UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 177 - 76 . 50

1) AN Ω-THEOREM OF THE "NON EFFECTIVE" TYPE

2) SUR UN THEOREME DE TITCHMARSH

B. SAFFARI

Publication Mathématique d'Orsay

An Ω-theorem of the "non-effective" type.

B. SAFFARI

1. Introduction.

1.1. Throughout, $\rho = \beta + i\gamma$ denotes a non-trivial zero of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$. (Euler's constant will therefore be called C instead of γ). The complex variable s is written $s = \sigma + it$. The implied constants in the O symbol of Landau and the $\ll$ symbol of Vinogradov are absolute, unless otherwise stated. (Thus symbols such as O_ε and $\ll_\varepsilon$ mean that the implied constants depend at most on ε). We also make use of the symbols Ω and $\Omega_\pm$.

Finally, by the expression "numerical constant" we mean an absolute constant that can be effectively computed to any given decimal place.

1.2. We shall not discuss the relevance of the title's term "non-effective" in the sense of mathematical logic. We chose this term since we could not find a more appropriate one to describe the situation. (We point out, however, that it appears to be the appropriate term indeed). At any rate, its meaning will be made clear by what follows.

1.3. Our purpose is to prove a theorem of the form

$$F(x) = \Omega(x^{K-\varepsilon}) \qquad \text{(for every } \underline{\text{fixed}}\ \varepsilon > 0\text{).}$$

where the function $F(x)$ will be defined below, and K is an absolute constant that can be seen to be $> \frac{2}{9}$, while we have no way of finding any numerical constant $\delta > 0$ such that $K \geqslant \frac{2}{9} + \delta$. The reason is that K is defined in terms of the localization of the zeros of $\zeta(s)$, in such a manner that we cannot find any numerical lower bound for $K - \frac{2}{9}$ unless some form of the Riemann hypothesis is settled. Our interest in this theorem lies precisely in the "non-effective" nature of the absolute constant K, and not in the special properties of the cube-free integers. If instead of the cube-frees we consider the square-frees or the k-th power frees $(k \geqslant 4)$ we do not obtain any "non-effective" phenomenon of this kind.

In the case of the latter numbers (with $k \geqslant 4$) the corresponding divisor problems are essentially equivalent to the Dirichlet divisor problem, with comparable (although sometimes less accurate) results, while in the case of the square-frees the corresponding divisor problem gives rise to conjectures which are "essentially" comparable with (or somewhat stronger than) the Riemann hypothesis. We leave out the details of these comparisons, since they are not very interesting.

Our result is as follows :

THEOREM. Let $\Delta(x)$ denote the error-term in the formula for the sum-function of the number of cube-free divisors of n, that is

$$(1.1) \qquad \Delta(x) = \mathcal{T}(x) - \frac{x\log x}{\zeta(3)} - \left(\frac{2C-1}{\zeta(3)} - \frac{3\zeta'(3)}{\zeta^2(3)}\right)x$$

where $\mathcal{T}(x) = \sum_{n\leqslant x} f(n)$ and $f(n)$ is the number of cube-free divisors of the positive integer n. Then, as $x \to \infty$, for every fixed $\varepsilon > 0$ we have

$$(1.2) \qquad) = \Omega(x^{K-\varepsilon})$$

with

$$(1.3) \qquad K = \begin{cases} \frac{1}{4} & \underline{\text{if}} \quad \theta < \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} - \frac{\omega}{9} & \underline{\text{if}} \quad \theta > \frac{3}{4} \end{cases}$$

<u>where</u> ω <u>is the infimimum of the real parts of those zeros</u> ρ <u>which satisfy</u>

$$(1.4) \qquad \frac{3}{4} \leqslant \beta \leqslant \theta.$$

If ω exists (that is, if $\theta > \frac{3}{4}$), then $\omega < 1$, hence

$$K > \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Therefore the inequality $K > \frac{2}{9}$ holds unconditionally. However, in the event that $\theta = 1$ or is very close to 1, and assuming that the only zeros ρ which satisfy (1.4) lie in a very narrow strip, we see that (1.3) provides no numerical lower bound for the positive constant $K - \frac{2}{9}$.

1.4. In this connection we mention a conjecture of Charles Pisot, which contradicts the Riemann hypothesis. Pisot conjectures that, on the contrary, if the Riemann hypothesis is false, then the real parts β are everywhere dense in $[0,1]$. But it is rather surprising that, in the case of our theorem, Pisot's conjecture renders the same service as the Riemann hypothesis, that is, implies the <u>optimal</u> equality

$$(1.5) \qquad K = \frac{1}{4}.$$

The equality (1.5) could indeed be expected to be optimal. In effect, due to various considerations which we shall not develop here, one would conjecture that for every $\varepsilon > 0$

$$(1.6) \qquad \Delta(x) = O_{\varepsilon}(x^{\frac{1}{4} + \varepsilon}),$$

$$(1.7) \qquad \Delta(x) = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{4} - \varepsilon}),$$

and

$$(1.8) \qquad \left(\frac{1}{x}\int_0^x |\Delta(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \Omega(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}).$$

1.5. I am indebted to the logician Arturo SANGALLI and to the number-theorists Edward L. COHEN, Hubert DELANGE and Robert C. VAUGHAN for various corrections and suggestions.

2. The method of proof.

2.1. The proof is straightforward modulo the following two observations.

2.1.1. If $\theta \leqslant \frac{3}{4}$, then on letting

$$(2.1) \qquad \tilde{\Delta}(x) = \left(\frac{1}{x}\int_0^x |\Delta(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

we have for every $\varepsilon > 0$

$$(2.2) \qquad \tilde{\Delta}(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon})$$

and

$$(2.3) \qquad \tilde{\Delta}(x) = O_{\varepsilon}(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}),$$

similar to the (unconditional) results for the Dirichlet divisor problem, although (2.2) and (2.3) are not as precise as the best of the latter results (Tong Kwang Chang [13], Chandrasekharan - Raghavan Narasimhan [2]), which show that the corresponding quadratic mean of the error-term over $[0,x]$ (comparable with $\tilde{\Delta}(x)$) is

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{6}} \cdot \frac{\zeta^2(\frac{3}{2})}{\sqrt{\zeta(3)}} x^{\frac{1}{4}} + O(x^{-\frac{1}{4}}(\log x)^5).$$

Clearly (2.2) implies (1.2) when $\theta \leqslant \frac{3}{4}$. We point out, however, that the assumption $\theta \leqslant \frac{3}{4}$ is unnecessarily strong to obtain (2.2). Actually (2.2) is true modulo the assumption

$$(2.4) \qquad \zeta(\tfrac{3}{4} + it) \ll_{\varepsilon} |t|^{\varepsilon}$$

$(|t| \to \pm\infty,\ \varepsilon > 0)$, which is a <u>weak Lindelöf hypothesis</u>.

N.B. We shall not prove (2.3), which is unnecessary for our purpose. We just mention that it can be obtained via Lemma 3 and the hypothesis $\theta \leqslant \frac{3}{4}$.

2.1.2. If $\theta > \frac{3}{4}$, then we make use of the following observation (trivially valid even if $\theta \leqslant \frac{3}{4}$) : Letting

$$\theta_3 = \sup\{\beta : \zeta(\rho) = 0, \ \zeta(\rho/3) \neq 0\}, \tag{2.5}$$

then we have

$$\Delta(x) = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{3}\theta_3 - \varepsilon}). \tag{2.6}$$

From (2.6) we derive (1.2) in the case $\theta > \frac{3}{4}$, since in this case we shall observe (Lemma 1 with $\eta = 3$) that

$$\theta_3 \geqslant 1 - \frac{\omega}{3}. \tag{2.7}$$

Moreover, if $\theta > \frac{3}{4}$, we still have something comparable to (2.2), namely

$$\tilde{\Delta}(x) = \Omega(x^{\frac{1}{3}\theta_3 - \varepsilon}) \qquad \text{for every } \varepsilon > 0, \tag{2.8}$$

and the exponent is $> \frac{2}{9}$ by (2.7). We shall not prove (2.8), since it is contained in Lemma 3 of section 5. In view of (2.2), (2.6), (2.7) and (2.8) we see that in each of the cases $\theta \leqslant \frac{3}{4}$ and $\theta > \frac{3}{4}$ something better than (1.2) is true.

2.2. We easily obtain (2.7) from the remarks we make in the next section about the possible common zeros (in the critical strip) between $\zeta(s)$ and $\zeta(3s)$. In fact we make these remarks, more generally, about the common zeros between $\zeta(s)$ and $\zeta(\eta s)$, since this might have some interest of its own.

2.3. Finally, let us also mention that if $\frac{2}{3} < \theta \leqslant \frac{3}{4}$, not only do we have (2.2), but just as in the case $\theta > \frac{3}{4}$ we have

$$(2.9) \qquad \Delta(x) = \Omega_{\pm}(x^{\alpha}) \qquad (\text{with } \alpha > \tfrac{2}{9}).$$

This is true because of (2.6) (valid unconditionally) and Corollary 2 below (with $\eta = 3$). Moreover, in this case (that is, if $\frac{2}{3} < \theta \leqslant \frac{3}{4}$), the α in (2.9) is exactly $\frac{\theta}{3}$, in view of (2.6) and Corollary 1 below. Thus the "ideal case" appears to be the case $\theta = \frac{3}{4}$, since then all three <u>optimal</u> relations (1.6), (1.7) and (1.8) hold.

3. Common zeros between $\zeta(s)$ and $\zeta(\eta s)$.

3.1. Let $\eta > 1$ be fixed. A trivial consequence of the Riemann hypothesis is the following statement, which we call Hypothesis (H_η).

(H_η) : The functions $\zeta(s)$ and $\zeta(\eta s)$ have no common zero in the critical strip.

So far as we know, there is no known proof of (H_η), for any $\eta > 1$, that does not assume some form of the "weak Riemann hypothesis" $\theta < 1$.

If ρ is a non-trivial zero of $\zeta(s)$, we say that ρ is η-regular if $\zeta(\rho/\eta) \neq 0$, and η-exceptional if $\zeta(\rho/\eta) = 0$. Thus (H_η) is equivalent to saying that all non-trivial zeros are η-regular.

Let

(3.1) $$\theta_\eta = \sup\{\beta : \quad \rho \text{ is } \eta\text{-regular}\}.$$

Thus

(3.2) $$\frac{1}{2} \leqslant \theta_\eta \leqslant \theta$$

since the firt zero $\rho_1 = \frac{1}{2} + i\gamma_1$ above the real axis is η-regular. A consequence of Hypothesis (H_η) is the following statement :

(H^*_η) $$\theta_\eta = \theta.$$

Even (H^*_η) is unproved. To make some remarks in this respect, define

$$U_\eta(\sigma + it) = 1 - \frac{\sigma}{\eta} + i\,\frac{t}{\eta},$$

so that a zero ρ is η-exceptional if and only if $U_\eta(\rho)$ is a zero of $\zeta(s)$. In view of this we can make the following remarks :

3.1.1. If $\theta \leqslant \frac{\eta}{\eta+1}$, then (H^*_η) is true.

3.1.2. If $\theta < \frac{\eta}{\eta+1}$, then (H_η) is true. This means that if the weak Riemann hypothesis $\theta < 1$ is true, then (H_η) is true for all real numbers η such that $\eta > \frac{\theta}{1-\theta}$. Thus there are at most $[\frac{\theta}{1-\theta} - 1]$ integers $k \geqslant 2$ such that (H_k) is not true.

3.1.3. If $\theta = \frac{\eta}{\eta+1}$, then there is no η-exceptional zero outside the line $\sigma = \frac{\eta}{\eta+1}$. And if this line contains any zeros at all, then at least two of them are η-regular (those two for which $|\gamma|$ is minimum).

3.1.4. We have the following lemma :

LEMMA 1. Suppose that $\theta > \frac{\eta}{\eta+1}$, and let ω_η denote the infimimum of β taken over all those zeros ρ which satisfy

$$\frac{\eta}{\eta+1} \leqslant \beta \leqslant \theta, \tag{3.3}$$

(so that $\omega_\eta \leqslant \theta < 1$ if $\theta < 1$, and $\omega_\eta < 1$ is $\theta = 1$). Then

$$\theta_\eta \geqslant 1 - \frac{1}{\eta}\omega_\eta > 1 - \frac{1}{\eta}. \tag{3.4}$$

This is obvious if $\theta_\eta \geqslant \frac{\eta}{\eta+1}$, since the inequality $\omega_\eta \geqslant \frac{\eta}{\eta+1}$ implies $1 - \frac{1}{\eta}\omega_\eta \leqslant \frac{\eta}{\eta+1}$. And if $\theta_\eta < \frac{\eta}{\eta+1}$, this follows from the following lemma. (More precisely, it follows from the fact that there is no zero in the strip S_o defined below).

LEMMA 2. Suppose that $\theta_\eta < \frac{\eta}{\eta+1}$. Let S_k be the open strip

$$\eta^k\theta_\eta < \sigma < \eta^{k+1}(1-\theta_\eta),$$

where k is a non-negative integer. Then there is no zero of $\zeta(s)$ in $\bigcup_{k\geqslant o} S_k$.

Remark. The only values of k to be considered are those such that

$$k \leqslant \frac{\log \frac{1}{\theta_\eta}}{\log \eta},$$

for otherwise $\eta^k \theta_k > 1$.

Proof of Lemma 2. By contradiction. Suppose that there is a zero ρ in a strip S_k. Then ρ is η-exceptional, and so are its $k+1$ homothetics $\eta^{-m}\rho$ $(m = 0,1,2,\dots,k)$. In particular, $\eta^{-k}\rho$ is an η-exceptional zero lying in S_0. Define a sequence $s_0, s_1, s_2, \dots$ inductively by $s_0 = \eta^{-k}\rho$ and $s_{h+1} = U_\eta(s_h)$. Since the condition

$$\theta_\eta < \sigma < \eta(1-\theta_\eta)$$

implies

$$\theta_\eta < 1 - \frac{\sigma}{\eta} < 1 - \frac{\theta_\eta}{\eta} = \eta(1-\theta_\eta) - \frac{\eta^2-1}{\eta}\left(\frac{\eta}{\eta+1} - \theta_\eta\right) < \eta(1-\theta_\eta),$$

it follows that U_η maps S_0 into itself. Hence all the s_h $(h = 0,1,2,\dots)$ belong to S_0, and therefore are η-exceptional zeros of $\zeta(s)$. Writing $s_h = u_h + iv_h$, we have $v_h = \eta^{-h}v_0$, so that $\lim_{h\to\infty} v_h = 0$. This is impossible. Thus Lemma 2 is proved.

COROLLARY 1. *If* $\eta \geqslant 2$ *and*

(3.5) $$\theta_\eta \leqslant \frac{\eta-1}{\eta},$$

then (H_η) *is true. In particular, if* $\eta \geqslant 2$, *then the hypothesis* $\theta_\eta = \frac{1}{2}$ *is equivalent to the Riemann hypothesis.*

Proof. Since $\frac{\eta-1}{\eta} < \frac{\eta}{\eta+1}$, in view of Remark 3.1.2 above it suffices to observe that $\theta_\eta = \theta$. This follows from (3.2) and the fact that, by (3.5), the "empty" strip S_0 of Lemma 2 contains the strip $\theta_\eta < \sigma < 1$.

For the sake of (2.9), we also state the following corollary, which follows from Lemma 1 if $\theta > \frac{\eta}{\eta+1}$, and from the validity of (H^*_η) if $\theta \leqslant \frac{\eta}{\eta+1}$.

COROLLARY 2. If $\theta > \frac{\eta-1}{\eta}$, then $\theta_\eta > \frac{\eta-1}{\eta}$.

Finally we mention without proof (with no application in mind, but for its own interest) :

COROLLARY 3. If there is an η-exceptional zero in the strip $1-\theta_\eta \leqslant \sigma \leqslant \theta_\eta$, then necessarily

$$\theta_\eta \geqslant \frac{\eta^2-\eta+1}{\eta^2+1} \quad \text{and} \quad \theta > \frac{\eta}{\eta+1}.$$

3.2. To conclude our remarks about the common zeros between $\zeta(s)$ and $\zeta(\eta s)$, we observe that if

$$N_\eta(T) = \{\rho : \quad \rho \text{ is } \eta\text{-exceptional}, \quad 0 < \gamma < T\},$$

then the known zero density estimates provide upper bounds for $N_\eta(T)$, via

$$N_\eta(T) \leqslant 2N(\tfrac{\eta}{\eta+1}, T) \tag{3.6}$$

where

$$N(\sigma,T) = \mathrm{Card}\,\{\rho : \quad 0 < \gamma < T, \quad \beta \geqslant \sigma\},$$

since an η-exceptional zero ρ either lies in the half-plane $\sigma \geqslant \frac{\eta}{\eta+1}$, or lies in the half-plane $\sigma < \frac{\eta}{\eta+1}$ in which case $U_\eta(\rho)$ lies in the half-plane $\sigma > \frac{\eta}{\eta+1}$. However (3.6) is very crude, so one might ask whether there are sharper estimates for $N_\eta(T)$ than those obtained *via* (3.6).

4. Proof of (2.6).

This is straightforward. Recall that we denoted by $f(n)$ the number of cube-free divisors of the positive integer n, and write

$$(4.1) \qquad g(n) = f(n) - \frac{\log n}{\zeta(3)} + \frac{3\zeta'(3)}{\zeta^2(3)} - \frac{2C}{\zeta(3)},$$

$$(4.2) \qquad \Delta^*(x) = \sum_{n \leqslant x} g(n)$$

and, for $\sigma > 1$ (and then elsewhere by meromorphic continuation),

$$(4.3) \qquad F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{\Delta^*(x)}{x^{s+1}}dx =$$

$$= \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(3s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(3)} + \left(\frac{3\zeta'(3)}{\zeta^2(3)} - \frac{2C}{\zeta(3)}\right)\zeta(s).$$

By (2.5) and (4.3), for every $\delta > 0$ there is at least one pole of $F(s)$ in the strip

$$\tfrac{1}{3}\theta_3 - \delta < \sigma \leqslant \tfrac{1}{3}\theta_3 .$$

Hence, denoting by σ_o the convergence abscissa of the integral in (4.3), it follows from (3.2) that

$$(4.4) \qquad \sigma_o \geqslant \tfrac{1}{3}\theta_3 \geqslant \tfrac{1}{6}.$$

It is easily verified that $F(s)$ has a removable singularity at $s = 1$, and is holomorphic in a neighbourhood of the real half-axis $\sigma > \frac{1}{6}$. Hence, by (4.4), σ_o is not a singularity of $F(s)$. By (4.2), (4.3) and Landau's theorem ([1], Lemma IV.8), this implies

$$(4.5) \qquad \Delta^*(x) = \Omega_{\pm}(x^{\sigma_o - \varepsilon}) \qquad \text{(for every } \varepsilon > 0).$$

Also, by (1.1), (4.1) and (4.2),

$$(4.6) \qquad \Delta(x) = \Delta^*(x) + O(\log x).$$

Now (2.6) follows at once from (4.4), (4.5) and (4.6).

As we have already pointed out in section 2, by (2.6) and (2.7) the theorem is true in the case $\theta > \frac{3}{4}$.

5. Proof of (2.2) modulo the "weak Lindelöf hypothesis" (2.4).

5.1. We first of all require a lemma, which is an analogue of Theorem 12.5 of Titchmarsh [12], and for whose proof we refer to [10].

LEMMA 3. (Unconditional in terms of θ). Let λ denote the supremum of the real parts of the poles (other than $s = 1$) of the meromorphic function $\zeta^2(s)/s\zeta(3s)$, so that

(5.1) $$\tfrac{1}{3}\theta_3 \leqslant \lambda \leqslant \tfrac{1}{3}.$$

Then there exist real numbers σ with $\lambda < \sigma < 1$ such that

(5.2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\sigma+it)|^4}{|\sigma+it|^2\,|\zeta(3\sigma+3it)|^2}\,dt < \infty.$$

These σ form an interval, whose left endpoint W satisfies

(5.3) $$W = \inf\{\theta,\quad \tilde{\Delta}(x) \ll_\theta x^\theta\}.$$

W is also the infimimum of those σ with $\lambda < \sigma < 1$ such that, as $T \to +\infty$, for every $\varepsilon > 0$

(5.4) $$\int_{-T}^{T} \frac{|\zeta(\sigma+it)|^4}{|\sigma+it|^2\,|\zeta(3\sigma+3it)|^2}\,dt \ll_\varepsilon T^\varepsilon.$$

5.2. We also require the following results, which we state as lemmas (Titchmarsh [12], formula (4.12.3), p. 68).

LEMMA 4. Let

$$\chi(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} = 2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s).$$

Then, as $t \to +\infty$, we have

$$(5.5) \qquad \chi(s) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma + it - \frac{1}{2}} e^{i(t + \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

<u>in every strip</u> $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, <u>with the implicit constant depending at most on</u> σ_1 <u>and</u> σ_2 .

<u>LEMMA 5.</u> <u>Let</u> $\mu(\sigma)$ <u>denote the "Lindelöf function" of the zeta function, defined by</u>

$$(5.6) \qquad \mu(\sigma) = \inf\{\alpha : \quad \zeta(\sigma+it) \ll_{\sigma,\alpha} |t|^{\alpha} \quad \text{as} \quad |t| \to \infty\}.$$

<u>Then</u> $\mu(\sigma)$ <u>is convex, non-decreasing, and moreover</u>

$$(5.7) \qquad \mu(\tfrac{1}{2}) < \tfrac{1}{6}.$$

<u>REMARK.</u> The inequality (5.7) is sufficient for our purpose as it is stated, although sharper results are known (see for example Titchmarsh [12], Theorem 5.18, where it is proved that $\mu(\frac{1}{2}) \leqslant \frac{27}{164}$, or of one [14], [7], [11], [6], [4], [3] or [5]). The sharpest two of these results are those of Haneke-Chen Jing Run ([4], [3]) and Kolesnik [5], which respectively imply $\mu(\frac{1}{2}) \leqslant \frac{6}{37}$ and $\mu(\frac{1}{2}) \leqslant \frac{173}{1067}$. Kolesnik's result is sharper, since $\frac{6}{37} = \frac{6402}{39479}$, while $\frac{173}{1067} = \frac{6401}{39479}$.

<u>5.3.</u> We now proceed with the proof of (2.2) assuming (2.4), and largely follow the method of Titchmarsh [12], Theorem 12.6 (A), p. 272.

As in [12], we observe that whenever $T > 1$,

$$(5.8) \qquad T \ll_{\sigma} \int_{\frac{T}{2}}^{T} |\zeta(\sigma+it)|^4 \, dt \qquad\qquad (\tfrac{1}{2} < \sigma < 1),$$

and note that, by (5.6), whenever $\varepsilon > 0$ and $0 < \sigma < \frac{1}{3}$, we can find $t_0 = t_0(\varepsilon, \sigma)$ such that whenever $|t| \geqslant t_0$,

$$(5.9) \qquad |t|^{-2\mu(3\sigma)-\varepsilon} \ll_{\varepsilon,\sigma} \frac{1}{|\zeta(3\sigma+3it)|^2}.$$

Then, by (5.8), (5.9) and Lemma 4, whenever $\varepsilon > 0$ and $0 < \sigma < \frac{1}{3}$, there exist two positive real numbers $T_0 = T_0(\varepsilon, \sigma)$ and $B = B(\varepsilon, \sigma)$ such that

$$(5.10) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\sigma+it)|^4}{|\sigma+it|^2\, |\zeta(3\sigma+3it)|^2}\, dt > \int_{\frac{T}{2}}^{T} \frac{|\zeta(\sigma+it)|^4}{|\sigma+it|^2\, |\zeta(3\sigma+3it)|^2}\, dt$$

$$\geqslant BT^{1-4\sigma-2\mu(3\sigma)-\varepsilon}$$

whenever $T > T_0$. Therefore, by (5.10) and Lemma 3, to prove (2.2) it suffices to verify that

$$(5.11) \qquad 1-4\sigma-2\mu(3\sigma) > 0 \qquad \left(\text{whenever } \tfrac{1}{6} \leqslant \sigma < \tfrac{1}{4}\right).$$

Writing $x = 3\sigma$ we see that (5.11) is equivalent to saying that, for $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{4}$, the graph of $y = \mu(x)$ is strictly below the semi-open segment

$$y = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x, \qquad \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{4},$$

which joins the points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ and $(\frac{3}{4}, 0)$. But this fact follows from Lemma 2 and from

$$(5.12) \qquad \mu(\tfrac{3}{4}) = 0.$$

which is a restatement of the assumption (2.4). This completes the proof of (2.2), and therefore also that of the theorem.

Appendix 1 : A companion Ω-theorem.

It may be of some interest to mention another Ω-result, similar but somewhat different from the above theorem, which like it is not attractive for its own sake but on account of the non-effective (or effective) nature of its statement (Relation (6.2) below).

In the above theorem replace $f(n)$ by the number $h(n)$ of ways of writing n as a product of two cube-free positive integers. Then the corresponding error-term

$$G(x) = \sum_{n \leqslant x} h(n) - \frac{x \log x}{\zeta^2(3)} - \left(\frac{2C-1}{\zeta^2(3)} - \frac{6\zeta'(3)}{\zeta^3(3)}\right)x$$

is trivially seen to satisfy, without any assumption on θ, the <u>optimal</u> relation

$$G(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}) \qquad \text{(for every } \varepsilon > 0)$$

as a consequence of a very general theorem of Richert [9]. But in this case the "weak Lindelöf hypothesis" (2.4) (or (5.12)) does not appear to imply

$$(6.1) \qquad \left(\frac{1}{x}\int_0^x |G(t)|^2\, dt\right)^{1/2} = \Omega(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}).$$

What we obtain from (2.4) is the same as with no hypothesis at all, namely

$$(6.2) \qquad \left(\frac{1}{x}\int_0^x |G(t)|^2\, dt\right)^{1/2} = \Omega(x^{K-\varepsilon})$$

for every fixed $\varepsilon > 0$, where K is given by (1.3). Of course, by (6.2) and (1.3), the "weak Riemann hypothesis" $\theta \leqslant \frac{3}{4}$ suffices to have (6.1), but we can still obtain (6.1) from an assumption which is quite weaker than $\theta \leqslant \frac{3}{4}$, although it is not a consequence of it. Indeed, suppose that in addition to (2.4), the left derivative of the (convex) Lindelöf function at $\sigma = \frac{3}{4}$ satisfies

$$(6.3) \qquad \mu_-'(\tfrac{3}{4}) > -\tfrac{1}{3}.$$

Then easy modifications of the proof of (2.2) show that (6.1) holds. In view of (6.3), to have the optimal result (6.1) it is therefore sufficient to assume that $\mu(\frac{3}{4} - \delta) = 0$ for some $\delta > 0$.

Appendix 2 :

The difficulty of an "effective" improvement by means of sharper upper bounds for the Lindelöf function.

We saw that the "weak Lindelöf hypothesis" $\mu(\frac{3}{4}) = 0$ implies the <u>optimal</u> result (1.8) (which is the same as (2.2)). Hence one might wonder whether, by means of some slightly weaker upper bound for $\mu(\frac{3}{4})$ (or more generally by the known upper bounds for the Lindelöf function $\mu(\sigma)$, see for example Titchmarsh [12], Chapter V), it would be possible to prove an unconditional result of the form

$$(7.1) \qquad \tilde{\Delta}(x) = \Omega(x^{\alpha})$$

where α is $> \frac{2}{9}$ <u>and</u> effectively computable.

Indeed, it follows from (5.10) and Lemma 3 that, if H is a real number with

$$(7.2) \qquad \frac{1}{6} < H \leqslant \frac{1}{4}$$

such that

$$(7.3) \qquad 1-4\sigma-2\mu(3\sigma) > 0 \qquad (\text{whenever } \frac{1}{6} \leqslant \sigma < H),$$

then, for every fixed real number $\varepsilon > 0$,

$$(7.4) \qquad \tilde{\Delta}(x) = \Omega(x^{H-\varepsilon}).$$

Thus, in case we can find an <u>effectively computable</u> H which satisfies (7.2) and (7.3) and which in addition is $> \frac{2}{9}$, then (7.1) holds for any choice of α such that $\frac{2}{9} < \alpha < H$.

Rewriting (7.3) as $\mu(3\sigma) < \frac{1}{2} - 2\sigma$, we see that for (7.3) to hold with some $H > \frac{2}{9}$, it would be necessary (and also trivially sufficient, in view of Lemma 5) that

$$\mu(\tfrac{2}{3}) < \frac{1}{18}, \tag{7.5}$$

and if H is to be effectively computable, then it would be necessary (and sufficient) that $\mu(\frac{2}{3}) \leqslant L$ where L is $< \frac{1}{18}$ and effectively computable.

No estimate as sharp as (7.5) is known to this day. In view of Lemma 5 (with Kolesnik's sharper result $\mu(\frac{1}{2}) \leqslant \frac{173}{1067}$) and van der Corput's result

$$\mu(\tfrac{5}{7}) \leqslant \frac{1}{14} \tag{7.6}$$

(see Titchmarsh [12], Theorem 5.14, with $\ell = 4$), it follows that

$$\mu(\tfrac{2}{3}) \leqslant \frac{1759}{19206}, \tag{7.7}$$

the right side of (7.7) being comprised between $\frac{1}{10}$ and $\frac{1}{11}$. Inequalities such as (7.6) and (7.7) can be somewhat sharpened by the method of exponent pairs (Rankin [8]), but the results obtained would still be very far from (7.5).

Similarly, the estimates of $\mu(\frac{3}{4})$ that one would require to obtain a relation of the form (7.1) are far beyond reach, and the situation is even more drastic than with $\mu(\frac{2}{3})$.

Thus the reason why the content of section 3 (common zeros between $\zeta(s)$ and $\zeta(\eta s)$) was successful in leading to a non-trivial result is due to fortuitous circumstances, and improving upon our theorem by methods of trigonometric sums appears to be quite hard. The best we can obtain via the above-mentioned upper bounds of $\mu(\frac{1}{2})$ and $\mu(\frac{5}{7})$ is

$$\tilde{\Delta}(x) = \Omega(x^{\frac{404}{2337} - \varepsilon}),$$

which is not as good as (1.2).

REFERENCES

[1] A. BLANCHARD, Initiation à la théorie analytique des nombres premiers, Dunod, Paris, 1969.

[2] K. CHANDRASEKHARAN and RAGHAVAN NARASIMHAN, On the mean value of the error term for a class of arithmetical functions, Acta Mathematica 112 (1964), 41-67.

[3] CHEN JING-RUN, On the order of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Acta Math. Sinica 15 (1965), 159-173 (Chinese), translated into English in Chinese Math. - Acta 6 (1965), 463-478.

[4] W. HANEKE, Verschärfung der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Acta Arith. 8 (1963), 357-430.

[5] G.A. KOLESNIK, Estimation of some trigonometric sums, Acta Arith. 25 (1973), 7-30 (Russian).

[6] S.H. MIN, On the order of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (3) (1949), 448-472.

[7] E. PHILLIPS, The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method, Q.J.O. 4 (1933), 209-225.

[8] R.A. RANKIN, van der Corput's method and the theory of exponent pairs, Q.J.O. (2) 6 (1955), 147-153.

[9] H.-E. RICHERT, Zur multiplikativen Zahlentheorie, J. reine angew. Math. 206 (1961), 31-38.

[10] B. SAFFARI, Sur un théorème de Titchmarsh (to appear).

[11] E.C. TITCHMARSH, On the order of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Q.J.O. 13 (1942), 11-17.

[12] E.C. TITCHMARSH, The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon Press, Oxford.

[13] TONG KWANG CHANG, On divisor problems. III, Acta Math. Sinica 6 (1956), 515-541.

[14] A. WALFISZ, Zur Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, Göttinger Nachrichten (1924), 155-158.

B. SAFFARI
Département de Mathématiques
Université de Paris XI
91405 ORSAY
FRANCE

Sur un théorème de Titchmarsh

B. SAFFARI

1. Introduction.

1.1. Le Ω-théorème démontré dans [6] repose en partie sur un lemme (Lemma 3 de [6]) que, en raison de la longueur de sa démonstration, nous nous bornons là à énoncer, renvoyant pour la démonstration au présent travail. L'objet de cet article est donc de démontrer ce lemme, reformulé ici d'une manière un peu plus générale que dans [6] : Ceci constitue l'unique résultat contenu dans le présent article.

On pourrait observer qu'en adoptant la méthode de notre démonstration on peut également rectifier la démonstration (partiellement incorrecte) du Théorème 12.5 de Titchmarsh [9], lequel est en fait la source du présent travail. D'ailleurs cette rectification du résultat de Titchmarsh nécessiterait moins de détails que notre démonstration ci-dessous, en raison de l'absence, dans la "bande critique", de singularités de la fonction génératrice correspondante.

1.2. Pour alléger l'écriture, et contrairement à [6], lorsque nous emploierons ici les notations (équivalentes) O et $\ll$ de Landau et de Vinogradov, cela ne signifiera pas nécessairement que les constantes implicites sont absolues : Elles peuvent au contraire dépendre de divers paramètres. Mais cela ne présentera pas d'inconvénient.

Comme d'habitude, la partie entière du nombre réel x sera notée par $[x]$.

1.3. Dans tout ce qui suit nous désignerons par $\Gamma(s)$ la fonction gamma, par $\zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann, par $s = \sigma + it$ la variable complexe, et par ρ un quelconque des zéros "non triviaux" (c.à.d. situés dans la bande critique $0 < \sigma < 1$) de $\zeta(s)$.

Pour éviter tout conflit avec la notation classique $\rho = \beta + i\gamma$ (et en particulier pour nous conformer sur ce point aux notations de [6]), nous désignerons par C la constante d'Euler.

Pour tout entier $r \geqslant 2$, nous désignerons par θ_r la borne supérieure des parties réelles de ceux des zéros non-triviaux ρ qui vérifient $\zeta(\rho/r) \neq 0$. De sorte que l'on a

$$\frac{1}{2} \leqslant \theta_r \leqslant \theta \leqslant 1,$$

θ désignant la borne supérieure des β. (Dans la terminologie de [6], ces ρ sont les zéros <u>r-réguliers</u> de la fonction zêta dans la bande critique).

Nous désignerons par $f_r(n)$ le nombre des diviseurs de l'entier positif n qui ne sont divisibles par la puissance r ième d'aucun nombre premier, de sorte que dans l'expression

$$(1.1) \qquad T_r(x) = \frac{x \log x}{\zeta(r)} + \left(\frac{2C - 1}{\zeta(r)} - \frac{r\zeta'(r)}{\zeta^2(r)}\right)x + \Delta_r(x)$$

de la fonction sommatoire $T_r(x) = \sum_{n \leqslant x} f_r(n)$, le "terme d'erreur" $\Delta_r(x)$ est, comme on le voit en adoptant un argument classique (Titchmarsh [9], Chap. 12) donné par

$$(1.2) \qquad \Delta_r(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{\delta - iT}^{\delta + iT} \frac{x^s \zeta^2(s)}{s\zeta(rs)}\, ds$$

pourvu que x ne soit pas entier, et que δ soit un nombre réel tel que $\delta < 1$ et tel que la bande $\delta < \sigma < 1$ ne renferme aucun pôle de la fonction méromorphe $\zeta^2(s)/\zeta(rs)$. La relation (1.2) signifie que $\Delta_r(1/x)$ a pour transformée de Mellin la fonction $\zeta^2(s)/\zeta(rs)$.

Le "terme principal"

$$\frac{x \log x}{\zeta(r)} + \left(\frac{2C - 1}{\zeta(r)} - \frac{r\zeta'(r)}{\zeta^2(r)}\right)x$$

est le résidu au pôle (double) $s = 1$ de $\zeta^2(s)/s\zeta(rs)$.

1.4. Dans [7] et dans [9], Titchmarsh démontre le résultat suivant (Theorem 12.5 de [9], p. 271), que nous énonçons ici avec quelques modifications de notations :

Soit k un entier $\geqslant 2$, et soit ξ_k la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels positifs σ tels que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\sigma + it)|^{2k}}{|\sigma + it|^2} dt < \infty.$$

Soit $R_k(x)$ le terme d'erreur dans le problème des diviseurs de Dirichlet-Piltz [voir [9], p. 263, où $R_k(x)$ est désigné par $\Delta_k(x)$], *et soit*

$$\beta_k = \inf\{\alpha : \qquad \left(\frac{1}{x}\int_0^x |R_k(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \ll x^\alpha\}.$$

Alors $\beta_k = \xi_k$, et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\sigma + it)|^{2k}}{|\sigma + it|^2} dt = \int_0^{\infty} |R_k(x)|^2 x^{-2\sigma - 1} dx$$

pourvu que $\sigma > \beta_k$.

La démonstration que Titchmarsh donne de ce résultat est fort douteuse (bien que l'énoncé en soit correct), en raison à la fois de lacunes dans [9] (pp. 271-272) et dans le théorème 71 de [8] auquel il se réfère. Néanmoins, ces lacunes peuvent être comblées grâce, par exemple, à des résultats de type "Phragmen-Lindelöf" de Hardy-Ingham-Polya [5] ou de Carlson [1,2,3], ou même de divers travaux de Titchmarsh lui-même.

1.5. Notre théorème s'apparente au résultat précité de Titchmarsh. En voici l'énoncé :

THEOREME. Pour r entier $\geqslant 2$, soit h_r la borne supérieure des parties réelles des pôles autres que 1 de la fonction méromorphe $\zeta^2(s)/s\zeta(rs)$, de sorte que l'on a évidemment

$$(1.3) \qquad \frac{1}{r}\,\theta_r \leqslant h_r \leqslant \frac{1}{r}.$$

Il existe alors des nombres réels σ tels que $h_r < \sigma < 1$ et tels que

$$(1.4) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\sigma + it)|^4}{|\sigma + it|^2\ |\zeta(r\sigma + rit)|^2}\,dt < \infty.$$

Ces σ forment un intervalle, dont l'extrémité inférieure w_r vérifie

$$(1.5) \qquad w_r = \theta_r$$

où

$$(1.6) \qquad \theta_r = \inf\{\theta : \quad \left(\frac{1}{x}\int_0^x |\Delta_r(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \ll x^{\theta}\}.$$

[Ceci entraîne en particulier que

$$\theta_r \geqslant \frac{1}{2}\,\theta_r$$

en raison de (1.3)]. Finalement, en désignant par w_r^* la borne inférieure des σ tels que $h_r < \sigma < 1$ et tels que, lorsque $T \to \infty$, on ait pour tout $\varepsilon > 0$

$$(1.7) \qquad \int_{-T}^{T} \frac{|\zeta(\sigma + it)|^4}{|\sigma + it|^2 \, |\zeta(r\sigma + rit)|^2} \, dt = \underline{O} \, (T^{\varepsilon}),$$

alors

$$(1.8) \qquad w_r^* = w_r \, .$$

La principale difficulté de la démonstration réside dans le fait que, contrairement au résultat précité de Titchmarsh où la fonction $\zeta^k(s)$ est holomorphe dans toute la bande critique, nous avons ici affaire à la fonction méromorphe $\zeta^2(s)/s\zeta(rs)$, dont en outre le comportement est plus difficile à étudier que celui de $\zeta^k(s)$.

La suite de l'article est consacré à la démonstration du théorème.

1.6. Hubert Delange a fait de précieuses critiques d'une première version de ce travail : Je l'en remercie bien vivement.

2. Existence dans l'intervalle $]h_r, 1[$ de nombres σ vérifiant (1.4).

Ceci est trivial. Il suffit de constater que (1.4) est satisfaite pour

$$\max(\frac{1}{4}, \frac{1}{r}) < \sigma < 1.$$

Or c'est bien le cas, puisque pour $\sigma > 1/r$ nous avons

$$\frac{1}{|\zeta(r\sigma + rit)|^2} \leqslant (\frac{\zeta(r\sigma)}{\zeta(2r\sigma)})^2,$$

et que d'autre part (cf. Titchmarsh [9], Chap. 12)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\zeta(\sigma + it)|^4}{|\sigma + it|^2} dt < \infty$$

pour tout σ tel que $1/4 < \sigma < 1$.

Quant au fait que les $\sigma \in]h_r, 1[$ qui vérifient (1.4) forment un <u>intervalle</u>, cela va résulter du lemme 2 que nous énoncerons plus loin, et dont l'applicabilité sera justifiée par le lemme 3.

3. Une fonction auxiliaire.

3.1. Pour la démonstration de la relation (1.5) (égalité $w_r = \theta_r$) nous aurons à considérer la fonction

$$H_r(s) = \frac{\zeta^2(s)}{r\zeta(rs)} - \left(\frac{2C-1}{\zeta(r)} - \frac{r\zeta'(r)}{\zeta^2(r)}\right) \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{\zeta(r)} \cdot \frac{1}{(s-1)^2}.$$

C'est une fonction méromorphe ayant pour pôles ceux de $\zeta^2(s)/s\zeta(rs)$, moins le point $s = 1$ comme on le voit facilement en considérant le développement de Laurent de $\zeta^2(s)/s\zeta(rs)$ au point 1. Donc :

$H_r(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > h_r$, mais dans aucun demi-plan $\sigma > h_r - \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$.

3.2. L'avantage d'introduire $H_r(s)$ réside dans le fait que, dans la relation (1.4), on peut remplacer l'intégrale par celle de $|H_r(\sigma + it)|^2$. Il est en effet clair que, pour $\sigma > h_r$, avec $\sigma \neq 1$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_r(\sigma + it)|^2 \, dt < \infty \tag{3.1}$$

si et seulement si la relation (1.4) a lieu.

3.3. Pour déterminer les σ tels que (3.1) ait lieu, nous nous servirons plus loin du fait que, du moins pour $\sigma > 1$, $H_r(s)$ n'est autre que l'intégrale de Laplace

$$H_r(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \Delta_r(e^u) du \qquad (\sigma > 1). \tag{3.2}$$

Pour démontrer (3.2), observons que pour $\sigma > 1$ nous avons

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(rs)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_r(s)}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{T_r(x)}{x^{s+1}}dx,$$

et par suite, en divisant par s et en utilisant (1.1),

$$\int_1^{\infty} \frac{\Delta_r(x)}{x^{s+1}}dx = H_r(s).$$

En faisant le changement de variable $x = e^u$, on obtient bien (3.2).

4. Deux lemmes.

4.1. Nous allons introduire ici les outils qui nous serviront à prouver l'inégalité $w_r \geqslant \theta_r$. Il s'agit, d'une part, de la relation de Parseval pour les fonctions holomorphes appartenant à ce qu'on appelle la classe $\mathfrak{H}^2(\alpha)$, d'autre part d'un théorème "du type Phragmen-Lindelöf" dû à Hardy, Ingham et Polya [5].

4.2. LEMME 1. Soit α un nombre réel, et désignons par $\mathfrak{H}^2(\alpha)$ l'ensemble des fonctions $f(s)$ de la variable complexe s, holomorphes pour $\sigma > \alpha$, et satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it)|^2 dt \leqslant \text{constante indépendante de } \sigma$$

pour tout $\sigma > \alpha$. Alors si $f \in \mathfrak{H}^2(\alpha)$, il existe une fonction $F(u)$ (à valeurs complexes), définie pour $u \geqslant 0$, localement intégrable, et telle que l'on ait

$$\int_0^{\infty} e^{-su} F(u)du = f(s) \qquad \text{pour} \quad \sigma > \alpha.$$

Et on a alors la relation de Parseval :

$$2\pi \int_0^{\infty} e^{-2\sigma u} |F(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it)|^2 dt,$$

valable pour tout $\sigma > \alpha$.

Pour la démonstration du lemme 1, cf. Doetsch [4], pp. 429-430.

4.3. Voici maintenant un résultat "du type Phragmen-Lindelöf" qui nous servira (sous une forme affaiblie) dans la démonstration de l'inégalité $\theta_r \leqslant w_r$:

LEMME 2. (Hardy, Ingham et Polya). Soit $f(s)$ une fonction holomorphe dans la bande $\lambda_1 < \sigma < \lambda_2$ (où $-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$) telle que $|f(s)|$ soit continue dans la bande fermée $\lambda_1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda_2$. Supposons qu'il existe une constante K telle que $0 < K < \pi/(\lambda_1 - \lambda_2)$ et telle que l'on ait, uniformément dans la bande $\lambda_1 < \sigma < \lambda_2$, la "condition de Phragmen-Lindelöf"

$$(4.1) \qquad f(\sigma + it) = O\,(\exp \exp(K|t|)).$$

Dans ces conditions, si l'intégrale

$$J(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it)|^p \, dt$$

(où p est un nombre réel > 0 fixé) converge pour $\sigma > \lambda_1$ et $\sigma = \lambda_2$, alors elle converge pour tout σ tel que $\lambda_1 < \sigma < \lambda_2$, et de plus

$$J(\sigma) \leqslant \max(J(\lambda_1), \quad J(\lambda_2))$$

et

$$J(\sigma) \leqslant (J(\lambda_1))^{\frac{\lambda_1 - \sigma}{\lambda_2 - \lambda_1}} (J(\lambda_2))^{\frac{\lambda_2 - \sigma}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$

(convexité logarithmique de $J(\sigma)$ dans l'intervalle $\lambda_1 \leqslant \sigma \leqslant \lambda_2$).

Démonstration : Ceci n'est autre que le théorème 7 de [5].

5. Validité de la "condition de Phragmen-Lindelöf" pour la fonction $H_r(s)$.

Nous devons justifier que $H_r(s)$ satisfait bien à une condition du type (4.1). Le résultat suivant (lemme 3) fournit en fait une estimation beaucoup plus fine, bien que celle-ci soit vraisemblablement encore très "en dessous de la vérité" (cf. Titchmarsh [9], Chap. 14).

LEMME 3. *Quel que soit* $\sigma_0 > h_r$, *quand* $|t|$ *tend vers l'infini nous avons*

$$H_r(\sigma + it) = O\,(\exp(A|t|\log^2|t|))$$

uniformément pour $\sigma \geqslant \sigma_0$, A *étant une constante positive convenable.*

Démonstration du lemme 3. Il revient évidemment au même d'établir que, si $\sigma_0 > h_r$, on a uniformément pour $\sigma \geqslant \sigma_0$

$$\frac{\zeta^2(\sigma + it)}{(\sigma + it)\,\zeta(r\sigma + rit)} \ll \exp(A|t|\log^2|t|). \tag{5.1}$$

C'est trivial pour $\sigma_0 > 1/r$. Il suffit donc d'établir que, si $h_r < \sigma_0 < \sigma_1$ et $\sigma_1 > 1/r$, on a (5.1) uniformément pour $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$.

Nous avons (cf. Titchmarsh [9], pp. 30-31) pour toutes valeurs de s

$$\zeta(s) = \frac{e^{bs}}{2(s-1)\,\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} \prod_\rho (1 - \frac{s}{\pi})e^{s/\rho}$$

où ρ parcourt l'ensemble des zéros non-triviaux de $\zeta(s)$,

et

$$b = \log(2\pi) - 1 - \frac{C}{2}.$$

On a donc

$$\frac{\zeta^2(s)}{s\zeta(rs)} = \Phi_1(s)\ \Phi_2(s),$$

où

$$\Phi_1(s) = \frac{(rs-1)e^{(2-r)bs}\ \Gamma(1+rs/2)}{2s(s-1)^2\ \Gamma^2(1+s/2)}$$

et

$$\Phi_2(s) = \Big(\prod_{\omega} (1-\frac{s}{\omega})e^{s/\omega}\Big)\Big(\prod_{\Omega} (1-\frac{s}{\Omega})^{-1}\ e^{-s/\Omega}\Big),$$

ω parcourant l'ensemble des zéros (autres que $1/r$) de $\zeta^2(s)/\zeta(rs)$ situés dans la bande $0 < \sigma < 1$, et Ω les pôles (autres que 1) de la même fonction.

Il est clair que les ω sont complexes conjugués deux à deux, de même que les Ω, et que l'on a

$$\mathrm{Re}\ \Omega \leqslant h_r \qquad \underline{\text{pour tout}}\ \ \Omega.$$

Soit $N(T)$ le nombre de zéros de $\zeta(s)$ dans le rectangle $0 < \sigma < 1$, $0 < t \leqslant T$. De la forme affaiblie

$$N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T \qquad (T \to \infty) \tag{5.2}$$

de la formule de Von Mangoldt (Titchmarsh [9], p. 181) il résulte, grâce à une sommation par parties, que

$$\sum_{|\rho|>T} \frac{1}{|\rho|^2} \sim \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\log T}{T} \qquad (T \to \infty),$$

et par conséquent

$$\sum_{|\omega|>T} \frac{1}{|\omega|^2} \ll \frac{\log T}{T} \qquad \text{et} \qquad \sum_{|\Omega|>T} \frac{1}{|\Omega|^2} \ll \frac{\log T}{T}.$$

La formule de Stirling pour $\log \Gamma(s)$ montre que, lorsque $|t| \to \infty$, on a uniformément pour $\sigma_o \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$

$$\Phi_1(\sigma + it) \ll |t|^{-5/2} \exp((1 - \frac{r}{4})\pi|t|)$$

(rappelons que $h_r < \sigma_o < \sigma_1$ et $\sigma_1 > 1/r$). Il nous suffit donc de montrer que l'on a

$$\Phi_2(\sigma + it) \ll \exp(B|t|\log^2|t|) \tag{5.3}$$

(B constante $> o$). En fait nous allons montrer que lorsque $|s|$ tend vers l'infini avec $\sigma \geqslant \sigma_1$,

$$\Phi_2(s) \leqslant e^{\underline{O}(|t|\log^2|t|)}.$$

Pour ce faire, nous écrirons

$$\Phi_2(s) = \Psi_1(s)\Psi_2(s)\Psi_3(s)\Psi_4(s)\Psi_5(s)$$

avec

$$\Psi_1(s) = \prod_{|\omega|>2|s|} (1 - \frac{s}{\omega})e^{s/\omega},$$

$$\Psi_2(s) = \prod_{|\Omega|>2|s|} (1 - \frac{s}{\Omega})^{-1} e^{-s/\Omega},$$

$$\Psi_3(s) = \exp(s\sum_{|\omega|\leqslant 2|s|} \frac{1}{\omega} - s\sum_{|\Omega|\leqslant 2|s|} \frac{1}{\Omega}),$$

$$\Psi_4(s) = \prod_{|\omega|\leqslant 2|s|} \frac{\omega - s}{\omega},$$

$$\Psi_5(s) = \prod_{|\Omega|\leqslant 2|s|} \frac{\Omega}{\Omega - s}.$$

Nous allons donner, pour chacune des cinq fonctions $\Psi_j(s)$, une majoration aussi bonne ou meilleure que le second membre de (5.3). En les combinant nous aurons bien (5.3), et donc aussi (5.1).

Notant que pour $|z| < 1$ nous avons

$$(1-z)e^z = \exp(-\sum_{m=2}^{\infty} \frac{z^m}{m})$$

et que pour $|z| < 1/2$

$$|\sum_{m=2}^{\infty} \frac{z^m}{m}| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{\infty} |z|^m = \frac{|z|^2}{2(1-|z|)} \leqslant |z|^2$$

on en déduit que pour $|z| < 1/2$

$$e^{-|z|^2} \leqslant |(1-z)e^z| \leqslant e^{|z|^2},$$

et par conséquent

$$|\Psi_1(s)| \leqslant \exp(|s|^2 \sum_{|\omega|>2|s|} |\omega|^{-2}) \leqslant e^{O(|s|\log|s|)}$$

et

$$|\Psi_2(s)| < \exp(|s|^2 \sum_{|\Omega|>2|s|} |\Omega|^{-2}) \leqslant e^{O(|s|\log|s|)}.$$

Comme les ω (resp. les Ω) sont complexes conjugués deux à deux et que

$$\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\bar{\omega}} = 2\,\frac{\mathrm{Re}\ \omega}{|\omega|^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\bar{\Omega}} = 2\,\frac{\mathrm{Re}\ \Omega}{|\Omega|^2},$$

les sommes $\sum_{|\omega|\leqslant 2|s|} 1/\omega$ et $\sum_{|\Omega|\leqslant 2|s|} 1/\Omega$ sont réelles et bornées quand $|s| \to \infty$. On a donc

$$|\Psi_3(s)| \leqslant e^{O(|s|)}.$$

Reste à majorer $|\Psi_4(s)|$ et $|\Psi_5(s)|$. Posant

$$K_1 = \frac{3}{\inf |\omega|}, \qquad K_2 = \frac{2}{\sigma_o - h_r},$$

on voit que chacun des facteurs de $\Psi_4(s)$ est de module $\leqslant K_1|s|$, et (puisque $|\Omega - s| \geqslant \sigma_o - h_r$) que chacun des facteurs de $\Psi_5(s)$ est de module $\leqslant K_2|s|$. Comme d'autre part, en raison de la relation (5.2), le nombre des facteurs dans chacune des expressions $\Psi_4(s)$ et $\Psi_5(s)$ est $\underline{O}(|s|\log|s|)$, on a

$$|\Psi_4(s)| \leqslant (K_1|s|)^{\underline{O}(|s|\log|s|)} \leqslant e^{\underline{O}(|s|\log^2|s|)}$$

et

$$|\Psi_5(s)| \leqslant (K_2|s|)^{\underline{O}(|s|\log|s|)} \leqslant e^{\underline{O}(|s|\log^2|s|)}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme 3.

6. Démonstration de l'inégalité $w_r > \theta_r$.

6.1. Nous allons commencer par démontrer que, pour tout $\alpha > w_r$, la fonction $H_r(s)$ appartient à la classe $\mathfrak{H}^2(\alpha)$. Pour cela, observons que si $\sigma_o > 1$ est fixé, nous avons pour $\sigma \geqslant \sigma_o$

$$|H_r(\sigma + it)| \leqslant \frac{1}{|\sigma_o + it|} \cdot \frac{\zeta^2(\sigma_o)}{\zeta(r\sigma_o)} + \left|\frac{2C-1}{\zeta(r)} - \frac{r\zeta'(r)}{\zeta^2(r)}\right| \cdot \frac{1}{|\sigma_o - 1 + it|}$$
$$+ \frac{1}{\zeta(r)} \cdot \frac{1}{|\sigma_o - 1 + it|^2}$$
$$\leqslant \frac{\text{constante}}{|\sigma_o - 1 + it|},$$

de sorte que (3.1) a lieu pour tout $\sigma > 1$, et que de plus, quel que soit $\sigma_o > 1$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |H_r(\sigma + it)|^2 \, dt$ est bornée pour $\sigma \geqslant \sigma_o$.

D'autre part, quel que soit $\alpha > w_r$, il existe un nombre réel α_1 tel que $h_r < \alpha_1 < \alpha$ et tel que (3.1) ait lieu pour $\sigma = \alpha_1$ [attendu qu'il en est ainsi pour la relation (1.4)]. Compte tenu du lemme 3, toutes les conditions du lemme 2 sont réalisées avec $f(s) = H_r(s)$, $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \sigma_o > 1$, $p = 2$.

Il en résulte bien que pour tout $\sigma > w_r$ la relation (3.1) a lieu et que, pour tout $\alpha > w_r$ fixé, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |H_r(\sigma + it)|^2 \, dt$ est bornée pour tout $\sigma \geqslant \alpha$. Autrement dit, pour tout $\alpha > w_r$, la fonction $H_r(s)$ appartient bien à la classe $\mathfrak{H}^2(\alpha)$.

6.2. Appliquant le lemme 1, on en déduit qu'il existe une fonction localement intégrable $F_\alpha(u)$, définie pour tout $u \geqslant o$, et telle que pour tout $\sigma > \alpha$ on ait les relations

$$(6.1) \qquad \int_o^\infty e^{-su} F_\alpha(u)du = H_r(s)$$

et

$$(6.2) \qquad 2\pi \int_o^\infty e^{-2\sigma u} |F_\alpha(u)|^2 \, du = \int_{-\infty}^\infty |H_r(\sigma + it)|^2 \, dt < \infty.$$

En vertu de l'unicité des images de Laplace inverses ("originales"), il résulte de (3.2) et (6.1) que l'on a

$$(6.3) \qquad F_\alpha(u) = \Delta_r(e^u) \qquad \underline{\text{pour presque tout}} \quad u \geqslant o$$

(au sens de la mesure de Lebesgue). On déduit alors de (6.2) et (6.3) que, pour tout $\sigma > w_r$,

$$\int_o^\infty e^{-2\sigma u} |\Delta_r(e^u)|^2 \, du < \infty,$$

c'est-à-dire

$$\int_1^\infty |\Delta_r(x)|^2 \, x^{-2\sigma-1} \, dx < \infty.$$

Posant alors $k = [\log X/\log 2]$ et (pour $\sigma > w_r$)

$$K = K(\sigma) = \sup_{T \geqslant 1} \int_{T/2}^T |\Delta_r(x)|^2 \, x^{-2\sigma-1} \, dx < \infty,$$

nous avons pour $X > 1$ et $\sigma > w_r$

$$\begin{aligned} \int_o^X |\Delta_r(x)|^2 \, dx &\leqslant \int_o^1 |\Delta_r(x)|^2 \, dx + \sum_{m=o}^{k} \int_{X/2^{k+1}}^{X/2^k} |\Delta_r(x)|^2 \, dx \\ &\leqslant \int_o^1 |\Delta_r(x)|^2 \, dx + \frac{K}{1 - 2^{-(2\sigma+1)}} X^{2\sigma+1} \\ &= \underline{O}(X^{2\sigma+1}). \end{aligned}$$

La validité de la relation $\int_0^X |\Delta_r(x)|^2 \, dx = \underline{O}(X^{2\sigma+1})$ <u>pour tout</u> $\sigma > w_r$ démontre bien l'inégalité $w_r \geqslant \theta_r$.

7. Démonstration de l'inégalité $w_r < \theta_r$.

Pour montrer que $w_r \leqslant \theta_r$, il suffit de prouver que l'on a

$$(7.1) \qquad \int_0^\infty e^{-2\sigma u}|\Delta_r(e^u)|^2 \, du < \infty \qquad \underline{\text{pour tout}} \ \sigma > \theta_r .$$

En effet, supposant (7.1) vraie, on voit par application de l'inégalité de Schwarz (aux intégrales des fonctions $e^{-\eta u}$ et $e^{(\sigma - \eta)u} \Delta_r(e^u)$ avec η fixé tel que $0 < \eta < \sigma - \theta_r$) que $\int_0^\infty e^{-su} \Delta_r(e^u)du$ est absolument convergente pour $\sigma > \theta_r$. D'après (3.2), ceci montre que $H_r(s)$ est holomorphe pour $\sigma > \theta_r$, de sorte que $\theta_r \geqslant h_r$. De plus on a pour tout $\sigma > \theta_r$

$$\int_{-\infty}^\infty |H_r(\sigma + it)|^2 \, dt = 2\pi \int_0^\infty e^{-2\sigma u}|\Delta_r(e^u)|^2 \, du < \infty,$$

ce qui montre que $\theta_r \geqslant w_r$.

Reste à prouver (7.1), qui équivaut à

$$(7.2) \qquad \int_1^\infty |\Delta_r(x)|^2 \, x^{-2\sigma - 1} dx < \infty \qquad \underline{\text{pour tout}} \ \sigma > \theta_r .$$

Or (7.2) est évidente, car on observe que (par intégration par parties) on a pour tout $y > 1$

$$\int_1^y |\Delta_r(x)|^2 \, x^{-2\sigma - 1} dx = y^{-2\sigma - 1}\int_0^y |\Delta_r(x)|^2 \, dx$$
$$- \int_0^1 |\Delta_r(x)|^2 dx + (2\sigma + 1) \int_1^y (\int_0^x |\Delta_r(u)|^2 du)x^{-2\sigma - 2}dx.$$

La convergence pour y tendant vers $+\infty$ résulte de ce que

$$\int_0^y |\Delta_r(x)|^2 dx = \underline{O}(y^{2\delta + 1})$$

pour tout δ fixé tel que $\theta_r < \delta < \sigma$.

8. Fin de la démonstration : L'identité (1.8).

8.1. L'inégalité $w_r^* \leqslant w_r$ étant évidente, il suffit de montrer que $w_r \leqslant w_r^*$, et pour cela il suffira de prouver que si $w_r^* < \sigma < 1$, alors

$$(8.1) \qquad \int_1^T \frac{|\zeta(\sigma + it)|^4}{|\sigma + it|^2 \, |\zeta(r\sigma + rit)|^2} \, dt = O(1),$$

car la validité de (8.1) pour un tel σ entraîne trivialement celle de (1.4) pour le même σ.

8.2. En plus de la notation $s = \sigma + it$, nous adopterons désormais la notation (conforme à celle du passage de Titchmarsh [9] que nous suivrons)

$$(8.2) \qquad w = \alpha + iv \qquad (\alpha \text{ et } v \text{ réels}).$$

Nous fixerons désormais deux nombres α et σ, assujetties aux inégalités

$$(8.3) \qquad w_r^* < \alpha < \sigma \; 1.$$

Dans toute la suite nous considérerons comme "constantes" toutes quantités qui dépendent au plus des nombres fixés α et σ (et qui seront donc indépendantes des variables t, v, T, etc...).

Soit $\delta = \delta(t) > 0$ une fonction de t, tendant vers zéro lorsque $|t|$ tend vers $+\infty$, et assujettie à une condition de la forme

$$(8.4) \qquad \delta > |t|^{-A},$$

A étant une constante positive (dans le sens qu'on vient d'indiquer). Comme en fin de démonstration on intégrera le long de l'intervalle $T/2 \leqslant t \leqslant T$, avec $T \to +\infty$, il sera légitime de prendre $\delta = T^{-\lambda}$, λ étant une constante convenable > 0.

8.3. Pour démontrer (8.1), nous pourrons nous servir indifféremment de l'un ou l'autre des deux résultats suivants :

LEMME 4. Soit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, le second membre étant absolument convergent pour $\sigma > 1$. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} e^{-\delta n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w-s) f(w) \delta^{s-w} \, dw,$$

pourvu que $\delta > o$ et $c > \max(1,\sigma)$.

LEMME 5. Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 4, nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} G(-\delta n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(\tfrac{1}{2}(w-s)^2) \frac{f(w)}{w-s} \delta^{s-w} \, dw,$$

où

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \, dt.$$

Nous appliquerons (l'un ou l'autre de) ces lemmes avec un $\delta = \delta(t)$ vérifiant (8.4), de sorte que la condition $\delta > o$ sera satisfaite.

Le lemme 4 est démontré dans Titchmarsh [9], p. 128. Le lemme 5 se démontre essentiellement de la même manière. Nous choisirons de démontrer la relation (8.1) en utilisant le lemme 4 plutôt que le lemme 5, car ce faisant nous pourrons suivre la méthode de démonstration du théorème 7.9 de Titchmarsh [9]. (Le lemme 5 se trouve donc énoncé ici tout autant pour son propre intérêt que comme variante possible du lemme 4). Cependant nous signalons au lecteur que la démonstration du susdit théorème 7.9 de Titchmarsh [9] (pp. 128-130) contient plusieurs points défectueux, (que naturellement nous avons veillé à ne pas répéter dans ce qui nous occupe ci-dessous !).

8.4. Démontrons à présent la relation (8.1). Compte tenu des hypothèses (8.3) et (8.4), l'application du lemme 4 au cas $a_n = f_r(n)$ donne la relation suivante, analogue à la formule de la ligne 3, p. 129 de Titchmarsh [9] :

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(rs)} = Z_1 - Z_2 + \underline{O}(e^{-A|t|}) \tag{8.5}$$

avec

$$Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_r(n)}{n^s} e^{-\delta n} \tag{8.6}$$

et

$$Z_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Gamma(w-s) \frac{\zeta^2(w)}{\zeta(rw)} \delta^{s-w} \, dw. \tag{8.7}$$

Comme (8.5) entraîne trivialement

$$\left|\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(rs)}\right|^2 \leqslant 3|Z_1|^2 + 3|Z_2|^2 + \underline{O}(e^{-2A|t|}),$$

on en déduit

$$\int_1^T \frac{|\zeta(\sigma + it)|^4}{|\sigma + it|^2 \; |\zeta(r\sigma + rit)|^2} \, dt = \underline{O}(U_1) + \underline{O}(U_2) + \underline{O}(1) \tag{8.8}$$

avec

$$U_1 = \int_1^T \frac{|Z_1|^2}{\sigma^2 + t^2} dt, \qquad U_2 = \int_1^T \frac{|Z_2|^2}{\sigma^2 + t^2} dt. \tag{8.9}$$

Pour montrer que U_1 et U_2 restent bornées lorsque T tend vers $+\infty$, nous allons majorer les intégrales

$$Q_1(T) = \int_{T/2}^T \frac{|Z_1|^2}{\sigma^2 + t^2} dt \qquad \text{et} \qquad Q_2(T) = \int_{T/2}^T \frac{|Z_2|^2}{\sigma^2 + t^2} dt.$$

Dans tout ce qui suit ε désignera un nombre positif "fixé", que nous nous réserverons de faire tendre vers zéro. Et, conformément à la tradition, nous commettrons l'abus (sans inconvénient) de ne faire aucune distinction entre les termes ε, 2ε, $\varepsilon/2$, etc. qui apparaîtront dans les calculs, les désignant tous par ε. Rappelons d'autre part que, conformément à ce qui a été dit au paragraphe 8.2, δ tend vers zéro par valeurs > 0.

8.5. Majoration de l'intégrale $Q_1(T)$. Soit $d(n)$ le nombre des diviseurs de l'entier positif n, de sorte que

$$d(n) = O(n^{\varepsilon}) \qquad (n \to \infty). \tag{8.10}$$

Comme $f_r(n) \leqslant d(n)$ on obtient, compte tenu de (8.3), (8.6) et (8.10),

$$\begin{aligned} |Z_1| &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^{\sigma}} e^{-\delta n} \ll \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon - \sigma} e^{-\delta(n)} \\ &\ll \delta^{\sigma - 1 - \varepsilon}, \end{aligned}$$

et par suite

$$Q_1(T) \ll T^{-1} \delta^{2\sigma - 2 - \varepsilon}. \tag{8.11}$$

8.6. Majoration de l'intégrale $Q_2(T)$. Nous allons suivre en partie la méthode de Titchmarsh [9], p. 129. Notons d'abord que, en raison de (8.2), (8.3) et de la décroissance exponentielle de la fonction gamma le long des droites verticales, les intégrales

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma(w-s)\frac{\zeta^2(w)}{\zeta(rw)}\right| dv,$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma(w-s)\frac{\zeta^4(w)}{\zeta^2(rw)}\right| dv$$

et

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(w-s)| dv$$

convergent, et qu'en outre

(8.12) $\qquad S \leqslant$ constante indépendante de t.

Observant que (8.7) entraîne

(8.13) $$|Z_2| \leqslant \frac{1}{2\pi}\delta^{\sigma-\alpha} J_1$$

et appliquant l'inégalité de Schwarz aux intégrales des fonctions

$$|\Gamma(w-s)|^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad |\Gamma(w-s)|^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\zeta^2(w)}{\zeta(rw)}\right|,$$

on déduit de (8.12) et (8.13) que

(8.14) $$|Z_2|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\delta^{2\sigma-2\alpha} S J_2 \ll \delta^{2\sigma-2\alpha} J_2 .$$

Prenant $|t| \leqslant T$, nous avons dans les conditions ci-dessus :

$$\int_{|v| \geqslant T} \left|\Gamma(w-s)\frac{\zeta^4(w)}{\zeta^2(rw)}\right| dv = O(1),$$

d'où, compte tenu de (8.14),

$$\int_{T/2}^{T} \frac{|Z_2|^2}{\sigma^2+t^2} dt \ll T^{-2}\int_{T/2}^{T} |Z_2|^2 dt \ll$$

$$\ll \frac{\delta^{2\sigma-2\alpha}}{T} + \frac{\delta^{2\sigma-2\alpha}}{T^2} \iint_{\substack{|v| \leqslant T \\ T/2 \leqslant t \leqslant T}} \left|\Gamma(w-s)\frac{\zeta^4(w)}{\zeta^2(rw)}\right| dv\, dt$$

$$\ll \frac{\delta^{2\sigma-2\alpha}}{T} + \delta^{2\sigma-2\alpha} \iint_{\substack{|v| \leqslant T \\ T/2 \leqslant t \leqslant T}} \Gamma(w-s)\frac{\zeta^4(w)}{\zeta^2(rw)}\Big| \cdot \frac{dv\, dt}{\sigma^2+v^2} .$$

D'après (8.12) et (1.7), la dernière intégrale double est

$$\ll \int_{|v|\leqslant T} \left|\frac{\zeta^2(\alpha + iv)}{\zeta(r\alpha + riv)}\right|^2 \cdot \frac{dv}{\sigma^2 + v^2} \ll T^{\varepsilon} ,$$

de sorte qu'on obtient finalement

$$(8.15) \qquad Q_2(T) \ll \delta^{2\sigma - 2\alpha} T^{\varepsilon}.$$

8.7. Fin de la démonstration. Choisissons maintenant $\delta = T^{-\lambda}$, λ étant une constante telle que

$$o < \lambda < \frac{1}{2(1 - \sigma)}.$$

Alors, pour ε suffisamment petit, il résulte de (8.11) et (8.15) que $Q_1(T) \ll T^{-\nu}$ et $Q_2(T) \ll T^{-\nu}$, où ν est une constante $> o$. Prenant $T = 2^m$ avec m entier $\geqslant 1$, et sommant par rapport à m, il résulte de la convergence de $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-\nu m}$ que les intégrales

$$\int_1^{\infty} \frac{|Z_1|^2}{\sigma^2 + t^2} dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^{\infty} \frac{|Z_2|^2}{\sigma^2 + t^2} dt$$

convergent. Compte tenu de (8.8) et (8.9), cela prouve (8.1), et par conséquent aussi l'identité (1.8).

La démonstration du théorème est ainsi achevée.

REFERENCES.

[1] F. CARLSON, Contributions à la théorie des séries de Dirichlet ; Note I, Arkiv för Matematik, 16(18) 1921, 1-19.

[2] F. CARLSON, Contributions à la théorie des séries de Dirichlet ; (2) Note II, Arkiv för Mat., 19(25) 1926, 1-17.

[3] F. CARLSON, Sur quelques valeurs moyennes d'une fonction analytique, Comptes Rendus Acad. Sci., 21 Sept. 1925.

[4] G. DOETSCH, Handbuch der Laplace - Transformation, Band I, Birkhäuser, Basel, 1950.

[5] G.H. HARDY, A.E. INGHAM and G. POLYA, Theorems concercing mean values of analytic functions, Proc. Royal. Soc. (A), 113, 1926, 542-569.

[6] B. SAFFARI, An Ω-theorem of the "non-effective" type (à paraître).

[7] E.C. TITCHMARSH, On divisor problems, Q.J.O. 9, 1938, 216-220.

[8] E.C. TITCHMARSH, Theory of Fourier integrals, Clarendon Press, Oxford, 1962.

[9] E.C. TITCHMARSH, Theory of the Riemann zeta-function, Clarendon Press, Oxford, 1967.

B. SAFFARI

1, Place Corneille
92100 BOULOGNE-BILLANCOURT.