h_{t_p}(x_p))$

où

$$t_i = \begin{cases} t \cdot \min_{i \neq j} \left(\frac{u(x_i)}{u(x_j)} \right) & \text{s'il existe } j \neq i : u(x_j) < u(x_i) \\ t & \text{si, pour tout } j \neq i, u(x_j) \geq u(x_i). \end{cases}$$

2. Soit X un espace topologique admettant un bon point base. D'après la proposition précédente, la paire $(\mathcal{C}_p X, Y)$ est une SNDR-paire, donc, d'après le lemma 4, le complexe réduit $\tilde{C}_*(\mathcal{C}_p X)$ des chaînes singulières de $\mathcal{C}_p X$ est homotopiquement équivalent à $C_*(\mathcal{C}_p X)/C_*(Y)$.

Soient X_1, \dots, X_p p -espaces topologiques ayant de bons points bases (* désigne génériquement le point base et P désigne le complexe des chaînes singulières du point. On désigne par V_i ($1 \leq i \leq p$) le voisinage ouvert qui se rétracte par déformation stricte sur le point base dans X_i . L'inclusion :

$$\sum_{i=1}^p C_* (E\mathcal{C}_p \times X_1 \times \dots \times V_i \times \dots \times X_p) \longrightarrow C_* (E\mathcal{C}_p \times [\bigcup_{i=1}^p X_1 \times \dots \times V_i \times \dots \times X_p])$$

induit un isomorphisme en homologie. Comme V_i se rétracte, par déformation stricte sur le point base, il en résulte que l'inclusion :

$$\sum_{i=1}^p C_* (E\mathcal{C}_p \times X_1 \times \dots \times * \times \dots \times X_p) \longrightarrow C_* (E\mathcal{C}_p \times Y')$$

induit un isomorphisme en homologie.

Soit F l'équivalence de chaînes définie au premier chapitre I.C.2 ; on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{i=1}^p C_* (E\mathcal{C}_p \times X_1 \times \dots \times * \times \dots \times X_p) & \longrightarrow & C_* (E\mathcal{C}_p \times Y') & \longrightarrow & C_* (E\mathcal{C}_p \times X_1 \times \dots \times X_p) \\ \downarrow \wr & & \nearrow & & \downarrow \wr \\ \sum_{i=1}^p W \otimes C_* (X_1 \times \dots \times * \times \dots \times X_p) & & & & W \otimes C_* (X_1 \times \dots \times X_p) \\ \downarrow F \wr & & \searrow & & \downarrow \wr \\ \sum_{i=1}^p W \otimes C_* (X_1) \otimes \dots \otimes P \otimes \dots \otimes C_* (X_p) & \longrightarrow & & \longrightarrow & W \otimes C_* (X_1) \otimes \dots \otimes C_* (X_p) \end{array}$$

On en déduit, pour $X_1 = \dots = X_p = X$, que l'application :

$$W \otimes_{\mathbb{G}_p} \left[\sum_{i=1}^p C_*(X) \otimes \dots \otimes P \otimes \dots \otimes C_*(X) \right] \rightarrow C_*(Y)$$

induit un isomorphisme en homologie. Il en résulte :

THEOREME 3. Soit X un espace topologique ayant un bon point base. Le complexe $\tilde{C}_*(\mathbb{G}_p X)$ a le même type d'homotopie que $W \otimes_{\mathbb{G}_p} \tilde{C}_*^{p\otimes}(X)$.

3. Soit $p : \mathbb{G}_2 X \rightarrow \mathbb{G}_2 X$ la projection naturelle. Au niveau des complexes de chaînes, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} W \otimes_{\mathbb{G}_2} \tilde{C}_*^{2\otimes}(X) & \xrightarrow{i} & W \otimes_{\mathbb{G}_2} C_*^{2\otimes}(X) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow p_* \\ & & W \otimes_{\mathbb{G}_2} \tilde{C}_*^{2\otimes}(X) \end{array}$$

On en déduit que le morphisme p^* de $H^*(\mathbb{G}_2 X)$ vers $H^*(\mathbb{G}_2 X)$ est injectif, ce qui prouve que les formules donnant les cup-produits et les carrés de Steenrod, démontrés dans le premier chapitre, sont valables dans la cohomologie modulo 2 de $\mathbb{G}_2 X$.

Remarque : Dans [2], on a un résultat plus fin à savoir que si X est un espace topologique pointé, alors $\mathbb{G}_p X$ a le même type d'homotopie stable que $\bigvee_{k=0}^p (\mathbb{G}_k X) \wedge (B\mathbb{G}_{p-k})$. Il en résulte que la cohomologie de $\mathbb{G}_p X$ est facteur direct dans la cohomologie de $\mathbb{G}_p X$.

B) L'homologie de QX .

Soit $(\mathbb{R}^n)^{(p)}$ le produit cartésien de \mathbb{R}^n p-fois privé de ses diagonales ;

on définit l'ensemble :

$$(\mathbb{R}^n)^{(p)} = \{t = (t_1, \dots, t_p) \in (\mathbb{R}^n)^{(p)} \mid d(t_i, t_j) \geq 3, i \neq j, 1 \leq i, j \leq p\}.$$

On note $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbb{R}^n)^{(p)}$ c'est un espace contractile sur lequel opère librement le groupe \mathfrak{S}_p . Pour X un espace topologique pointé, on peut prendre comme modèle pour $\mathfrak{S}_p X$ (voir le premier chapitre I.A.2) l'espace quotient $(\mathbb{R}^\infty)^{(p)} \times X^p / \mathfrak{S}_p$.

Soit (t, x) un point de $(\mathbb{R}^n)^{(p)} \times X^p$; on définit l'application f de S^n vers $\Sigma^n X = S^n \wedge X$ par :

$$f(z) = \begin{cases} * & \text{si } z \notin \bigsqcup_{1 \leq i \leq p} D_i \\ \overline{(z, x)} & \text{si } z \in D_i \ (1 \leq i \leq p) \end{cases}$$

où D_i désigne le disque de centre t_i et de rayon 1 dans \mathbb{R}^n ($1 \leq i \leq p$). Ici S^n apparaît comme le compactifié d'Alexandroff de \mathbb{R}^n , le point base étant le point à l'infini. D'après SEGAL [13], on récupère une application continue h_p de $\mathfrak{S}_p X$ vers QX .

On a l'application de chaînes :

$$\tilde{C}_*(\mathfrak{S}_p X) \longrightarrow C_*(\mathfrak{S}_p X) \xrightarrow{(h_p)_*} C_*(QX)$$

qui permet d'avoir le résultat suivant (voir [8]).

THEOREME 4. Si X est un espace topologique pointé et connexe, alors l'application de chaînes :

$$\bigoplus_{p=1}^{\infty} \tilde{C}_*(\mathfrak{S}_p X) \longrightarrow \tilde{C}_*(QX)$$

induit un isomorphisme en homologie.

Remarque : Dans [2], le résultat précédent s'énonce ainsi :

THEOREME 5. Si X est un espace topologique pointé et connexe, alors QX a le même type d'homotopie stable que $\bigvee_{p=1}^{\infty} \mathfrak{S}_p X$. On a donc :

$$\tilde{H}_*(QX) \approx \bigoplus_{p=1}^{\infty} \tilde{H}_*(\mathbb{C}_p X) .$$

III - DEFAUT DE STABILITE.

A) Opérations cohomologiques externes.

DEFINITION. Soient Π et G deux groupes abéliens, n et p deux entiers naturels. On appelle opération cohomologique externe E de type $(n, \Pi ; p, G)$ un morphisme de foncteurs :

$$H^n(\quad ; \Pi) \longrightarrow H^p(Q(\quad) ; G)$$

considérés comme foncteurs à valeurs dans la catégorie des ensembles.

E est donc la donnée, pour tout espace topologique pointé, d'une application

$$E_X : H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^p(QX ; G)$$

de telle façon que, pour toute application basée $f : Y \rightarrow X$, on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(X ; \Pi) & \xrightarrow{E_X} & H^p(QX ; G) \\ f^* \downarrow & & \downarrow (Qf)^* \\ H^n(Y ; \Pi) & \xrightarrow{E_Y} & H^p(QY ; G) \end{array} .$$

L'ensemble des opérations cohomologiques externes de type $(n, \Pi ; p, G)$ est en correspondance bijective avec $H^p(QK(\Pi, n) ; G)$.

B) Exemples d'opérations cohomologiques externes.

1. L'opération r^*

Soient n un entier et X un espace topologique pointé séparé ; on considère les applications suivantes :

$$e_n : \Sigma^n \Omega^n \Sigma^n X \rightarrow \Sigma^n X$$

$$\bar{t}_X : X \rightarrow \Omega \Sigma X \text{ l'adjointe de l'identité de } \Sigma X$$

$$\Omega^n \bar{t}_{\Sigma^n X} : \Omega^n \Sigma^n X \rightarrow \Omega^n \Omega \Sigma \Sigma^n X = \Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X .$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \xrightarrow{e_n^*} & H^*(\Omega^n \Sigma^n X) \\ & \searrow e_{n+1}^* & \uparrow (\Omega^n \bar{t}_{\Sigma^n X})^* \\ & & H^*(\Omega^{n+1} \Sigma^{n+1} X) \end{array}$$

La limite projective du système $\{e_n ; n \geq 0\}$ est notée :

$$r^* : H^*(X) \rightarrow H^*(\Omega X) .$$

On vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i) r^* est fonctorielle,
- (ii) si $i : X \rightarrow \Omega X$ désigne l'inclusion, alors $i^* \circ r^* = \text{id}$.

Remarque : L'application r^* permet de scinder la suite de cohomologie de la paire $(\Omega X, X)$.

2. Le r -défaut de stabilité.

DEFINITION. Soit Θ une opération cohomologique interne de type $(n, \Pi ; p, G)$.

On définit le r -défaut de stabilité de Θ par :

$$\Delta_{\Theta} = \Theta \circ r^* - r^* \circ \Theta .$$

Le r -défaut de stabilité apparaît comme une opération cohomologique externe de type $(n, \Pi ; p; G)$:

$$\Delta_{\Theta} : H^n(X ; \Pi) \longrightarrow H^p(QX ; G) .$$

Si $i : X \rightarrow QX$ désigne l'inclusion, on a :

$$\begin{aligned} i^* \circ \Delta_{\Theta} &= i^* \circ \Theta \circ r^* - i^* \circ r^* \circ \Theta \\ &= \Theta \circ i^* \circ r^* - i^* \circ r^* \circ \Theta \\ &= \Theta - \Theta \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Il en résulte que Δ_{Θ} est une application à valeurs dans $H^p(QX, X ; G)$.

3. Exemple.

Soient k un entier et Θ l'opération cohomologique suivante :

$$\begin{aligned} \Theta : H^{2k}(X ; \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^{4k}(X ; \mathbb{Z}) \\ u &\longmapsto u \cup u = u^2 . \end{aligned}$$

Par functorialité, il suffit de calculer le r -défaut de stabilité de Θ dans le cas où $X = K(\mathbb{Z}, 2k) = K$ et $u = \iota$ la classe canonique de $H^{2k}(K ; \mathbb{Z})$. Comme K est $(2k-1)$ -connexe, alors $\Delta_{\Theta} u \in H^{4k}(QK, K ; \mathbb{Z}) \approx H^{4k}(\mathbb{S}_2 K ; \mathbb{Z})$ engendré par l'élément $P_2 \iota$. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\Delta_{\Theta} \iota = \lambda P_2 \iota .$$

Soit $\rho_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la réduction modulo 2 . On a :

$$\Theta(\rho_2 u) = S_q^{2k}(\rho_2 u) .$$

On en déduit (voir proposition 9) que $\lambda \equiv 0 \pmod{2}$. Par les mêmes méthodes que celles de la démonstration du théorème 6, on montre que $\lambda = 2$, ce qui prouve que Θ n'est pas une opération cohomologique stable. On démontre que

$\Theta = \beta_2 S_q^{2k-1} \rho_2$ où β_2 est le Bockstein associé à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 .$$

IV - CALCUL DU r-DEFAUT DE STABILITE DES OPERATIONS
COHOMOLOGIQUES GENERALISEES DE PONTRJAGIN.

A) Les opérations γ_p .

1. THOMAS [19] a montré l'existence d'une opération cohomologique interne de type $(2n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} ; 2np, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ où n est un entier et p est un nombre premier

$$\gamma_p : H^{2n}(X ; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2np}(X ; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$$

vérifiant :

$$(i) \gamma_p(\rho_p u) = \rho_p \gamma_p(u) , \quad u \in H^{2n}(X ; \mathbb{Z})$$

$$\bar{\rho}_p[\gamma_p(u)] = u^p$$

où on a noté :

$$\rho_p : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\bar{\rho}_p : \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

les réductions modulo p

$$u^p = u \cup \dots \cup u \quad (p\text{-fois}) .$$

$$(ii) \gamma_p(u+v) = \gamma_p(u) + \gamma_p(v) + \Theta_p \left[\sum_{\substack{r+s=p \\ r,s \neq 0}} (r,s) u^r \cup v^s \right]$$

où $(r,s) = \frac{(p-1)!}{r! s!}$ et $\Theta_p : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ est la multiplication par p .

(iii) γ_p est fonctorielle.

2. Remarque : La formule ii) donne, par récurrence :

$$\gamma_p \left(\sum_{i=1}^k u_i \right) = \sum_{i=1}^k \gamma_p(u_i) + \Theta_p \left[\sum_{\substack{r_1 + \dots + r_k = p \\ r_1, \dots, r_k \neq 0}} (r_1, \dots, r_k) u_1^{r_1} \cup \dots \cup u_k^{r_k} \right]$$

où $u_i \in H^{2n}(X ; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ($1 \leq i \leq k$) et $(r_1, \dots, r_k) = \frac{(p-1)!}{r_1! \dots r_k!}$.

Dans ce paragraphe, on se propose d'expliciter le r -défaut de stabilité des opérations γ_p .

B) Enoncé du théorème 6

1. Notons $\Psi_p(T_1, \dots, T_n)$ le p ème polynôme de Newton. Soient x_1, \dots, x_n des variables abstraites dont la j ème fonction symétrique élémentaire est X_j .

Par définition, on a :

$$\Psi_p(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n x_i^p.$$

Soit p un nombre premier, la relation :

$$\left[\sum_{i=1}^n x_i \right]^p = \sum_{i=1}^n x_i^p \pmod{p}$$

montre que les coefficients du polynôme $T_1^p - \Psi_p(T_1, \dots, T_n)$ sont congrus à zéro modulo p , on pose donc :

$$\chi_p(T_1, \dots, T_n) = \frac{1}{p} [T_1^p - \Psi_p(T_1, \dots, T_n)].$$

D'après II.B, on a :

$$\mathfrak{S}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}; 2n) = \dots = \mathfrak{S}_p(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 2n) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Il en résulte que, pour $2 \leq k \leq p$ et $u \in H^{2n}(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ les éléments $P_k u$ appartiennent à $H^{2nk}(\mathfrak{S}_k X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Notation : On désignera par $P_1 u$ l'élément $r^* u$ du $H^{2n}(QX; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

THEOREME 6. $\Delta_{\gamma_p} u = \Theta_p \chi_p(P_1 u, P_2 u, \dots, P_p u)$.

2. Remarque : D'après la propriété (i) des opérations γ_p , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_p(\Delta_{\gamma_p} u) &= \bar{\rho}_p[\gamma_p(r^* u) - r^*(\gamma_p u)] \\ &= (r^* u)^p - r^*(u^p). \end{aligned}$$

Or, modulo p , il existe une opération stable Θ telle que $\Theta u = u^p$, donc $\bar{\rho}_p(\Delta_{\gamma_p} u) = 0$ (Pour une opération cohomologique stable Θ , le r -défaut de stabilité Δ_{Θ} est trivial, voir proposition 9), ce qui montre que $\Delta_{\gamma_p} u$ est dans l'image de Θ_p .

C) Démonstration du théorème 6.

Par functorialité, il suffit de démontrer le théorème 6 dans le cas où $X = K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 2n) = K$ et $u = \iota$ l'élément canonique de $H^{2n}(K; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

1. L'homomorphisme de $H^{2np}(QK; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ vers $H^{2np}(K^p; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.

Dans ce paragraphe, on désigne par Π_p la projection de $E\mathfrak{G}_p \times K^p$ vers $\mathfrak{G}_p K$, par h_p l'application de SEGAL de $\mathfrak{G}_p K$ vers QK (voir II.B) et par $K^{[k]}$ l'espace $K \wedge \dots \wedge K$ (k -fois).

PROPOSITION 8. Si p est un nombre premier, l'homomorphisme $\Pi_p^* \circ h_p^*$ de $H^{2np}(QK; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ vers $H^{2np}(K^p; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ est injectif.

Démonstration. Soit $k \leq p$. On note $D_{k,p}$ la composition suivante :

$$\begin{aligned} H^{2np}(K^{[k]}; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^{2np}(K^{[k]}; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus H^{2np}(K^{[k]}; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \xrightarrow{C_p^k \text{- fois}} \\ &\longrightarrow H^{2np}(K^p; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) = \bigoplus_{r=1}^p [H^{2np}(K^{[r]}; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \oplus \dots \oplus H^{2np}(K^{[r]}; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})] \xrightarrow{C_p^r \text{- fois}} \end{aligned}$$

où la première flèche est l'application diagonale et la deuxième est l'inclusion naturelle. Comme K est $(2n-1)$ -connexe, $\mathfrak{G}_k K$ est $(2nk-1)$ -connexe, donc $H^{2np}(QK; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \approx \bigoplus_{r=1}^p H^{2np}(\mathfrak{G}_r K; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$; on note λ_k l'inclusion de $H^{2np}(\mathfrak{G}_k K; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ vers $H^{2np}(QK; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.

Soit Π_k la projection de $W_k \otimes \tilde{C}_*^{k\otimes}(K)$ vers $W_k \otimes_{\mathbb{G}_k} \tilde{C}_*^{k\otimes}(K)$; on vérifie que l'homomorphisme $\Pi_p^* \circ h_p^* \circ \lambda_k$ s'identifie à $D_{k,p} \circ \Pi_k^*$. Notons tr le transfert de $W_k \otimes_{\mathbb{G}_k} \tilde{C}_*^{k\otimes}(K)$ vers $W_k \otimes \tilde{C}_*^{k\otimes}(K)$; on a : $\Pi_k \circ \text{tr} =$ multiplication par $k!$; donc, pour p un nombre premier et $k < p$, l'homomorphisme Π_k^* est injectif.

Pour achever la démonstration de la proposition 8, il suffit d'étudier le cas $k = p$ qui résulte du lemme suivant :

LEMME 5. Soient Π un groupe et C un Π -complexe, tel que $C_i = 0$ pour $i < m$. On a :

$$H_m(C/\Pi) \approx H_m(C)/\Pi .$$

Démonstration. Considérons la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \alpha \longrightarrow C \xrightarrow{\alpha} H_m(C) \longrightarrow 0 .$$

On a : $H_m(\text{Ker } \alpha) = 0$ et $H_m(\text{Ker } \alpha/\Pi) = 0$; on en déduit :

$$H_m(C/\Pi) \approx H_m(C)/\Pi .$$

Il en résulte :

$$H^{2np}(\mathbb{G}_p K ; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \approx [H^{2np}(K[p] ; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})]^{\mathbb{G}_p} \approx \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} .$$

Cet isomorphisme envoie le générateur $\Theta_p P_p \iota$ de $H^{2np}(\mathbb{G}_p k ; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ sur le générateur $\Theta_p \iota^p$ de $H^{2np}(K[p] ; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.

2. Notons tr le transfert associé au sous-groupe $\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_{p-1}$ de \mathbb{G}_p ; on définit l'application de chaînes :

$$s_p : W_p \otimes_{\mathbb{G}_p} C_*^{p\otimes}(K) \xrightarrow{\text{tr}} W_p \otimes_{\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_{p-1}} C_*^{p\otimes}(K) \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} C_*(K) .$$

D'après [8] , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(K) & \xrightarrow{s_p^*} & H^*(\mathbb{C}_p K) \\
 r_p^* \downarrow & & \nearrow h_p^* \\
 H^*(QK) & &
 \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \Pi_p^* h_p^* \Delta_{\gamma_p} \iota &= \gamma_p (\Pi_p^* h_p^* r_p^* \iota) - \Pi_p^* h_p^* r_p^* (\gamma_p \iota) \\
 &= \gamma_p (\Pi_p^* s_p^* \iota) - \Pi_p^* s_p^* (\gamma_p \iota) \\
 &= \gamma_p (\iota \times 1 \times \dots \times 1 + \dots + 1 \times \dots \times 1 \times \iota) - \\
 &\quad (\gamma_p \iota \times 1 \times \dots \times 1 + \dots + 1 \times \dots \times 1 \times \gamma_p \iota) .
 \end{aligned}$$

D'après la remarque A.2, on peut écrire :

$$\Pi_p^* h_p^* \Delta_{\gamma_p} \iota = \Theta_p \left[\sum_{\substack{r_1 + \dots + r_p = p \\ r_1, \dots, r_p \neq 0}} (r_1, \dots, r_p) \iota^{r_1 \times 1 \times \dots \times 1 \cup \dots \cup 1 \times \dots \times 1 \times \iota^{r_p}} \right] .$$

Posons $x_i = 1 \times \dots \times 1 \times \iota \times 1 \times \dots \times 1$, ι à la i ème position

($1 \leq i \leq p$). On note X_j la j ème fonction symétrique élémentaire des classes x_i ,

($1 \leq i \leq p$). On a :

$$\Pi_p^* h_p^* \Delta_{\gamma_p} \iota = \Theta_p \chi_p(X_1, \dots, X_p) .$$

Or, par définition des opérations P_k , on a [8] : $\Pi_p^* h_p^* P_k \iota = X_k$; on en déduit :

$$\Pi_p^* h_p^* \chi_p(P_1 \iota, \dots, P_p \iota) = \chi_p(X_1, \dots, X_p) ,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\Pi_p^* h_p^* \Delta_{\gamma_p} \iota = \Pi_p^* h_p^* [\Theta_p \chi_p(P_1 \iota, \dots, P_p \iota)] .$$

La proposition 8 montre que :

$$\Delta_{\gamma_p} \iota = \Theta_p \chi_p(P_1 \iota, \dots, P_p \iota) . \quad \text{c.q.f.d.}$$

D) Application du théorème 6.

Soit M^{4k} une variété stablement parallélisée plongée dans \mathbb{R}^{4k+p} , p assez grand. La construction de THOM donne une application $\varphi : S^{4k+p} \rightarrow \Sigma^p M_+$ et donc une application f de S^{4k} vers QM_+ .

Dans [8], on montre que la forme quadratique de Kervaire q de $H^{2k}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ peut être définie par :

$$q(u) = \langle P_2 u, f_* [S^{4k}] \rangle .$$

Le théorème 6 montre que le r -défaut de stabilité du carré de Pontrjagin est : $\Delta_{\gamma_2} u = \Theta_2 \cdot P_2 u \pmod{4}$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Theta_2 \cdot q(u) &= \langle \Delta_{\gamma_2} u, f_* [S^{4k}] \rangle && \pmod{4} \\ &= \langle \gamma_2 r^* u, f_* [S^{4k}] \rangle - \langle r^* \gamma_2 u, f_* [S^{4k}] \rangle && \pmod{4} \\ &= \langle f^* \gamma_2 r^* u, [S^{4k}] \rangle - \langle \gamma_2 u, r_* f_* [S^{4k}] \rangle && \pmod{4} \\ &= 0 - \langle \gamma_2 u, [M] \rangle && \pmod{4} \end{aligned}$$

ce qui montre que la forme de Kervaire peut être définie à l'aide du carré de Pontrjagin γ_2 .

Le théorème 6 a le même type d'application dans l'étude des formes qui généralisent les formes quadratiques sur les variétés [8].

V - STABILITE D'UNE OPERATION COHOMOLOGIQUE INTERNE.A) Position du problème.

Etant donné une opération cohomologique interne Θ , on considère les trois propriétés suivantes :

- a) Δ_{Θ} triviale

b) Θ stable

c) Θ commute avec les morphismes induits par les applications stables.

En comparant ces trois propriétés, on cherche à trouver une forme équivalente à la stabilité de Θ .

B) Définitions et notations.

1. DEFINITION. On appelle opération cohomologique stable de type (i, Π, G) , une suite $\Theta = \{\Theta_n ; n \geq 0\}$ d'opérations cohomologiques, Θ_n étant de type $(n, \Pi ; n+i, G)$, telle qu'on ait, pour toute paire (X, Y) d'espaces topologiques et pour tout n , le diagramme $(-1)^i$ -commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y ; \Pi) & \xrightarrow{\Theta_n} & H^{n+i}(Y ; G) \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ H^{n+1}(X, Y ; \Pi) & \xrightarrow{\Theta_{n+1}} & H^{n+i+1}(X, Y ; G) \end{array} .$$

2. Soit X un espace topologique pointé. Il résulte de la définition de l'isomorphisme de la suspension Σ de $\tilde{H}^*(X)$ vers $\tilde{H}^{*+1}(\Sigma X)$ qu'une opération cohomologique stable $\Theta = \{\Theta_n ; n \geq 0\}$ de type $\{i, \Pi, G\}$ est telle que le diagramme suivant soit $(-1)^i$ -commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^n(X ; \Pi) & \xrightarrow{\Theta_n} & \tilde{H}^{n+i}(X ; G) \\ \Sigma \downarrow \wr & & \downarrow \wr \Sigma \\ \tilde{H}^{n+1}(\Sigma X ; \Pi) & \xrightarrow{\Theta_{n+1}} & \tilde{H}^{n+i+1}(\Sigma X ; G) \end{array} .$$

PROPOSITION 9. (i) Si Θ est une opération cohomologique interne de type $(n, \Pi ; p, G)$, alors a) \Leftrightarrow c) .

(ii) Si Θ est une opération cohomologique stable de type (i, Π, G) , alors $b) \implies c)$.

Démonstration. (i) Une application stable f de X vers Y est la donnée d'une suite d'applications $\{f_n ; n \geq 0\}$.

$$f_n : \Sigma^n X \longrightarrow \Sigma^n Y \text{ tel que } \Sigma f_n = f_{n+1} \text{ (n assez grand) .}$$

L'application stable f permet de définir une application :

$$\tilde{f} : X \xrightarrow{\bar{f}_n} \Omega^n \Sigma^n Y \longrightarrow QY$$

où \bar{f}_n est l'adjointe de f_n .

D'après la définition de l'application r^* , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^*(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^*(X) \\ & \searrow r^* & \uparrow \tilde{f}^* \\ & & H^*(QY) \end{array}$$

L'équivalence $a) \iff c)$ résulte du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & H^n(Y ; \Pi) & \xrightarrow{\Theta} & H^p(Y ; G) \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ & & H^n(X ; \Pi) & \xrightarrow{\Theta} & H^p(X ; G) \\ & \nearrow r^* & & \nearrow r^* & \\ & & H^n(QY ; \Pi) & \xrightarrow{\Theta} & H^p(QX ; G) \end{array}$$

\tilde{f}^* (vertical arrows from $H^n(X ; \Pi)$ to $H^n(QY ; \Pi)$ and from $H^p(X ; G)$ to $H^p(QX ; G)$)

(ii) L'implication $b) \implies c)$ est une conséquence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{H}^p(X; \Pi) & \xrightarrow{\Theta_p} & \tilde{H}^{p+i}(X; \Pi) \\
 & \nearrow f^* & \uparrow & & \nearrow f^* \\
 \tilde{H}^p(Y; \Pi) & \xrightarrow{\Theta_p} & \tilde{H}^{p+i}(Y; G) & & \\
 \downarrow \Sigma^n \wr & & \downarrow \Sigma^n \wr & & \downarrow \Sigma^n \wr \\
 & & \tilde{H}^{p+n}(\Sigma^n X; \Pi) & \xrightarrow{\Theta_{p+n}} & \tilde{H}^{p+n+i}(\Sigma^n X; G) \\
 \downarrow \Sigma^n \wr & & \downarrow \Sigma^n \wr & & \downarrow \Sigma^n \wr \\
 \tilde{H}^{p+n}(\Sigma^n Y; \Pi) & \xrightarrow{\Theta_{p+n}} & \tilde{H}^{p+n+i}(\Sigma^n Y; G) & &
 \end{array}$$

C) L'homomorphisme $H^{t-1}(QK_n; K_n) \rightarrow D^t(n)$.

1. Dans toute la suite, la cohomologie est à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on désigne par K_n l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, n)$ et par ι_n l'élément fondamental du $H^n(K_n)$.

On représente l'élément $\Sigma^p \iota_n \in H^{n+p}(\Sigma^p K_n)$ par l'application :

$$\Sigma^p K_n \xrightarrow{\varphi_p} K_{n+p} \quad (*)$$

et on note $D_{\varphi_p}(n)$ et $F_{\varphi_p}(n)$ respectivement la cofibre et la fibre de φ_p . La suite exacte longue en cohomologie de la cofibration (*) s'écrit :

$$\dots \longrightarrow H^{t+p}(D_{\varphi_p}(n)) \xrightarrow{s_p^*} H^{t+p}(K_{n+p}) \xrightarrow{\varphi_p^*} H^t(K_n) \xrightarrow{\delta_p} H^{t+p+1}(D_{\varphi_p}(n)) \longrightarrow \dots$$

où s_p est l'application naturelle $s_p : K_{n+p} \rightarrow D_{\varphi_p}(n)$. On pose :

$$D^t(n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} H^{t+p}(D_{\varphi_p}(n)).$$

La limite inductive $\lim_{p \rightarrow +\infty} H^{t+p}(K_p)$ est la t ème composante A^t de l'algèbre de Steenrod A .

En passant à la limite inductive en p , on obtient la suite exacte longue suivante :

$$\dots \longrightarrow D^t(n) \xrightarrow{s^*} A^{t-n} \xrightarrow{\varphi^*} H^t(K_n) \xrightarrow{\delta} D^{t+1}(n) \longrightarrow \dots$$

qui montre que les groupes $D^t(n)$ mesurent les défauts de stabilité des opérations cohomologiques internes. D'autres considérations sur la cofibration (*) permettent de relier les groupes $D^t(n)$ aux r -défauts de stabilité ce qui permet de conclure sur l'implication $a) \implies b)$.

2. Le foncteur Ω^p appliqué à la cofibration (*) donne la cofibration suivante :

$$\Omega^p \Sigma^p K_n \xrightarrow{\Omega^p \varphi_p} K_n \longrightarrow D_{\Omega^p \varphi_p}^p(n)$$

qui donne, en passant à la limite en p :

$$Q K_n \xrightarrow{j} K_n \longrightarrow D_j(n) .$$

LEMME 6. Soit i l'inclusion de K_n dans QK_n . On a :

- (i) $j \circ i$ est homotope à l'identité de K_n ,
- (ii) $j^* = r^*$ pour $* \leq 2n - 1$.

Démonstration. (i) D'après la définition des applications stables e_p de $\Omega^p \Sigma^p K_n$ vers K_n (voir III.B)1.), on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^p K_n & \xrightarrow{\Sigma_i^p} & \Sigma^p \Omega^p \Sigma^p K_n & \xrightarrow{\Sigma^p \Omega^p \varphi_p} & \Sigma^p K_n \\ & \searrow \text{id} & \downarrow e_p & & \downarrow \varphi_p \\ & & \Sigma^p K_n & \xrightarrow{\varphi_p} & K_{n+p} \end{array}$$

Il en résulte :

$$\varphi_p \circ \Sigma^p \Omega^p \varphi_p \circ \Sigma_i^p = \varphi_p \circ e_p \circ \Sigma_i^p = \varphi_p ,$$

ce qui montre :

$$i^* \circ (\Omega^p \varphi_p)^* (\iota_n) = \iota_n .$$

En passant à la limite en p , on a : $i^* \circ j^*(\iota_n) = \iota_n$ ce qui prouve que j^* est injective en cohomologie et $j \circ i$ est homotope à l'identité de K_n .

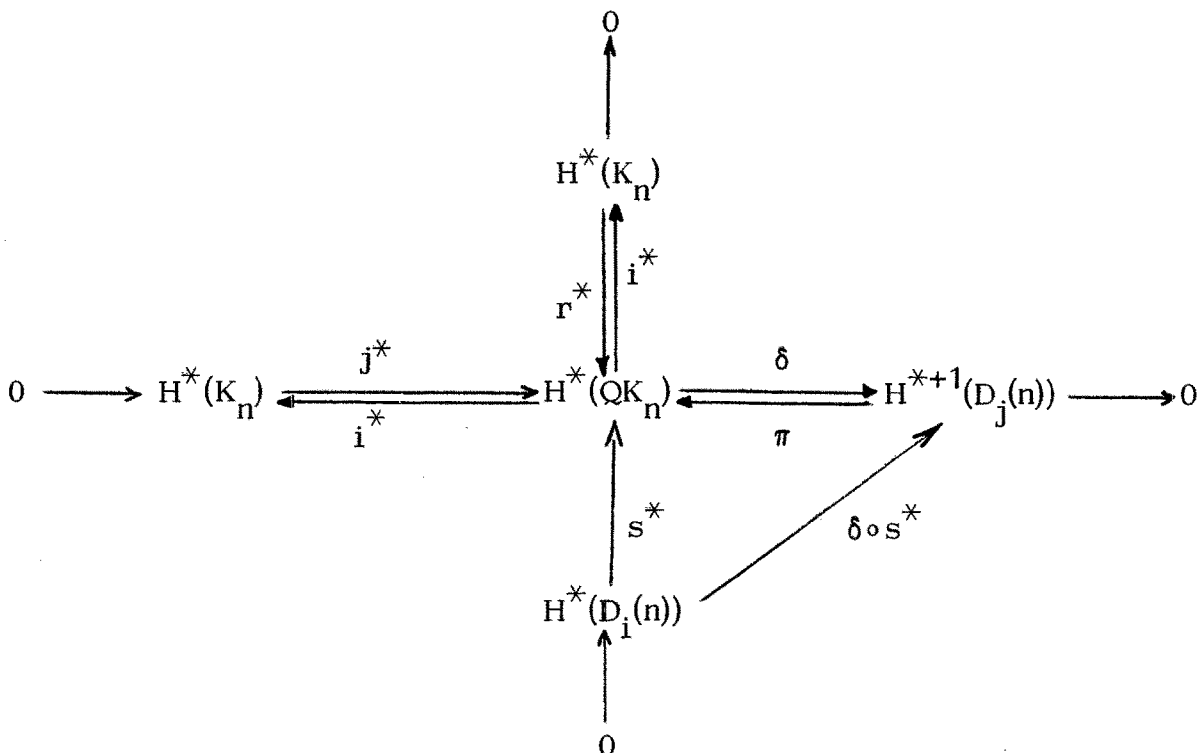
(ii) On sait que r^* de $H^*(K_n)$ vers $H^*(QK_n)$ est un isomorphisme pour $* \leq 2n-1$. D'autre part, $i^* \circ j^* = \text{id}$ et $i^* \circ r^* = \text{id}$; on en déduit que $j^* = r^*$ pour $* \leq 2n-1$. En particulier $j^*(\iota_n) = r^*(\iota_n)$.

3. Remarque. L'application $r: QK_n \rightarrow K_n$ est stable tandis que $j: QK_n \rightarrow K_n$ est une véritable application; le lemme 6 montre que j^* et r^* ne coïncident qu'en basses dimensions, c'est de cette différence entre j^* et r^* que naît le r -défaut de stabilité pour une opération cohomologique interne.

4. Considérons la cofibration suivante :

$$K_n \xrightarrow{i} QK_n \longrightarrow D_i(n) .$$

On a le diagramme suivant :



où le morphisme Π est défini par $\Pi(\delta x) = x - j^* i^* x$.

LEMME 7. $\delta \circ s^* : H^*(D_i(n)) \rightarrow H^{*+1}(D_j(n))$ est un isomorphisme.

Démonstration. Surjection : soit $y = \delta x \in H^{*+1}(D_j(n))$; on a :
 $i^*(x - j^*i^*x) = i^*x - i^*x = 0$, donc $x - j^*i^*x = s^*z$ et $\delta x = \delta s^*z = y$.

Injection : si $\delta s^*x = \delta s^*y$, alors $s^*(x-y) = j^*z$ et
 $i^*s^*(x-y) = z = 0$, donc $s^*(x-y) = 0$ et $x = y$.

5. Rappelons que si X est un espace topologique pointé, l'application σ de $\Sigma \Omega X$ vers X induit en cohomologie σ^* de $H^*(X)$ vers $H^{*-1}(\Omega X)$ qui est un isomorphisme pour $* \leq 2m$ dès que X est m -connexe.

L'application ν de $\Sigma F_{\varphi_p}(n)$ vers $D_{\varphi_p}(n)$ qui met en évidence le lien entre fibre et cofibre [11, page 153] induit un isomorphisme ν_* de $\Pi_*(\Sigma F_{\varphi_p}(n))$ vers $\Pi_*(D_{\varphi_p}(n))$ pour $* \leq n+p+q-2$ dès que $F_{\varphi_p}(n)$ est $(q-1)$ -connexe. La suite exacte d'homotopie de la fibration :

$$F_{\varphi_p}(n) \longrightarrow \Sigma^p K_n \xrightarrow{\varphi_p} K_{n+p}$$

s'écrit :

$$\dots \longrightarrow \Pi_{*+1}(K_{n+p}) \xrightarrow{\partial} \Pi_*(F_{\varphi_p}(n)) \longrightarrow \Pi_*(\Sigma^p K_n) \longrightarrow \dots$$

et entraîne :

$$\Pi_*(F_{\varphi_p}(n)) = 0 , \quad \text{pour } * \leq n+p-2 .$$

On en déduit, pour p assez grand :

$$\Pi_{2n+p-1}(F_{\varphi_p}(n)) \stackrel{\nu_*}{\approx} \Pi_{2n+p}(D_{\varphi_p}(n)) .$$

Le morphisme φ_p^* de $H^*(K_{n+p})$ vers $H^*(\Sigma^p K_n)$ est un isomorphisme pour $* \leq 2n+p-1$; il en résulte que $H^*(D_{\varphi_p}(n)) = 0$ pour $* \leq 2n+p$, ce qui entraîne, pour p assez grand, que $\Omega^p F_{\varphi_p}(n)$ est au moins $(2n-1)$ -connexe.

Pour $* \leq 3n - 1$, on a :

$$H^*(\Sigma \Omega^p F_{\varphi_p}(n)) \stackrel{\nu^*}{\approx} H^*(D_j(n)) \approx H^{*-1}(D_1(n)) \approx H^{*-1}(QK_n, K_n) \approx H^{*-1}(\mathbb{G}_2 K_n) ;$$

d'où l'on déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 10. Pour p assez grand, $F_{\varphi_p}(n)$ est $(2n + p - 1)$ -connexe.

PROPOSITION 11. Pour $t \leq 4n$, il existe un homomorphisme ξ de $H^{t-1}(D_1(n))$ vers $D^t(n)$.

Démonstration. On a les homomorphismes suivants :

$$(1) \quad \nu^* : H^*(D_{\Omega^p \varphi_p}(n)) \longrightarrow H^{*-1}(\Omega^p F_{\varphi_p}(n))$$

est un isomorphisme, pour $* \leq 3n - 1$.

$$(2) \quad \sigma^* : H^{*+p-1}(F_{\varphi_p}(n)) \longrightarrow H^{*-1}(\Omega^p F_{\varphi_p}(n))$$

est un isomorphisme, pour $* \leq 4n$.

$$(3) \quad \nu^* : H^{*+p}(D_{\varphi_p}(n)) \longrightarrow H^{*+p-1}(F_{\varphi_p}(n))$$

est un isomorphisme, pour $* \leq 3n + p - 1$.

$$(4) \quad H^*(D_j(n)) \xrightarrow{\sim} H^{*-1}(D_1(n)) \text{ l'isomorphisme du lemme 7.}$$

Pour p assez grand et $t \leq 4n$, on note f_p l'homomorphisme de $H^t(D_{\Omega^p \varphi_p}(n))$ vers $H^{t+p}(D_{\varphi_p}(n))$ défini par : $f_p = (\nu^*)^{-1} \circ (\sigma^*)^{-1} \circ \nu^*$.

Soit f la limite des f_p , on obtient un homomorphisme ξ défini par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{t-1}(D_i(n)) & \xrightarrow{\xi} & D^t(n) \\
 & \searrow \sim & \uparrow f \\
 & & H^t(D_j(n))
 \end{array}$$

6. La construction de l'homomorphisme ξ permet de montrer le résultat ci-dessous [8] .

THEOREME 7. Soit $t \leq 4n$ et $\Theta \in H^{t-1}(K_n)$. Si l'opération cohomologique externe Δ_{Θ} associée à Θ est triviale, alors Θ est stable.

VI - UN ISOMORPHISME.

L'homomorphisme ξ défini dans la proposition 11 réalise, pour $t \leq 3n-1$, un isomorphisme entre $H^{t-1}(D_i(n))$ et $D^t(n)$. Dans ces dimensions, $H^{t-1}(D_i(n))$ est naturellement isomorphe à $H^{t-1}(\mathfrak{C}_2 K_n)$. On se propose dans la suite d'expliciter cet isomorphisme ξ de $H^{t-1}(\mathfrak{C}_2 K_n)$ vers $D^t(n)$, ($t \leq 3n-1$).

A) Une suite exacte courte.

1. Soit $t \leq 3n-1$. On considère la suite exacte longue :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & D^t(n) & \xrightarrow{s^*} & A^{t-n} & \xrightarrow{\varphi^*} & H^t(K_n) & \xrightarrow{\delta} & D^{t+1}(n) & \longrightarrow \dots \\
 & \uparrow \xi & & \nearrow g & & & & & \\
 & H^{t-1}(\mathfrak{C}_2 K_n) & & & & & & &
 \end{array}$$

On en déduit une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow (\text{Coker } \varphi^*)^{t-1} \longrightarrow D^t(n) \longrightarrow (\text{Ker } \varphi^*)^{t-n} \longrightarrow 0$$

où

$$(\text{Coker } \varphi^*)^{t-1} = H^{t-1}(K_n) / \text{Im } \varphi^* \quad \text{et} \quad (\text{Ker } \varphi^*)^{t-n} \subset A^{t-n}.$$

D'après [14], $H^*(K_n)$ est l'algèbre de polynôme ayant pour générateurs les éléments $\text{Sq}^I \iota_n$ où I parcourt l'ensemble des suites admissibles d'excès strictement inférieur à n . On en déduit que $\text{Ker } \varphi^*$ est le sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de A de base formée par les $\text{Sq}^I \iota_n$ où I est une suite admissible d'excès supérieur ou égal à n et que, en basses dimensions ($t \leq 3n-1$), $\text{coker } \varphi^*$ est l'espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de base formée par les classes des $\text{Sq}^I \iota_n \cup \text{Sq}^J \iota_n$ où I et J sont deux suites admissibles différentes d'excès inférieur ou égaux à n .

2. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & (\text{Coker } \varphi^*)^{t-1} & \longrightarrow & D^t(n) & \longrightarrow & (\text{Ker } \varphi^*)^{t-n} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \alpha \wr & & \uparrow \xi \wr & \nearrow g & \uparrow \gamma \wr \\
 0 & \longrightarrow & (\text{Im tr})^{t-1} & \longrightarrow & H^{t-1}(\mathbb{C}_2 K_n) & \longrightarrow & H^{t-1}(\mathbb{C}_2 K_n)/(\text{Im tr})^{t-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où l'isomorphisme α est défini par :

$$\alpha [(S q \iota_n^I, S q \iota_n^J)] = S q \iota_n^I \cup S q \iota_n^J .$$

THEOREME 8. Soient $t \leq 3n-1$ et I une suite admissible d'excès strictement inférieur à n et de longueur $|I|$. L'isomorphisme γ de $H^{t-1}(\mathbb{C}_2 K_n)/(\text{Im tr})^{t-1}$ vers $(\text{Ker } \varphi^*)^t$ vérifie :

$$\gamma (\varepsilon^p \cup P_2 S q \iota_n^I) = S q^{n+|I|+p+1} \iota_n^I .$$

3. Remarque. On vérifie aisément que, si $t < 2n+1$, le groupe $D^t(n)$ est trivial et que, pour $t = 2n+1$, g réalise un isomorphisme entre $H^{2n}(\mathbb{C}_2 K_n)$ et A^{n+1} , donc $g(P_2 \iota_n) = S q^{n+1}$.

B) L'application P de $X \wedge \mathbb{C}_2 Y$ vers $\mathbb{C}_2(X \wedge Y)$.

1. Soient X et Y deux espaces topologiques pointés. On considère l'application

$$X \times E\mathbb{C}_n \times Y^n \xrightarrow{d^n \times \text{id}} X^n \times E\mathbb{C}_n \times Y^n \longrightarrow E\mathbb{C}_n \times (X \times Y)^n$$

où $d^n : X \rightarrow X^n$ est définie par : $d^n(x) = (x, \dots, x)$ (n -fois).

On vérifie que cette application est \mathbb{C}_n -équivariante, donc elle induit :

$$P : X \wedge \mathbb{C}_n Y \longrightarrow \mathbb{C}_n(X \wedge Y) .$$

L'application : $E\mathfrak{G}_n \times (X \times Y)^n \rightarrow E\mathfrak{G}_n \times X^n \times E\mathfrak{G}_n \times Y^n$ est \mathfrak{G}_n -équivariante, donc elle induit :

$$R : \mathfrak{G}_n(X \wedge Y) \longrightarrow \mathfrak{G}_n X \wedge \mathfrak{G}_n Y .$$

LEMME 8. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \wedge \mathfrak{G}_2 Y & \xrightarrow{\text{id} \wedge R} & X \wedge B\mathfrak{G}_2 \wedge \mathfrak{G}_2 Y \\ \downarrow P & & \downarrow P \wedge \text{id} \\ \mathfrak{G}_2(X \wedge Y) & \xrightarrow{R} & \mathfrak{G}_2 X \wedge \mathfrak{G}_2 Y \end{array}$$

Démonstration. Le lemme 8 découle de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times E\mathfrak{G}_2 \times (\overset{\circ}{S} \times Y)^2 & \longrightarrow & X \times E\mathfrak{G}_2 \times (\overset{\circ}{S})^2 \times E\mathfrak{G}_2 \times Y^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E\mathfrak{G}_2 \times (X \times \overset{\circ}{S} \times Y)^2 & \longrightarrow & E\mathfrak{G}_2 \times (\overset{\circ}{S} \times X)^2 \times E\mathfrak{G}_2 \times Y^2 \end{array}$$

LEMME 9. Soit $u \in \tilde{H}^p(X ; \Pi)$, $v \in \tilde{H}^q(Y ; G)$; on a :

$$R^* [(\epsilon^j \cup P_2 u) \times (\epsilon^k \cup P_2 v)] = \epsilon^{j+k} \cup P_2(u \times v) .$$

2. Reprenons les notations du paragraphe I. L'application \mathfrak{G}_2 -équivariante de $E\mathfrak{G}_2 \times (\underline{X} \times \underline{Y})^2$ vers $E\mathfrak{G}_2 \times \underline{X}^2 \times E\mathfrak{G}_2 \times \underline{Y}^2$ induit l'application notée encore R :

$$R : \mathfrak{G}_2(\underline{X} \times \underline{Y}) \longrightarrow \mathfrak{G}_2 \underline{X} \times \mathfrak{G}_2 \underline{Y} .$$

Soient $p_{\underline{X}}$ et $p_{\underline{Y}}$ les projections de $\underline{X} \times \underline{Y}$ sur \underline{X} et \underline{Y} qui induisent les applications U de $\mathfrak{G}_2(\underline{X} \times \underline{Y})$ vers $\mathfrak{G}_2 \underline{X}$ et V de $\mathfrak{G}_2(\underline{X} \times \underline{Y})$ vers $\mathfrak{G}_2 \underline{Y}$.

On vérifie que R s'identifie à (U, V) .

3. Comme la cohomologie de $\mathfrak{S}_2(X \wedge Y)$ s'injecte dans la cohomologie de $\mathfrak{S}_2(\underline{X} \times \underline{Y})$ (voir II.A)3), le lemme 9 est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 9 bis. Soit $u \in H^p(\underline{X}; \Pi)$, $v \in H^q(\underline{Y}; G)$; on a :

$$R^*[(\epsilon^j \cup P_2 u) \times (\epsilon^k \cup P_2 v)] = \epsilon^{j+k} \cup P_2(u \times v) .$$

Démonstration. Par functorialité, on a :

$$\begin{aligned} (U, V)^*[(\epsilon^j \cup P_2 u) \times (\epsilon^k \cup P_2 v)] &= U^*(\epsilon^j \cup P_2 u) \cup V^*(\epsilon^k \cup P_2 v) \\ &= [\epsilon^j \cup P_2(u \times 1)] \cup [\epsilon^k \cup P_2(1 \times v)] \end{aligned}$$

La proposition 3 (i) montre :

$$R^*[\epsilon^j \cup P_2 u \times (\epsilon^k \cup P_2 v)] = \epsilon^{j+k} \cup P_2(u \times v) .$$

Remarque : Cette formule est vraie dans $H^{2(p+q)}(\mathfrak{S}_2(X \wedge Y); \mathfrak{S}_2(\Pi; q) \otimes \mathfrak{S}_2(G, q))$; en effet, on a une flèche naturelle : $\mathfrak{S}_2(\Pi \otimes G, p+q) \rightarrow \mathfrak{S}_2(\Pi, p) \otimes \mathfrak{S}_2(G, q)$.

PROPOSITION 12. Avec les notations du lemme 9, on a :

$$P^*[P_2(u \times v)] = \sum_k S_q^k u \times (\epsilon^{p-k} \cup P_2 v) .$$

Démonstration. D'après les lemmes 8 et 9, on peut écrire :

$$P^* \circ R^*(P_2 u \times P_2 v) = (\text{id} \times R^*) \circ (P^* \times \text{id})(P_2 u \times P_2 v)$$

$$P^*[P_2(u \times v)] = (\text{id} \times R^*)(P^*(P_2 u) \times P_2 v) .$$

D'après la proposition 5 : $P^*(P_2 u) = \sum_k S_q^k u \times \epsilon^{p-k}$.

On obtient :

$$\begin{aligned} P^*[P_2(u \times v)] &= \sum_k S_q^k u \times R^*(\epsilon^{p-k} \times P_2 v) \\ &= \sum_k S_q^k u \times (\epsilon^{p-k} \cup P_2 v) . \end{aligned}$$

4. Application. Pour $X = S^p$, on obtient :

$$P : \Sigma^p \mathcal{G}_n Y \longrightarrow \mathcal{G}_n \Sigma^p Y$$

vérifiant :

$$P^* [P_2(\Sigma^p u)] = \Sigma^p e^p \cup P_2 u .$$

5. Remarque. Si $Y = \Omega^p Z$, on obtient une application T :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^p \mathcal{G}_n \Omega^p Z & \xrightarrow{T} & \mathcal{G}_n Z \\ & \searrow P & \nearrow \mathcal{G}_n(\sigma^p) \\ & \mathcal{G}_n \Sigma^p \Omega^p Z & \end{array}$$

C) Démonstration du théorème 8.

1. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^k K_n & \xrightarrow{\varphi_k} & K_{n+k} & \longrightarrow & D_{\varphi_k}^{(n)} \\ \Sigma^{k-p} \downarrow \varphi_p & & \parallel & & \downarrow \mu_k \\ \Sigma^{k-p} K_{n+p} & \xrightarrow{\varphi_{k-p}} & K_{n+k} & \longrightarrow & D_{\varphi_{k-p}}^{(n+p)} \end{array} \quad (D)$$

En cohomologie, on obtient, après passage à la limite en k :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & D^{t(n)} & \longrightarrow & A^{t-n} & \xrightarrow{\varphi^*} & H^t(K_n) & \longrightarrow \cdots \\ & & \uparrow \mu^* & & \parallel & & \uparrow & \\ \cdots & \longrightarrow & D^{t+p}(n+p) & \longrightarrow & A^{t-n} & \xrightarrow{\varphi^*} & H^{t+p}(K_{n+p}) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

où $\mu = \varinjlim_k \mu_k^*$ est déterminée par la proposition suivante :

PROPOSITION 13. Soit $t \leq 3n - 1$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{t-1}(\mathbb{C}_2 K_n) & \xrightarrow[\sim]{\xi} & D^t(n) \\
 \uparrow \Sigma^{-p} \circ T^* & & \uparrow \mu^* \\
 H^{t+p-1}(\mathbb{C}_2 K_{n+p}) & \xrightarrow[\sim]{\xi} & D^{t+p}(n+p)
 \end{array}$$

où T est l'application de la remarque VI, B)5.

Démonstration. En appliquant le foncteur $\Sigma^p \Omega^k$ à la situation (D) et en passant à la limite en k , on obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Sigma^p QK_n & \xrightarrow{\Sigma^p j} & \Sigma^p K_n & \longrightarrow & \Sigma^p D_j(n) \\
 & \swarrow h & \downarrow & & \downarrow \varphi_p & & \downarrow \nu \\
 Q\Sigma^p K_n & & & & & & \\
 \searrow Q\varphi_p & & QK_{n+p} & \xrightarrow{j} & K_{n+p} & \longrightarrow & D_j(n+p) \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & K_{n+p} & &
 \end{array}$$

où l'application h est décrite par :

$$\Sigma^p \Omega^k \Sigma^k K_n = \Sigma^p \Omega^p \Omega^{k-p} \Sigma^{k-p} \Sigma^p K_n \longrightarrow \Omega^{k-p} \Sigma^{k-p} \Sigma^p K_n .$$

On vérifie [8] que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(\mathbb{C}_2 \Sigma^p K_n) & \xrightarrow{\text{inclusion}} & H^*(Q\Sigma^p K_n) \\
 \downarrow p^* & & \downarrow h^* \\
 H^*(\Sigma^p \mathbb{C}_2 K_n) & \xrightarrow{\text{inclusion}} & H^*(\Sigma^p QK_n) .
 \end{array}$$

Par functorialité, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{t-1}(\mathcal{S}_2 K_n) & \xrightarrow[\sim]{\xi} & D^t(n) & & \\
 \uparrow \Sigma^{-p} \circ T^* & \searrow \sim & \uparrow f & & \\
 & & H^t(D_j(n)) & & \\
 H^{t+p-1}(\mathcal{S}_2 K_{n+p}) & \xrightarrow[\sim]{\xi} & D^{t+p}(n+p) & & \\
 \uparrow \Sigma^{-p} \circ T^* & \searrow \sim & \uparrow f & & \\
 & & H^{t+p}(D_j(n+p)) & & \\
 & & \uparrow \nu^* & & \\
 & & H^t(D_j(n)) & &
 \end{array}$$

d'où la proposition 13.

2. En cohomologie, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\quad} & H^{t-1}(\mathcal{S}_2 K_n) & \xrightarrow{g} & A^{t-n} & \longrightarrow & H^t(K_n) & \xrightarrow{\quad} & \dots \\
 & & \uparrow \Sigma^{-p} \circ T^* & & \parallel & & \uparrow & & \\
 \dots & \xrightarrow{\quad} & H^{t+p-1}(\mathcal{S}_2 K_{n+p}) & \xrightarrow{g} & A^{t-n} & \longrightarrow & H^{t+p}(K_{n+p}) & \xrightarrow{\quad} & \dots
 \end{array}$$

Posons $t = 2n + p + 1$; on a :

$$\begin{aligned}
 g(P_2 \iota_{n+p}) &= Sq^{n+p+1}, \text{ d'après la remarque A)3.} \\
 &= g[(\Sigma^{-p} \circ T^*)(P_2 \iota_{n+p})] \\
 &= g[\epsilon^p \cup P_2 \iota_n], \text{ d'après B)4.}
 \end{aligned}$$

On a donc montré :

$$g(\epsilon^p \cup P_2 \iota_n) = Sq^{n+p+1} \quad (3).$$

3. Soit I une suite admissible d'excès strictement inférieur à n . La stabilité des carrés de Steenrod montre que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma^p K_n & \longrightarrow & K_{n+p} & \longrightarrow & D_p(n) \\
 \downarrow \text{Sq}^I & & \downarrow \text{Sq}^I & & \downarrow \\
 \Sigma^p K_{n+|I|} & \longrightarrow & K_{n+p+|I|} & \longrightarrow & D_p(n+|I|) .
 \end{array}$$

Il en résulte qu'en cohomologie le diagramme suivant est commutatif ($t \leq 3n-1$) .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \longrightarrow & H^{t-1}(\mathbb{C}_2 K_n) & \xrightarrow{g} & A^{t-n} & \xrightarrow{\varphi^*} & H^t(K_n) & \longrightarrow \cdots \\
 & \uparrow \text{Sq}^I & & \uparrow \text{Sq}^I & & \uparrow \text{Sq}^I & \\
 \cdots \longrightarrow & H^{t-1}(\mathbb{C}_2 K_{n+|I|}) & \xrightarrow{g} & A^{t-n-|I|} & \xrightarrow{\varphi^*} & H^t(K_{n+|I|}) & \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Posons $t = 2n + 2|I| + p + 1$; on a :

$$\begin{aligned}
 \text{Sq}^I [g(\epsilon^p \cup P_2 \iota_{n+|I|})] &= g[\text{Sq}^I(\epsilon^p \cup P_2 \iota_{n+|I|})] \\
 &= g(\epsilon^p \cup P_2 \text{Sq}^I \iota_n) .
 \end{aligned}$$

D'après (3) , on a : $g(\epsilon^p \cup P_2 \iota_{n+|I|}) = \text{Sq}^{n+|I|+p+1}$; donc on en déduit :

$$g(\epsilon^p \cup P_2 \text{Sq}^I \iota_n) = \text{Sq}^{n+|I|+p+1} \text{Sq}^I \quad (4)$$

ce qui prouve :

$$\gamma(\epsilon^p \cup P_2 \text{Sq}^I \iota_n) = \text{Sq}^{n+|I|+p+1} \text{Sq}^I .$$

c.q.f.d.

Remarque : Une autre démonstration du théorème 8 se trouve dans [10, théorème 4.6, page 46] .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARRATT, A free group functor for stable homotopy, Proceedings of Symposia in pure mathematics, vol. XXII, 31-35.
- [2] BARRATT & ECCLES, Γ^+ -structures I, II et III, Topology 13 (1974), 25-45, 113-126, 199-207.
- [3] CARTAN & EILENBERG, Homological algebra, Princeton University Press, 1956.
- [4] Séminaire CARTAN, E.N.S. 1958/59, exposé 9.
- [5] EILENBERG & MACLANE, Acyclic models, Amer. J. of Math. 15 (1953), 189-199.
- [6] EVEN, Steenrod operations and transfer, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 1387-1388, MR 38 ~~#~~ 1669.
- [7] GODEMENT, Topologie algébrique et théorie des faisceaux.
- [8] LANNES, Formes quadratiques et variétés, Cours Peccot, 1978.
- [9] MAY, The geometry of iterated loop spaces, Lecture Notes in Math., vol. 271, Springer-Verlag, 1972.
- [10] MILGRAM, Unstable homotopy from the stable point of view, Lecture Notes in Math., vol. 368, Springer, 1974.
- [11] MOSHER & TANGORA, Cohomology operations and applications in homotopy theory.
- [12] PRIDDY & KAHN, Application of the transfer to stable homotopy theory, Bul. of the Amer. Math. Soc., vol. 72, (1972), 981-987.
- [13] SEGAL, Configuration spaces and iterated loop spaces, Invent. Math. 21 (1973), 213-221.

- [14] J.P. SERRE, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helv. 27 (1953), 198-231.

- [15] SPANIER, Algebraic topology, Mc Graw-Hill, New-York, 1966.

- [16] STEENROD & EPSTEIN, Cohomology operations, Annals of Math. Studies 50, Princeton University Press, 1962.

- [17] STEENROD, Cohomology operations derived from the symmetric group, Comment. Math. Helv. 31 (1956-57), 195-218.

- [18] STEENROD, A convenient category of topological spaces, Michigan Math. Journal 14 (1967), 133-152.

- [19] THOMAS, The generalized Pontrjagin cohomology operations and rings with divided powers, Memoirs of the Amer. Math. Soc., number 27 (1957).

N° d'impression : 303
2e trimestre 1978