UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

N° 170-76.49

LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES ANALYTIQUES D'UN DOMAINE BORNE D'UN ESPACE DE BANACH COMPLEXE. APPLICATION AUX DOMAINES BORNE SYMETRIQUES

par

Jean-Pierre VIGUE

Publication Mathématique d'Orsay

INTRODUCTION.

L'étude du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace vectoriel complexe de dimension finie a été faite par H. Cartan [7], [8], [9] et [10] (1). Ses résultats permirent à E. Cartan [6] de donner une classification complète des domaines bornés symétriques d'un espace vectoriel complexe de dimension finie.

Le but de notre travail est de généraliser aux domaines bornés d'un espace de Banach complexe les résultats démontrés en dimension finie. Nous commençons par définir sur le groupe G(D) des automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace de Banach la topologie de la convergence uniforme locale, qui est la généralisation naturelle à la dimension infinie de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Une partie des résultats démontrés par H. Cartan s'étend à la dimension infinie. Pour certains, la démonstration se recopie sans modifications : il en est ainsi, par exemple, pour le théorème sur les automorphismes analytiques d'un produit de deux domaines bornés [10]. Pour d'autres, au contraire, le résultat reste exact en dimension infinie, mais la démonstration doit être plus ou moins profondément modifiée. En particulier, tous les

(1) Le lecteur intéressé trouvera un exposé élémentaire de ces résultats dans Narashiman [23].

arguments sur les familles normales ne peuvent plus être utilisés et doivent être remplacés par des calculs directs. Il en est ainsi, par exemple, pour la démonstration du fait que le groupe topologique G(D) est complet (paragraphe 1.1), pour la construction de l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$ des transformations infinitésimales de D (paragraphe 2.1), et pour la construction du plus grand groupuscule de Lie G contenu dans G(D) (paragraphe 2.3). Enfin, un certain nombre de résultats démontrés en dimension finie sont inexacts en dimension infinie. Ainsi, le groupe G(D) des automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe n'est pas, en général, un groupe de Lie (voir paragraphe 2.4 ou [31]).

Les difficultés rencontrées au paragraphe 2.4 proviennent sans doute du fait que les domaines considérés n'ont que peu d'automorphismes analytiques. Pour continuer notre étude, nous sommes amenés à considérer des domaines ayant suffisamment d'automorphismes analytiques. Aussi, le chapitre 3 de cette thèse est consacré à l'étude des domaines bornés symétriques d'un espace de Banach complexe. Ainsi que nous l'avons déjà dit, les domaines bornés symétriques en dimension finie ont été étudiés par E. Cartan [6], et c'est encore aujourd'hui un sujet de recherches fructueuses (voir par exemple [22] et [30]). On dit qu'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe est symétrique, si, pour tout point a de D, il existe un automorphisme σ_a de D, tel que $\sigma_a(a) = a$, $\sigma_a'(a) = -id$, et on vérifie qu'un tel automorphisme, s'il existe, est unique et involutif. La principale difficulté de notre étude est qu'a priori, on ne sait que peu de choses sur σ_a : tout ce qui est connu est la valeur de σ_a en a, et la valeur de sa dérivée en a. Nous sommes donc amenés à établir, pour un domaine borné non nécessairement symétrique D, des théorèmes précis sur le groupe G(D) et sur l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$ des transformations infinitésimales de D (voir paragraphes 1.3 et 2.2). En particulier, nous montrons un théorème qui, étant donné un point a de D et une boule B complètement intérieure à D, nous permet de comparer, pour deux automorphismes f et g de D, $\|f-g\|_B$ et $\sup(\|f(a)-g(a)\|, \|f'(a)-g'(a)\|)$. Ces résultats qui n'étaient pas connus, même en dimension finie, permettent de mieux comprendre la structure du groupe G(D).

Sur les domaines bornés symétriques, nous montrons d'abord que, si D est un domaine borné symétrique, alors D est homogène (paragraphe 3.1). Au paragraphe 3.2, nous commençons l'étude de l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$ des transformations infinitésimales d'un domaine borné symétrique D. Nous montrons que, si a est un point de D, l'application orbitale $\Gamma(a)$ qui envoie dans D le plus grand groupuscule de Lie G contenu dans G(D) est, au voisinage de l'identité, une submersion directe. Ceci entraîne que l'application

$$\begin{array}{c} D\times D \longrightarrow D \\ (a,x) \longmapsto \sigma_a(x) \end{array}$$

est analytique lorsque le premier facteur est muni de sa structure analytique réelle sous-jacente, et le deuxième facteur de sa structure analytique complexe. Nous poursuivons notre étude de l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$ aux paragraphes 3.3 et 3.4, et ceci nous permet de montrer que tout domaine borné symétrique est isomorphe à un domaine borné cerclé étoilé. Ceci entraîne en particulier que le groupe d'isotropie de l'origine est un sous-groupe du groupe linéaire. Les résultats de Greenfield et Wallach [18] nous avaient amené à conjecturer que le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné symétrique est un groupe de Lie. Bien que nous ayons montré que l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$ contient beaucoup de transformations infinitésimales, nous ne sommes pas encore arrivé à démontrer cette conjecture. Peut-être, faut-il trouver des arguments nouveaux. Aussi, en guise de conclusion, nous donnons un certain nombre d'applications et d'exemples.

Je remercie M. Koszul, qui a bien voulu faire partie du jury de cette thèse, de l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

M. Rosenberg m'a initié à la théorie des feuilletages et m'a proposé un très intéressant sujet de deuxième thèse. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie M. Douady qui m'a donné des avis toujours précieux, qui a bien voulu relire le manuscrit de cette thèse et qui m'a suggéré diverses améliorations.

Je suis heureux de remercier M. Dolbeault qui m'a toujours encouragé, et qui, plusieurs fois, m'a permis d'exposer certains de mes résultats à son groupe d'étude de géométrie analytique.

M. Cartan m'a proposé le sujet de cette thèse inspiré par certains de ses travaux antérieurs, et j'ai bénéficié de sa connaissance profonde de la question. Son aide et ses encouragements furent constants et précieux, et, sans lui, ce travail n'aurait pas été possible. Je lui exprime toute ma reconnaissance.

Enfin, puisque l'occasion m'en est donnée, je tiens à remercier ma femme, ma famille, mes amis et tous ceux qui m'ont aidé et encouragé.

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE I

Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe ; la topologie de la convergence uniforme locale.

Dans ce chapitre, nous commençons l'étude du groupe G(D) des automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E. Nous définissons d'abord sur G(D) une topologie qui fait de G(D) un groupe topologique. Lorsque E est de dimension finie, G(D) est classiquement muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (voir [9]). Cette topologie n'est pas intéressante en dimension infinie, car elle est beaucoup trop faible. Nous utilisons ici la topologie de la convergence uniforme locale qui redonne la topologie classique en dimension finie. Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons les définitions et les premières propriétés de cette topologie. Nous montrons en particulier que G(D) est un groupe topologique, et que, muni de sa structure uniforme gauche (resp. droite), G(D) est complet. Dans la deuxième partie, nous étudions l'application qui, à un automorphisme $f \in G(D)$, associe la valeur de f en un point a de D, et la dérivée de f en ce point a. Nous montrons que cette application est injective et est un homéomorphisme sur son image. Dans la troisième partie, nous démontrons un certain nombre d'inégalités et de résultats qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

1.1. - La topologie de la convergence uniforme locale ; premiers résultats.

Définition 1.1.1. - Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach complexe E. On dit qu'un filtre $\underline{F}$ formé de fonctions analytiques sur Ω converge vers une fonction analytique f au sens de la convergence uniforme locale si, pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\underline{F}_{|V} \longrightarrow f_{|V} \quad \text{uniformément sur } V.$$

Définition 1.1.2. - Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach E, distinct de E. On dit qu'un ensemble borné A contenu dans Ω est complètement intérieur à Ω, (et on note $A \subset\subset \Omega$) si

$$d(A, \complement_E \Omega) = \inf_{x \in A,\, y \in \complement_E \Omega} \|x-y\|$$

est strictement positif.

Dire qu'une boule B de centre x_o et de rayon r_o est complètement intérieure à Ω revient à dire qu'il existe $r > r_o$, tel que la boule de centre x_o et de rayon r soit contenue dans Ω.

Proposition 1.1.3. - Soit D un domaine d'un espace de Banach E, et soit M un nombre réel > 0. Soit $\underline{H}_M(D,F)$ l'ensemble des applications holomorphes de D dans l'espace de Banach F, telles que $\|f(x)\| \leqslant M$ pour tout $x \in D$. Soient B_o et B_1 deux boules fermées complètement intérieures à D ; à chaque $\varepsilon > 0$, on peut associer $\eta > 0$ tel que $f \in \underline{H}_M(D,F)$ et $\|f(x)\| \leqslant \eta$ pour $x \in B_o$ entraîne $\|f(x)\| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in B_1$. Ceci permet d'introduire sur $\underline{H}_M(D,F)$ la topologie et la structure uniforme de la convergence uniforme sur B_o, qui sont indépendantes du choix de la boule B_o complètement intérieure àD. Les filtres $\underline{F}$ sur $\underline{H}_M(D,F)$ qui convergent au sens de la convergence uniforme locale sont exactement les filtres convergents pour cette topologie. Nous appellerons cette topologie (resp. structure uniforme) topologie (resp. structure uniforme) de la convergence uniforme locale.

La proposition 1.1.3 découle des deux lemmes suivants :

<u>Lemme 1.1.4.</u> - Soient $B_1 \subset B_2 \subset B_3$ trois boules concentriques fermées contenues dans D, de rayons respectifs r_1, r_2, r_3, avec $0 < r_1 \leqslant r_2 < r_3$. Soit donné $M > 0$; alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, tel que, quelle que soit f holomorphe $D \longrightarrow F$, les relations $\|f(x)\| \leqslant M$ pour $x \in B_3$, $\|f(x)\| \leqslant \eta$ pour $x \in B_1$ entraînent $\|f(x)\| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in B_2$.

Le "théorème des trois cercles" d'Hadamard (voir par exemple [12], exercice 8, p. 111) dit que, pour toute fonction holomorphe f, la fonction

$$\varphi(r) = \operatorname{Log} \sup_{\|x\|=r} \|f(x)\|$$

est une fonction convexe de Log r. Le lemme 1.1.4 s'en déduit immédiatement. Pour achever la démonstration de la proposition 1.1.3, il suffit alors du lemme de connexité suivant.

<u>Lemme 1.1.5.</u> - Soit U un ouvert connexe d'un espace de Banach E. Soient x et y deux points de U. On peut trouver une suite finie de points $(x_1, \ldots, x_n)$ de U, avec $x_1 = x$, $x_n = y$, une suite B_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ de boules fermées de centre x_i, complètement intérieures à U, telles que, pour tout i, x_i appartienne à $\overset{\circ}{B}_{i-1}$ (intérieur de B_{i-1}).

Nous aurons également besoin des lemmes suivants.

<u>Lemme 1.1.6.</u> - Soit B une boule de centre O et de rayon r dans un espace de Banach complexe E. Soit f une application analytique bornée de B dans un espace de Banach F. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|f^{(n)}(0)\| \leqslant n^n \quad \frac{\|f\|_B}{r^n} ,$$

et par suite,

$$\left\| \frac{1}{n!} \; f^{(n)}(0) \right\| \leqslant e^n \; \frac{\|f\|_B}{r^n} \quad .$$

($f^{(n)}$ désigne la dérivée nième de f, $\|f\|_B = \sup_{x\in B}\|f(x)\|$, et e est la base des logarithmes népériens).

Démonstration. - Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$$

le développement de f en série de polynômes homogènes dans $B(0,r)$. On a :

$$P_n(x) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(x\, e^{i\theta})\, e^{-ni\theta}\, d\theta$$

et par suite,

$$\|P_n\| \leqslant \frac{\|f\|_B}{r^n} \quad .$$

On sait d'après [16], p. 8, que

$$\left\| \frac{1}{n!} \; f^{(n)}(0) \right\| \leqslant \frac{n^n}{n!} \; \|P_n\| \, .$$

On a donc :

$$\left\| \frac{1}{n!} \; f^{(n)}(0) \right\| \leqslant \frac{n^n}{n!} \; \frac{\|f\|_B}{r^n} \quad .$$

En considérant le développement en série de e^n, on trouve que $n^n/n! \leqslant e^n$, ce qui montre finalement que

$$\left\| \frac{1}{n!} \; f^{(n)}(0) \right\| \leqslant e^n \; \frac{\|f\|_B}{r^n} \quad .$$

Lemme 1.1.7. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit A un sous-ensemble complètement intérieur à D, et soit $r = d(A, \complement_E D)$. Soit f une application analytique bornée de D dans un espace de Banach F. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in A$,

$$\|f^{(n)}(x)\| \leqslant n^n \frac{\|f\|_D}{r^n}.$$

De plus, si A est convexe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée nième $f^{(n)}$ de f est $\left[(n+1)^{(n+1)} \frac{\|f\|_D}{r^{n+1}}\right]$-lipschitzienne sur A.

Le lemme 1.1.7 est une conséquence du lemme 1.1.6 et du théorème des accroissements finis.

Si D est un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, nous considérerons l'ensemble $\underline{H}(D,D)$ des applications holomorphes de D dans lui-même, muni de la topologie de la convergence uniforme locale, topologie qui est bien définie dans ce cas, car D est borné. Le groupe G(D) des automorphismes analytiques de D, qui est un sous-ensemble de $\underline{H}(D,D)$ sera muni de la topologie induite. (Remarquons que, si E est de dimension finie, la topologie de la convergence uniforme locale est bien égale à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact).
Montrons la

Proposition 1.1.8. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Le groupe G(D) des automorphismes analytiques de D, muni de la topologie de la convergence uniforme locale, est un groupe topologique.

Démonstration. - a) Il nous faut d'abord montrer que l'application

$$\begin{aligned} G(D)\times G(D) &\longrightarrow G(D) \\ (g,f) &\longmapsto g\circ f \end{aligned}$$

est continue. Soit $\underline{F}$ (resp. $\underline{G}$) un filtre sur G(D) convergeant vers f_o (resp. g_o) pour la topologie de la convergence uniforme locale. Il suffit de montrer que $\underline{G}\circ\underline{F}$ converge vers $g_o\circ f_o$.

Soit $a \in D$. On peut trouver un nombre réel $r > 0$, et un élément $F_o \in \underline{F}$, tels que, pour tout $f \in F_o$, l'image par f de la boule $B(a,r)$ de centre a et de rayon r soit contenue dans une boule B_1 complètement intérieure à D. On a :

$$\|g\circ f-g_o\circ f_o\|_{B(a,r)} \leqslant \|g\circ f-g_o\circ f\|_{B(a,r)} + \|g_o\circ f-g_o\circ f_o\|_{B(a,r)} .$$

Supposons que $f \in F_o$. On sait qu'il existe une constante K_1 telle que tout élément $h \in \underline{H}(D,D)$ soit K_1-lipschitzien sur B_1. Par suite,

$$\|g_o\circ f - g_o\circ f_o\|_{B(a,r)} \leqslant K_1 \|f - f_o\|_{B(a,r)}.$$

D'autre part, comme $f(B(a,r))$ est contenu dans B_1, on a:

$$\|g\circ f - g_o\circ f\|_{B(a,r)} \leqslant \|g - g_o\|_{B_1} .$$

On trouve finalement

$$\|g\circ f-g_o\circ f_o\|_{B(a,r)} \leqslant K_1\|f-f_o\|_{B(a,r)} + \|g-g_o\|_{B_1} ,$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{\underline{F}\times\underline{G}} g\circ f = g_o\circ f_o$.

b) Il nous reste à montrer que l'application

$$\begin{aligned} G(D) &\longrightarrow G(D) \\ f &\longmapsto f^{-1} \end{aligned}$$

est continue. Ce sera une conséquence de la proposition 1.1.9 que nous allons maintenant démontrer.

<u>Proposition 1.1.9.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace

de Banach complexe E, et soit $\underline{F}$ un filtre de Cauchy sur G(D) pour la structure uniforme de la convergence uniforme locale. Supposons de plus qu'il existe un point a de D, tel que $b = \lim_{\underline{F}} f(a)$ appartienne à D. Alors, le filtre $\underline{F}$ converge vers un élément $f_o \in G(D)$, et $\underline{G} = \underline{F}^{-1}$ converge vers $g_o = f_o^{-1}$.

(Pour tout $F \in \underline{F}$, on note $F^{-1} = \{f^{-1} | f \in F\}$. Alors, $\underline{G} = \underline{F}^{-1}$ est le filtre engendré par les F^{-1}).

<u>Démonstration.</u> (Comparer avec [1] et [8]). - Soit $f_o = \lim \underline{F}$. Il nous faut montrer que f_o appartient à G(D).

Comme $\underline{F}$ converge vers f_o au sens de la convergence uniforme locale, on peut trouver une boule B de centre b, complètement intérieure à D, et un élément F_o de $\underline{F}$, tels que, pour tout $f \in F_o$, f(a) appartienne à B. De la relation

$$(f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x) = id ,$$

et des majorations de Cauchy de $(f^{-1})'$ aux points y de B, on déduit l'existence d'une constante $m > 0$, telle que, pour tout $f \in F_o$, on ait :

$$\|f'(a).u\| \geqslant m.\|u\| .$$

Par passage à la limite, on déduit que $f_o'(a)$ vérifie la même inégalité. Montrons que cela entraîne que $f_o'(a) \in \mathrm{Isom}(E)$. Pour cela, il suffit de vérifier que $f_o'(a)(E) = E$. Soit donc $y \in E$, montrons qu'il existe $z_o \in E$, tel que $f_o'(a).z_o = y$.

Pour tout $f \in G(D)$, il existe un unique élément $z_f \in E$, tel que $f'(a).z_f = y$. Montrons que $z_o = \lim_{\underline{F}} z_f$ existe et que $f_o'(a).z_o = y$. Pour cela, il suffit de démontrer que les

$(\{z_f \mid f \in F\})_{F \in \underline{F}}$ forment un filtre de Cauchy sur E. On a :

$$\|z_f - z_g\| = \|(f'(a))^{-1}.y - (g'(a))^{-1}.y\|$$

$$\leqslant \|(f'(a))^{-1} - (g'(a))^{-1}\|.\|y\| .$$

On sait (voir par exemple [13], p. 23) que

$$\|(f'(a))^{-1} - (g'(a))^{-1}\| \leqslant \|(f'(a))^{-1}\| \frac{\|f'(a)-g'(a)\|}{1-\|f'(a)-g'(a)\|} .$$

D'après les calculs précédents, on a, pour tout $f \in F_o$:

$$\|(f'(a))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m} .$$

Donc,

$$\|z_f - z_g\| \leqslant \frac{1}{m} \frac{\|f'(a)-g'(a)\|}{1-\|f'(a)-g'(a)\|} \|y\| ,$$

ce qui prouve, compte tenu des majorations de Cauchy, que les $(\{z_f \mid f \in F\})_{F \in \underline{F}}$ forment un filtre de Cauchy, et il est clair que, si on pose $z_o = \lim\limits_{\underline{F}} z_f$, on a :

$$f_o'(a).z_o = y.$$

Comme $f_o'(a) \in \mathrm{Isom}(E)$, on peut appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un inverse h de f_o, défini sur un voisinage V de b. Montrons maintenant que $\underline{G} = \underline{F}^{-1}$ converge vers h sur une boule B de centre b, et de rayon r_o, complètement intérieure à V. Nous savons déjà que :

i) $\lim\limits_{\underline{F}} f(a) = f_o(a) = b$,

ii) $\lim\limits_{\underline{F}} (f^{-1})'(f(a)) = h'(b)$,

iii) $\lim\limits_{\underline{F}} f^{(n)}(a) = f_o^{(n)}(a)$.

Le calcul de la dérivée nième $(f^{-1})^{(n)}$ de (f^{-1}) au point $f(a)$ ne fait intervenir que des sommes de produits des $f^{(p)}(a)$ $(p \leqslant n)$ et $(f^{-1})'(f(a))$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\underline{F}} (f^{-1})^{(n)}(f(a)) = h^{(n)}(f_o(a)).$$

En écrivant les développements en série de f^{-1} au point $f(a)$ et de h au point $b = f_o(a)$, et en majorant les restes des séries, on montre que $\underline{G}$ converge vers h uniformément sur une boule de centre b, et de rayon r suffisamment petit. Il en résulte que $\underline{G}$ est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme de la convergence uniforme locale. Soit g_o sa limite.

Montrons maintenant que les filtres $\underline{G} \circ \underline{F}$ et $\underline{F} \circ \underline{G}$ sont de Cauchy. Faisons la démonstration pour $\underline{G} \circ \underline{F}$. On peut trouver deux boules $B(a,\rho)$ et $B(b,r)$ complètement intérieures à D, un élément $F_o \in \underline{F}$, tels que

- $f_o(B(a,\rho)) \subset B(b,r)$,
- pour tout $f \in F_o$, $f(B(a,\rho)) \subset B(b,r)$.

Soient f_1 et f_2 appartenant à F_o, g_1 et g_2 quelconques.

$$\|g_1 \circ f_1 - g_2 \circ f_2\|_{B(a,\rho)} \leqslant \|g_1 \circ f_1 - g_1 \circ f_2\|_{B(a,\rho)} + \|g_1 \circ f_2 - g_2 \circ f_2\|_{B(a,\rho)}.$$

D'après le lemme 1.1.7., il existe une constante K telle que tout automorphisme $h \in G(D)$ soit K-lipschitzien sur $B(b,r)$. On a donc :

$$\|g_1 \circ f_1 - g_1 \circ f_2\|_{B(a,\rho)} \leqslant K \|f_1 - f_2\|_{B(a,\rho)}.$$

Comme $f_2(B(a,\rho))$ est contenu dans $B(b,r)$, on a :

$$\|g_1 \circ f_2 - g_2 \circ f_2\|_{B(a,\rho)} \leqslant \|g_1 - g_2\|_{B(b,r)}.$$

On trouve finalement :

$$\|g_1 \circ f_1 - g_2 \circ f_2\|_{B(a,\rho)} \leqslant K\|f_1 - f_2\|_{B(a,\rho)} + \|g_1 - g_2\|_{B(b,r)} .$$

Compte tenu du fait que $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont des filtres de Cauchy, on déduit de la formule que nous venons de montrer que $\underline{G} \circ \underline{F}$ est un filtre de Cauchy. On montrerait de même que $\underline{F} \circ \underline{G}$ est un filtre de Cauchy. Cela entraîne que $\underline{G} \circ \underline{F}$ et $\underline{F} \circ \underline{G}$ convergent vers la transformation identique.

Pour montrer que f_o et g_o appartiennent à $G(D)$, et que $g_o = f_o^{-1}$, il suffit maintenant de démontrer que $f_o(D)$ et $g_o(D)$ sont contenus dans D. Faisons la démonstration pour f_o : Soit $c \in D$. Il existe $F \in \underline{F}$, $G \in \underline{G}$, tels que, pour tout $f \in F$, pour tout $g \in G$, $g(f(c))$ appartienne à $B(c,r)$, où $B(c,r)$ est une boule fermée de centre c et de rayon r, complètement intérieure à D. Choisissons $g_1 \in G$. Montrons que $g_1(\underline{F})$ est un filtre de Cauchy sur $G(D)$: en effet, $B(a,\rho)$, $B(b,r)$ et $F_o \in \underline{F}$ étant choisis comme précédemment, le fait que g_1 est K-lipschitzien sur $B(b,r)$ entraîne que $g_1(\underline{F})$ est un filtre de Cauchy sur $G(D)$. Par suite, $g_1(\underline{F}(c))$ est un filtre de Cauchy sur $B(c,r)$. Il converge donc vers un point d qui appartient à D. On déduit alors de la continuité de g_1^{-1} que $\underline{F}(c) = g_1^{-1}(g_1(\underline{F}(c)))$ converge vers $g_1^{-1}(d)$ qui appartient à D. La proposition est démontrée.

<u>Remarque.</u> - En dimension finie, on sait pour des raisons de compacité que l'image par un automorphisme analytique d'un ensemble complètement intérieur à D est complètement intérieur à D. Si l'on savait démontrer un résultat analogue en dimension infinie, la fin de la démonstration de la proposition précédente pourrait être un peu simplifiée.

On peut alors montrer le théorème 1.1.10.

<u>Théorème 1.1.10.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Alors le groupe G(D), muni de sa structure uniforme gauche (resp. droite), est complet.

<u>Démonstration.</u> - Nous allons démontrer que tout filtre de Cauchy $\underline{F}$ pour la structure uniforme gauche (resp. droite) est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme de la convergence uniforme locale et qu'il existe un point a de D, tel que $b = \lim \underline{F}(a)$ appartienne à D. Le théorème sera alors une conséquence de la proposition 1.1.9.

Soit $\underline{G} = \underline{F}^{-1}$. D'après la définition de la structure uniforme gauche (resp. droite), un filtre $\underline{F}$ sur G(D) est de Cauchy pour la structure uniforme gauche (resp. droite) si et seulement si $\underline{G}\circ\underline{F}$ (resp. $\underline{F}\circ\underline{G}$) converge vers la transformation identique.

Faisons la démonstration pour la structure uniforme gauche (par exemple). Soit $\underline{F}$ un filtre de Cauchy pour la structure uniforme gauche. Montrons d'abord que $\underline{F}$ est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme de la convergence uniforme locale.

Soient B_1 et B_2 deux boules fermées concentriques de centre $c \in D$, de rayons respectifs r_1 et r_2 $(0 < r_1 < r_2)$, complètement intérieures à D. Alors, puisque $\underline{G}\circ\underline{F}$ converge vers la transformation identique, il existe $F \in \underline{F}$ et $G \in \underline{G}$, tels que, pour tout $f \in F$, pour tout $g \in G$, $g\circ f(B_1)$ soit contenu dans B_2. On sait d'autre part qu'il existe une constante K telle que tout élément h de $\underline{H}(D,D)$ soit K-lipschitzien sur B_2. On a donc :

$\forall f \in F, \forall g \in G,$

$$\|f - g^{-1}\|_{B_1} = \|g^{-1}\circ g\circ f - g^{-1}\|_{B_1}$$
$$\leqslant K\|g\circ f - id\|_{B_1} .$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \underline{F}$, tel que, pour tout $f \in F$, pour tout $h \in F$, on ait :

$$\|f - h\|_{B_1} \leqslant K \| h^{-1} \circ f - id\|_{B_1} < \varepsilon$$

Nous avons donc montré que $\underline{F}$ est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme de la convergence uniforme locale.

Montrons maintenant qu'il existe un point a de D tel que $b = \lim_{\underline{F}} f(a)$ appartienne à D. Soit a un point de D, et soit $B(a,r)$ une boule fermée de centre a et de rayon r, complètement intérieure à D. Il existe alors $F \in \underline{F}$, et $G \in \underline{G}$, tels que, pour tout $f \in F$, pour tout $g \in G$, $g(f(a))$ appartienne à $B(a,r)$.

Choisissons $g_1 \in G$. Par définition de la structure uniforme gauche, $g_1(\underline{F})$ est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme gauche. En effet, la structure uniforme gauche est définie par un système fondamental d'entourages stables par translation à gauche. D'après ce que nous venons de voir, $g_1(\underline{F})$ est aussi un filtre de Cauchy pour la structure uniforme de la convergence uniforme locale. On en déduit que $g_1(\underline{F}(a))$ est un filtre de Cauchy sur $B(a,r)$. Il converge donc vers un point c qui appartient à $B(a,r)$, et par suite à D. On en déduit que $\underline{F}(a)$ converge vers $b = g_1^{-1}(c)$, qui appartient à D, et ceci achève la démonstration du théorème.

<u>Remarque 1.1.11.</u> - Le groupe $G(D)$ peut être muni de trois structures uniformes : la structure uniforme de la convergence uniforme locale, la structure uniforme gauche et la structure uniforme droite. Ces trois structures uniformes sont distinctes deux à deux en général, comme le montre l'exemple du disque-unité ouvert $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

On sait que les automorphismes analytiques du disque-unité D sont de la forme

$$z \longmapsto e^{i\theta} \frac{z + a}{1 + \bar{a}z} \quad , \qquad \theta \in \mathbb{R}, \ |a| < 1.$$

Il apparaît tout de suite que G(D) n'est pas complet pour la structure uniforme de la convergence uniforme locale, ce qui prouve déjà que la structure uniforme de la convergence uniforme locale est distincte des deux autres. Montrons que les structures uniformes gauche et droite ne coïncident pas. D'après Bourbaki [3](chapitre 3, groupes topologiques, exercice 2 du pargraphe 3, p. 72), pour que les structures uniformes gauche et droite soient égales, il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de l'identité dans G(D), il existe un voisinage W de l'identité, tel que, pour tout $f \in G(D)$, on ait $f.W.f^{-1} \subset V$.

Pour montrer que les structures uniformes gauche et droite sont distinctes, il nous faut démontrer :

$\exists\ V \in \underline{V}(id), \forall\, W \in \underline{V}(id), \exists g \in W, \ \exists f \in G(D), \ f \circ g \circ f^{-1} \notin V.$

Soit $V = \{ f \in G(D) \mid \ \|f - id\|_{B(0,1/2)} < 1/2 \}$. Soit W un voisinage de l'identité dans G(D). Choisissons un élément $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv 0\ (2\pi)$, tel que

$$z \longmapsto g(z) = e^{i\theta}.z$$

appartienne à W. Soit

$$f(z) = \frac{z + a}{1 + az} \qquad |a| < 1, \ a \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$f^{-1}(z) = \frac{z - a}{1 - az}$$

On a :

$$f(g(f^{-1}(0))) = a \frac{1 - e^{i\theta}}{1 - a^2 e^{i\theta}}$$

Quand a tend vers +1, $f(g(f^{-1}(0)))$ tend vers +1. On peut donc trouver $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$, tel que $|f(g(f^{-1}(0)))| > 1/2$. Alors $f \circ g \circ f^{-1}$ n'appartient pas à V, et ceci démontre la propriété.

Remarque 1.1.12. - Si $f : D \longrightarrow D'$ est un isomorphisme analytique entre deux domaines bornés, on en déduit un isomorphisme φ du groupe G(D) sur le groupe G(D'). Les majorations de Cauchy pour les dérivées de f et de f^{-1} montrent que φ est un homéomorphisme de G(D) sur G(D'), lorsque G(D) et G(D') sont tous deux munis de la topologie de la convergence uniforme locale. On en déduit que φ induit un isomorphisme d'espaces uniformes de G(D) muni de la structure uniforme gauche (resp. droite) sur G(D') muni de la structure uniforme gauche (resp. droite).

Cependant, φ n'induit pas en général un isomorphisme d'espaces uniformes de G(D) muni de la structure uniforme de la convergence uniforme locale sur G(D') muni de la structure uniforme de la convergence uniforme locale. (On peut construire $D' \subset \mathbb{C}$ isomorphe au disque-unité ouvert D, tel que φ n'induise pas un isomorphisme de structures uniformes de G(D) muni de la structure uniforme de la convergence uniforme locale sur G(D') muni de la structure uniforme de la convergence uniforme locale).

1.2. - Etude de l'application de $G(D)$ dans $D \times GL(E)$ définie par $f \longmapsto (f(a), f'(a))$.

Dans tout ce paragraphe, D désigne un domaine borné d'un espace de Banach complexe E.

Proposition 1.2.1. - Soit a un point de D. Soit f une application holomorphe de D dans D, telle que $f(a) = a$, $f'(a) = id$. Alors $f = id$.

Démonstration (d'après [7], p. 30). - Nous allons faire la démonstration par l'absurde. Supposons que f ne soit pas égale à l'identité. Alors soit

$$f(x) = a + (x-a) + \sum_{n \geqslant 2} P_n(x-a)$$

le développement de f en série de polynômes homogènes au voisinage de a, et soit k le plus petit entier supérieur ou égal à 2, tel que $P_k \neq 0$.

Calculons le développement de $f^n = f \circ \ldots \circ f$ en série de polynômes homogènes au voisinage de a. On montre facilement par récurrence sur n que

$$f^n(x) = a + (x-a) + nP_k(x-a) + \ldots \quad .$$

Soit B une boule de centre a et de rayon r contenue dans D. D'après le lemme 1.1.6., on a :

$$\| n \ P_k \| \leqslant \frac{\|f^n\|_B}{r^k} \quad ,$$

et comme $f^n(D)$ est contenu dans D, il existe une constante M telle que $\|f^n\|_B \leqslant M$. Par suite,

$$n \, \|P_k\| \leqslant \frac{M}{r^k} \quad .$$

En faisant tendre n vers l'infini, on trouve que $\|P_k\| = 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. La proposition est démontrée.

<u>Proposition 1.2.2.</u> - Soit a un point de D. Soit $\underline{F}$ un filtre formé d'applications analytiques de D dans D, tel que

$$\lim_{\underline{F}} f(a) = a,$$

$$\lim_{\underline{F}} f'(a) = id .$$

Alors $\underline{F}$ converge vers la transformation identique pour la topologie de la convergence uniforme locale.

<u>Démonstration.</u> - Remarquons d'abord que pour tout entier $q \geqslant 1$, on a :

$$\lim_{\underline{F}} f^q(a) = \lim_{\underline{F}} (f \circ \dots \circ f(a)) = a.$$

Ceci se démontre par récurrence sur $q \geqslant 1$, en utilisant le fait qu'il existe une constante K telle que toute application $h \in \underline{H}(D,D)$ soit K-lipschitzienne sur une boule B de centre a et de rayon r complètement intérieure à D.

Pour démontrer la proposition, compte tenu des majorations de Cauchy des dérivées successives d'une fonction bornée et des majorations des restes des développements en séries de polynômes homogènes, il suffit de démontrer que, pour tout $p \geqslant 2$,

$$\lim_{\underline{F}} f^{(p)}(a) = 0.$$

Faisons la démonstration par récurrence sur $p \geqslant 2$. Supposons le résultat démontré à l'ordre (p-1), montrons-le à l'ordre p.

Montrons alors par récurrence sur $q \geqslant 1$ que, pour tout $q \geqslant 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \underline{F}$, tel que, pour tout $f \in F$, on ait :

$$\|(f^q)^{(p)}(a) - q\, f^{(p)}(a)\| < \varepsilon\ .$$

C'est vrai pour $q = 1$, car $(f^1)^{(p)}(a) - 1.f^{(p)}(a) = 0$. Supposons le résultat démontré à l'ordre $(q-1)$, montrons-le à l'ordre q. On a :

$$f^q = f \circ f^{q-1}.$$

Soit $b = f^{q-1}(a)$, et soit

$$f^{q-1}(a+x) = b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, (f^{q-1})^{(n)}(a).(x,\dots,x)$$

le développement de f^{q-1} en série de polynômes homogènes au voisinage de a. Nous adopterons les notations de [13], p. 93 et 94, et nous noterons

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{1}{n!}\ (f^{q-1})^{(n)}(a)$$

et φ_n le polynôme homogène associé. De même,

$$f(b+y) = f(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\ f^{(n)}(b).(y,\dots,y)\ .$$

Nous noterons

$$\tilde{\psi}_n = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(b)$$

et ψ_n le polynôme homogène associé.

En composant les deux développements en série, on trouve :

$$f^q(a+x) = f^q(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n\Big(\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x),\dots, \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x)\Big)\ .$$

Si on écrit

$$f^q(a+x) = f^q(a) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x)\ ,$$

on a :

$$P_p(x) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{p_1+\dots+p_n=p} \tilde{\Psi}_n(\varphi_{p_1}(x),\dots, \varphi_{p_n}(x)) .$$

On sait d'après l'hypothèse de récurrence que $\lim\limits_{\underline{F}} f^{(i)}(a) = 0$ pour tout i, $2 \leqslant i \leqslant p-1$. On a déjà remarqué que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\underline{F}} f^q(a) = a$. Compte tenu du fait que, pour tout i, il existe une constante K_i telle que, pour toute application holomorphe h de D dans D, $h^{(i)}$ soit K_i-lipschitzien sur une boule B de centre a et de rayon r complètement intérieure à D, on montre que, pour tout i, $2 \leqslant i \leqslant p-1$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\underline{F}} f^{(i)}(f^q(a)) = 0$. Un nombre réel $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut donc trouver $F_1 \in \underline{F}$ tel que, pour tout $f \in F_1$, on ait :

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \left\| \sum_{n=2}^{p-1} \sum_{p_1+\dots+p_n=p} \tilde{\Psi}_n(\varphi_{p_1}(x),\dots,\varphi_{p_n}(x))\right\| < \varepsilon/4 .$$

Dans $P_p(x)$, il nous reste deux termes à étudier :

- $\Psi_p(\varphi_1(x))$,
- $\Psi_1(\varphi_p(x))$.

Etudions d'abord $\Psi_p(\varphi_1(x))$. On sait que

$$\varphi_1 = (f^{q-1})'(a) = f'(f^{q-2}(a))\circ f'(f^{q-3}(a))\circ\dots\circ f'(a) .$$

On montre facilement que, pour tout i, $\lim\limits_{\underline{F}} f'(f^i(a)) = id$. On en déduit que $\lim\limits_{\underline{F}} \varphi_1 = id$. D'autre part,

$$\tilde{\Psi}_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(f^{q-1}(a)).$$

Du fait que $f^{(p)}$ est K_p-lipschitzien sur $B(a,r)$, on déduit finalement qu'il existe $F_2 \in \underline{F}$ tel que, pour tout $f \in F_2$

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \left\|\Psi_p(\varphi_1(x)) - \frac{1}{p!} f^{(p)}(a).(x,\dots,x)\right\| < \varepsilon/4.$$

Etudions maintenant $\Psi_1(\varphi_p(x))$. On a déjà vu que $\lim\limits_{\underline{F}} \Psi_1 = \lim\limits_{\underline{F}} f'(f^{q-1}(a)) = \mathrm{id}$. On peut donc trouver $F_3 \in \underline{F}$ tel que, pour tout $f \in F_3$,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|\Psi_1(\varphi_p(x)) - \varphi_p(x))\| < \varepsilon/4 \ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $F_4 \in \underline{F}$ tel que, pour tout $f \in F_4$, on ait :

$$\left\| \frac{1}{p!} (f^{q-1})^{(p)}(a) - (q-1) \frac{1}{p!} f^{(p)}(a) \right\| < \varepsilon /4.$$

En regroupant ces deux résultats, on trouve que, pour tout $f \in F_3 \cap F_4$, on a :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \varphi_1(\Psi_p(x)) - (q-1) \frac{1}{p!} f^{(p)}(a).(x,\ldots,x) \right\| < \varepsilon/2 \ .$$

Soit $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$. Pour tout $f \in F$, on a :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \frac{1}{p!} (f^q)^{(p)}(a).(x,\ldots,x) - q \frac{1}{p!} f^{(p)}(a).(x,\ldots x) \right\| < \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré finalement que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $q \geq 1$, il existe $F \in \underline{F}$ tel que , pour tout $f \in F$, on ait

$$\|(f^q)^{(p)}(a) - q \ f^{(p)}(a)\| < \varepsilon \ .$$

Nous pouvons maintenant terminer la récurrence sur p. D'après les majorations de Cauchy (lemme 1.1.6.), il existe une constante M_p telle que, pour toute application holomorphe h de D dans D, $\|h^{(p)}(a)\| \leq M_p$. On a donc

$$\|(f^q)^{(p)}(a)\| \leq M_p.$$

On sait d'après le résultat précédent appliqué à $\underline{F}$ avec $\varepsilon = 1$ (par exemple) qu'il existe $F \in \underline{F}$, tel que, pour tout $f \in F$, on ait :

$$\|(f^q)^{(p)}(a) - q\, f^{(p)}(a)\| \leqslant 1.$$

On en déduit que, pour tout $f \in F$,

$$\|q\, f^{(p)}(a)\| \leqslant M_p+1 ,$$

et par suite,

$$\|f^{(p)}(a)\| \leqslant \frac{M_p+1}{q} .$$

Ceci montre que $\lim\limits_{\underline{F}} f^{(p)}(a) = 0$, et ceci achève la démonstration de la proposition.

On déduit des propositions 1.2.1 et 1.2.2 le

Théorème 1.2.3. - Soit a un point de D. L'application $\varphi_a : G(D) \longmapsto D \times GL(E)$ qui à f associe $(f(a), f'(a))$ est injective et induit un homéomorphisme de G(D) sur l'image de G(D) par φ_a.

1.3. - Quelques inégalités. Comparaison des différentes structures uniformes.

Le résultat de la proposition 1.2.2 peut s'énoncer de la façon suivante :

Soit D un domaine borné. Soit a un point de D et soit B une boule complètement intérieure à D. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$,
$$\sup(\|f(a)-a\|, \|f'(a)-id\|) < \eta \quad \Rightarrow \quad \|f-id\|_B < \varepsilon .$$

Nous aurons besoin dans la suite de formes plus fortes de ce résultat, nous disant en particulier qu'il existe une constante K telle que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait :

$$\|f-id\|_B \leqslant K \sup(\|f(a)-a\|, \|f'(a)-id\|).$$

Les énoncés précis seront donnés dans les propositions qui vont suivre. Pour commencer, nous avons besoin d'un certain nombre de lemmes.

<u>Lemme 1.3.1.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, et soient B_1 et B_2 deux boules concentriques complètement intérieures à D de rayons respectifs r_1 et r_2, avec $0 < r_1 < r_2$. Alors, il existe une constante K telle que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in B_1$, on ait

$$\|(f^q(x)-x) - q(f(x)-x)\| \leqslant K.q.(\sup_{i=1,\dots,q-1} \|f^i-id\|_{B_2}) \|f(x)-x\| .$$

<u>Démonstration.</u> - Choisissons une autre boule B' concentrique à B_1 et B_2, de rayon r', avec $0 < r_1 < r' < r_2$. Soit h une fonction holomorphe sur B_2. On sait d'après le lemme 1.1.7 que

(h-id) est $\dfrac{\|h-id\|_{B_2}}{r_2-r'}$-lipschitzien sur B'.

Soit maintenant $f \in \underline{H}(D,D)$, et soit

$$h = \frac{1}{q}\,(\mathrm{id} + f + f^2 + \ldots + f^{q-1}) .$$

On a alors

$$\|h-\mathrm{id}\|_{B_2} \leqslant \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2}$$

$$\leqslant \sup_{i=1,\ldots,q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2} .$$

Soit $x \in B_1$. Il nous faut distinguer deux cas :

a) $f(x) \in B'$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à $(h-\mathrm{id})$ pour les points x et $y = f(x)$, on trouve :

$$\|(h(f(x))-f(x)) - (h(x)-x)\| \leqslant \frac{1}{r_2-r'}\Big(\sup_{i=1,\ldots,q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2}\Big)\|f(x)-x\|.$$

Or, on a

$$h(f(x))-h(x) = \frac{1}{q}\,(f^q(x)-x).$$

On trouve finalement

$$\|(f^q(x)-x) - q(f(x)-x)\| \leqslant \frac{q}{r_2-r'}\Big(\sup_{i=1,\ldots,q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2}\Big)\,\|f(x)-x\|.$$

b) $f(x) \notin B'$.

Alors $\|f(x)-x\| \geqslant r'-r_1$,

et par suite

$$q\Big(\sup_{i=1,\ldots,q-1} \|f^i-\mathrm{id}\|_{B_2}\Big)\,\|f(x)-x\| \geqslant q(r'-r_1)^2.$$

Comme D est borné, il existe une constante M telle que, pour tout $g \in \underline{H}(D,D)$, $\|g-\mathrm{id}\|_{B_1} \leqslant M$. Par suite,

$$\|(f^q(x)-x) - q(f(x)-x)\| \leqslant (q+1)M.$$

Il nous faut trouver une constante K_1 telle que, pour tout entier $q \geqslant 1$, on ait

$$(q+1)M \leqslant K_1 q(r'-r_1)^2 \quad .$$

Il suffit pour cela de prendre $K_1 = 2M/(r'-r_1)^2$.

Soit $K = \sup\left(\dfrac{1}{r_2-r'} , \dfrac{2M}{(r'-r_1)^2} \right)$. On a alors, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in B_1$

$$\|(f^q(x)-x)-q(f(x)-x)\| \leqslant K.q.\left(\sup_{i=1,\dots,q-1} \|f^i - \mathrm{id}\|_{B_2} \right) \|f(x)-x\| ,$$

et le lemme est démontré.

La proposition 1.3.2 que nous allons démontrer maintenant est un corollaire du lemme 1.3.1.

<u>Proposition 1.3.2.</u> (Comparer avec [9], p. 43). - Soit D un domaine borné, et soient B_1 et B_2 deux boules concentriques complètement intérieures à D, de rayons respectifs r_1 et r_2, avec $0 < r_1 < r_2$. Soient deux nombres réels u et v tels que $0 < u < 1 < v$. Alors il existe un nombre réel $\alpha > 0$ qui jouit de la propriété suivante : si une application holomorphe $f \in \underline{H}(D,D)$ est telle que

$$\|f - \mathrm{id}\|_{B_2} < \alpha ,$$

$$\|f^2 - \mathrm{id}\|_{B_2} < \alpha ,$$

$$\dots\dots\dots\dots ,$$

$$\|f^{q-1} - \mathrm{id}\|_{B_2} < \alpha ,$$

alors, pour tout $x \in B_1$, on a

$$u\|f^q(x)-x\| \leqslant q\|f(x)-x\| \leqslant v\|f^q(x)-x\| .$$

<u>Démonstration.</u> - D'après le lemme précédent, il existe une constante K telle que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

pour tout $x \in B_1$, on ait

$$\|(f^q(x)-x)-q(f(x)-x)\| \leqslant K.q.(\sup_{i=1,\dots,q-1} \|f^i-id\|_{B_2}) \|f(x)-x\| .$$

u et v étant choisis, soit α tel que

$$K\alpha < \inf(1 - \frac{1}{v}, \frac{1}{u} - 1) .$$

Soit $f \in \underline{H}(D,D)$ vérifiant les hypothèses de la proposition. On a

$$\|f^q(x)-x\| \leqslant q(1+K\alpha)\|f(x)-x\|$$

$$\leqslant q \frac{1}{u} \|f(x)-x\| .$$

De même,

$$\|f^q(x)-x\| \geqslant q(1-K\alpha) \|f(x)-x\|$$

$$\geqslant q \frac{1}{v} \|f(x)-x\| .$$

Q.E.D.

<u>Proposition 1.3.3.</u> (Comparer avec [9], p. 44). - Soit D un domaine borné, et soit B une boule complètement intérieure à D. Alors il existe un nombre réel $\beta > 0$ qui jouit de la propriété suivante : si une application $f \in \underline{H}(D,D)$ est telle que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f^q-id\|_B < \beta ,$$

alors f = id.

De façon précise, si on choisit une boule B_1 concentrique à B, de rayon r_1 strictement inférieur au rayon r de B, et deux nombres réels u et v, tels que $0 < u < 1 < v$, on peut prendre $\beta = \alpha$, où α est le nombre réel strictement positif dont l'existence est assurée par la proposition 1.3.2.

On en déduit que G(D) ne contient pas de sous-groupes arbitrairement petits.

Démonstration. - Soient B_1, u et v comme dans l'énoncé de la proposition. Soit α le nombre réel strictement positif dont l'existence est assurée par la proposition 1.3.2, et soit f $\in \underline{H}(D,D)$ tel que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f^q - id\|_B < \alpha .$$

Alors, d'après la proposition 1.3.2, on a, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:

$$q \|f-id\|_{B_1} \leqslant v \|f^q - id\|_{B_1} \leqslant v\alpha .$$

Donc, pour tout q,

$$\|f-id\|_{B_1} \leqslant \frac{v\alpha}{q} ,$$

ce qui entraîne que $\|f-id\|_{B_1} = 0$, et $f = id$.

Q.E.D.

Proposition 1.3.4. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D, et soit B une boule de centre a complètement intérieure à D. Alors il existe une constante K, telle que pour toute application $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait

$$\|f-id\|_B \leqslant K \sup(\|f(a)-a\|, \|f'(a)-id\|).$$

Démonstration. - On peut supposer que a est l'origine O de E. Nous allons faire la démonstration par l'absurde. Pour chaque entier $n > 0$, on choisit $f_n \in \underline{H}(D,D)$ telle que

$$\|f_n - id\|_B > n \sup(\|f_n(0)\|, \|f_n'(0) - id\|).$$

Soit $M = \sup_{x \in D, y \in D} \|x-y\|$. On a donc :

$$\sup(\|f_n(0)\|, \|f_n'(0) - id\|) \leqslant \frac{\|f_n - id\|_B}{n} \leqslant \frac{M}{n},$$

ce qui prouve que

$$\sup(\|f_n(0)\|, \|f_n'(0) - id\|) \longrightarrow 0, \text{quand } n \longrightarrow +\infty,$$

et d'après la proposition 1.2.2, ceci entraîne que

$$f_n \longrightarrow id, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty .$$

Choisissons maintenant une boule B_2 complètement intérieure à D, concentrique à B, de rayon r_2 strictement supérieur au rayon r de B. Choisissons de plus deux nombres réels u et v tels que $0 < u < 1 < v$, comme dans la proposition 1.3.2. Soit α le nombre réel strictement positif dont l'existence est assurée par la proposition 1.3.2. Comme pour tout entier $n > 0$, f_n est différent de la transformation identique, il existe d'après la proposition 1.3.3, un plus petit entier $q_n > 0$, tel que

$$\|f_n^{q_n} - id\|_{B_2} > \alpha .$$

Soit $g_n = f_n^{q_n}$. Du fait que $\|g_n - id\|_{B_2} > \alpha$, on déduit que la suite g_n ne converge pas vers la transformation identique.

Montrons maintenant que $g_n(0) = f_n^{q_n}(0)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'après la proposition 1.3.2, nous avons

$$u\|f_n^{q_n} - id\|_B \leqslant q_n\|f_n - id\|_B \leqslant v\|f_n^{q_n} - id\|_B .$$

On en tire :

$$q_n \leqslant v \frac{\|f_n{}^{q_n} - id\|_B}{\|f_n - id\|_B} \leqslant \frac{v\ M}{\|f_n - id\|_B} . \tag{1}$$

En appliquant une deuxième fois la proposition 1.3.2, on trouve

$$u\|f_n{}^{q_n}(0)\| \leqslant q_n\|f_n(0)\| \leqslant v\|f_n{}^{q_n}(0)\| ,$$

donc $$\|f_n{}^{q_n}(0)\| \leqslant \frac{q_n}{u} \|f_n(0)\| .$$

En reportant dans cette inégalité la majoration de q_n donnée par (1), on trouve

$$\|f_n{}^{q_n}(0)\| \leqslant \frac{vM}{u} \frac{\|f_n(0)\|}{\|f_n - id\|_B} .$$

Or, $\|f_n(0)\| \leqslant \frac{1}{n} \cdot \|f_n - id\|_B$.

On trouve donc finalement

$$\|g_n(0)\| \leqslant \frac{v\ M}{u} \frac{1}{n} , \tag{2}$$

ce qui prouve que $g_n(0)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Montrons maintenant que $\|g_n'(0) - id\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On a :

$$g_n'(0) = (f_n{}^{q_n})'(0)$$
$$= f_n'(f_n{}^{q_n - 1}(0)) \circ f_n'(f_n{}^{q_n - 2}(0)) \circ \ldots \circ f_n'(0) .$$

Soit B' une boule de centre 0, de rayon $r' < r$. On sait d'après le lemme 1.1.7 qu'il existe une constante H telle que, pour tout $x \in B'$, on ait

$$\|f_n'(x) - f_n'(0)\| = \|(f_n - id)'(x) - (f_n - id)'(0)\|$$
$$\leqslant H \|f_n - id\|_B \|x\|.$$

D'après ce que nous avons déjà démontré, on sait que, pour tout n assez grand, $f_n(0)$, $f_n^{\,2}(0)$, ..., $f_n^{\,q_n-1}(0)$ appartiennent à B'. On a donc, pour tout n assez grand, pour tout entier r ,
$0 \leqslant r \leqslant q_n-1$,

$$\| f_n'(f_n^{\,r}(0))-\mathrm{id}\| \leqslant \|f_n'(f_n^{\,r}(0))-f_n'(0)\| + \| f_n'(0)-\mathrm{id}\|$$

$$\leqslant \|f_n-\mathrm{id}\|_B \left(\frac{HvM}{u}\,\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) ,$$

(car on sait que, pour tout r, $0 \leqslant r \leqslant q_n-1$, $\|f_n^{\,r}(0)\| \leqslant \frac{vM}{u}\,\frac{1}{n}$,
et que $\|f_n'(0)-\mathrm{id}\| \leqslant (1/n)\ \|f_n-\mathrm{id}\|_B$).
Donc, pour tout r, $0 \leqslant r \leqslant q_n-1$,

$$\|f_n'(f_n^{\,r}(0))-\mathrm{id}\| \leqslant \|f_n-\mathrm{id}\|_B\left(\frac{HvM}{u} + 1\right) \frac{1}{n} .$$

Pour achever la démonstration, nous avons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 1.3.5.</u> - Soit E un espace de Banach, soit $\underline{L}(E,E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes linéaires continues de E muni de sa norme habituelle. Soient n éléments $f_1,\ldots,f_n$ de $\underline{L}(E,E)$. Alors on a

$$\|f_1\circ\ldots\circ f_n - \mathrm{id}\| \leqslant \left[\prod_{i=1}^{n} (1+\|f_i-\mathrm{id}\|)\right] - 1 .$$

Ce lemme se démontre facilement en écrivant, pour chaque indice i,

$$f_i = \mathrm{id} + (f_i-\mathrm{id}) ,$$

en développant le produit $f_1\circ\ldots\circ f_n$, et en majorant chacun des termes du développement ainsi obtenu.

<u>Fin de la démonstration de la proposition 1.3.4.</u> - On déduit du lemme 1.3.5 que

$$\|g_n'(0)-\mathrm{id}\| \leqslant (1+\sup_{r=0,\dots,q_n-1} \|f_n'(f_n^{\,r}(0))-\mathrm{id}\|)^{q_n} - 1$$

$$\leqslant (1+\|f_n-\mathrm{id}\|_B(\frac{HvM}{u}+1)\ \frac{1}{n})^{q_n} - 1 \ .$$

Montrons que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (1+\|f_n-\mathrm{id}\|_B(\frac{HvM}{u}+1)\ \frac{1}{n})^{q_n} = 1.$$

Prenons le logarithme

$$y_n = \mathrm{Log}\left[(1+\|f_n-\mathrm{id}\|_B(\frac{HvM}{u}+1)\ \frac{1}{n})^{q_n}\right] \quad ,$$

$$y_n \sim q_n\|f_n-\mathrm{id}\|_B\ (\frac{HvM}{u}+1)\ \frac{1}{n} \quad .$$

On sait que

$$q_n \leqslant \frac{vM}{\|f_n-\mathrm{id}\|_B} \quad ,$$

par suite, $y_n \longrightarrow 0$, ce qui prouve que

$$\left(1+\|f_n-\mathrm{id}\|_B\ \left(\frac{HvM}{u}+1\right)\ \frac{1}{n}\right)^{q_n} \longrightarrow 1,$$

et on en déduit que $\|g_n'(0)-\mathrm{id}\| \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$. On a déjà vu que $g_n(0)$ tend vers 0, quand $n \longrightarrow +\infty$. D'après la proposition 1.2.2, cela entraîne que g_n converge vers l'identité quand $n \rightarrow +\infty$. Nous avons trouvé une contradiction, la proposition est démontrée.

<u>Théorème 1.3.6.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D et soit B une boule complètement intérieure à D. Alors il existe un voisinage ouvert U du point a dans D et une constante $K > 0$ tels que, pour tout point b de U, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait

$$\|f-\mathrm{id}\|_B \leqslant K \sup(\|f(b)-b\|, \|f'(b)-\mathrm{id}\|) .$$

<u>Démonstration.</u> - Nous allons commencer par démontrer le théorème dans le cas où B est une boule de centre a. Soit donc B une boule de centre a et de rayon r, complètement intérieure à D. On sait d'après la proposition 1.3.4 qu'il existe une constante K_0 telle que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait

$$\|f-\mathrm{id}\|_B \leqslant K_0 \sup(\|f(a)-a\|, \|f'(a)-\mathrm{id}\|) .$$

Il suffit donc de démontrer qu'il existe une constante $k > 0$ et un voisinage ouvert U de a tels que, pour tout $b \in U$, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait

$$\sup(\|f(b)-b\|,\|f'(b)-id\|) \geqslant k \sup(\|f(a)-a\|,\|f'(a)-id\|) .$$

Soit B_1 une boule de centre a et de rayon $r_1 < r$. D'après le lemme 1.1.7, (f-id) est $\left[\frac{\|f-id\|_B}{r-r_1}\right]$-lipschitzien sur B_1. On déduit de la proposition 1.3.4 que (f-id) est $\left[\frac{K_o}{r-r_1} \sup(\|f(a)-a\|,\|f'(a)-id\|)\right]$- lipschitzien sur B_1. Par suite, on a, pour tout $b \in B_1$, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$:

$$\|f(b)-b\| \geqslant \|f(a)-a\| - \frac{K_o}{r-r_1} \sup(\|f(a)-a\|,\|f'(a)-id\|)\|b-a\|. \qquad (3)$$

A l'aide du lemme 1.1.7 et de la proposition 1.3.4, on montre de même que (f-id)' est $\left[\frac{4K_o}{(r-r_1)^2} \sup(\|f(a)-a\|,\|f'(a)-id\|)\right]$-lipschitzien sur B_1. On en déduit que, pour tout $b \in B_1$, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on a :

$$\|f'(b)-id\| \geqslant \|f'(a)-id\| - \frac{4K_o}{(r-r_1)^2} \sup(\|f(a)-a\|,\|f'(a)-id\|)\|b-a\|. \qquad (4)$$

En regroupant (3) et (4), on trouve que, pour tout $b \in B_1$, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on a :

$$\sup(\|f(b)-b\|,\|f'(b)-id\|) \geqslant$$

$$\geqslant \sup(\|f(a)-a\|,\|f'(a)-id\|) \quad \left(1 - \left(\frac{K_o}{r-r_1} + \frac{4K_o}{(r-r_1)^2}\right)\|b-a\|\right) .$$

Soit ρ un nombre réel strictement positif, inférieur à r_1, et tel que

$$\left(\frac{K_o}{r-r_1} + \frac{4K_o}{(r-r_1)^2} \right)\rho < \frac{1}{2} .$$

Soit U la boule de centre a et de rayon ρ. On a, pour tout b

$\in U$, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$:

$$\sup(\|f(b)-b\|, \|f'(b)-id\|) \geqslant \frac{1}{2} \sup(\|f(a)-a\|, \|f'(a)-id\|).$$

On en déduit que, pour tout $b \in U$, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on a :

$$\|f-id\|_B \leqslant 2K_o \sup(\|f(b)-b\|, \|f'(b)-id\|) ,$$

ce qui démontre le théorème dans le cas particulier où B est une boule de centre a complètement intérieure à D.

Soit maintenant B une boule complètement intérieure à D, de centre c. D'après le lemme 1.1.5, on peut trouver une suite finie $B_1,\dots,B_n$ de boules complètement intérieures à D, de centres $a_1,\dots,a_n$, telles que $a_1 = a$, $a_n = c$, $B_n = B$, et que, pour tout i, $2 \leqslant i \leqslant n$, a_i appartienne à $\overset{\circ}{B}_{i-1}$.

D'après le résultat que nous venons de démontrer, il existe un voisinage U de a dans D et un constante $K_1 > 0$ tels que, pour tout $b \in U$, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait

$$\|f-id\|_{B_1} \leqslant K_1 \sup(\|f(b)-b\|, \|f'(b)-id\|).$$

Comme a_2 appartient à $\overset{\circ}{B}_1$, d'après le lemme 1.1.6, il existe une constante k_2 telle que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait

$$\sup(\|f(a_2)-a_2\|, \|f'(a_2)-id\|) \leqslant k_2 \|f-id\|_{B_1} .$$

D'après la proposition 1.3.4, il existe une constante K_2 telle que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait :

$$\|f-id\|_{B_2} \leqslant K_2 \sup(\|f(a_2)-a_2\|, \|f'(a_2)-id\|).$$

et c. ....

On trouve finalement que, pour tout $b \in U$, pour tout f

$\in \underline{H}(D,D)$, on a :

$$\|f-id\|_B \leqslant K_1K_2\ldots K_n\ k_2\ldots k_n\ \sup(\|f(b)-b\|,\|f'(b)-id\|) \quad ,$$

et le théorème est démontré.

On déduit du théorème 1.3.6 les corollaires suivants .

Corollaire 1.3.7. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soient B_1 et B_2 deux boules complètement intérieures à D. Alors il existe une constante K telle que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait

$$\|f-id\|_{B_2} \leqslant K\|f-id\|_{B_1} \quad .$$

Corollaire 1.3.8. - Soit D un domaine borné d'un espace complexe E. Pour tout élément (a,b) du produit $D\times D$, il existe une constante K(a,b) telle que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, on ait

$$\sup(\|f(b)-b\|,\|f'(b)-id\|) \leqslant K(a,b)\ \sup(\|f(a)-a\|,\|f'(a)-id\|).$$

De plus, K(a,b) est localement borné sur $D\times D$.

Nous aurons également besoin d'un théorème qui nous permette de comparer, pour deux automorphismes f et g de D, $\|f-g\|_B$ et $\sup(\|f(a)-g(a)\|,\|f'(a)-g'(a)\|)$. Pour cela, il nous faudra supposer que f(a) et g(a) ne se rapprochent pas trop du bord de D. Donnons d'abord une définition.

Définition. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D et soit A un sous-ensemble de D. On définit

$$G_{a,A}(D) = \{ f \in G(D) \mid f(a) \in A \}.$$

Proposition 1.3.9. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D et soit A un sous-ensemble convexe complètement intérieur à D. Enfin, soit B une boule complètement intérieure à D. Alors il existe un voisinage U de a dans D et une constante K tels que, pour tout $b \in U$, pour tout $f \in G_{a,A}(D)$, pour tout $g \in G_{a,A}(D)$, on ait :

$$\|g^{-1} \circ f - \mathrm{id}\|_B \leqslant K \sup(\|f(b)-g(b)\|, \|f'(b)-g'(b)\|) .$$

Démonstration. - Compte tenu du théorème 1.3.6, il suffit de démontrer qu'il existe un voisinage U_1 de a dans D et une constante K_1 tels que, pour tout $b \in U_1$, pour tout $f \in G_{a,A}(D)$, pour tout $g \in G_{a,A}(D)$, on ait :

$$\sup(\|g^{-1} \circ f(b)-b\|, \|(g^{-1} \circ f)'(b)-\mathrm{id}\|)$$
$$\leqslant K_1 \sup(\|f(b)-g(b)\|, \|f'(b)-g'(b)\|) .$$

On sait que tout automorphisme $h \in G(D)$ est k-lipschitzien sur un voisinage V du point a ; on peut donc choisir un voisinage U_1 de a et un sous-ensemble convexe A', complètement intérieur à D et contenant A, tels que, pour tout $b \in U_1$, pour tout $f \in G_{a,A}(D)$, f(b) appartienne à A'.

Soit $b \in U_1$, et soient f et g deux éléments de $G_{a,A}(D)$. Etudions d'abord $\|g^{-1}(f(b)) - b\| = \| g^{-1}(f(b))-g^{-1}(g(b))\|$.

f(b) et g(b) appartiennent à A'. D'autre part, d'après le lemme 1.1.7, tout automorphisme $h \in G(D)$ est k_1-lipschitzien sur A'. On a donc :

$$\|g^{-1}(f(b))-b\| \leqslant k_1 \| f(b)-g(b)\| .$$

Etudions maintenant $\|(g^{-1}\circ f)'(b)-\mathrm{id}\|$.

$$(g^{-1}\circ f)'(b) = (g^{-1})'(f(b))\circ f'(b) .$$

$$\begin{aligned}\|(g^{-1}\circ f)'(b)-\mathrm{id}\| &= \|(g^{-1})'(f(b))\circ f'(b)-\mathrm{id}\| \\ &\leqslant \|(g^{-1})'(f(b))\circ f'(b)-(g^{-1})'(g(b))\circ f'(b)\| \\ &\quad + \|(g^{-1})'(g(b))\circ f'(b) - \mathrm{id}\|. \\ &\leqslant \|(g^{-1})'(f(b))-(g^{-1})'(g(b))\| \, \|f'(b)\| \\ &\quad + \|(g^{-1})'(g(b))\circ f'(b)-(g^{-1})'(g(b))\circ g'(b)\| ,\end{aligned}$$

car on sait que

$$(g^{-1})'(g(b)) = [g'(g^{-1}(g(b)))]^{-1} = [g'(b)]^{-1} .$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|(g^{-1}\circ f)'(b)-\mathrm{id}\| &\leqslant \|(g^{-1})'(f(b))-(g^{-1})'(g(b))\| \, \|f'(b)\| \\ &\quad + \|(g^{-1})'(g(b))\| \, \|f'(b)-g'(b)\| .\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.1.7, il existe une constante M telle que, pour tout $h \in G(D)$, pour tout $x \in A'$, $\|h'(x)\| \leqslant M$. D'autre part, d'après le lemme 1.1.7, il existe une constante k_2 telle que, pour tout $h \in G(D)$, h' soit k_2-lipschitzien sur A'. On trouve finalement :

$$\begin{aligned}\|(g^{-1}\circ f)'(b)-\mathrm{id}\| &\leqslant Mk_2 \|f(b)-g(b)\| + M \|f'(b)-g'(b)\| \\ &\leqslant M(k_2+1) \sup(\|f(b)-g(b)\|, \|f'(b)-g'(b)\|).\end{aligned}$$

Soit $K_1 = \sup(k_1, M(k_2+1))$. On a : $\forall b \in U_1$, $\forall f \in G_{a,A}(D)$, $\forall g \in G_{a,A}(D)$,

$$\sup(\|(g^{-1}\circ f)(b)-b\|, \|(g^{-1}\circ f)'(b)-\mathrm{id}\|)$$
$$\leqslant K_1 \sup(\|f(b)-g(b)\|, \|f'(b)-g'(b)\|) ,$$

et ceci démontre la proposition.

Proposition 1.3.10. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit B une boule complètement intérieure à D. Alors il existe une constante K telle que, pour tout $f \in G(D)$, pour tout $g \in G(D)$, on ait

$$\|f - g\|_B \leqslant K \|g^{-1}\circ f - \mathrm{id}\|_B .$$

Démonstration. - Soit r le rayon de B. Soit B_1 une boule complètement intérieure à D, concentrique à B, de rayon $r_1 > r$. Il nous faut distinguer deux cas :

a) Pour tout $x \in B$, $(g^{-1}\circ f)(x) \in B_1$. D'après le lemme 1.1.7, il existe une constante k_1 telle que tout élément $h \in \underline{H}(D,D)$ soit k_1-lipschitzien sur B_1. On en déduit :

$$\|g-f\|_B = \| g-g\circ(g^{-1}\circ f)\|_B \leqslant k_1 \|g^{-1}\circ f-\mathrm{id}\|_B.$$

b) Il existe $x \in B$, tel que $(g^{-1}\circ f)(x) \notin B_1$. Il suffit de choisir une constante k_2 assez grande pour que

$$\sup_{x\in D, y\in D} \|y-x\| \leqslant k_2 (r_1-r) .$$

Soit $K = \sup(k_1,k_2)$. On a, pour tout $f \in G(D)$, pour tout $g \in G(D)$:

$$\|f-g\|_B \leqslant K \|g^{-1}\circ f - \mathrm{id}\|_B .$$

On déduit des propositions 1.3.9 et 1.3.10 le théorème suivant.

<u>Théorème 1.3.11.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D, et soit A un sous-ensemble convexe de D complètement intérieur à D. Enfin, soit B une boule complètement intérieure à D. Alors il existe un voisinage ouvert U de a dans D et une constante K tels que, pour tout $b \in U$, pour tout $f \in G_{a,A}(D)$, pour tout $g \in G_{a,A}(D)$, on ait :

$$\|f-g\|_B \leqslant K \sup(\|f(b)-g(b)\|, \|f'(b)-g'(b)\|) .$$

<u>Corollaire 1.3.12.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Soit a un point de D, et soit A un sous-ensemble convexe complètement intérieur à D. Alors les trois structures uniformes suivantes coïncident sur $G_{a,A}(D)$:

- la structure uniforme de la convergence uniforme locale,
- la structure uniforme définie par la distance

$$d_a(f,g) = \sup(\|f(a)-g(a)\|, \|f'(a)-g'(a)\|) ,$$

- la structure uniforme gauche.

<u>Démonstration.</u> - Le fait que la structure uniforme gauche est plus fine que la structure uniforme de la convergence uniforme locale découle de la proposition 1.3.10, le fait que la structure uniforme de la convergence uniforme locale est plus fine que la structure uniforme définie par d_a résulte des majorations de Cauchy. Enfin, la proposition 1.3.9 montre que, sur $G_{a,A}(D)$, la structure uniforme définie par d_a est plus fine que la structure uniforme gauche. Le corollaire est démontré.

<u>Corollaire 1.3.13.</u> - Soit a un point de D. L'image de G(D) par φ_a :

$$G(D) \longrightarrow D \times GL(E)$$
$$f \longmapsto (f(a), f'(a))$$

est un fermé de $D \times \underline{L}(E,E)$.

<u>Démonstration.</u> - Si $f_n(a) \longrightarrow b \in D$, $f_n'(a) \longrightarrow g \in \underline{L}(E,E)$, on en déduit que f_n est une suite de Cauchy pour d_a, et comme il existe un sous-ensemble convexe A complètement intérieur à D, tel que les f_n, pour n assez grand, appartiennent à $G_{a,A}(D)$, on déduit du corollaire 1.3.12 et de la proposition 1.1.9 qu'il existe $f \in G(D)$ tel que $\lim f_n = f$. Le corollaire est démontré.

La comparaison de la structure uniforme de la convergence uniforme locale et de la structure uniforme droite est plus délicate. Nous n'aurons pas besoin dans la suite d'un tel théorème de comparaison. Signalons toutefois la

<u>Proposition 1.3.14.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D, et soit A la réunion d'un nombre fini de boules complètement intérieures à D. Alors, la structure uniforme droite et la structure uniforme de la convergence uniforme locale coïncident sur

$$\left\{ f \in G(D) \mid f(a) \in A,\ f^{-1}(a) \in A \right\}.$$

CHAPITRE II

L'algèbre de Lie des transformations infinitésimales d'un domaine borné D.

Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. A tout groupe à un paramètre réel d'automorphismes analytiques de D, est associé un champ holomorphe Ψ de vecteurs tangents à D, et on dit que Ψ est la transformation infinitésimale associée au groupe à un paramètre considéré. Soit $\underline{G}(D)$ l'ensemble de ces transformations infinitésimales. Nous montrerons que $\underline{G}(D)$ est muni d'une façon naturelle d'une structure d'algèbre de Lie normable réelle.

Dans la deuxième partie, nous montrerons que toute transformation infinitésimale $\Psi \in \underline{G}(D)$ est caractérisée par sa valeur en un point a de D, et sa dérivée en ce point. Enfin, nous donnerons une condition (nécessaire et) suffisante pour que, étant donnés un point $a \in D, b \in E$, et $g \in \underline{L}(E,E)$, il existe une transformation infinitésimale $\Psi \in \underline{G}(D)$ telle que $\Psi(a) = b$, $\Psi'(a) = g$.

Dans la troisième partie, nous considérerons le groupuscule de Lie G associé à $\underline{G}(D)$. Nous montrerons que G est le plus grand groupuscule de Lie contenu dans le groupe G(D) des automorphismes analytiques de D, et que l'application

$$\begin{aligned} G \times D &\longrightarrow D \\ (g,x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

est analytique par rapport à l'ensemble des variables.

Enfin, dans la quatrième partie, nous étudierons des exemples. Ces exemples montreront en particulier que, si D est un domaine borné d'un espace de Banach complexe, G(D) n'est pas en général un groupe de Lie ; le théorème démontré par H. Cartan ([9], p. 50, théorème 13) en dimension finie ne se généralise pas en dimension infinie.

2.1. - Construction de l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales de D.

Commençons par montrer le

Lemme 2.1.1. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit I un ensemble d'indices, muni d'un filtre $\underline{F}$. Soient $(f_i)_{i\in I}$ des éléments de G(D), tels que $\lim\limits_{\underline{F}} f_i = \mathrm{id}$.
Soient $(k_i)_{i\in I}$ des nombres réels, et soit

$$\Psi_i = k_i\ (f_i - \mathrm{id}).$$

Supposons qu'il existe une boule B_o complètement intérieure à D, et une fonction holomorphe Ψ sur B_o, telles que Ψ_i converge vers Ψ selon $\underline{F}$ uniformément sur B_o. Alors il existe une fonction holomorphe $\tilde{\Psi}$ sur D, prolongeant Ψ, telle que, pour toute boule B complètement intérieure à D, Ψ_i converge vers $\tilde{\Psi}$ selon $\underline{F}$ uniformément sur B.

Démonstration. - Soit B une boule complètement intérieure à D. Par un raisonnement de connexité, on peut construire une suite finie B_j $(j = 1,\dots,n)$ de boules ouvertes complètement intérieures à D, telles que $U = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ soit connexe, contienne B_o, et que B soit complètement intérieure à U. Quitte à rapetisser B_o, on peut toujours supposer que $\|\Psi\|_{B_o} < +\infty$. On en déduit l'existence d'une constante $M < +\infty$, et d'un élément F de $\underline{F}$ tels que, pour tout $i \in F$, on ait :

$$\|k_i\ (f_i - id)\|_{B_o} \leqslant M.$$

Pour chacune des boules B_j, il existe d'après le corollaire 1.3.7 une constante K_j telle que, pour tout $i \in I$,

$$\|f_i - id\|_{B_j} \leqslant K_j\ \|f_i - id\|_{B_o},$$

et par suite, pour tout $i \in F$,

$$\|\Psi_i\|_{B_j} \leqslant K_j\ \|\Psi_i\|_{B_o} \leqslant K_j\ M.$$

La famille des fonctions $[\Psi_i = k_i\ (f_i - id)]_{i \in F}$ est uniformément bornée sur U. D'après la proposition 1.1.3, le fait que les $(\Psi_i)_{i \in I}$ forment un filtre de Cauchy pour la structure uniforme de la convergence uniforme sur B_o entraîne que les $(\Psi_i)_{i \in I}$ forment un filtre de Cauchy pour la structure uniforme de la convergence uniforme sur toute boule B complètement intérieure à U, et le lemme s'en déduit facilement.

<u>Définition 2.1.2.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. On dit qu'un homomorphisme φ du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe G(D) est un groupe à un paramètre d'automorphismes de D si l'application

$$\mathbb{R} \times D \longrightarrow D$$
$$(t, x) \longmapsto \varphi(t).x$$

est analytique par rapport à l'ensemble des variables.

Proposition et définition 2.1.3. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, et soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G(D)$ un groupe à un paramètre d'automorphismes analytiques de D. Alors

$$\Psi_t(x) = \frac{\varphi(t).x - x}{t} \qquad (t \neq 0)$$

tend uniformément sur toute boule B complètement intérieure à D, lorsque t tend vers 0, vers une fonction holomorphe Ψ sur D à valeurs dans E. On dit que Ψ est la transformation infinitésimale associée au groupe à un paramètre φ.

Réciproquement, $t \longmapsto \varphi(t).x$ est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \Psi(x)$$

prenant pour $t = 0$ la valeur x.

Démonstration. - Soit $(t,x) \longmapsto f(t,x) = \varphi(t).x$. D'après la définition de Ψ, on a :

$$\Psi(x) = \frac{\partial}{\partial t} f(0,x).$$

Soit $x_o \in D$. Montrons qu'il existe une boule B_o de centre x_o, complètement intérieure à D, telle que Ψ_t converge vers Ψ uniformément sur B_o.

Choisissons un nombre réel $\eta > 0$ et une boule B_o de centre x_o complètement intérieure à D, tels que $\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right\|$ soit borné par une constante M sur $[-\eta,\eta] \times B_o$. D'après la formule de Taylor, on a, pour tout $x \in B_o$, pour tout $|t| < \eta$:

$$\left\| f(t,x)-f(0,x)-t\,\frac{\partial f}{\partial t}\,(0,x)\right\| \leqslant \frac{|t|^2}{2}\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right\|_{[-\eta,\eta]\times B_0} .$$

Par suite, pour tout $x \in B_0$, pour tout $t \in [-\eta, +\eta]$, on a :

$$\|\Psi_t(x) - \Psi(x)\| \leqslant M\,\frac{|t|}{2} ,$$

ce qui prouve que Ψ_t converge vers Ψ uniformément sur B_0.

On déduit du lemme 2.1.1 que Ψ_t converge vers Ψ uniformément sur toute boule B complètement intérieure à D. La limite Ψ est une fonction holomorphe sur D tout entier.

Réciproquement, en utilisant les propriétés de l'homomorphisme φ, et compte tenu des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles (voir par exemple [13], p. 118), on vérifie facilement que

$$t \longmapsto \varphi(t).x$$

est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \Psi(x)$$

prenant pour $t = 0$ la valeur x.

Q.E.D.

<u>Remarque.</u> - Il serait plus correct de considérer les transformations infinitésimales Ψ comme des sections du fibré tangent T(D) de D. Comme T(D) est trivial, l'espace des sections holomorphes du fibré tangent s'identifie à l'espace des applications holomorphes de D dans E, et ceci justifie nos considérations.

Soit $\underline{G}(D)$ l'ensemble des transformations infinitésimales de D, associées à tous les groupes à un paramètre d'automorphismes de D. Nous allons montrer que $\underline{G}(D)$ a une structure d'algèbre de Lie normable complète (au sens de Bourbaki [5], chapitre 3). Pour commencer, nous allons montrer une proposition qui nous permettra de construire des transformations infinitésimales $\Psi \in \underline{G}(D)$, à partir d'éléments du groupe G(D).

Proposition 2.1.4. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G(D) convergeant vers la transformation identique. Soient n_k des nombres entiers, et soit

$$\Psi_k = n_k\,(f_k - id) .$$

Supposons que Ψ_k converge vers une fonction holomorphe Ψ uniformément sur toute boule B complètement intérieure à D. Alors $\Psi \in \underline{G}(D)$.

(Remarquons tout de suite que, d'après le lemme 2.1.1, pour que Ψ_k converge vers Ψ uniformément sur toute boule B complètement intérieure à D, il suffit de vérifier qu'il existe une boule B_o complètement intérieure à D telle que $\Psi_k \longrightarrow \Psi$ uniformément sur B_o).

Démonstration (d'après [9], p. 27). - Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \Psi(x) .$$

D'après les théorèmes classiques sur les équations différentielles (voir par exemple [13]), on sait qu'il existe un voisinage U de $\{0\}\times D$ dans $\mathbb{R}\times D$, et une application analytique

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & D \\ (t,x) & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

telle que, pour tout $x \in D$, l'application

$$t \longmapsto f(t,x)$$

soit la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \Psi(x)$$

prenant pour $t = 0$ la valeur x. De plus, pour tous les $x \in D$, $t \in \mathbb{R}$, $t' \in \mathbb{R}$, tels que les deux expressions $f(t+t',x)$ et $f(t,f(t',x))$ soient définies, on a l'égalité :

$$f(t+t',x) = f(t,f(t',x)).$$

Soit $x_0 \in D$, et soit $I \times \Omega$ un voisinage ouvert de $(0,x_0)$ contenu dans U. Montrons que, pour tout $t \in I$, positif, assez proche de 0, l'application

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & D \\ x & \longmapsto & f(t,x) \end{array}$$

se prolonge en un automorphisme analytique de D. Pour cela, il suffit de démontrer qu'il existe une boule B de centre x_0, complètement intérieure à Ω, et une suite d'éléments $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $G(D)$, tels que g_k converge vers $f(t,.)$ uniformément sur B. En effet, comme $f(I \times \Omega)$ est contenu dans D, $\lim\limits_{k \to \infty} g_k(x_0) = f(t,x_0)$ appartient à D, et d'après la proposition 1.1.9, ceci entraîne que g_k converge vers un élément $g_0 \in G(D)$, et que g_0 prolonge $f(t,.)$ en un automorphisme de D.

Soit donc $t_o \in I$, $t_o > 0$, et soit q_k la partie entière de $n_k t_o$. Soit $g_k = f_k^{q_k}$. Enfin, soit B_1 une boule de centre x_o complètement intérieure à Ω. On sait que

$$\left\| \frac{q_k}{t_o} \left(f\left(\frac{t_o}{q_k},.\right)-\mathrm{id}\right) - \Psi \right\|_{B_1} \longrightarrow 0,$$

et que

$$\left\| n_k \left(f_k-\mathrm{id}\right) - \Psi \right\|_{B_1} \longrightarrow 0 .$$

On en déduit que

$$\left\| \frac{q_k}{t_o} f\left(\frac{t_o}{q_k},.\right) - n_k f_k - \left(\frac{q_k}{t_o} - n_k\right)\mathrm{id} \right\|_{B_1} \longrightarrow 0,$$

$$\frac{q_k}{t_o} \left\| f\left(\frac{t_o}{q_k},.\right) - f_k + \left(1 - \frac{t_o n_k}{q_k}\right)(f_k-\mathrm{id}) \right\|_{B_1} \longrightarrow 0.$$

On trouve finalement :

$$\left\| f\left(\frac{t_o}{q_k},.\right) - f_k \right\|_{B_1} < \frac{\varepsilon_k}{q_k}, \text{ avec } \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0.$$

Si t_o est assez petit, on peut trouver une boule B de centre x_o, complètement intérieure à Ω, telle que

- $\forall x \in B$, $\forall t$, $0 \leqslant t \leqslant t_o$, $f(t,x) \in B_1$;
- $\forall x \in B$, $\forall k$ assez grand, $\forall q$, $0 \leqslant q \leqslant q_k$, $f_k^{\,q}(x) \in B_1$.

D'après les majorations de Cauchy, il existe une constante K telle que Ψ soit K-lipschitzien sur B_1. On déduit des théorèmes classiques sur les équations différentielles que, pour tout $x \in B_1$, pour tout $y \in B_1$, pour tout $t \in I(x) \cap I(y)$, on a :

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leqslant e^{K|t|} \| x - y \| .$$

($I(x)$ désigne le plus grand intervalle ouvert contenant 0 et contenu dans $\{ t \in \mathbb{R} \mid f(t,x) \in B_1$).

Soit $x \in B$, et soit $q \leqslant q_k$. On a :

$$\left\| f\left(q \frac{t_o}{q_k}, x\right) - f_k^{\,q}(x) \right\|$$

$$\leqslant \left\| f\left(\frac{t_o}{q_k}, f\left((q-1)\frac{t_o}{q_k}, x\right)\right) - f\left(\frac{t_o}{q_k}, f_k^{\,q-1}(x)\right) \right\|$$

$$+ \left\| f\left(\frac{t_o}{q_k}, f_k^{\,q-1}(x)\right) - f_k\left(f_k^{\,q-1}(x)\right) \right\|$$

$$\leqslant \exp\left(K \frac{|t_o|}{q_k}\right) \left\| f\left((q-1)\frac{t_o}{q_k}, x\right) - f_k^{\,q-1}(x) \right\| + \frac{\varepsilon_k}{q_k} \ .$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\left\| f\left(\frac{q_k \, t_o}{q_k}, .\right) - f_k^{\,q_k} \right\|_B \leqslant \frac{q_k \, \varepsilon_k}{q_k} + \varepsilon_k \left(\exp\left(K \frac{|t_o|}{q_k}\right)\right)^{q_k} .$$

On en déduit l'existence d'une constante K_1 telle que

$$\left\| f(t_o, .) - f_k^{\,q_k} \right\|_B \leqslant K_1 \, \varepsilon_k \ ,$$

ce qui prouve que $g_k = f_k^{\,q_k}$ converge vers $f(t_o, .)$ uniformément sur B. On peut donc prolonger f en un morceau F de groupe à un paramètre d'automorphismes de D

$$I \times D \longrightarrow D$$
$$(t, x) \longmapsto F(t, x).$$

On vérifie facilement que F est analytique par rapport à l'ensemble des variables, et que F se prolonge en un groupe à un paramètre d'automorphismes de D.

Q.E.D.

Nous pouvons maintenant démontrer la

<u>Proposition 2.1.5.</u> - <u>G</u>(D) est un espace vectoriel réel.

<u>Démonstration.</u> - Il nous faut montrer que, si les

transformations infinitésimales Ψ_1 et Ψ_2 appartiennent à $\underline{G}(D)$, et si a_1 et a_2 sont deux nombres réels, alors $a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2$ appartient à $\underline{G}(D)$.

Soient $(t,x) \longmapsto f_1(t,x)$ le groupe à un paramètre réel associé à Ψ_1, et $(t,x) \longmapsto f_2(t,x)$ le groupe à un paramètre réel associé à Ψ_2. Soit

$$f(t,x) = f_1(a_1 t, f_2(a_2 t, x)).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(t,x)$ est un automorphisme analytique de D. Soient $f_k = f(1/k, .)$, $n_k = k$. Posons

$$\Psi_k = k\,(f(\tfrac{1}{k}, .) - \mathrm{id}).$$

Soit $x_0 \in D$. On peut choisir une boule B de centre x_0, complètement intérieure à D telle que, pour tout $x \in B$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait :

$$\|f_1(t,x)-x-t\,\Psi_1(x)\| \leqslant |t| \,.\, \varepsilon_1(t) \text{ , avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon_1(t) = 0.$$

De même,

$$\|f_2(t,x)-x-t\,\Psi_2(x)\| \leqslant |t| \,.\, \varepsilon_2(t) \text{ , avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon_2(t) = 0.$$

En composant les développements limités, on trouve :

$$\|f_1(a_1 t, f_2(a_2 t,x))-f_2(a_2 t,x)-a_1 t.\,\Psi_1(f_2(a_2 t,x))\| \leqslant |a_1 t|\ \varepsilon_1(a_1 t),$$

$$\|f_1(a_1 t, f_2(a_2 t,x))-x-a_2 t.\Psi_2(x)-a_1 t.\Psi_1(f_2(a_2 t,x))\|$$

$$\leqslant |a_1 t| \,.\, \varepsilon_1(a_1 t)+|a_2 t| \,.\, \varepsilon_2(a_2 t) \,.$$

On sait d'autre part qu'il existe une constante K telle que Ψ_1 soit K-lipschitzienne sur B. On en déduit que, pour tout $x \in B$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\| f(t,x)-x-(a_1 \Psi_1(x)+a_2 \Psi_2(x)).t \| \leqslant \varepsilon_3(t)(|a_1 t|+|a_2 t|) ,$$

$$\text{avec } \lim_{t \to 0} \varepsilon_3(t) = 0,$$

ce qui montre que Ψ_k converge vers $a_1 \Psi_1+a_2 \Psi_2$ uniformément sur B. D'après la proposition 2.1.4, ceci entraîne que $a_1 \Psi_1+a_2 \Psi_2$ appartient à $\underline{G}(D)$, et la proposition est démontrée.

<u>Proposition 2.1.6.</u> - Soient Ψ_1 et Ψ_2 deux éléments de $\underline{G}(D)$. Alors le crochet $[\Psi_1, \Psi_2]$ appartient à $\underline{G}(D)$.

<u>Démonstration.</u> - Soient Ψ_1 et $\Psi_2 \in \underline{G}(D)$. Soit $(t,x) \longrightarrow f_1(t,x)$ (resp. $(t,x) \longrightarrow f_2(t,x)$) le groupe à un paramètre réel associé à Ψ_1 (resp. Ψ_2). Considérons

$$f(t,x) = f_2(t,f_1(t,f_2(-t,f_1(-t,x)))),$$

et soit

$$\Psi_k = k^2 \left(f\left(\frac{1}{k},.\right) - id\right).$$

Un calcul de développements limités montre que, si x_0 est un point de D et si B est une boule complètement intérieure à D de centre x_0, $\Psi_k(x)$ converge vers $\Psi_2'(x).\Psi_1(x)- \Psi_1'(x).\Psi_2(x)$ uniformément sur B. D'après [4], chapitre 8, p. 17, ceci est exactement la valeur du crochet $[\Psi_1, \Psi_2]$. On déduit de la proposition 2.1.4 que $[\Psi_1, \Psi_2]$ appartient à $\underline{G}(D)$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

<u>Théorème 2.1.7.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Soient B_1 et B_2 deux boules complètement intérieures à D. Les normes $\| \cdot \|_{B_1}$ et $\| \cdot \|_{B_2}$ sont des normes équivalentes sur $\underline{G}(D)$. Ces normes font de l'espace vectoriel réel

$\underline{G}(D)$ muni du crochet de deux champs de vecteurs une algèbre de Lie réelle normable complète (au sens de Bourbaki [5], chapitre 3).

<u>Démonstration.</u> - Soient B_1 et B_2 deux boules complètement intérieures à D. Montrons que les deux normes $\|\cdot\|_{B_1}$ et $\|\cdot\|_{B_2}$ sont équivalentes sur $\underline{G}(D)$. D'après le corollaire 1.3.7, on sait qu'il existe une constante K telle que, pour tout $f \in G(D)$, on ait :

$$\|f - id\|_{B_1} \leqslant K \|f - id\|_{B_2} .$$

Si Ψ est un élément de $\underline{G}(D)$, on peut trouver une suite d'automorphismes $f_k \in G(D)$ convergeant vers l'identité, et des entiers n_k, tels que

$$\Psi_k = n_k (f_k - id)$$

converge vers Ψ uniformément sur toute boule B complètement intérieure à D. (Il suffit de prendre $f_k = f_\Psi(1/k,.)$, où f_Ψ est le groupe à un paramètre associé à Ψ, et $n_k = k$). On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|f_k - id\|_{B_1} \leqslant K \| f_k - id\|_{B_2} ,$$

ce qui entraîne

$$\|\Psi_k\|_{B_1} \leqslant K \|\Psi_k\|_{B_2} .$$

On en déduit par passage à la limite que

$$\|\Psi\|_{B_1} \leqslant K \|\Psi\|_{B_2} .$$

On peut montrer de même qu'il existe une constante K' telle que

$\|\Psi\|_{B_2} \leqslant K' \|\Psi\|_{B_1}$. Les deux normes $\|.\|_{B_1}$ et $\|.\|_{B_2}$ sont bien équivalentes.

Sur la forme du crochet $[\varphi, \Psi] = D_\varphi \Psi - D_\Psi \varphi$, il est clair que le crochet est une application bilinéaire continue de $\underline{G}(D) \times \underline{G}(D)$ dans $\underline{G}(D)$.

Il nous reste à démontrer que $\underline{G}(D)$, muni de la norme $\|.\|_B$, (où B est une boule complètement intérieure à D), est complet.

Soit $(\Psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy formé d'éléments de $\underline{G}(D)$. Il existe une application analytique $\Psi \in \underline{H}(D,E)$, telle que $\Psi = \lim\limits_{k \to +\infty} \Psi_k$, et il nous faut montrer que $\Psi \in \underline{G}(D)$.

Considérons la suite de transformations $f_k = f_{\Psi_k}(1/k,.)$, (où f_{Ψ_k} est le groupe à un paramètre associé à la transformation infinitésimale Ψ_k). Soit B une boule complètement intérieure à D. Du fait que les Ψ_k sont uniformément bornés sur B, on déduit que les f_k convergent vers l'identité. Soit

$$\theta_k = k\,(f_k - \mathrm{id}).$$

D'après la formule de Taylor, on a, pour tout $x \in B$:

$$\left\| f_k(x) - x - \frac{1}{k}\,\Psi_k(x) \right\| \leqslant \frac{1}{k^2} \sup_{t \in [0,1/k]} \left\| \frac{\partial^2 f_{\Psi_k}}{\partial t^2}(t,x) \right\|.$$

Le calcul montre que

$$\frac{\partial^2 f_{\Psi_k}}{\partial t^2}(t,x) = \Psi_k'(f_{\Psi_k}(t,x)).\Psi_k(f_{\Psi_k}(t,x)).$$

On peut trouver une boule B_1 complètement intérieure à D concentrique à B, telle que, pour tout k assez grand, pour tout $t \in [0,1/k]$, pour tout $x \in B$, $f_{\Psi_k}(t,x) \in B_1$. Du fait que les Ψ_k sont uniformément bornés sur toute boule complètement intérieure à D, on déduit qu'il existe une constante M telle que, pour tout k, pour tout $x \in B_1$, on ait :

$$\|\Psi_k'(x).\Psi_k(x)\| \leqslant M.$$

Par suite, pour tout k assez grand, pour tout $x \in B$, on a :

$$\|(f_k(x)-x) - \frac{1}{k}\Psi_k(x)\| \leqslant \frac{M}{k^2}.$$

On en déduit que θ_k converge vers Ψ uniformément sur B, et d'après la proposition 2.1.4, cela entraîne que $\Psi \in \underline{G}(D)$. Ceci achève la démonstration du théorème.

2.2. - Quelques propriétés de l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$.

Nous aurons besoin dans la suite d'autres résultats sur l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$, et nous allons les démontrer dans ce paragraphe.

Lemme 2.2.1. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D, et soit B une boule complètement intérieure à D. Alors il existe une constante K telle que, pour tout $\Psi \in \underline{G}(D)$, on ait :

$$\|\Psi\|_B \leqslant K \sup(\|\Psi(a)\|, \|\Psi'(a)\|).$$

Démonstration. - Soit $\Psi \in \underline{G}(D)$. On peut trouver une suite f_k d'éléments de G(D), et une suite d'entiers n_k, tels que $\Psi_k = n_k(f_k - id)$ converge vers Ψ uniformément sur toute boule complètement intérieure à D. (D'après la proposition 2.1.3, il suffit de prendre $f_k = f_\Psi(1/k, .)$, où f_Ψ est le groupe à un paramètre associé à Ψ, et $n_k = k$).

Soit B une boule complètement intérieure à D. D'après le théorème 1.3.6, il existe une constante K telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\|f_k - \mathrm{id}\|_B \leqslant K \sup(\|f_k(a)-a\|, \|f_k'(a)-\mathrm{id}\|) ,$$

et par suite

$$\|n_k\ (f_k-\mathrm{id})\|_B \leqslant K \sup(\|n_k\ (f_k(a)-a)\|, \|n_k\ (f_k'(a)-\mathrm{id})\|) .$$

On sait que $\Psi_k = n_k\ (f_k-\mathrm{id})$ converge vers Ψ uniformément sur toute boule complètement intérieure à D. Cela entraîne que $\Psi_k(a) \longrightarrow \Psi(a)$, et que $\Psi_k'(a) \longrightarrow \Psi'(a)$. Par passage à la limite, on trouve :

$$\|\Psi\|_B \leqslant K \sup(\|\Psi(a)\|, \|\Psi'(a)\|) ,$$

et le lemme est démontré.

On en déduit le théorème 2.2.2 qui est l'analogue pour l'algèbre de Lie du théorème 1.2.3.

<u>Théorème 2.2.2.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D. L'application $\mathbb{R}$-linéaire continue θ_a

$$\begin{array}{ccc} \underline{G}(D) & \xrightarrow{\theta_a} & E \times \underline{L}(E,E) \\ \Psi & \longmapsto & (\Psi(a), \Psi'(a)) \end{array}$$

est injective, et induit un isomorphisme d'espaces de Banach de $\underline{G}(D)$ sur son image $\theta_a(\underline{G}(D))$.

<u>Démonstration.</u> - Soit B une boule complètement intérieure à D. Le fait qu'il existe une constante K telle que, pour tout

$\Psi \in \underline{G}(D)$, on ait

$$\|\Psi\|_B \leqslant K \sup(\|\Psi(a)\|, \|\Psi'(a)\|)$$

montre que, si $\Psi(a) = 0$, $\Psi'(a) = 0$, alors $\|\Psi\|_B = 0$, et par suite, $\Psi \equiv 0$. L'application θ_a est injective. L'inégalité que nous venons d'écrire prouve justement que l'application réciproque est aussi continue.

Remarquons que le corollaire 1.3.7 et le lemme 1.3.1 entraînent l'énoncé suivant :

<u>Lemme 2.2.3.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, et soit B une boule complètement intérieure à D. Alors il existe une constante K telle que, pour tout $f \in \underline{H}(D,D)$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\|(f^q - id) - q(f - id)\|_B \leqslant K\, q\, \Big(\sup_{i=1,\dots,q-1} \|f^i - id\|_B\Big)\, \|f - id\|_B \;.$$

Nous allons utiliser ce lemme dans la démonstration du

<u>Théorème 2.2.4.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, et soit a un point de D. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G(D), convergeant vers la transformation identique. Soit

$$\Psi_k = 2^k\,(f_k - id)\;.$$

Supposons que $\Psi_k(a) \xrightarrow[k\to+\infty]{} b \in E$,

$$\Psi_k'(a) \xrightarrow[k\to+\infty]{} g \in \underline{L}(E,E).$$

Alors Ψ_k converge sur toute boule B complètement intérieure à D vers une transformation infinitésimale $\Psi \in \underline{G}(D)$, telle que

$\Psi(a) = b$, $\Psi'(a) = g$.

Démonstration. - Pour montrer le théorème, compte tenu du lemme 2.1.1 et de la proposition 2.1.4, il suffit de démontrer qu'il existe une boule B complètement intérieure à D telle que $\Psi_{k|B}$ soit une suite de Cauchy pour la structure uniforme de la convergence uniforme sur B.

Soit B une boule de centre a, complètement intérieure à D. Soit $\varepsilon_k = \sup_{m \geqslant k} \|\Psi_m - \Psi_k\|_B$. Il nous faut montrer que $\lim_{k \to +\infty} \varepsilon_k = 0$.

Pour $m \geqslant k$, on a :

$$\Psi_m - \Psi_k = 2^m(f_m - id) - 2^k(f_m^{2^{m-k}} - id) + 2^k(f_m^{2^{m-k}} - f_k) ,$$

d'où

$$\|\Psi_m - \Psi_k\|_B \leqslant 2^k \|2^{m-k}(f_m - id) - (f_m^{2^{m-k}} - id)\|_B + 2^k \|f_m^{2^{m-k}} - f_k\|_B . \tag{1}$$

a) Etudions d'abord le premier terme du second membre. D'après le lemme 2.2.3, il existe une constante K_1 telle que

$$\|2^{m-k}(f_m - id) - (f_m^{2^{m-k}} - id)\|_B \leqslant K_1 \, 2^{m-k} \left(\sup_{i=1,\dots,2^{m-k}-1} \|f_m^{\,i} - id\|_B\right) \|f_m - id\|_B . \tag{2}$$

Il nous faut trouver des majorations des termes du second facteur.

D'après le théorème 1.3.6, il existe une constante K_2 telle que

$$\|f_m - id\|_B \leqslant K_2 \sup(\|f_m(a)-a\|, \|f_m'(a)-id\|) .$$

Du fait que $\|2^m(f_m(a)-a)\|$ et $\|2^m(f_m'(a)-id)\|$ sont bornés, on déduit l'existence d'une constante M_1 telle que

$$\|f_m - id\|_B \leqslant \frac{M_1}{2^m} .$$

Etudions maintenant $\sup\limits_{i=1,\dots,2^{m-k}-1} \|f_m{}^i - id\|_B$. Soit

$M_2 = \sup\limits_{x\in D, y\in D} \|x-y\|$, et appliquons à nouveau le lemme 2.2.3. On a, pour tout m, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\|(f_m{}^i - id) - i(f_m - id)\|_B \leqslant K_1\, i\, (\sup_{j=1,\dots,i-1} \|f_m{}^j - id\|_B)\, \|f_m - id\|_B .$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\|f_m{}^i - id\|_B &\leqslant i\, \|f_m - id\|_B\, (1 + K_1 \sup_{j=1,\dots,i-1} \|f_m{}^j - id\|_B) \\ &\leqslant i\, \|f_m - id\|_B\, (1 + K_1 M_2) \\ &\leqslant i\, \frac{M_1}{2^m}\, (1 + K_1 M_2) .\end{aligned}$$

Par suite,

$$\sup_{i=1,\dots,2^{m-k}-1} \|f_m{}^i - id\|_B \leqslant \frac{M_1\, (1+K_1 M_2)}{2^k} .$$

Reportons ces valeurs dans (2). On trouve l'existence d'une constante K_3 telle que

$$2^k \left\| 2^{m-k}(f_m - id) - (f_m{}^{2^{m-k}} - id)\right\|_B \leqslant \frac{K_3}{2^k} .$$

b) Etudions maintenant le second terme du second membre de (1). Pour cela, étudions d'abord

$$\|f_m{}^{2^{m-k}}(a) - f_k(a)\| \text{ et } \|(f_m{}^{2^{m-k}})'(a) - f_k'(a)\| .$$

On a :

$$\|f_m^{2^{m-k}}(a)-f_k(a)\| = \|(f_m^{2^{m-k}}(a)-a)-(f_k(a)-a)\|$$

$$\leqslant \|(f_m^{2^{m-k}}(a)-a)-2^{m-k}(f_m(a)-a)\|$$

$$+\|2^{m-k}(f_m(a)-a)-(f_k(a)-a)\| .$$

De même,

$$\|(f_m^{2^{m-k}})'(a)-f_k'(a)\| = \|((f_m^{2^{m-k}})'(a)-id)-(f_k'(a)-id)\|$$

$$\leqslant \|((f_m^{2^{m-k}})'(a)-id)-2^{m-k}(f_m'(a)-id)\|$$

$$+ \|2^{m-k}(f_m'(a)-id)-(f_k'(a)-id)\| .$$

On déduit du fait que a appartient à l'intérieur de B et des majorations de Cauchy qu'il existe une constante K_4 telle que

$$\sup(\|(f_m^{2^{m-k}}(a)-a)-2^{m-k}(f_m(a)-a)\|,$$

$$\|((f_m^{2^{m-k}})'(a)-id)-2^{m-k}(f_m'(a)-id)\|)$$

$$\leqslant K_4 \|(f_m^{2^{m-k}}-id)-2^{m-k}(f_m-id)\|_B ,$$

et d'après le a),

$$\leqslant K_4 \frac{K_3}{(2^k)^2} .$$

D'autre part, d'après l'hypothèse du théorème, il existe une suite de nombres réels $\eta_k \to 0$, telle que, pour tout $m \geqslant k$,

$$\sup(\|2^{m-k}(f_m(a)-a)-(f_k(a)-a)\|, \|2^{m-k}(f_m'(a)-id)-(f_k'(a)-id)\|)$$

$$\leqslant \frac{\eta_k}{2^k} .$$

En regroupant ces deux résultats, on trouve finalement :

$$\sup(\|f_m^{2^{m-k}}(a)-f_k(a)\|, \|(f_m^{2^{m-k}})'(a)-f_k'(a)\|) \leqslant \frac{1}{2^k}\left(\frac{K_3K_4}{2^k}+\eta_k\right).$$

Soit A un voisinage convexe de a, complètement intérieur à D. Il est clair que, pour tout k assez grand, $f_k \in G_{a,A}(D)$. Des formules écrites ci-dessus, on déduit facilement que, pour tout k assez grand, pour tout $m \geqslant k$, $f_m^{2^{m-k}}$ appartient à $G_{a,A}(D)$. D'après le théorème 1.3.11, il existe une constante K_5 telle que

$$\begin{aligned} \|f_m^{2^{m-k}}-f_k\|_B & \\ &\leqslant K_5 \sup(\|f_m^{2^{m-k}}(a)-f_k(a)\|, \|(f_m^{2^{m-k}})'(a)-f_k'(a)\|) , \\ &\leqslant \frac{K_5}{2^k}\left(\frac{K_3K_4}{2^k}+\eta_k\right). \end{aligned}$$

En regroupant les résultats a) et b), on trouve :

$$\varepsilon_k = \sup_{m\geqslant k} \|\Psi_m-\Psi_k\|_B \leqslant \frac{1}{2^k}(K_3+K_3K_4K_5) + K_5\eta_k .$$

On a bien $\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$, et le théorème est démontré.

Nous aurons également besoin des deux résultats suivants.

<u>Lemme 2.2.5.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit Ψ un élément de $\underline{G}(D)$ non identiquement nul. Alors $i\Psi$ n'appartient pas à $\underline{G}(D)$.

<u>Démonstration</u> (d'après [6], p. 121). - Faisons la démonstration par l'absurde. Soit Ψ un élément de $\underline{G}(D)$ non identiquement nul, et supposons que $i\Psi \in \underline{G}(D)$.

Comme le crochet $[\Psi, i\Psi] \equiv 0$, on sait que l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow G(D)\\ (t_1,t_2) &\longmapsto \varphi(t_1,t_2) = f_\psi(t_1,.)\circ f_{i\psi}(t_2,.)\end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupe. Soit a un point de D, tel que $\psi(a) \neq 0$. L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\xrightarrow{h} D\\ t_1+it_2 &\longmapsto \varphi(t_1,t_2).a\end{aligned}$$

est holomorphe, car on a, pour tout $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial h}{\partial t_2}(t_1,t_2) = i\,\frac{\partial h}{\partial t_1}(t_1,t_2).$$

Elle est non constante, car $\frac{\partial h}{\partial t_1}(0,0) \neq 0$. La fonction h serait une fonction entière bornée non constante. C'est impossible d'après le théorème de Liouville, et le lemme est démontré.

<u>Proposition 2.2.6.</u> - Soit D un domaine borné, et soit $f \in G(D)$. Si ψ est une transformation infinitésimale de D et si le groupe à un paramètre associé est

$$(t,x) \longmapsto f_\psi(t,x)\ ,$$

alors

$$(t,x) \longmapsto f\left[f_\psi(t,f^{-1}(x))\right]$$

est un groupe à un paramètre d'automorphismes de D, et la transformation infinitésimale associée est $f.\psi$, où

$$f.\psi(x) = f'(f^{-1}(x)).\psi(f^{-1}(x))\ .$$

De plus, l'application

$$\begin{aligned} G(D) &\longrightarrow GL(\underline{G}(D)) \\ f &\longmapsto \{\Psi \longrightarrow f.\Psi\} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupe.

2.3. - Le plus grand groupuscule de Lie contenu dans G(D).

Nous allons construire maintenant le plus grand groupuscule de Lie G contenu dans G(D). Commençons par le

Théorème 2.3.1. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit $\underline{G}(D)^{\circ}$ l'algèbre de Lie opposée à $\underline{G}(D)$, et soit G le groupuscule de Lie associé à $\underline{G}(D)^{\circ}$. Alors, G agit à gauche sur D, et l'application

$$\begin{aligned} G \times D &\longrightarrow D \\ (g,x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

est analytique par rapport à l'ensemble des variables.

Démonstration. - $\underline{G}(D)^{\circ}$ est égale à $\underline{G}(D)$, munie du crochet $[x,y]^{\circ} = [y,x] = -[x,y]$. Soit G le groupuscule de Lie réel défini par $\underline{G}(D)^{\circ}$ (voir [5], chapitre 3, p. 168).

L'application qui, à un élément de $\underline{G}(D)^{\circ}$, associe le champ de vecteurs tangents à D qui lui correspond est une loi d'opération infinitésimale à gauche de $\underline{G}(D)^{\circ}$ dans D (au sens de Bourbaki [5], chapitre 3, p. 139).

D'après [5], chapitre 3, théorème 6, p. 182, on en déduit que tout point $x_0 \in D$ possède un voisinage ouvert V tel qu'il existe un morceau de loi d'opération analytique à gauche de G dans V, tel que la loi infinitésimale associée soit la loi donnée.

Pour tout $g \in G$, l'application

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow D \\ x &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

se prolonge en un automorphisme analytique de D tout entier. On définit donc une application

$$\begin{aligned} G\times D &\longrightarrow D \\ (g,x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

qui est analytique sur un voisinage de $\{e\}\times D$ dans $G\times D$. (e désigne l'élément neutre de G).

Soit $(g_0,x_0) \in G\times D$. En écrivant

$$g.x = g_0.(g_0^{-1}.g).x \quad ,$$

on montre facilement que l'application

$$(g,x) \longmapsto g.x$$

est analytique au voisinage de (g_0,x_0). Elle est donc analytique sur $G\times D$ tout entier. Le théorème est démontré.

Pour continuer notre étude, nous avons besoin du lemme suivant.

<u>Lemme 2.3.2.</u> - Soit D un domaine borné, et soit B une boule complètement intérieure à D. Soient u et v deux nombres réels tels que $0 < u < 1 < v$. Alors il existe une constante $\gamma > 0$, telle que, pour tout $\Psi \in \underline{G}(D)$, tel que $\|\Psi\|_B < \gamma$, on ait

$$u \, \|f_\Psi(1,.)-\mathrm{id}\|_B \leqslant \|\Psi\|_B \leqslant v \, \|f_\Psi(1,.)-\mathrm{id}\|_B \, ,$$

(où f_Ψ désigne le groupe à un paramètre associé à Ψ).

Démonstration. - Choisissons une boule B_1 complètement intérieure à D, concentrique à B, de rayon r_1 strictement supérieur au rayon r de B. Soit α la constante > 0 dont l'existence est assurée par la proposition 1.3.2. On montre facilement l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que $\|\Psi\|_B < \gamma$ entraîne

$$\sup_{t \in [0,1]} \|f_\Psi(t,.)-id\|_{B_1} < \alpha .$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On peut appliquer les résultats de la proposition 1.3.2 à $f_\Psi(1/q,.)$. On trouve, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:

$$u \|f_\Psi (1,.)-id\|_B \leqslant \|q(f_\Psi(\tfrac{1}{q},.)-id)\|_B \leqslant v \|f_\Psi (1,.)-id\|_B.$$

On sait que, quand $q \to +\infty$, $q(f_\Psi(1/q,.)-id)$ converge vers Ψ uniformément sur B. Par passage à la limite, on trouve que, pour tout $\Psi \in \underline{G}(D)$ tel que $\|\Psi\|_B < \gamma$, on a :

$$u \|f_\Psi (1,.)-id\|_B \leqslant \|\Psi\|_B \leqslant v \|f_\Psi (1,.)-id\|_B,$$

et le lemme est démontré.

Théorème 2.2.3. - L'application

$$\begin{aligned} G \times D &\longrightarrow D \\ (g,x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

dont nous avons montré l'existence dans le théorème 2.3.1 définit un homomorphisme de groupuscule ρ de G dans le groupe G(D) des automorphismes analytiques de D. Quitte à restreindre G, ρ est un homéomorphisme de G sur son image $\rho(G)$.

Nous identifierons G avec son image $\rho(G)$, et nous dirons que G est le plus grand groupuscule de Lie contenu dans G(D).

Démonstration. - Soit B une boule complètement intérieure à D. Un système fondamental de voisinages de l'élément neutre e dans G est constitué par les images par l'application exponentielle des $U_{\varepsilon} = \{ \Psi \in \underline{G}(D) \mid \|\Psi\|_B < \varepsilon \}$ ($\varepsilon > 0$). L'inégalité que nous avons démontrée dans le lemme précédent prouve que le noyau de ρ est un sous-groupuscule discret. Quitte à restreindre G, on peut supposer que ρ est injective. L'inégalité démontrée dans le lemme montre justement que ρ et ρ^{-1} sont continues au point $\{id\}$. Elles sont donc continues partout. Le théorème est démontré.

<u>Proposition 2.3.4.</u> - Soit H(D) le sous-groupe de G(D) engendré par le plus grand groupuscule de Lie G contenu dans G(D). On peut munir H(D) d'une structure de groupe de Lie telle que une base des voisinages de l'identité dans H(D) soit égale à une base des voisinages de l'identité dans G et que l'application

$$\begin{aligned} H(D)\times D &\longrightarrow D \\ (g,x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

soit analytique. La topologie sous-jacente de H(D) est plus fine (au sens large) que la topologie induite par G(D).

<u>Démonstration.</u> - On vérifie facilement que, si $\underline{B}$ est le filtre sur H(D) défini par le filtre des voisinages de l'identité dans G, $\underline{B}$ vérifie les conditions (GV I), (GV II) et (GV III) de [3], chapitre 3. Il existe donc une structure de groupe topologique sur H(D), telle que $\underline{B}$ soit le filtre des voisinages de l'identité dans H(D).

D'autre part, pour tout $g_0 \in H(D)$, l'application

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_{g_o}} & H(D) \\ g & \longmapsto & g_o . g \end{array} .$$

est un homéomorphisme de G sur son image. On vérifie que les φ_{g_o} forment un atlas analytique de H(D), que H(D) a bien une structure de groupe de Lie, et que l'application

$$H(D) \times D \longrightarrow D$$

est analytique. Par la définition même de la nouvelle topologie, l'application $H(D) \longrightarrow G(D)$ est continue, ce qui prouve que la topologie sous-jacente à la structure de groupe de Lie de H(D) est plus fine (au sens large) que la topologie induite par G(D).

On en déduit la

<u>Proposition 2.3.5.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le plus grand groupuscule de Lie G contenu dans G(D) contient un voisinage de l'identité dans G(D) ;

(ii) Le groupe G(D) peut être muni d'une structure de groupe de Lie compatible avec sa topologie telle que l'application

$$\begin{array}{ccc} G(D) \times D & \longrightarrow & D \\ (g,x) & \longmapsto & g.x \end{array}$$

soit analytique par rapport à l'ensemble des variables.

Rappelons le théorème suivant, dû à H. Cartan.

<u>Théorème 2.3.6.</u> ([9], p. 50). - Soit E un espace de Banach

complexe <u>de dimension finie</u>. Soit D un domaine borné de E. Alors le groupe G(D) peut être muni d'une structure de groupe de Lie réel de dimension finie compatible avec sa topologie, telle que l'application

$$\begin{aligned} G(D)\times D &\longrightarrow D \\ (g,x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

soit analytique par rapport à l'ensemble des variables.

La démonstration consiste à montrer que le plus grand groupuscule de Lie contenu dans G(D) contient un voisinage de l'identité dans G(D).

En dimension infinie, les choses ne sont pas aussi simples, ainsi que le montreront les exemples que nous allons traiter.

<u>2.4. - Deux exemples.</u>

Nous allons commencer par montrer quelques résultats préliminaires.

<u>Définition 2.4.1.</u> - Soit D un domaine d'un espace de Banach complexe E. On dit que D est cerclé si l'origine O appartient à D, et si, pour tout point x_0 de D, pour tout nombre réel θ, $x_0\, e^{i\theta} \in D$.

<u>Théorème 2.4.2.</u> - Soit D un domaine borné cerclé. Soit f un automorphisme de D laissant l'origine O invariante. Alors f est linéaire.

Pour la démonstration, voir [7], théorème VI, p. 30.

<u>Définition 2.4.3.</u> - On dit qu'un ouvert connexe Ω d'un espace de Banach E est un polyèdre analytique généralisé s'il existe une famille (éventuellement infinie) de fonctions analytiques $(g_i)_{i \in I}$ de E dans $\mathbb{C}$, telles que

$$\Omega = \{x \in E \mid |g_i(x)| < 1, \forall i \in I\}.$$

On déduit du théorème de Hahn-Banach que la boule-unité ouverte d'un espace de Banach est un polyèdre analytique généralisé.

<u>Lemme 2.4.4.</u> - Soit E un espace de Banach complexe de dimension $\geqslant 2$. Soit Ω un polyèdre analytique généralisé borné de E, et soit A un sous-ensemble de Ω, fermé dans E, et tel que $\Omega - A$ soit connexe. Alors $G(\Omega - A)$ s'identifie au sous-groupe des éléments $f \in G(\Omega)$, tels que $f(A) = A$.

<u>Démonstration.</u> - Si $f \in G(\Omega)$ est tel que $f(A) = A$, alors $f_{|\Omega - A}$ est un automorphisme de $\Omega - A$.

Réciproquement, soit $f \in G(\Omega - A)$. Un théorème de prolongement analytique (voir [27], théorème II.1.1.10, p. 27) montre que f se prolonge en une fonction analytique

$$\tilde{f} : \Omega \longrightarrow E.$$

Montrons que $\tilde{f}$ envoie Ω dans Ω. Soit $(g_i)_{i \in I}$ la famille des fonctions analytiques sur E qui définit le polyèdre analytique généralisé Ω, et considérons

$$g_i \circ \tilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Il nous faut montrer que, pour tout $x \in \Omega$, $|g_i \circ \tilde{f}(x)| < 1$. Faisons la démonstration par l'absurde : supposons qu'il existe un élément $x_o \in A$ tel que $g_i \circ \tilde{f}(x_o) = a_o$, avec $|a_o| \geqslant 1$. On considère alors la fonction analytique

$$\varphi(x) = \frac{1}{g_i \circ f(x) - a_o}$$

qui est une fonction analytique définie sur $\Omega - A$. D'après le théorème de prolongement analytique déjà cité, elle se prolonge en une application analytique $\tilde{\varphi}$ de Ω dans $\mathbb{C}$. L'unicité du prolongement analytique donne la contradiction. Donc, pour tout $x \in \Omega$, $|g_i \circ \tilde{f}(x)| < 1$. L'application $\tilde{f}$ envoie Ω dans Ω. L'inverse de $\tilde{f}$ est donné par le prolongement $\tilde{g}$ de $g = f^{-1}$, et on vérifie que $\tilde{f}(A) = A$.

<u>Lemme 2.4.5.</u> - Soit B la boule-unité ouverte d'un espace de Hilbert E, et soit $f \in G(B)$. S'il existe deux points distincts x_1 et x_2 de B, appartenant à un sous-espace vectoriel V de dimension 1, tels que $f(x_1)$ et $f(x_2)$ appartiennent à un même sous-espace vectoriel V' de dimension 1, f transforme $V \cap B$ en $V' \cap B$.

<u>Démonstration.</u> - On sait d'après [21], [18] et [28] que les automorphismes analytiques de B sont de la forme

$$f(x) = (Cx+D)^{-1}.(Ax+B),$$

avec $A \in \underline{L}(E)$, $B \in E$, $C \in \underline{L}(E,\mathbb{C})$, $D \in \mathbb{C}$. De plus, A, B, C, D sont astreints à vérifier un certain nombre de conditions que nous n'expliciterons pas. Soit e un générateur de V. On a : $x_1 = \lambda_1 e$, $x_2 = \lambda_2 e$. Du fait que $\lambda_1 A(e)+B$ et $\lambda_2 A(e)+B$ appartiennent à V', on déduit que A(e) et B appartiennent à V', et par suite, $f(V \cap B) \subset V'$.

Exemple 1. - Supposons E hilbertien, somme directe hilbertienne de sous-espaces vectoriels V_n de dimension 1. Soit $A_n \subset V_n$ un sous-ensemble fini ayant au moins deux éléments, formé d'éléments de norme 1/2. Soit $A = \bigcup A_n$. Il est clair que A vérifie les hypothèses du lemme 2.4.4. Tout automorphisme f de B tel que $f(A) = A$, assez voisin de la transformation identique, laisse stable chaque A_n, donc, d'après le lemme 2.4.5, laisse stable chaque $V_n \cap B$, et par suite laisse fixe l'origine O. D'après le théorème 2.4.2, f est linéaire, et sa restriction à chaque $V_n \cap B$ est d'ordre fini.

En utilisant ces résultats, nous allons construire un domaine borné D_1 tel que $G(D_1)$ soit totalement discontinu non discret.

Soit E un espace de Hilbert séparable, et soit $(e_n)_{n \geqslant 2}$ une base hilbertienne de E ; notons V_n le sous-espace vectoriel engendré par e_n. Soit, pour tout $n \geqslant 2$, $A_n \subset V_n$ l'ensemble des points de la forme

$$\frac{1}{2} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) e_n \text{ , avec } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Soient $A = \bigcup A_n$ et $D_1 = B - A$.

Proposition 2.4.6. - Soit H le sous-groupe du groupe unitaire de E formé des automorphismes σ_k [où $k = (k_n)_{n \geqslant 2}$, avec $0 \leqslant k_n \leqslant n-1$], et où σ_k est défini par

$$\sigma_k(e_n) = \exp\left(\frac{2ik_n\pi}{n}\right) e_n .$$

H est un sous-groupe de $G(D_1)$, et H contient un voisinage V de la transformation identique dans $G(D_1)$.

Démonstration. - On a vu que toute transformation $\sigma \in G(D_1)$ assez proche de la transformation identique laisse stable chaque $V_n \cap B$, et est linéaire ; donc

$$\sigma(e_n) = \lambda e_n, \text{ avec } |\lambda| = 1.$$

Du fait que σ laisse stable A_n, on déduit que

$$\lambda = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),$$

ce qui démontre la proposition.

On en déduit le

Théorème 2.4.7. - L'algèbre de Lie $\underline{G}(D_1)$ est réduite à $\{0\}$. Le groupe $G(D_1)$ est totalement discontinu non discret. En particulier, ce n'est pas un groupe de Lie.

Exemple 2. - Soit E un espace de Hilbert séparable, et soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E. Soit B la boule-unité ouverte de E, et soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un point de B. Supposons de plus que $a_o = a_1 = 0$, et que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n \neq 0$.

Soit S l'image de $\mathbb{R}$ par l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ \varphi &\longmapsto \left(a_n \exp\left(\frac{2i\pi\varphi}{n!}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}} . \end{aligned}$$

Soient aussi M_o et M'_o deux points distincts de B contenus dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V_o engendré par e_o, M_1 et M'_1 deux points distincts de B contenus dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V_1 engendré par e_1. Enfin, soient $A = \overline{S} \cup M_o \cup M'_o \cup M_1 \cup M'_1$ et $D_2 = B - A$.

On montre facilement que A vérifie les hypothèses du lemme 2.4.4. Le groupe $G(D_2)$ s'identifie au sous-groupe des $f \in G(B)$ tels que $f(A) = A$. Les automorphismes de D_2 suffisamment proches de la transformation identique laissent fixes les points M_o, M'_o, M_1, M'_1. Ceci entraîne qu'ils laissent fixes $V_o \cap B$ et $V_1 \cap B$; par suite, ils laissent fixe l'origine O. Ils sont donc linéaires.

Considérons le groupe à un paramètre d'automorphismes linéaires de E

$$(\theta, x) \longmapsto \varphi(\theta, x) ,$$

où $\varphi(\theta,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_o, x_1, x_2 \exp(\frac{2i\theta\pi}{2!}), \ldots, x_n \exp(\frac{2i\theta\pi}{n!}), \ldots)$

On vérifie que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\theta,.)$ est un automorphisme de D_2.

Soit G le plus grand groupuscule de Lie contenu dans $G(D_2)$, et soit $H(D_2)$ le sous-groupe de $G(D_2)$ engendré par G. Soit $f_p = \varphi\,(p!,.) \in H(D_2)$. On a :

$$f_p((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_o, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1} \exp(\frac{2i\pi}{p+1}), \ldots,$$

$$x_n \exp(\frac{2i\pi}{(p+1)\ldots n}), \ldots) .$$

Il est clair que $f_p \longrightarrow \mathrm{id}$ quand $p \longrightarrow +\infty$. Montrons cependant que, pour p assez grand, f_p n'appartient pas au groupuscule de Lie G. En effet, si, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f_p appartenait au groupuscule de Lie G, on déduirait du lemme 2.3.2 que, pour tout p assez grand,

$$(\theta,x)\longmapsto \Psi_p(\theta,x) = (x_o,\dots,x_p,x_{p+1}\exp(\frac{2i\,\theta\pi}{p+1}),\dots,x_n\exp(\frac{2i\,\theta\,\pi}{(p+1)\dots n}),\dots)\ .$$

est un groupe à un paramètre d'automorphismes de D_2. On vérifie qu'il n'en est rien en montrant par exemple que $\Psi_p(1/2,A)$ n'est pas contenu dans A. Nous avons montré le

Théorème 2.4.8. - Le groupe $H(D_2)$, muni de la topologie de la convergence uniforme locale n'est pas un groupe de Lie. Ceci entraîne que la topologie pour laquelle $H(D_2)$ est un groupe de Lie est strictement plus fine que la topologie de la convergence uniforme locale. De plus, $G(D_2)$ n'est pas un groupe de Lie.

CHAPITRE III

Les domaines bornés symétriques.

Nous allons appliquer la théorie que nous avons développée dans les deux premiers chapitres aux domaines bornés symétriques. En dimension finie, E. Cartan [6] a étudié les domaines bornés symétriques, a montré qu'ils étaient homogènes et a classé les domaines bornés symétriques irréductibles en six classes.

Si D est un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe E, pour tout point a de D, nous noterons σ_a la symétrie par rapport au point a. Dans la première partie, nous montrerons que l'application $a \longmapsto \sigma_a$ est localement lipschitzienne, et par suite continue.

Dans la deuxième partie, nous étudierons l'algèbre de Lie d'un domaine borné symétrique D. Soit G le plus grand groupuscule de Lie contenu dans G(D), et soit H(D) le sous-groupe de G(D) engendré par G. Nous montrerons que D est homogène sous l'action de H(D). Nous en déduirons que l'application de $D \times D$ dans D

$$(a,x) \longmapsto \sigma_a(x)$$

est analytique par rapport à l'ensemble des variables, lorsque l'on munit le premier facteur de sa structure analytique réelle sous-jacente, et le deuxième facteur de sa structure analytique complexe. Enfin, nous étudierons l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$ suivant des idées de E. Cartan.

Ces résultats nous permettront dans la troisième partie de construire une carte locale de D au voisinage d'un point a de D, telle que, dans cette carte, les éléments du groupe d'isotropie du point a soient linéaires. Nous montrerons dans la quatrième partie que cette carte locale se prolonge en un isomorphisme de D sur un domaine borné cerclé étoilé, ce qui prouve en particulier que D est simplement connexe.

La cinquième partie sera consacrée à une caractérisation du groupe d'isotropie d'un point a de D. Enfin, dans la sixième partie, nous traiterons des exemples. Nous montrerons en particulier que, pour un bon nombre de domaines bornés symétriques, le groupe des automorphismes analytiques de D est un groupe de Lie, ce qui nous amène à conjecturer que, pour tout domaine borné symétrique D, G(D) est un groupe de Lie.

3.1. - Définitions et premières propriétés.

Proposition et définition 3.1.1. - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, et soit a un point de D. Soit σ un automorphisme analytique de D. On dit que σ est une symétrie par rapport au point a si σ vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(i) $\sigma^2 = \mathrm{id}$, et a est un point invariant isolé de σ;

(ii) $\sigma(a) = a$, et $\sigma'(a) = -\mathrm{id}$.

De plus, un tel automorphisme σ, s'il existe, est unique. On l'appelle la symétrie par rapport au point a, et on le note σ_a. On dit alors que D est symétrique par rapport au point a.

<u>Démonstration.</u> - Il est évident d'après le théorème 1.2.3 qu'un automorphisme σ vérifiant (ii), s'il existe, est unique. Il nous reste seulement à démontrer l'équivalence de (i) et (ii). Montrons d'abord (i)$\Longrightarrow$(ii).

Soit $\sigma \in G(D)$ vérifiant (i). Nous allons construire une carte g de D au voisinage du point a dans laquelle σ est linéaire. Soit g l'application de D dans E définie par

$$x \longmapsto y = g(x) = \frac{1}{2}\left[(x-a) + (\sigma'(a))^{-1}.(\sigma(x)-a)\right].$$

On a :

$$g'(a) = \frac{1}{2}(id + (\sigma'(a))^{-1} \circ \sigma'(a)) = id \; .$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de a dans D, et un voisinage V de 0 dans E, tels que g soit un isomorphisme de U sur V. Un calcul immédiat montre que σ, dans la carte définie par g, est une application linéaire égale à $\sigma'(a)$.[1]

Dans la carte g que nous venons de définir, σ est linéaire. Du fait que $\sigma^2 = \mathrm{id}$, on déduit l'existence de deux sous-espaces vectoriels fermés supplémentaires F et G de E, tels que

$$\sigma = \mathrm{id}_{|F} \oplus (-\mathrm{id})_{|G} .$$

Le fait que a est un point invariant isolé entraîne que $F = \{0\}$. Dans cette carte locale, $\sigma = -\mathrm{id}$, et par suite, $\sigma'(a) = -\mathrm{id}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Si $\sigma(a) = a$, et $\sigma'(a) = -\mathrm{id}$, on a :

---

(1) D'une manière plus générale, on peut démontrer le résultat suivant (d'après H. Cartan [7], p. 80) :

Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D, et soit G un sous-groupe du groupe d'isotropie $G_a(D)$ possédant une mesure de Haar de masse totale finie. Alors il existe une carte locale g de D au voisinage de a, telle que, dans la carte définie par g, les éléments de G soient linéaires.

En dimension finie, ce résultat permet de linéariser le groupe d'isotropie d'un point a de D. Il n'en est pas de même en dimension infinie, car le groupe d'isotropie d'un point a ne peut pas, en général, être muni d'une mesure de Haar de masse totale finie !

$\sigma^2(a) = a$, et $(\sigma^2)'(a) = (\sigma'(a))^2 = \mathrm{id}$. D'après la proposition 1.2.1, $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Il suffit alors de considérer une carte locale de D au voisinage de a dans laquelle σ est linéaire, pour vérifier que a est bien un point invariant isolé de σ.

<u>Définition 3.1.2.</u> - On dit qu'un domaine borné D est symétrique s'il est symétrique par rapport à tout point a de D.

<u>Définition 3.1.3.</u> - On dit qu'un domaine borné D est homogène si, pour tout couple de points (a,b) de D, il existe un automorphisme analytique f de D, tel que $f(a) = b$.

Dans [6], E. Cartan a, en utilisant la métrique de Bergmann, montré que tout domaine borné symétrique est homogène. Il est clair d'autre part que, si D est un domaine borné homogène d'un espace de Banach E, et si D est symétrique par rapport à un point a de D, alors D est symétrique. Enfin, déjà en dimension finie, il existe des domaines bornés homogènes non symétriques (voir par exemple [24], [25] p. 131 et suivantes, et [32]).

Nous allons démontrer que tout domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe est homogène. La démonstration donnée par E. Cartan [6] en dimension finie ne se généralise pas en dimension infinie, car nous ne possédons pas d'équivalent de la métrique de Bergmann. Aussi, nous donnerons une autre méthode de démonstration. Montrons d'abord le

<u>Théorème 3.1.4.</u> - Soit D un domaine borné symétrique. Soit a un point de D, et soit B une boule complètement intérieure à D. Alors il existe un voisinage U de a, et une constante K tels que, pour tout $b \in U$, pour tout $c \in U$, on ait

$$\|\sigma_b - \sigma_c\|_B \leqslant K \|b - c\| .$$

On en déduit que l'application

$$\begin{array}{l} D \longrightarrow G(D) \\ b \longmapsto \sigma_b \end{array}$$

est continue.

<u>Démonstration.</u> - Soit B_1 une boule de centre a complètement intérieure à D. D'après le lemme 1.1.7, il existe une constante K_1 telle que tout automorphisme $f \in G(D)$ soit K_1-lipschitzien sur B_1. De même, il existe une constante K_2 telle que, pour tout automorphisme $f \in G(D)$, f' soit K_2-lipschitzien sur B_1.

Soient b et c deux points de B_1. Etudions $\|\sigma_b(c) - \sigma_c(c)\|$.

$$\begin{aligned} \|\sigma_b(c) - \sigma_c(c)\| &\leqslant \|\sigma_b(c) - \sigma_b(b)\| + \|\sigma_b(b) - \sigma_c(c)\| \\ &\leqslant K_1 \|c-b\| + \|b-c\| \leqslant (K_1+1) \|b-c\| . \end{aligned}$$

Etudions de même $\|\sigma_b'(c) - \sigma_c'(c)\|$. On sait que $\sigma_c'(c) = -\mathrm{id}$, $\sigma_b'(b) = -\mathrm{id}$. On a donc :

$$\|\sigma_b'(c) - \sigma_c'(c)\| = \|\sigma_b'(c) - \sigma_b'(b)\| \leqslant K_2 \|c-b\| .$$

On trouve finalement que, pour tout $b \in B_1$, pour tout $c \in B_1$, on a :

$$\sup(\|\sigma_b(c) - \sigma_c(c)\|, \|\sigma_b'(c) - \sigma_c'(c)\|) \leqslant \sup((K_1+1), K_2) \|b-c\| .$$

Soit A un voisinage convexe du point a, complètement intérieur à D. D'après les inégalités écrites ci-dessus, il existe un voisinage U_1 de a, tel que, pour tout $b \in U_1$, σ_b appartienne à $G_{a.A}(D)$. Soit U_2 le voisinage ouvert de a dont l'existence est assurée par le théorème 1.3.11, et soit $U = U_1 \cap U_2 \cap B_1$. Alors, d'après le théorème 1.3.11, il existe une constante K_3 telle que, pour tout $b \in U$, pour tout $c \in U$, on ait

$$\|\sigma_b - \sigma_c\|_B \leqslant K_3 \sup(\|\sigma_b(c) - \sigma_c(c)\|, \|\sigma_b'(c) - \sigma_c'(c)\|)$$

$$\leqslant K_3 \sup((K_1+1), K_2) \|b-c\| .$$

Ceci prouve le théorème.

<u>Proposition 3.1.5.</u> - Soit D un domaine borné symétrique, et soit a un point de D. Alors l'application φ_a

$$\begin{array}{l} D \longrightarrow D \\ b \longmapsto \sigma_b(a) \end{array}$$

est différentiable au point a et a pour dérivée 2 id.

<u>Démonstration.</u> - On peut supposer que a est l'origine O de E. Pour montrer que φ_0 est différentiable en 0 et a pour dérivée 2 id, il nous faut démontrer que

$$\frac{\|\sigma_b(0) - \sigma_0(0) - 2b\|}{\|b\|} = \frac{\|\sigma_b(0) - 2b\|}{\|b\|}$$

tend vers 0, quand b tend vers 0, $b \neq 0$.

Choisissons une boule B de centre 0, complètement intérieure à D. Soit $b \in B$. Appliquons la formule de Taylor à σ_b au point b. On obtient

$$\|\sigma_b(0) - b - (-\text{ id}).(-b)\| \leqslant \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_b\right\|_B \|b\|^2 .$$

D'après le lemme 1.1.7, il existe une constante M telle que, pour tout automorphisme f de D, $\|f^{(2)}\|_B \leqslant M$. On en déduit :

$$\|\sigma_b(0) - 2b\| \leqslant M \|b\|^2 ,$$

ce qui montre que φ_0 est différentiable à l'origine O et a pour dérivée 2 id.

3.2. - L'algèbre de Lie des transformations infinitésimales d'un domaine borné symétrique.

Un calcul un peu fastidieux permettrait de montrer que l'application φ_0 que nous avons définie au paragraphe précédent est strictement différentiable au point O. D'après une forme faible du théorème d'inversion locale (voir [13], proposition 4.3.1, p. 57), il existe donc deux voisinages U et V de O dans D tels que φ_0

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow V \\ b &\longmapsto \sigma_b(0) \end{aligned}$$

soit un homéomorphisme de U sur V. On en déduit par un raisonnement de connexité que tout domaine borné symétrique est homogène.

Nous ne détaillerons pas davantage cette méthode de démonstration, car nous allons étudier dans ce paragraphe l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales d'un domaine borné symétrique D, et cela nous donnera le résultat plus précis que voici : si H(D) désigne le groupe engendré par le plus grand groupuscule de Lie G contenu dans G(D), D est homogène sous l'action de H(D).

<u>Proposition 3.2.1.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Supposons que l'origine O appartienne à D, et que D soit symétrique par rapport au point O. La symétrie σ_0 agit par automorphisme intérieur sur l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$. On en déduit une décomposition directe

$$\underline{G}(D) = \underline{G}(D)^+ \oplus \underline{G}(D)^- \quad ,$$

où

$$\underline{G}(D)^+ = \{\Psi \in \underline{G}(D) \mid \sigma_0 . \Psi = \Psi\},$$

$$\underline{G}(D)^- = \{\Psi \in \underline{G}(D) \mid \sigma_0 . \Psi = -\Psi\}.$$

Si on considère une carte locale de D au voisinage de O dans laquelle σ_0 est linéaire, on a :

$$\underline{G}(D)^+ = \{\Psi \in \underline{G}(D) \mid \Psi \text{ est une fonction impaire de } x\}$$

$$= \{\Psi \in \underline{G}(D) \mid \Psi(0) = 0\} \; ;$$

$$\underline{G}(D)^- = \{\Psi \in \underline{G}(D) \mid \Psi \text{ est une fonction paire de } x\}$$

$$= \{\Psi \in \underline{G}(D) \mid \Psi'(0) = 0\} \, .$$

De plus, l'application

$$\begin{aligned} \underline{G}(D)^- &\longrightarrow E \\ \Psi &\longmapsto \Psi(0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach <u>réels</u> de $\underline{G}(D)^-$ sur son image.

Enfin, on déduit des règles de calcul du crochet les inclusions suivantes :

$$[\underline{G}(D)^+, \underline{G}(D)^+] \subset \underline{G}(D)^+ \; ,$$

$$[\underline{G}(D)^-,\underline{G}(D)^-]\subset\underline{G}(D)^+ \quad ,$$

$$[\underline{G}(D)^+,\underline{G}(D)^-]\subset\underline{G}(D)^- \quad .$$

<u>Démonstration.</u> - La symétrie σ_0 agit sur $\underline{G}(D)$ par automorphisme intérieur, et comme $\sigma_0{}^2 = \mathrm{id}$, σ_0 définit un automorphisme involutif de $\underline{G}(D)$. On en déduit la décomposition annoncée.

Considérons une carte locale de D au voisinage de 0 dans laquelle σ_0 est linéaire égal à -id. Dans cette carte, on a :

$$[\sigma_0 . \Psi](x) = -\Psi(-x).$$

Compte tenu du fait qu'un élément $\Psi\in\underline{G}(D)$ est caractérisé par sa valeur en 0 et celle de sa dérivée en 0, on en déduit que

$$\underline{G}(D)^+ = \{\Psi\in\underline{G}(D) \mid \Psi(0) = 0\} ,$$

$$\underline{G}(D)^- = \{\Psi\in\underline{G}(D) \mid \Psi'(0) = 0\} ,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

<u>Définition 3.2.2.</u> - Suivant la terminologie de E. Cartan [6], nous appellerons les éléments de $\underline{G}(D)^+$ les rotations infinitésimales, et les éléments de $\underline{G}(D)^-$ les transvections infinitésimales.

<u>Proposition 3.2.3.</u> - Soit D un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe E. Supposons que l'origine 0 appartienne à D. Alors l'application

$$\begin{aligned} \underline{G}(D)^- &\longrightarrow E \\ \Psi &\longmapsto \Psi(0) \end{aligned}$$

définie dans la proposition 3.2.1 est un isomorphisme d'espaces de Banach <u>réels</u> de $\underline{G}(D)^-$ sur E.

<u>Démonstration.</u> - Il suffit de montrer que, pour tout $b \in E$, il existe $\Psi \in G(D)^-$, tel que $\Psi(0) = b$. Considérons

$$f_k = \sigma_{\frac{b}{2^k}} \circ \sigma_0 \quad ;$$

$f_k \longrightarrow id$ quand $k \longrightarrow +\infty$. Soit

$$\Psi_k = 2^{k-1}\,(f_k - id).$$

On a :

$$\begin{aligned}\Psi_k(0) &= 2^{k-1}\,(\sigma_{\frac{b}{2^k}} \circ \sigma_0(0) - 0)\\ &= 2^{k-1}\;\sigma_{\frac{b}{2^k}}(0)\ .\end{aligned}$$

On sait d'après la proposition 3.1.5 que l'application

$$b \longmapsto \sigma_b(0)$$

est dérivable en 0 et a pour dérivée 2 id. Donc $\Psi_k(0)$ tend vers b, quand $k \longrightarrow +\infty$.

Pour continuer ce calcul, on se place dans une carte locale de D au voisinage de 0 dans laquelle σ_0 est linéaire. On va maintenant montrer que $\Psi_k'(0)$ tend vers 0. Soit B une boule de centre 0 complètement intérieure à D. D'après la formule de Taylor appliquée à $\frac{\partial}{\partial x}\;\sigma_{\frac{b}{2^k}}$ au point 0, on a :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{\frac{b}{2^k}}\left(\frac{b}{2^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{\frac{b}{2^k}}(0) - \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{\frac{b}{2^k}}(0)\right].\left(\frac{b}{2^k}\right) \right\|$$
$$\leqslant \frac{1}{2!}\left\| \frac{\partial^3}{\partial x^3}\sigma_{\frac{b}{2^k}} \right\|_B \left\| \frac{b}{2^k} \right\|^2 .$$

On sait d'après le lemme 1.1.7 que, pour tout $f \in G(D)$, il existe une constante M telle que $\|f^{(3)}\|_B \leqslant M$. On en déduit :

$$\left\| (-id) - \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{\frac{b}{2^k}}(0) - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{\frac{b}{2^k}}(0)\right].\left(\frac{b}{2^k}\right) \right\| \leqslant M \frac{\|b\|^2}{(2^k)^2} .$$

Or, $-\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{\frac{b}{2^k}}(0) = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{\frac{b}{2^k}} \circ \sigma_0)(0) = \frac{\partial}{\partial x} f_k(0)$. D'où, en multipliant par 2^k

$$\left\| 2\,\Psi_k'(0) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{\frac{b}{2^k}}(0).(b) \right\| \leqslant M \frac{\|b\|^2}{2^k} .$$

On va montrer que $\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_{\frac{b}{2^k}}(0) \right\|$ tend vers 0 quand $k \longrightarrow +\infty$, ce qui, compte tenu du théorème 2.2.4, achève la démonstration de la proposition. D'après le théorème 3.1.4, il existe un voisinage U de 0 dans D, et une constante K_1 tels que, pour tout point c de U, on ait

$$\|\sigma_c - \sigma_0\|_B \leqslant K_1 \|c\| .$$

On déduit des majorations de Cauchy qu'il existe une constante K_2 telle que

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_c(0) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_0(0) \right\| \leqslant K_2 \|\sigma_c - \sigma_0\|_B \leqslant K_1 K_2 \|c\| .$$

Comme dans la carte considérée, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma_0(0) = 0$, on en déduit que, quand $k \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_{\frac{b}{2^k}}(0)$ tend vers O.

Q.E.D.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème suivant.

<u>Théorème 3.2.4.</u> - Soit D un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe E. Soit a un point de D, et soit G le plus grand groupuscule de Lie contenu dans le groupe G(D) des automorphismes analytiques de D. Alors l'application orbitale

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{\ \rho(a)\ } D \\ g &\longmapsto g.a \end{aligned}$$

est au voisinage de l'identité une submersion directe.

<u>Démonstration.</u> - On peut supposer que a est l'origine O de E. L'application linéaire tangente à $\rho(0)$ au point $\{id\}$ est

$$\begin{aligned} \underline{G}(D) &\xrightarrow{\ T_{\{id\}}\rho(0)\ } E \\ \Psi &\longmapsto \Psi(0) \ . \end{aligned}$$

D'après les résultats que nous avons démontrés, $T_{\{id\}}\rho(0)$ est un épimorphisme direct. On en déduit que $\rho(0)$ est au voisinage de l'identité une submersion directe.

Q.E.D.

On déduit du théorème 3.2.4 les résultats suivants :

<u>Proposition 3.2.5.</u> - Soit D un domaine borné symétrique, et soit a un point de D. Soit G le plus grand groupuscule de Lie contenu dans G(D). Alors il existe un voisinage U de a dans D, et une application <u>analytique</u> F : $U \longrightarrow G$ (U étant muni de

sa structure analytique réelle sous-jacente) telle que

(i) $F(a) = \mathrm{id}$,

(ii) pour tout point b de U, $F(b).a = b$.

Un raisonnement de connexité permet alors de montrer le

Théorème 3.2.6. - Soit D un domaine borné symétrique. Soit G le plus grand groupuscule de Lie contenu dans $G(D)$, et soit $H(D)$ le sous-groupe de $G(D)$ engendré par G. Alors D est homogène sous l'action de $H(D)$. En particulier, D est homogène.

Théorème 3.2.7. - Soit D un domaine borné symétrique. Alors l'application

$$\begin{aligned} D\times D &\longrightarrow D \\ (a,x) &\longmapsto \sigma_a(x) \end{aligned}$$

est analytique, lorsque l'on munit le premier facteur de sa structure analytique réelle sous-jacente, et le deuxième facteur de sa structure analytique complexe.

Démonstration. - Soit a un point de D, et soit F l'application définie dans un voisinage U de a, à valeurs dans G dont l'existence est assurée par la proposition 3.2.5. Alors, on a pour tout $b \in U$,

$$\sigma_b = F(b)\circ \sigma_a \circ F(b)^{-1},$$

donc $\sigma_b(x)$ est une fonction analytique du couple (b,x).

Bien sûr, l'application $(a,x) \longmapsto \sigma_a(x)$ n'est pas une application holomorphe de $D\times D$ dans D. Ainsi, si D est le disque-unité ouvert dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\sigma_a(x) = \frac{-x + \frac{2a}{1+a\bar{a}}}{1 - \frac{2\bar{a}}{1+a\bar{a}}\, x}$$

ce qui n'est visiblement pas une application holomorphe de $D \times D$ dans D.

Le lemme 2.2.5 peut s'exprimer de la façon suivante :

Proposition 3.2.8. - Soit D un domaine borné quelconque. L'application

$$\begin{array}{ccc} \underline{G}(D) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \longrightarrow & \underline{H}(D,E) \\ f \otimes c & \longmapsto & c.f \end{array}$$

est injective, et est un isomorphisme sur son image.

Pour tout $\xi \in E$, nous noterons X_ξ l'unique élément de $\underline{G}(D)^-$ tel que $X_\xi(0) = \xi$. Considérons maintenant le complexifié $\underline{G}(D) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de $\underline{G}(D)$. Soit, pour tout $\xi \in E$,

$$Y_\xi = \frac{1}{2}(X_\xi - iX_{i\xi}) \quad , \quad Z_\xi = \frac{1}{2}(X_\xi + iX_{i\xi}).$$

On a évidemment $Y_\xi(0) = \xi$, $Z_\xi(0) = 0$.

On vérifie facilement que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \underline{G}(D)^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & Y_\xi \end{array}$$

est $\mathbb{C}$-linéaire ; c'est un isomorphisme de l'espace $\mathbb{C}$-vectoriel E sur son image $\underline{B}_1$; l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \underline{G}(D)^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & Z_\xi \end{array}$$

est un $\mathbb{C}$-antiisomorphisme de E sur son image $\underline{B}_2$, et on a la décomposition directe :

$$\underline{G}(D)^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \underline{B}_1 \oplus \underline{B}_2 \ .$$

On appelle les éléments de $\underline{G}(D)^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ les rotations infinitésimales imaginaires, et les éléments de $\underline{G}(D)^- \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ les transvections infinitésimales imaginaires.

<u>Lemme 3.2.9.</u> - a) Soit φ une rotation infinitésimale réelle (i. e. $\in \underline{G}(D)^+$). Alors, pour tout $\xi \in E$,

$$[X_\xi, \varphi] = X_{\varphi'(0).\,\xi} \ .$$

b) Soit $\varphi = \theta + i\Psi$ une rotation infinitésimale imaginaire. Alors

$$[Y_\xi, \varphi] = Y_{(\theta'(0) + i\,\Psi'(0)).\,\xi} \quad ,$$

$$[Z_\xi, \varphi] = Z_{(\theta'(0) - i\,\Psi'(0)).\,\xi} \quad .$$

<u>Démonstration.</u> - a) On a :

$$[X_\xi, \varphi] = \varphi'(x).X_\xi(x) - X_\xi'(x).\,\varphi(x).$$

On sait que $[X_\xi, \varphi]$ est une transvection infinitésimale réelle, elle est donc déterminée par $[X_\xi, \varphi](0)$. Or,

$$[X_\xi, \varphi](0) = \varphi'(0).\,\xi - 0 = \varphi'(0).\,\xi \ .$$

On a donc : $[X_\xi, \varphi] = X_{\varphi'(0).\,\xi}$.

b) se démontre facilement en écrivant la décomposition de Y_ξ (resp. Z_ξ), et en utilisant la $\mathbb{C}$-linéarité de Y_ξ (resp. $\mathbb{C}$-antilinéarité de Z_ξ).

<u>Lemme 3.2.10.</u> - Soit $\varphi = \psi + i\theta \in \underline{G}(D)^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ telle que $\varphi'(0) = 0$. Alors $\varphi \equiv \psi \equiv \theta \equiv 0$.

<u>Démonstration.</u> - On sait déjà que $\psi(0) = \theta(0) = 0$. Il suffit donc d'après le théorème 2.2.2 de montrer que $\psi'(0)$, et par suite $\theta'(0)$ sont nuls.

On déduit du théorème 2.2.2 que l'application

$$\begin{array}{ccc} \underline{G}(D)^+ & \longrightarrow & \underline{L}(E,E) \\ \eta & \longmapsto & \eta'(0) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\underline{G}(D)^+$ sur son image. Supposons que $\psi'(0)$ soit différent de 0. On a alors $\psi'(0) = -i\,\theta'(0) \neq 0$. Si on considère l'application

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \hookrightarrow & \underline{L}(E,E) & \xrightarrow{\exp} & \underline{L}(E,E) \\ c & \longmapsto & c\,\psi'(0) & \longmapsto & \exp(c\,\psi'(0)) \end{array},$$

on obtient une application entière non constante de $\mathbb{C}$ dans $\underline{L}(E,E)$, elle ne peut pas être bornée. Cependant, son image est contenue dans l'image de l'application

$$\begin{array}{ccc} G(D) & \longrightarrow & \underline{L}(E,E) \\ f & \longmapsto & f'(0) \end{array},$$

et ceci est en contradiction avec les majorations de Cauchy pour la dérivée en 0 de tout automorphisme de D.

<u>Proposition 3.2.11.</u> - Pour tout $\xi \in E$, pour tout $\eta \in E$, les crochets $[Y_\xi, Y_\eta]$ et $[Z_\xi, Z_\eta]$ sont identiquement nuls.

<u>Démonstration</u> (d'après [6]). - Faisons la démonstration

pour $[Y_\xi, Y_\eta]$. Il ressort des calculs précédents que $[Y_\xi, Y_\eta]$ est une rotation infinitésimale imaginaire ($\Psi + i\,\theta$). Soit $Z_\zeta \in \underline{B}_2$. On a vu que $[[Y_\xi, Y_\eta], Z_\zeta] \in \underline{B}_2$.

D'après l'identité de Jacobi, on a :

$$[[Y_\xi, Y_\eta], Z_\zeta] = [Y_\xi, [Y_\eta, Z_\zeta]] - [Y_\eta, [Y_\xi, Z_\zeta]] .$$

On voit que les deux termes du second facteur appartiennent à $\underline{B}_1$. Donc, pour tout $\zeta \in E$,

$$[[Y_\xi, Y_\eta], Z_\zeta] = 0.$$

Mais on sait que $[Y_\xi, Y_\eta]$ est une rotation infinitésimale ($\Psi + i\,\theta$), et on a, pour tout $\zeta \in E$

$$[[Y_\xi, Y_\eta], Z_\zeta] = [\Psi + i\,\theta, Z_\zeta] = Z_{(\Psi'(0) - i\,\theta'(0)).\zeta} = 0 .$$

On en déduit :

$$\Psi'(0) - i\,\theta'(0) = 0 ,$$

et d'après le lemme 3.2.10, cela entraîne que $\Psi \equiv \theta \equiv 0$. On a donc démontré que, pour tout $\xi \in E$, pour tout $\eta \in E$, $[Y_\xi, Y_\eta] = 0$.

Une démonstration semblable montrerait que, pour tout $\xi \in E$, pour tout $\eta \in E$, $[Z_\xi, Z_\eta] = 0$.

3.3. - Construction d'une carte locale de D au voisinage de O dans laquelle les éléments de $G_0(D)$ sont linéaires.

(Rappelons que $G_0(D)$ désigne le sous-groupe des éléments de $G(D)$ laissant fixe $0 \in D$).

On suppose comme au paragraphe précédent que D est un domaine borné symétrique, et que l'origine O appartient à D. Considérons l'application

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{\varphi} \underline{L}(E,E) \\ x &\longmapsto \{\xi \longmapsto Y_\xi(x)\} \ . \end{aligned}$$

φ est une application $\mathbb{C}$-analytique de D dans $\underline{L}(E,E)$, et on a $\varphi(0) = \mathrm{id}$. Par suite, il existe un voisinage V de O dans D, tel que, pour tout $x \in V$, $\varphi(x)$ appartienne à Isom(E). Soit θ l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Isom}(E) &\longrightarrow \mathrm{Isom}(E) \\ u &\longmapsto u^{-1} \ , \end{aligned}$$

et considérons l'application

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathrm{Isom}(E) \\ x &\longmapsto \theta \circ \varphi(x) \ . \end{aligned}$$

L'application $\Psi = \theta \circ \varphi$ est une application de V dans $\underline{L}(E,E)$, on peut la considérer comme une forme différentielle sur V.

<u>Proposition 3.3.1.</u> - Ψ est une forme différentielle fermée (i. e. $d\Psi = 0$).

<u>Démonstration.</u> - D'après [14], proposition 2.3.1, p. 25, il suffit de démontrer que l'application bilinéaire

$$(h_1,h_2) \longmapsto (\psi'(x).h_1).h_2 \qquad (h_1,h_2 \in E)$$

est symétrique.

Calculons d'abord $\varphi'(x) \in \underline{L}(E,\underline{L}(E,E))$. On a :

$$\varphi'(x).h = \{\xi \longmapsto Y_\xi'(x).h\} .$$

On sait d'autre part que

$$\theta'(u).K = -u^{-1} \circ K \circ u^{-1} \qquad (K \in \underline{L}(E,E)) .$$

En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées, on trouve :

$$\psi'(x) = \theta'(\varphi(x)) \circ \varphi'(x) \in \underline{L}(E,\underline{L}(E,E)) ,$$

$$\psi'(x).h = \theta'(\varphi(x)) \circ (\varphi'(x).h) ,$$

$$\psi'(x).h = \{\xi \longmapsto -(\varphi(x))^{-1}.[(Y_{\varphi(x)^{-1}.\xi})'(x).h]\} ,$$

et il nous faut montrer que l'application bilinéaire

$$(h,\xi) \longmapsto -(\varphi(x))^{-1}.[(Y_{\varphi(x)^{-1}.\xi})'(x).h]$$

est symétrique.

Il suffit bien sûr de montrer que l'application bilinéaire

$$(h,\xi) \longmapsto (Y_{\varphi(x)^{-1}.\xi})'(x).h$$

est symétrique. Quitte à multiplier h et ξ par $\varphi(x)$, il suffit de vérifier que l'application bilinéaire

$$(h,\xi) \longmapsto Y_\xi'(x).(\varphi(x).h) = Y_\xi'(x).Y_h(x)$$

est symétrique.

On sait d'après la proposition 3.2.11 que le crochet

$$[Y_\xi, Y_h](x) = Y_h'(x).Y_\xi(x) - Y_\xi'(x).Y_h(x)$$

est identiquement nul, ce qui montre que l'application bilinéaire considérée ci-dessus est symétrique, et la proposition est démontrée.

<u>Théorème 3.3.2.</u> - Il existe une carte locale f d'un voisinage V de O dans D sur un voisinage U de O dans D, telle que $f(0) = 0$, qui jouit de la propriété suivante :

(C) dans cette carte, le champ Y_ξ est un champ constant égal à ξ, quel que soit $\xi \in E$.

Dans une telle carte, les automorphismes de D appartenant au groupe d'isotropie de O sont linéaires, les rotations infinitésimales sont linéaires, et $Z_\xi(y)$ est un polynôme homogène de degré 2 en y, pour tout $\xi \in E$.

(Remarque : on montrerait facilement qu'une telle carte locale est unique à un automorphisme linéaire près).

<u>Démonstration.</u> - Du fait que $d\Psi = 0$, le théorème de Poincaré (voir par exemple [14], théorème 2.12.1, p. 39) dit qu'il existe une application holomorphe f définie dans un voisinage V_o de O dans D à valeurs dans E, telle que $f(0) = 0$, et $df = \Psi$. On a donc

$$df(0) = \Psi(0) = \mathrm{id}.$$

Le théorème d'inversion locale assure alors que f est une carte locale de D au voisinage de O. De plus, la relation $df = \Psi$ se traduit par $f'(x).Y_\xi(x) = \xi$, ce qui prouve (C).

Soit g un automorphisme de D appartenant au groupe d'isotropie du point O. On a

$$g.Y_{\xi} = Y_{\eta} ,$$

ce qui donne

$$g'(g^{-1}(y)).\xi = \eta ,$$

ce qui prouve que, dans la carte définie par f, g' est une application constante. Par suite, g est linéaire. On en déduit immédiatement que toute rotation infinitésimale (réelle ou imaginaire) est linéaire.

La transvection infinitésimale $Z_{\xi}(y)$ admet au voisinage de O un développement en série $\sum_{n \geqslant 2} P_n(y)$, où P_n est un polynôme homogène de degré n. Calculons le crochet

$$[Y_{\eta}, Z_{\xi}](y) = Z_{\xi}'(y).\eta - 0 = Z_{\xi}'(y).\eta .$$

Pour tout η , ce crochet est une rotation infinitésimale imaginaire ; c'est donc une fonction linéaire de y, et cela entraîne que $Z_{\xi}(y)$ est un polynôme homogène du second degré.

Q.E.D.

Nous noterons souvent $Z(\xi, x, y)$ la fonction trilinéaire associée, $\mathbb{C}$-linéaire symétrique en x et y, $\mathbb{C}$-antilinéaire en ξ .

Nous aurons également besoin du

Lemme 3.3.3. - Pour tout élément ξ de E non nul, on a $[X_\xi, X_{i\xi}] \not\equiv 0$.

Démonstration. - Faisons la démonstration par l'absurde. Supposons que le crochet $[X_\xi, X_{i\xi}] \equiv 0$. Cela entraîne que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow G(D) \\ (t_1,t_2) &\longmapsto \varphi(t_1,t_2) = f_{X_\xi}(t_1,.)\circ f_{X_{i\xi}}(t_2,.) \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupe.

Calculons le crochet $[X_\xi, X_{i\xi}]$ dans la carte f. On trouve :

$$\begin{aligned} [X_\xi, X_{i\xi}] &= [\xi + Z(\xi,y,y), i\xi - iZ(\xi,y,y)] \\ &= -4i\, Z(\xi,\xi,y) , \end{aligned}$$

et par suite, on a pour tout $y \in E$, $Z(\xi,\xi,y) = 0$, et en particulier, $Z(\xi,\xi,\xi) = 0$. En intégrant les équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = X_\xi(x) \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = X_{i\xi}(x)$$

dans la carte définie par f, on trouve alors

$$\varphi(t_1,t_2).0 = (t_1+it_2).\,\xi .$$

Ceci montre que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow D \\ (t_1+it_2) &\longmapsto \varphi(t_1,t_2).0 \end{aligned}$$

est holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. On en déduit qu'elle est holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier en écrivant :

$$\varphi(t_1^0+h_1, t_2^0+h_2) = \varphi(t_1^0,t_2^0)\circ\varphi(h_1,h_2) .$$

On trouverait ainsi une fonction entière bornée non constante. C'est impossible d'après le théorème de Liouville. Le lemme est démontré .

3.4. - Prolongement de la carte f.

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant.

Théorème 3.4.1. - Soit D un domaine borné symétrique. La carte locale f de D au voisinage de O, dont nous avons montré l'existence dans le théorème 3.3.2, se prolonge en un isomorphisme F de D sur un domaine borné cerclé étoilé. Par suite, D est contractile et simplement connexe.

Soit D un domaine borné symétrique. Supposons que l'origine O appartienne à D, et soit

$$f : V \longrightarrow U$$

la carte locale dont l'existence est assurée par le théorème 3.3.2. Quitte à restreindre U, on peut supposer que U est une boule de centre O contenue dans E. Soit σ_θ le groupe à un paramètre d'automorphismes de V défini par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times V &\longrightarrow V \\ (\theta,x) &\longmapsto f^{-1}(e^{i\theta} f(x)) \ . \end{aligned}$$

Le prolongement du groupe à un paramètre σ_θ sera la première étape de la démonstration du théorème 3.4.1. A cause de difficultés topologiques (on ne sait rien pour l'instant sur $\pi_1(D)$!), il n'est pas possible de prolonger directement σ_θ en un groupe à un paramètre d'automorphismes de D. Nous serons obligés de considérer le revêtement universel $\tilde{D}$ de D, et nous prolongerons le groupe à un paramètre σ_θ en un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\tilde{D}$. Montrons d'abord la proposition suivante.

Proposition 3.4.2. - Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, σ_θ définit un automorphisme de l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)$.

Démonstration. - Par automorphisme intérieur, σ_θ agit sur les champs de vecteurs tangents à V, et il nous faut montrer que, pour tout $\Psi \in \underline{G}(D)$, $\sigma_\theta . \Psi \in \underline{G}(D)$. Pour faire le calcul, plaçons-nous dans la carte f.

Si Ψ est une rotation infinitésimale, on a

$$(\sigma_\theta . \Psi)(y) = e^{i\theta}\Psi(y\, e^{-i\theta}) = \Psi(y),$$

car Ψ est linéaire, ce qui prouve que $\sigma_\theta . \Psi \in \underline{G}(D)$. Si Ψ est une transvection infinitésimale, que l'on peut écrire sous la forme

$$\Psi = X_\xi = \xi + Z(\xi, y, y),$$

on a :

$$(\sigma_\theta . X_\xi)(y) = e^{i\theta}(\xi + Z(\xi, y\, e^{-i\theta}, y\, e^{-i\theta}))$$
$$= e^{i\theta}(\xi + e^{-2i\theta} Z(\xi, y, y)),$$

ce qui donne en utilisant la $\mathbb{C}$-antilinéarité de Z en ξ,

$$(\sigma_\theta . X_\xi)(y) = e^{i\theta}\xi + Z(e^{i\theta}\xi, y, y) = X_{e^{i\theta}\xi}.$$

Donc $(\sigma_\theta . X_\xi) \in \underline{G}(D)$, et la proposition est démontrée.

Nous aurons besoin dans la suite d'un certain nombre de résultats sur les automorphismes des groupes et algèbres de Lie.

Proposition 3.4.3. - Soit G un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est $\underline{G}$. Soit $\tilde{G}$ le revêtement universel de G. Soit σ un automorphisme de l'algèbre de Lie $\underline{G}$. Alors il existe un unique automorphisme φ de $\tilde{G}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{G} \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, "\sigma"'] & \tilde{G} \arrow[d, "\varphi"] \\ \underline{G} \arrow[r, "\exp"] & \tilde{G} \end{tikzcd} .$$

Démonstration. - Soit l'application exponentielle

$$\underline{G} \xrightarrow{\exp} G,$$

et soit U un voisinage de 0 dans $\underline{G}$ tel que l'application exponentielle soit un isomorphisme de U sur $V = \exp(U)$. On définit un "morceau φ_o d'automorphisme de G" par la formule

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto \varphi_o(g) = \exp\left[\sigma((\exp_{|U})^{-1}(g))\right]. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que φ_o se prolonge en un homomorphisme de $\tilde{G}$, l'existence de l'inverse étant assuré par le prolongement de φ_o^{-1}.

Le revêtement universel $\tilde{G}$ de G est égal au quotient de $\{g \in \underline{C}^o(I,G) \mid g(0) = id\}$ par la relation d'homotopie à points-bases fixes. (I désigne l'intervalle $[0,1]$). Soit $g \in \underline{C}^o(I,G)$ tel que $g(0) = id$. On définit $\varphi(g)$ de la façon suivante. Choisissons une subdivision $(t_o = 0, \ldots, t_n = 1)$ de l'intervalle $I = [0,1]$, telle que, pour tout i, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $g(t_i)^{-1}.g(t)$ appartienne à l'ouvert V sur lequel est défini φ_o. On définit alors $\varphi(g)$: pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$[\varphi(g)](t) = \varphi_o(g(t_o)^{-1}.g(t_1)).\varphi_o(g(t_1)^{-1}.g(t_2)). \ldots$$

$$\ldots .\varphi_o(g(t_i)^{-1}.g(t)) \quad .$$

Il est clair que, si on raffine la subdivision $(t_o,\dots,t_n)$, le résultat ne change pas, et cela suffit à démontrer que $\varphi(g)$ ne dépend pas de la subdivision choisie.

Supposons maintenant que g et h soient deux chemins de G d'origine $\{id\}$, homotopes à points-bases fixes, et soit $H : I\times I \longrightarrow G$ l'homotopie considérée. Par un raisonnement classique en topologie algébrique, en utilisant un quadrillage suffisamment fin de $I\times I$, on peut définir $\varphi(H)$, et on vérifie que c'est une homotopie entre $\varphi(g)$ et $\varphi(h)$. Ceci montre que $g \longmapsto \varphi_o(g)$ se prolonge en un homomorphisme de $\tilde{G}$.

Q.E.D.

<u>Proposition 3.4.4.</u> - Soit G un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est $\underline{G}$. Soit $\tilde{G}$ le revêtement universel de G et soit

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\tilde{G} &\longrightarrow \tilde{G} \\ (t,g) &\longmapsto \tilde{\varphi}_t(g) \end{aligned}$$

un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\tilde{G}$. Supposons que le centre $\underline{K}$ de $\underline{G}$ soit réduit à $\{0\}$. Alors le groupe à un paramètre $\tilde{\varphi}_t$ passe au quotient et définit un groupe à un paramètre φ_t d'automorphismes de G.

<u>Démonstration.</u> - Pour montrer que $\tilde{\varphi}_t$ passe au quotient et définit un automorphisme φ_t de G, il suffit de montrer que $\tilde{\varphi}_t(N) = N$, où N est le noyau de l'homomorphisme

$$\tilde{G} \longrightarrow G.$$

Ce noyau est un sous-groupe distingué discret de $\tilde{G}$, et par suite, contenu dans le centre K de $\tilde{G}$, qui est lui aussi un sous-groupe discret de $\tilde{G}$.

Soit $g \in K$. Montrons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}_t(g) = g$. En fait, comme $t \longmapsto \tilde{\varphi}_t$ est un groupe à un paramètre, il suffit de démontrer que, pour tout t suffisamment proche de 0,

$$\tilde{\varphi}_t(g) = g.$$

Il est immédiat que $\tilde{\varphi}_t(g) \in K$. D'autre part, quand t tend vers 0, $\tilde{\varphi}_t(g)$ tend vers g. Comme K est discret, cela entraîne que, pour tout t assez proche de 0, $\tilde{\varphi}_t(g) = g$, et la proposition est démontrée.

<u>Proposition 3.4.5.</u> - Soit G un groupe de Lie réel connexe. Soit φ un automorphisme de G. Soit M une variété analytique complexe simplement connexe étalée sur un ouvert borné d'un espace de Banach E. Supposons que G agisse analytiquement et fidèlement sur M, et que, pour tout point x de M, l'application orbitale

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho(x)} & M \\ g & \longmapsto & g.x \end{array}$$

soit, au voisinage de l'identité, une submersion directe. Soit 0 un point de M. Supposons qu'il existe un isomorphisme σ d'un voisinage U de 0 dans M sur un voisinage V de 0 dans M tel que $\sigma(0) = 0$, et que, pour tout g suffisamment proche de $\{id\}$ dans G, $\varphi(g)$ soit le prolongement à M de l'application définie dans un voisinage de 0 par

$$x \longmapsto \sigma \circ g \circ \sigma^{-1}(x).$$

Alors σ se prolonge en un automorphisme σ_0 de M tel que, pour tout $g \in G$,

$$\varphi(g) = \sigma_0 \circ g \circ \sigma_0^{-1} .$$

Démonstration. - Soit $G_0 = \{g \in G \mid g(0) = 0\}$. Montrons d'abord que G_0 est connexe par arcs. Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho(0)} & M \\ g & \longmapsto & g(0) \end{array} .$$

Pour tout $g_0 \in G$, $\rho(0)$ est au voisinage de g_0 une submersion directe. Cela suffit à montrer que $\rho(0)$ est un fibré de Serre de fibre G_0. Ecrivons un morceau de la suite exacte du fibré de Serre (voir par exemple [29])

$$\pi_1(M) \longrightarrow \pi_0(G_0) \longrightarrow \pi_0(G) \quad .$$

On a $\pi_1(M) = 0$, car M est simplement connexe ; de plus, $\pi_0(G) = 0$, car G est connexe par arcs. Par suite, $\pi_0(G_0) = 0$, ce qui montre que G_0 est connexe par arcs.

Du fait que G_0 est connexe par arcs, et des majorations de Cauchy, on déduit l'existence d'un voisinage W de 0 dans M tel que, pour tout $g \in G_0$, pour tout $x \in W$, on ait :

$$\varphi(g).x = \sigma \circ g \circ \sigma^{-1}(x).$$

Pour montrer la proposition, il suffit de démontrer que $x \longmapsto \sigma(x)$ se prolonge en une application analytique de M dans M, l'existence de l'inverse étant assurée par le prolongement de $x \longmapsto \sigma^{-1}(x)$.

Cherchons le prolongement de $x \longmapsto \sigma(x)$. Choisissons d'abord un voisinage X de 0 contenu dans U suffisamment petit. Soit $g \in G$. On définit sur g(X) une fonction ψ_g par la formule

$$\psi_g = \varphi(g) \circ \sigma \circ g^{-1}.$$

Soient g_1 et g_2 deux éléments de G. Il nous faut montrer que Ψ_{g_1} et Ψ_{g_2} coïncident sur $g_1(X) \cap g_2(X)$. Si $g_1(X) \cap g_2(X)$ est non vide, on en déduit que $g_1^{-1} \circ g_2(0)$ est très proche de 0, et par suite, on peut écrire

$$g_2 = g_1 \circ \tau \circ r,$$

où τ est très proche de l'identité, et où $r \in G_o$.

Comme τ est suffisamment proche de l'identité, on sait que, pour tout x suffisamment proche de 0, on a :

$$\varphi(\tau).x = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}(x).$$

Sur $g_1(X) \cap g_2(X)$, on a :

$$\Psi_{g_2} = \varphi(g_1) \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ r \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ r^{-1} \circ \tau^{-1} \circ g_1^{-1} \quad .$$

On trouve finalement :

$$\Psi_{g_2} = \varphi(g_1) \circ \sigma \circ g_1^{-1} = \Psi_{g_1}.$$

On a donc démontré que les fonctions Ψ_g se recollent et définissent une fonction analytique $x \longmapsto \sigma_o(x)$ définie sur $\bigcup_{f \in G} f(X)$, à valeurs dans M. Il découle des hypothèses que M est homogène sous l'action de G. L'application σ_o est définie partout, c'est le prolongement de σ, et la proposition est démontrée.

Soit $p : \tilde{D} \longrightarrow D$ le revêtement universel simplement connexe de D. Choisissons un point $\tilde{O}$ de $\tilde{D}$, tel que $p(\tilde{O}) = O$.

Considérons un groupe à un paramètre d'automorphismes de D, défini par une transformation infinitésimale Ψ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times D &\longrightarrow D \\ (t,x) &\longmapsto f_\Psi(t,x) \ . \end{aligned}$$

Il se relève en un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\tilde{D}$, comme le montre le diagramme suivant (une fois qu'on a choisi $\tilde{f}_\Psi(0,\tilde{0}) = \tilde{0}$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\tilde{D} & \xrightarrow{\tilde{f}_\Psi(.,.)} & \tilde{D} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle id\times p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{R}\times D & \xrightarrow[f_\Psi(.,.)]{} & D \end{array}$$

Soit $H(\tilde{D})$ le sous-groupe du groupe $G(\tilde{D})$ des automorphismes analytiques de $\tilde{D}$ engendré par les $\tilde{f}_\Psi(t,.)$, pour tous les $\Psi \in \underline{G}(D)$. Le groupe $H(\tilde{D})$ est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie banachique dont l'algèbre de Lie est $\underline{G}(D)$. On déduit du théorème 3.2.4 le

Lemme 3.4.6. - Pour tout point x de $\tilde{D}$, l'application orbitale

$$\begin{aligned} H(\tilde{D}) &\xrightarrow{\rho(x)} \tilde{D} \\ g &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

est au voisinage de l'identité une submersion directe.

Lemme 3.4.7. - Le centre $\underline{K}$ de $\underline{G}(D)$ est réduit à $\{0\}$.

Démonstration. - Soit Ψ un élément du centre $\underline{K}$ de $\underline{G}(D)$. Alors $\Psi = \varphi + X_\xi$, avec $\varphi \in \underline{G}(D)^+$ et $X_\xi \in \underline{G}(D)^-$. Soit $X_\eta \in \underline{G}(D)^-$. On a :

$$0 = [\Psi, X_\eta] = [\varphi, X_\eta] + [X_\xi, X_\eta] \quad .$$

D'après les règles du calcul du crochet, $[\varphi, X_\eta] \in \underline{G}(D)^-$, et

$[X_\xi, X_\eta] \in \underline{G}(D)^+$. On en déduit :

$$[\varphi, X_\eta] = X_{\varphi'(0).\eta} = 0, \text{ et } [X_\xi, X_\eta] = 0.$$

Du fait que, pour tout $\eta \in E$, $\varphi'(0).\eta = 0$, on déduit que $\varphi'(0) = 0$, et comme $\varphi(0) = 0$, on conclut $\varphi = 0$.

Prenons $\eta = i\xi$. On a $[X_\xi, X_{i\xi}] = 0$; d'après le lemme 3.3.3, ceci entraîne $\xi = 0$. Par suite, $\Psi = 0$, et le lemme est démontré.

On déduit des propositions 3.4.2, 3.4.3 et 3.4.4 que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, σ_θ définit un automorphisme φ_θ de $H(\tilde{D})$. Quitte à restreindre le voisinage U de O sur lequel est défini σ_θ, on peut identifier U avec la feuille $\tilde{U}$ de $p^{-1}(U)$ qui contient $\tilde{O}$, et on peut considérer σ_θ comme un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\tilde{U}$. On déduit alors de la proposition 3.4.5 la proposition suivante :

<u>Proposition 3.4.8.</u> - Le groupe à un paramètre d'automorphismes de $\tilde{U}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \tilde{U} &\longrightarrow \tilde{U} \\ (\theta, x) &\longmapsto \sigma_\theta(x) \end{aligned}$$

se prolonge en un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\tilde{D}$. Nous le noterons encore $(\theta, x) \longmapsto \sigma_\theta(x)$.

Rappelons la

<u>Définition 3.4.9.</u> - a) Un domaine D contenu dans un espace de Banach E est dit <u>cerclé</u> si l'origine O appartient à D, et si, pour tout point x_o de D, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}.x_o$ appartient à D.

b) Soit Δ un domaine étalé sur un domaine D contenu dans E. On dit que Δ est un domaine <u>cerclé étalé</u> si D est cerclé, et si le groupe à un paramètre d'automorphismes de D

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times D &\longrightarrow D \\ (\theta, x) &\longmapsto e^{i\theta}.x \end{aligned}$$

se relève en un groupe à un paramètre d'automorphismes de Δ laissant fixe un point de Δ situé au dessus du point $0 \in D$.

Soit $\tilde{f} = f \circ p$. L'application $\tilde{f}$ est une carte locale de $\tilde{D}$ au voisinage de $\tilde{0}$. Montrons maintenant le

<u>Théorème 3.4.10.</u> - La carte $\tilde{f}$ définie au voisinage de $\tilde{0}$ se prolonge en un étalement F de $\tilde{D}$ sur un ouvert connexe borné cerclé D' de E, et F fait de $\tilde{D}$ un domaine cerclé étalé.

<u>Démonstration.</u> - Soit

$$F(x) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} (p \circ \sigma_\theta(x)) \, d\theta .$$

Montrons d'abord que F prolonge $\tilde{f}$. Si x est suffisamment proche de $\tilde{0}$, on a

$$p(\sigma_\theta(x)) = f^{-1}(e^{i\theta} f \circ p(x)).$$

On trouve

$$F(x) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f^{-1}(e^{i\theta} f \circ p(x)) \, d\theta .$$

On sait que, pour tout y, $f^{-1}(y) = y + \sum_{n \geq 2} P_n(y)$.

Par suite, $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f^{-1}(e^{i\theta} y) \, d\theta = y$. On en déduit

$$F(x) = f \circ p(x) = \tilde{f}(x).$$

Montrons que F est un étalement. Dans la carte définie par p, on a, au voisinage de $\tilde{0}$:

$$dF(x) = df(p(x)) \ .$$

On en déduit que, au voisinage de $\tilde{0}$,

$$dF(x)\circ \varphi(p(x)) = \varphi(p(x))\circ dF(x) = \mathrm{id},$$

où $\varphi(x)$ est l'application linéaire $\{\xi \longrightarrow Y_{\xi}(x)\}$ définie au paragraphe 3.3. Le théorème de prolongement analytique prouve que cette égalité a lieu sur $\tilde{D}$ tout entier. Par suite, pour tout $x \in \tilde{D}$, $dF(x)$ est un isomorphisme de E, et F est bien un étalement.

Soit D' = Im F. Pour tout x proche de $\tilde{0}$, on a

$$F(\sigma_{\theta}(x)) = f\circ p(\sigma_{\theta}(x)) = e^{i\theta}\, F(x) \ .$$

On déduit du théorème de prolongement analytique que, pour tout $x \in \tilde{D}$,

$$F(\sigma_{\theta}(x)) = e^{i\theta}\, F(x).$$

Ceci prouve que D' est un domaine cerclé et que $\tilde{D}$ est un domaine cerclé étalé sur D'.

Pour continuer notre étude, nous avons besoin d'un certain nombre de résultats sur les domaines cerclés étalés.

<u>Théorème 3.4.11.</u> - Soit $r : \Delta \longrightarrow D$ un domaine cerclé étalé sur un domaine D contenu dans un espace de Banach E. Soit f une fonction holomorphe sur Δ, à valeurs dans un espace de Banach F. Alors il existe une suite P_n de polynômes homogènes de degré n de E dans F, tels que

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n(r(x)) \quad .$$

De plus, cette série est normalement convergente au voisinage de tout point x de Δ.

On en déduit qu'il existe une application holomorphe g de D dans F telle que

$$f = g \circ r \ .$$

Le lecteur pourra reconstituer la démonstration à partir de [7], théorème 12, p. 14.

On en déduit le

Corollaire 3.4.12. - Soit D un domaine cerclé contenu dans un espace de Banach E. Soit Δ le plus petit domaine cerclé étoilé contenant D. Alors les fonctions holomorphes sur D, à valeurs dans un espace de Banach F se prolongent à Δ.

Démonstration. - Si on considère le développement en série de polynômes homogènes d'une fonction $f \in \underline{H}(D,F)$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n(x) \ ,$$

le fait que la série soit normalement convergente au voisinage de tout point x de D entraîne qu'elle est normalement convergente au voisinage de tout point de Δ. Le corollaire est démontré.

Nous sommes dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D} & \xrightarrow{F} & D' \\ \downarrow p & & \\ D & & \end{array}$$

D et D' sont deux domaines bornés contenus dans E. L'application p envoie $\tilde{D}$ dans E. D'après le théorème 3.4.11, il existe une application holomorphe $q : D' \longrightarrow D$, telle que $p = q \circ F$.

<u>Lemme 3.4.13.</u> - L'application $F : D \longrightarrow D'$ est une application de revêtement.

<u>Démonstration.</u> - Montrons d'abord que q est un étalement. Soit x' un point de D'. Comme F est un étalement, on peut trouver un ouvert U de $\tilde{D}$ et un voisinage ouvert V de x' dans D' tels que $F_{|U}$ soit un homéomorphisme de U sur V. Quitte à restreindre V, il est clair que p est un homéomorphisme de U sur p(U). Par suite, $q_{|V} : V \longrightarrow p(U)$ est un homéomorphisme, ce qui prouve que q est un étalement.

Montrons maintenant que F est un revêtement. Soit $x' \in D'$. Choisissons un voisinage ouvert V de x' tel que q soit un homéomorphisme de V sur son image U et que U soit trivialisant pour p. Supposons de plus que V soit une composante connexe de $q^{-1}(U)$. Soit W l'une des feuilles de $p^{-1}(U)$. On montre facilement que deux cas seulement sont possibles :

1) $F(W) \cap V = \emptyset$;

2) F est un homéomorphisme de W sur V.

Par suite, $F^{-1}(V)$ est égal à la réunion des feuilles W de $p^{-1}(U)$ telles que $F(W) \cap V \neq \emptyset$, et $F_{|W} : W \longrightarrow V$ est un homéomorphisme. Le lemme est démontré.

<u>Lemme 3.4.14.</u> - Le domaine D' est un domaine borné symétrique.

<u>Démonstration.</u> - Si f est un automorphisme analytique de $\tilde{D}$, il existe d'après le théorème 3.4.11 une application holomorphe $g : D' \longrightarrow D'$ telle que

$$F \circ f = g \circ F.$$

On vérifie facilement que g est un automorphisme de D'. Comme

$\tilde{D}$ est homogène, D' est homogène. De plus, D' est cerclé, ce qui entraîne qu'il est symétrique.

Nous montrerons dans l'appendice à ce travail que tout domaine borné homogène est un domaine d'holomorphie dans un sens que nous préciserons. On déduit de ce résultat et du corollaire 3.4.12 que D' est un domaine borné cerclé étoilé. Il en résulte qu'il est contractile, et par suite, simplement connexe. D'après la théorie des revêtements, F est un isomorphisme de $\tilde{D}$ sur D'. L'application $q : D' \longrightarrow D$ identifie donc D' au revêtement universel de D.

<u>Lemme 3.4.15.</u> - Soit $\underline{H}(D')$ la sous-algèbre de Lie de $\underline{G}(D')$ obtenue en relevant toutes les transformations infinitésimales de D. Alors l'ensemble

$$\{x \in D' \mid \Psi(x) = 0, \ \forall \ \Psi \in \underline{H}(D')^{+}\}$$

est réduit à $\{0\}$.

<u>Démonstration.</u> - Il est clair que $\underline{H}(D')$ contient les transvections infinitésimales. Par suite, le crochet

$$[X_{\xi}, X_{i\xi}] = [\xi + Z(\xi,x,x), i\xi + Z(i\xi,x,x)] = -4iZ(\xi,\xi,x)$$

appartient à $\underline{H}(D')^{+}$. Le lemme sera une conséquence de l'assertion suivante : pour tout $\xi \neq 0$, $Z(\xi,\xi,\xi) \neq 0$. Faisons la démonstration par l'absurde. Supposons qu'il existe $\xi \neq 0$, tel que $Z(\xi,\xi,\xi) = 0$. Alors la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = X_{\xi}(x) = \xi + Z(\xi,x,x)$$

prenant pour $t = 0$ la valeur 0 est

$$x = t.\xi \ .$$

Comme D' est borné, pour t assez grand, $x = t.\xi$ n'appartient pas à D', ce qui est absurde.

Pour démontrer le théorème 3.4.1, il suffit maintenant de montrer que $q : D' \longrightarrow D$ est un isomorphisme. Le revêtement $q : D' \longrightarrow D$ est galoisien, car D' est simplement connexe. D'après la théorie des revêtements galoisiens, il suffit donc de démontrer que le groupe Γ des D-automorphismes de D' est réduit à $\{id\}$.

Soit $\gamma \in \Gamma$. On vérifie facilement que, pour tout $\Psi \in \underline{H}(D')$, $\gamma.\Psi = \Psi$. Par suite, pour tout $\Psi \in \underline{H}(D')^+$, $\gamma.\Psi = \Psi$ doit s'annuler au point $\gamma^{-1}(0)$. On déduit du lemme 3.4.15 que $\gamma^{-1}(0) = 0$. Donc $\gamma = id$, et le théorème est démontré.

3.5. - Etude du groupe d'isotropie d'un point.

Soit D un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe E. D'après le théorème 3.4.1, on peut supposer que D est un domaine borné cerclé étoilé, et c'est ce que nous ferons à l'avenir. On sait alors que les éléments du groupe d'isotropie $G_0(D)$ de l'origine 0 sont linéaires. Par suite, les rotations infinitésimales sont aussi linéaires. On a vu en outre que les transvections infinitésimales X_ξ s'écrivent, pour tout $\xi \in E$,

$$X_\xi(x) = \xi + Z(\xi, x, x) \ ,$$

où $$(\xi, x, y) \longmapsto Z(\xi, x, y)$$

est une application trilinéaire de E^3 dans E, $\mathbb{C}$-linéaire symétrique en x et y, $\mathbb{C}$-antilinéaire en ξ .

Dans les paragraphes précédents, nous avons surtout étudié l'espace vectoriel $\underline{G}(D)^-$ des transvections infinitésimales. Nous allons maintenant étudier le groupe d'isotropie $G_o(D)$ de l'origine O, et l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)^+$ des rotations infinitésimales. Nous donnerons une caractérisation algébrique des éléments de $G_o(D)$ et de $\underline{G}(D)^+$ à l'aide de l'application Z. L'intérêt de cette étude apparaît dans le théorème suivant.

<u>Théorème 3.5.1.</u> - Soit D un domaine borné symétrique. Supposons que le groupe d'isotropie de l'origine O soit un groupe de Lie. Alors G(D) est un groupe de Lie.

<u>Démonstration.</u> - D'après la proposition 2.3.5, il suffit de montrer que le plus grand groupuscule de Lie G contenu dans G(D) contient un voisinage de la transformation identique dans G(D).

Comme $G_o(D)$ est un groupe de Lie, il est clair que G contient un voisinage de l'identité dans $G_o(D)$.

Si $f \in G(D)$ est suffisamment proche de l'identité, on sait d'après le théorème 3.2.4 qu'il existe un élément g de G proche de l'identité et tel que $g(0) = f(0)$. Alors, $(g^{-1}\circ f)$ est proche de l'identité et appartient à $G_o(D)$. Par suite, il appartient à G. Enfin, $f = g\circ(g^{-1}\circ f)$, produit de deux éléments de G proches de l'identité appartient à G. Le théorème est démontré.

<u>Théorème 3.5.2.</u> - Soit D un domaine borné symétrique, réalisé comme un domaine borné cerclé étoilé. Soit f un automorphisme linéaire de E. Pour que f appartienne au groupe d'isotropie $G_o(D)$ de l'origine O, il faut et il suffit que, pour tout

$\xi \in E$, pour tout $x \in E$, on ait :

$$f(Z(\xi, x, x)) - Z(f(\xi), f(x), f(x)) = 0 . \qquad (1)$$

<u>Démonstration.</u> - Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit f un automorphisme linéaire de E et supposons que f appartienne à $G_o(D)$. Alors, on a, pour tout $\xi \in E$:

$$f.X_\xi = X_{f'(0).\xi} = X_{f(\xi)} .$$

Or,

$$(f.X_\xi)(x) = f'(f^{-1}(x)).(\xi + Z(\xi, f^{-1}(x), f^{-1}(x)))$$

$$= f(\xi) + f(Z(\xi, f^{-1}(x), f^{-1}(x))).$$

D'autre part,

$$X_{f(\xi)}(x) = f(\xi) + Z(f(\xi), x, x) .$$

En égalant ces deux expressions, et en remplaçant x par f(x), on obtient (1).

Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Remarquons d'abord que si f est un automorphisme linéaire de E, pour que f appartienne à $G_o(D)$, il faut et il suffit que $f(D) = D$. La démonstration que nous allons donner est assez semblable à celle donnée au paragraphe 3.4 pour prolonger le groupe à un paramètre $(\theta, x) \longmapsto \sigma_\theta(x)$ en un groupe à un paramètre d'automorphismes de D. Elle consiste à considérer l'application f comme définie dans un voisinage de O dans D, et à la "prolonger" en un automorphisme de D, qui sera, bien sûr, égal à l'application f donnée. Il n'était pas possible au paragraphe précédent de donner une démonstration unique, parce que, d'une part, certains arguments doivent être modifiés, et que, d'autre part, l'existence du groupe à un paramètre d'automorphismes de D

$$(\theta, x) \longmapsto e^{i\theta} x$$

est essentielle dans la démonstration qui va suivre.

Soit $\underline{G}_1(D)$ la sous-algèbre de Lie complète de $\underline{G}(D)$ engendrée par $\underline{G}(D)^-$ et la rotation infinitésimale $\{x \longmapsto ix\}$. Soit G_1 le groupuscule de Lie d'automorphismes de D associé à $\underline{G}_1(D)$, et soit $H_1(D)$ le sous-groupe de $G(D)$ engendré par G_1. On munit $H_1(D)$ d'une structure de groupe de Lie banachique (réel) pour laquelle une base de voisinages de la transformation identique est formée des images des voisinages de 0 dans $\underline{G}_1(D)$ par l'application exponentielle. Nous considérerons également le revêtement universel simplement connexe

$$q : \tilde{H}_1(D) \longrightarrow H_1(D)$$

de $H_1(D)$, qui est, lui aussi, un groupe de Lie banachique dont l'algèbre de Lie est $\underline{G}_1(D)$. On montre alors facilement le lemme suivant.

<u>Lemme 3.5.3.</u> - Pour tout $a \in D$, l'application orbitale

$$\begin{array}{ccc} H_1(D) & \xrightarrow{\rho(a)} & D \\ g & \longmapsto & g.a \end{array}$$

est, au voisinage de l'identité, une submersion directe. Par suite, le domaine D est homogène sous l'action de $H_1(D)$. De plus, pour tout point a de D, la symétrie σ_a appartient à $H_1(D)$.

<u>Lemme 3.5.4.</u> - Le centre K de $H_1(D)$ est réduit à $\{id\}$, et

le noyau N de q est égal au centre K_1 de $\tilde{H}_1(D)$.

Démonstration. - Montrons d'abord que le centre K de $H_1(D)$ est réduit à $\{id\}$. Soit $g \in K$. Soit a un point de D, et soit σ_a la symétrie par rapport au point a. Comme $\sigma_a \in H_1(D)$, on a :

$$\sigma_a = g \circ \sigma_a \circ g^{-1} = \sigma_{g(a)}.$$

D'après la représentation que nous avons donnée des domaines bornés symétriques, il est clair que, pour tout point a de D, a est le seul point fixe de σ_a. On en déduit que, pour tout point a de D, $g(a) = a$, ce qui prouve que $g = id$.

Le noyau N de q est un sous-groupe discret distingué du groupe $\tilde{H}_1(D)$. Puisque $\tilde{H}_1(D)$ est connexe par arcs, N est contenu dans le centre K_1 de $\tilde{H}_1(D)$. D'autre part, le fait que $q : \tilde{H}_1(D) \longrightarrow H_1(D)$ est surjective entraîne que $q(K_1)$ est contenu dans le centre K de $H_1(D)$. Par suite, $q(K_1) = \{id\}$. Ceci prouve bien que le noyau N de q est égal à K_1, et le lemme est démontré.

Lemme 3.5.5. - Par automorphisme intérieur, f définit un automorphisme σ de l'algèbre de Lie $\underline{G}_1(D)$.

Démonstration. - Il est clair que, si l'automorphisme linéaire f vérifie la condition (1), f^{-1} la vérifie également. Il suffit donc de montrer que, pour tout $\Psi \in \underline{G}_1(D)$, $\sigma(\Psi) = f.\Psi$ appartient à $\underline{G}_1(D)$.

Ainsi que nous l'avons déjà vu, la condition (1) exprime que

$$f.X_{\xi} = X_{f(\xi)}, \text{ pour tout } \xi \in E.$$

D'autre part, $f.\{x \longrightarrow ix\} = \{x \longrightarrow ix\}$. Du fait que, pour tout

$\varphi \in \underline{G}(D)$, pour tout $\psi \in \underline{G}(D)$, $f.[\varphi,\psi] = [f.\varphi, f.\psi]$, on déduit finalement par passage à la limite que, pour tout $\psi \in \underline{G}_1(D)$, $f.\psi$ appartient à $\underline{G}_1(D)$, ce qui achève la démonstration du lemme.

D'après la proposition 3.4.3, il existe un unique automorphisme $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{H}_1(D)$ qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{G}_1(D) & \xrightarrow{\exp} & \tilde{H}_1(D) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ \underline{G}_1(D) & \xrightarrow{\exp} & \tilde{H}_1(D) \end{array}$$

<u>Lemme 3.5.6.</u> - L'automorphisme $\tilde{\varphi}$ passe au quotient et définit un automorphisme φ de $H_1(D)$.

<u>Démonstration.</u> - Soit N le noyau de q : $\tilde{H}_1(D) \longrightarrow H_1(D)$. Pour démontrer que $\tilde{\varphi}$ passe au quotient, il suffit de vérifier que $\tilde{\varphi}(N) = N$. D'après le lemme 3.5.4, N est égal au centre K_1 de $\tilde{H}_1(D)$, et il est clair que $\tilde{\varphi}(K_1) = K_1$. Le lemme est démontré.

L'existence du "prolongement" de f en un automorphisme de D est une conséquence immédiate de la proposition 3.4.5. Le théorème 3.5.2 est démontré.

Nous pouvons maintenant donner une caractérisation des rotations infinitésimales de D.

<u>Théorème 3.5.7.</u> - Soit D un domaine borné symétrique, réalisé comme un domaine borné cerclé étoilé. Soit A un élément de $\underline{L}(E,E)$. Pour que A appartienne à $\underline{G}(D)^+$, il faut et il suffit que, pour tout $\xi \in E$, pour tout $x \in E$, on ait :

$$A(Z(\xi,x,x)) - Z(A(\xi),x,x) - Z(\xi,A(x),x) - Z(\xi,x,A(x)) = 0 . \quad (2)$$

Démonstration. - Pour que A appartienne à $\underline{G}(D)^+$, il faut et il suffit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$ appartienne à $G_o(D)$. Pour cela, d'après le théorème 3.5.2, il faut et il suffit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $\xi \in E$, pour tout $x \in E$, on ait :

$$\exp(tA)(Z(\xi,x,x)) - Z(\exp(tA)(\xi),\exp(tA)(x),\exp(tA)(x)) = 0.$$

En dérivant par rapport à t, et en faisant $t = 0$, on obtient (2).

Réciproquement, soit $A \in \underline{L}(E,E)$ vérifiant (2) pour tout $\xi \in E$ et tout $x \in E$. On montre facilement par récurrence sur $n \geqslant 2$, que ceci entraîne, pour tout $\xi \in E$ et tout $x \in E$:

$$A^n(Z(\xi,x,x)) - \sum_{p_1+p_2+p_3=n} \frac{n!}{p_1!p_2!p_3!} Z(A^{p_1}(\xi),A^{p_2}(x),A^{p_3}(x)) = 0 .$$

On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $\xi \in E$, pour tout $x \in E$, on a :

$$\exp(tA)(Z(\xi,x,x)) - Z(\exp(tA)(\xi),\exp(tA)(x),\exp(tA)(x)) = 0 ,$$

donc $\exp(tA)$ appartient à $G_o(D)$. Par suite, A appartient à $\underline{G}(D)^+$, et ceci termine la démonstration du théorème.

Malheureusement, ces résultats ne nous ont pas permis, pour l'instant, de montrer que le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné symétrique D est un groupe de Lie.

3.6. - Exemples de domaines bornés symétriques.

En dimension infinie, les premiers exemples de domaines bornés symétriques ont été donnés par Greenfield et Wallach [18]. Par la suite, ces exemples ont été généralisés par Harris

[20]. Il a d'abord montré que, si E et F sont deux espaces de Hilbert, et si B est la boule-unité ouverte de $\underline{L}(E,F)$ muni de la norme habituelle, alors B est un domaine borné symétrique. Pour cela, comme B est un domaine cerclé, il suffit de démontrer que B est homogène. Si a est un point de B, un automorphisme analytique f_a de B qui envoie O en a est donné par

$$f_a(x) = (id_F - aa^*)^{-1/2}(x+a)(id_E + a^*x)^{-1}(id_E - a^*a)^{1/2}$$

(où a^* désigne l'adjoint de a). (Voir [20], théorème 2, p. 20, et [26]).

Un calcul simple montre alors que, pour tout $\xi \in \underline{L}(E,F)$, la transvection infinitésimale X_ξ vaut :

$$X_\xi(x) = \xi - x\,\xi^* x.$$

Par suite,

$$Z(\xi, x, x) = -\,x\,\xi^* x.$$

Pour la suite de cette étude, nous aurons besoin du

<u>Lemme 3.6.1.</u> (cf [20], p. 17). - Soient E et F deux espaces de Hilbert. Soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, x_1, x_2, x_3$ six éléments de $\underline{L}(E,F)$. Alors,

$$\sum_{k=0}^{3} (-1)^k(\xi_1+i^k x_1)(\xi_2+i^k x_2)^*(\xi_3+i^k x_3) = 4\, x_1 \xi_2^* x_3 .$$

On en déduit que si ξ et x sont deux éléments de $\underline{L}(E,F)$, on a

$$x\,\xi^* x = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (-1)^k(\xi+i^k x)(\xi+i^k x)^*(\xi+i^k x) . \qquad (1)$$

Montrons maintenant le

<u>Théorème 3.6.2.</u> - Soient E et F deux espaces de Hilbert, et soit B la boule-unité ouverte de $\underline{L}(E,F)$. Soit H un sous-espace vectoriel fermé de $\underline{L}(E,F)$ tel que, pour tout $x \in H$, xx^*x appartienne à H. Alors, $B \cap H$ est un domaine borné symétrique dans l'espace de Banach H.

<u>Démonstration.</u> (Comparer avec [20]). - On déduit de la formule (1) que, pour tous ξ et $x \in H$, $x\xi^*x$ appartient à H. Par suite, pour tout $\xi \in H$, l'application

$$x \longmapsto X_{\xi}(x) = \xi - x\xi^*x$$

envoie H dans H. On en déduit que $B \cap H$ est homogène, et comme $B \cap H$ est un domaine cerclé, ceci entraîne que $B \cap H$ est un domaine borné symétrique contenu dans H.

Nous appellerons <u>domaine de Harris</u> tout domaine borné symétrique qui peut être réalisé comme l'intersection de la boule-unité ouverte de $\underline{L}(E,F)$ avec un sous-espace vectoriel fermé H de $\underline{L}(E,F)$, tel que, pour tout $x \in H$, xx^*x appartienne à H.

Harris [20] a montré que les quatre grandes classes (type I à IV) de domaines bornés symétriques irréductibles de dimension finie de la classification de E. Cartan [6] sont des domaines de Harris. On ne sait pas, pour l'instant, s'il en est de même des deux domaines bornés symétriques irréductibles exceptionnels (type V et VI). S'il en était ainsi, tout domaine borné symétrique d'un espace vectoriel complexe de dimension finie serait un domaine de Harris. De toutes façons, les résultats déjà démontrés permettent de définir en dimension infinie une généralisation des domaines bornés symétriques de E. Cartan de type I à IV (voir [20]).

Si D est un domaine de Harris, on peut caractériser les éléments du groupe $G_o(D)$ et de l'algèbre de Lie $\underline{G}(D)^+$ de la façon suivante :

<u>Proposition 3.6.3.</u> - Soient E et F deux espaces de Hilbert, et soit H un sous-espace vectoriel fermé de $\underline{L}(E,F)$, tel que, pour tout $x \in H$, xx^*x appartienne à H. Soit B la boule-unité ouverte de $\underline{L}(E,F)$, et soit $D = B \cap H$.

a) Soit $f \in GL(H)$. Pour que f appartienne à $G_o(D)$, il faut et il suffit que, pour tout $x \in H$, on ait :

$$f(xx^*x) - f(x)f(x)^* f(x) = 0. \tag{1'}$$

b) Soit $A \in \underline{L}(H,H)$. Pour que A appartienne à $\underline{G}(D)^+$, il faut et il suffit que, pour tout $x \in H$, on ait :

$$A(xx^*x) - A(x)x^*x - xA(x)^* x - xx^*A(x) = 0 . \tag{2'}$$

(Le résultat a) est déjà connu de Harris [20]. Toutefois, sa démonstration est différente de la nôtre.)

<u>Démonstration.</u> - Pour démontrer a), il suffit d'après le théorème 3.5.2 de montrer que, si, pour tout $x \in H$, f vérifie (1'), alors, pour tout $\xi \in H$ et tout $x \in H$, on a

$$f(x\xi^*x) - f(x)\, f(\xi)^*\, f(x) = 0 .$$

Or cela résulte de la formule (1).

Pour démontrer b), d'après le théorème 3.5.7, il suffit de montrer que, si pour tout $x \in H$, A vérifie (2'), alors, pour tous ξ et $x \in H$, on a

$$A(x\xi^*x) - A(x)\xi^*x - xA(\xi)^* x - x\xi^*A(x) = 0.$$

Ceci se déduit du lemme 3.6.1.

Ces résultats ne permettent pas, dans le cas général, de donner la forme explicite des éléments du groupe d'isotropie de l'origine d'un domaine de Harris D. Pour conclure ce chapitre, nous allons étudier deux exemples.

Exemple 1. - Soient E et F deux espaces de Hilbert. Supposons de plus que E soit de dimension finie. Soit B la boule-unité ouverte de $\underline{L}(E,F)$ muni de la norme habituelle. L'étude du groupe $G_o(B)$ a été faite par Greenfield et Wallach [18] qui ont montré la

Proposition 3.6.4. - Tout automorphisme $f \in G_o(B)$ est de la forme

$$x \longmapsto A \circ x \circ B \ ,$$

où $A \in U(F)$, le groupe unitaire de F, et $B \in U(E)$, le groupe unitaire de E.

On déduit facilement de ce résultat que $G_o(B)$ est isomorphe au quotient de $U(F) \times U(E)$ par G_1, où G_1 est le sous-groupe distingué de $U(F) \times U(E)$ formé des éléments $(\lambda \,\mathrm{id}, \lambda^{-1}\mathrm{id})$, avec $|\lambda| = 1$. Ceci montre que $G_o(B)$ est un groupe de Lie. On déduit de ce résultat et du théorème 3.5.1 le

Théorème 3.6.5. - Soient E et F deux espaces de Hilbert. Supposons de plus que E soit de dimension finie. Soit B la boule-unité ouverte de $\underline{L}(E,F)$. Alors G(B) est un groupe de Lie.

Exemple 2. - Soit A une C^*-algèbre commutative avec élément-unité. On sait qu'il existe un espace compact K tel que

A soit isométriquement isomorphe à l'algèbre $\underline{C}(K,\mathbb{C})$ des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbb{C}$, munie de la norme de la convergence uniforme sur K. Soit B la boule-unité ouverte de $\underline{C}(K,\mathbb{C})$. On peut montrer que B est un domaine de Harris. Cependant, il est très simple de vérifier directement que B est un domaine borné symétrique. Comme B est cerclé, il suffit de montrer qu'il est homogène : si a est un point de B, un automorphisme analytique de B qui envoie 0 en a est donné par

$$x \longmapsto f_a(x) = \frac{x + a}{1 + \bar{a}x} \quad .$$

<u>Théorème 3.6.6.</u> - Soit B la boule-unité ouverte de $\underline{C}(K,\mathbb{C})$. Alors $G_0(B)$ est un groupe de Lie ; par suite, $G(B)$ est un groupe de Lie.

<u>Démonstration.</u> - Les éléments de $G_0(B)$ sont les automorphismes linéaires isométriques de $\underline{C}(K,\mathbb{C})$. Soit f un tel automorphisme. D'après Dunford-Schwartz [17], p. 442, il existe un homéomorphisme τ de K sur lui-même et une application continue $\alpha : K \longrightarrow \mathbb{U}$ (groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1) tels que, pour tout $\varphi \in \underline{C}(K,\mathbb{C})$, pour tout $x \in K$,

$$f(\varphi)\ (x) = \alpha(x).\varphi(\tau(x)) \ .$$

Montrons que si $\|f-\mathrm{id}\| < 1$, alors $\tau = \mathrm{id}$. Supposons en effet $\tau \neq \mathrm{id}$; il existe deux points distints a et b de K, tels que $\tau(a) = b$. Il existe une fonction continue φ_0 de K dans $[0,1]$ telle que $\varphi_0(a) = 0$, $\varphi_0(b) = 1$. On a donc

$$\|f - \mathrm{id}\| \geqslant \|f(\varphi_0) - \varphi_0\| \geqslant \|\alpha(a)\varphi_0(b) - \varphi_0(a)\| = 1 \ ,$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

Un voisinage de la transformation identique dans $G_o(B)$ s'identifie donc à l'ensemble des applications continues α de K dans $\mathbb{U}$ muni de la distance

$$d(\alpha , \beta) = \sup_{x \in K} \left| \alpha (x) - \beta (x) \right| \quad .$$

Il est clair que cet ensemble a une structure de variété analytique réelle, compatible avec sa structure de groupe, ce qui prouve que $G_o(B)$ est un groupe de Lie. On déduit du théorème 3.5.1 que G(B) est un groupe de Lie.

APPENDICE

Domaines bornés homogènes, métrique de Carathéodory et domaines d'holomorphie.

Dans la démonstration du théorème 3.4.1, nous avons utilisé le fait que, si D est un domaine borné homogène d'un espace de Banach complexe E, alors D est un domaine d'holomorphie. Le but de cet appendice est de donner une définition précise des domaines d'holomorphie en dimension infinie, et de démontrer le résultat annoncé. La démonstration utilise la métrique de Carathéodory, et nous allons commencer par rappeler ses principales propriétés.

Soit Δ le disque-unité ouvert dans $\mathbb{C}$. La métrique non euclidienne δ sur Δ est définie par la formule : pour tous a et $b \in \Delta$,

$$\delta(a,b) = \mathrm{Log}\, \frac{|a-b|+|1-a\bar{b}|}{\sqrt{(1-a\bar{a})(1-b\bar{b})}} \quad .$$

Il est classique que δ est une distance sur Δ, que δ définit la topologie habituelle de Δ, et que, si f est une application analytique de Δ dans lui-même, alors, pour tous a et $b \in \Delta$,

$$\delta(f(a),f(b)) \leqslant \delta(a,b) \ .$$

En particulier, si f est un automorphisme de Δ, alors f est une isométrie pour δ.

Soit D une variété banachique complexe connexe. On définit la métrique de Carathéodory d_c^D sur D de la façon suivante (voir [2], p. 165) : pour $a \in D$, $b \in D$, on pose

$$d_c^D(a,b) = \sup_{f \in \underline{H}(D,\Delta)} \delta(f(a),f(b)) .$$

On montre que la métrique de Carathéodory vérifie les propriétés suivantes :

a) Pour tous a et $b \in D$, $d_c^D(a,b) < +\infty$.

b) Pour tous a, b et $c \in D$,

$$d_c^D(a,c) \leqslant d_c^D(a,b) + d_c^D(b,c) .$$

c) Si D est contenu dans une variété connexe D', alors

$$d_c^{D'} \leqslant d_c^D .$$

d) Soit f une application holomorphe de D dans une variété connexe D'. Alors, pour tous a et $b \in D$,

$$d_c^{D'}(f(a),f(b)) \leqslant d_c^D(a,b) .$$

On en déduit que tout automorphisme analytique d'une variété connexe D est une isométrie pour la métrique de Carathéodory.

e) Soit D un domaine <u>borné</u> d'un espace de Banach complexe. Alors d_c^D sépare les points de D.

f) Soit B la boule-unité ouverte d'un espace de Banach E. On montre, à l'aide du lemme de Schwarz, que, pour tout $x \in B$,

$$d_c^B(0,x) = \delta(0,\|x\|) .$$

On déduit de cet ensemble de résultats le

<u>Lemme 1.</u> - Soit D un domaine <u>borné</u> d'un espace de Banach complexe E. Soit d_c^D la distance de Carathéodory sur D, et soit d la distance déduite de la norme de E. Soit B une boule complè-

tement intérieure à D. Alors d_c^D et d induisent sur B la même structure uniforme. On en déduit que d_c^D et d induisent sur D la même topologie.

Nous pouvons maintenant démontrer le

<u>Théorème 2.</u> - Soit D un domaine borné homogène. Alors D est complet pour la distance de Carathéodory d_c^D.

<u>Démonstration.</u> - Soit a un point de D, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour d_c^D. Il existe un nombre réel $r>0$, tel que la boule $B_c(a,r) = \{x\in D \mid d_c^D(a,x) < r\}$ soit contenue dans une boule fermée B complètement intérieure à D.

Comme les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite de Cauchy pour d_c^D, il existe un entier n_o, tel que $B_c(x_{n_o},r)$ contienne tous les x_n, pour $n \geqslant n_o$. Soit f un automorphisme analytique de D, tel que $f(x_{n_o}) = a$. Les $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite de Cauchy pour d_c^D sur $B_c(a,r)$. A l'aide du lemme 1, on montre qu'il existe un point y_o de B, tel que $f(x_n)$ converge vers y_o, quand $n \longrightarrow +\infty$. Par suite, x_n converge vers $f^{-1}(y_o)$, ce qui prouve le théorème.

Il nous faut maintenant donner la définition des domaines d'holomorphie.

<u>Définition 3.</u> - Soit D un domaine d'un espace de Banach complexe E. Soit H un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\underline{H}(D,\mathbb{C})$ des fonctions holomorphes sur D, séparant les points de D. Nous dirons que D est un H-domaine d'holomorphie si D vérifie la condition suivante : pour tout domaine étalé (D',p) dans E, pour tout plongement ouvert $\varphi : D \longrightarrow D'$, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, hook] & D' \arrow[d, "p"] \\ & E \end{tikzcd}$$

soit commutatif, et tel que l'image par l'application φ^*

$$\begin{array}{ccc} \underline{H}(D',\mathbb{C}) & \longrightarrow & \underline{H}(D,\mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

de $\underline{H}(D',\mathbb{C})$ contienne H, alors φ est un isomorphisme de D sur D'.

<u>Remarque.</u> - En dimension finie (voir [11]), on montre que, si D est un $\underline{H}(D,\mathbb{C})$-domaine d'holomorphie, il existe une application $f \in \underline{H}(D,\mathbb{C})$, telle que D soit le plus grand domaine de prolongement de f. Il n'en est pas de même en dimension infinie (voir [15]).

<u>Théorème 4.</u> - Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, complet pour la distance de Carathéodory. Soit $H \subset \underline{H}(D,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur D. Alors D est un H-domaine d'holomorphie.

Le théorème 2 et le théorème 4 entraînent immédiatement le

<u>Corollaire 5.</u> - Soit D un domaine borné homogène. Soit $H \subset \underline{H}(D,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions holomorphes bornées sur D. Alors D est un H-domaine d'holomorphie.

<u>Démonstration du théorème 4.</u> - Soit D un domaine borné complet pour la métrique de Carathéodory. Soit (D',p) un domaine étalé dans D, et soit $\varphi : D \longrightarrow D'$ un plongement ouvert compatible avec l'étalement p. (Nous identifierons D avec son image $\varphi(D)$). Supposons que toutes les fonctions holomorphes bornées sur D se prolongent à D'. Alors, pour tout $f \in H$, la norme du

prolongement de f à D' est égale à $\|f\|_D$. Pour montrer cela, il suffit de prolonger toutes les $1/(f-a)$ pour $|a| > \|f\|_D$. On en déduit que

$$d_c^{D'}|_D = d_c^D .$$

Supposons que φ ne soit pas un isomorphisme de D sur D'. Alors, on peut trouver un point a de D', n'appartenant pas à D, et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de D convergeant vers a. Du fait que $d_c^{D'}(x_n,a) \longrightarrow 0$, on déduit que les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une suite de Cauchy pour la distance de Carathéodory dans D. Cette suite n'a pas de limite dans D, contradiction. Le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Blanchard et H. Cartan. Généralités sur les fonctions automorphes : cas d'un domaine borné. Séminaire Cartan E.N.S. 1953-1954, exposé 1, (Edition Benjamin, New-York).

[2] H. Behnke et P. Thullen. Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlichen. 2^{e} édition, Ergebnisse der Math., 51, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[3] N. Bourbaki. Topologie générale. Hermann, Paris.

[4] N. Bourbaki. Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats. Hermann, Paris.

[5] N. Bourbaki. Groupes et algèbres de Lie. Hermann, Paris.

[6] E. Cartan. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11, 1936, p. 116-162.

[7] H. Cartan. Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique. J. de mathématiques pures et appliquées, 9^{e} série, 10, 1931, p. 1-114.

[8] H. Cartan. Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné. Math. Zeitschrift, 35, 1932, p. 760-773.

[9] H. Cartan. Sur les groupes de transformations analytiques. Hermann, Paris, 1935.

[10] H. Cartan. Sur les fonctions de n variables complexes : les transformations du produit topologique de deux domaines bornés. Bulletin de la société math. de France, 64, 1936, p. 37-48.

[11] H. Cartan. Domaines d'holomorphie et domaines de convergence : Théorie de la convexité (I). Séminaire Cartan E.N.S. 1951-1952, exposé 8, (Edition Benjamin, New-York).

[12] H. Cartan. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, Paris, 1961.

[13] H. Cartan. Calcul différentiel. Hermann, Paris, 1967.

[14] H. Cartan. Formes différentielles. Hermann, Paris, 1967.

[15] S. Dineen. The Cartan-Thullen theorem for Banach spaces. Annali scuola normale superiore Pisa, 24, 1970, p. 667-676.

[16] A. Douady. Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Annales de l'institut Fourier, 1966, p. 1-95.

[17] N. Dunford et J. Schwartz. Linear operators, part I. Interscience publishers, inc., New-York, 1957.

[18] S. Greenfield et N. Wallach. Automorphism group of bounded domains in Banach spaces. Transactions of the A.M.S.,

166, 1972, p. 45-57.

[19] R. Gunning et H. Rossi. Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, inc., London, 1965.

[20] L. Harris. Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces. Proceedings on infinite dimensional holomorphy. Lecture Notes, 364, p. 13-40. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[21] T. Hayden et T. Suffridge. Biholomorphic maps in Hilbert space have a fixed point. Pacific journal of mathematics, 38, 1971, p. 419-422.

[22] W. Kaup, Y. Matsushima, et T. Ochiai. On the automorphisms and equivalences of generalized Siegel domains. American journal of mathematics, 92, 1970, p. 475-498.

[23] R. Narashiman. Several complex variables. Chicago lectures in mathematics, The university of Chicago press, Chicago, 1971.

[24] I. Piatetsky-Chapiro. On a problem proposed by E. Cartan. Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 124, 1959, p. 272-273.

[25] I. Piatetsky-Chapiro. Géométrie des domaines classiques et théorie des fonctions automorphes. (Traduction française). Dunod, Paris, 1966.

[26] V. Potapov. The multiplication of the J-contractive matrix functions. A.M.S. translations, series 2, 15, 1960, p. 131-243.

[27] J.-P. Ramis. Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe. Ergebnisse der Math., 53, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[28] A. Renaud. Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule de dimension infinie dans une autre. Bulletin des sciences mathématiques, 2^{e} série, 97, 1973, p. 129-159.

[29] E. Spanier. Algebraic topology. McGraw-Hill, New-York, 1966.

[30] T. Tsuji. Siegel domains over self-dual cones and their automorphisms. Nagoya math. journal, 55, 1974, p. 33-80.

[31] J.-P. Vigué. Sur le groupe des automorphismes analytiques d'un ouvert borné d'un espace de Banach complexe. Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, 278, A, 1974, p. 617-620.

[32] E. Vinberg. Homogeneous cones. Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., 133, 1960, p. 9-12 .