

UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 130-7532

LA RESOLUTION NUMERIQUE D'UN PROBLEME  
D'ECOULEMENT SUBSONIQUE DE FLUIDES  
COMPRESSIBLES

par

Josette ROUX

PUBLICATION MATHEMATIQUE D'ORSAY

1975

## Introduction.

Ce travail présente une nouvelle méthode d'étude des écoulements de fluides parfaits et compressibles autour des profils convexes symétriques. Les paragraphes I et II reprennent une note aux comptes-rendus de l'Académie des Sciences de H. Brezis et G. Stampacchia parue en janvier 1973. Le problème est ramené à l'étude d'une inéquation variationnelle dont on cherche la solution dans un espace de Sobolev avec poids, dégénérés sur un bord du domaine. Les paragraphes III, IV et V constituent une étude de l'approximation numérique du problème. On utilise pour cela des éléments finis, rectangulaires, conformes, adaptés à l'espace de Sobolev avec poids. Le dernier paragraphe essaie de rendre compte des résultats obtenus.

L'intérêt de ce travail est de donner une méthode directe de l'étude de l'écoulement en fonction du profil alors que les méthodes utilisées jusqu'alors étaient surtout des méthodes inverses.

I : PROBLEME PHYSIQUE.

On s'intéresse à l'écoulement plan, stationnaire et inotationnel d'un fluide parfait compressible autour d'un profil convexe symétrique.

Dans le plan  $(x,y)$  de l'écoulement on notera :

$\vec{q} = (u,v)$  , vecteur vitesse

$q = |\vec{q}|$  ,  $q_\infty$  = module de la vitesse à l'infini

$\rho$  = densité,  $\rho_\infty$  = densité à l'infini

$p$  = pression

$c_q$  = vitesse locale du son.

1) Equations régissant le mouvement.

L'état du fluide en mouvement est entièrement déterminé par la connaissance de quatre grandeurs : les deux composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse, la pression  $p$  , et la densité  $\rho$  (l'équation d'état permet ensuite de déterminer toutes les autres grandeurs thermodynamiques en fonction de  $p$  et de  $\rho$ ) .

Les quantités  $u,v,p,\rho$  satisfont aux équations suivantes :

(1)  $\text{rot } \vec{q} = 0$  (écoulement irrotationnel).

(2)  $\text{div}(\rho \vec{q}) = 0$  (équation de continuité)

(3)  $\vec{q} \cdot \text{grad } \vec{q} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$  (équations d'Euler)

(4)  $\rho = h(q)$  .

Si comme cela a lieu habituellement le mouvement est isentropique alors

$h$  se met sous la forme suivante :

$$h(q) = \rho_0 \left( 1 - \frac{q^2}{A} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

où  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  = rapport des chaleurs spécifiques ( $\gamma = 1,4$  pour l'air)

et  $A = 2 \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\gamma}{\gamma-1}$  .

Les indices 0 correspondent aux valeurs des variables pour  $q = 0$  .

Remarques : 1) excepté, pour les exemples numériques traités plus loin, on utilisera comme seule propriété de  $h$  , la décroissance par rapport à  $q$  .

2) L'hypothèse "entropie constante" nous permet d'exprimer toutes les grandeurs thermodynamiques en fonction d'une seule, par exemple  $\rho$  . Les équations du mouvement se ramènent donc aux équations (1),(2),(4) .

Par définition la vitesse locale du son est donnée par :

$$(5) \quad dp = c_q^2 d\rho$$

On peut déduire des remarques précédentes que  $c_q$  est uniquement fonction de  $q$  , et des équations (1),(2),(3),(4) la relation suivante :

$$(6) \quad c_q^2 = - q \frac{h(q)}{h'(q)} .$$

2) Equation de Tchaplyguine,

D'après (1) (et comme le domaine d'écoulement est simplement connexe), il existe une fonction  $\varphi$  définie à une constante additive près telle que :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v$$

D'après (2), il existe de même une fonction  $\psi$  telle que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} u \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\rho}{\rho_0} v .$$

L'équation (1) fournit une équation satisfaite par  $\psi$  soit :

$$(7) \quad \Delta \psi - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \rho \cdot \operatorname{grad} \psi = 0 .$$

ou encore en utilisant les relations (1) et (3)

$$\Delta \psi + \frac{1}{2c_q^2} \operatorname{grad} c_q^2 \cdot \operatorname{grad} \psi = 0$$

(8)

$$\text{et } q^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 (\operatorname{grad} \psi)^2 .$$

A partir des équations (7) et (8) on peut déduire une équation aux dérivées partielles du second ordre par rapport à  $\psi$  et dont les coefficients ne dépendent que de  $\vec{q}$  (par l'intermédiaire de  $u, v$  et  $c_q$ ) .

En effet on obtient à partir de (7) et de (8) les relations :

$$(9) \quad \Delta \psi + \frac{1}{2c_q^2} \frac{\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \operatorname{grad}((\operatorname{grad} \psi)^2)}{1 - \frac{q^2}{c_q^2}} \cdot \operatorname{grad} \psi = 0$$

$$\text{grad } q^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \text{grad}(\text{grad } \psi)^2 + (\text{grad } \psi)^2 \text{grad}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2$$

or  $\text{grad}((\text{grad } \psi)^2)$  a pour composantes

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{array} \right. .$$

donc la quantité  $\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \text{grad}((\text{grad } \psi)^2) \cdot \text{grad } \psi$  se met sous la forme

$$2 \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} v^2 - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} uv + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} u^2 \right]$$

et l'équation (9) devient :

$$\Delta \psi - \frac{u^2}{c_q^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{v^2}{c_q^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} uv = 0$$

Cette dernière relation peut encore s'écrire :

$$(10) \quad \left(1 - \frac{u^2}{c_q^2}\right) \psi_{xx} - \frac{2uv}{c_q^2} \psi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{c_q^2}\right) \psi_{yy} = 0 .$$

Le vecteur vitesse  $\vec{q}$  est caractérisé en tout point par son module  $q$  et l'angle  $\theta$  qu'il fait avec une horizontale fixe. On notera  $\mathcal{C}$  la transformation

$$(x, y) \longmapsto (q(x, y), \theta(x, y))$$

qui fait passer du plan physique  $(x,y)$  au plan de l'hodographe  $(q,\theta)$ . Supposant formellement cette transformation localement réversible (on pourra consulter [2] pour avoir des conditions suffisantes pour que cette condition soit réalisée), on effectue le changement de variables consistant à prendre  $q$  et  $\theta$  comme variable indépendante.

On pose à cet effet

$$z = x + iy$$

et on en déduit

$$d\phi = udx + vdy$$

$$d\phi = -\frac{\rho}{\rho_0} vdx + \frac{\rho}{\rho_0} udy .$$

Par inversion on en tire  $dx$  et  $dy$ .

$$dy\left(v^2 \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\rho}{\rho_0} u^2\right) = d\phi \frac{\rho}{\rho_0} v + u d\phi$$

$$dx\left(\frac{\rho}{\rho_0} u^2 + \frac{\rho}{\rho_0} v^2\right) = d\phi \frac{\rho}{\rho_0} u - v d\phi$$

et en utilisant le fait que :  $u = q \cos \theta$

$$v = q \sin \theta$$

on trouve

$$(11) \quad dz = \frac{e^{i\theta}}{q} \left( d\phi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\phi \right)$$

Pour que le second membre de (11) soit une différentielle totale il

faut que :

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{e^{i\theta}}{q} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( i \frac{\rho_0}{\rho} \frac{e^{i\theta}}{q} \right) .$$

ou sous forme réelle :

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{\rho_0 q} \frac{\partial q}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = q \frac{d}{dq} \left( \frac{\rho_0}{\rho \cdot q} \right) \frac{\partial q}{\partial \varphi} . \end{cases}$$

D'autre part d'après (6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial q} = -q \frac{\rho}{c_q^2} .$$

$$\text{et } \frac{d}{dq} \left( \frac{\rho_0}{\rho q} \right) = - \frac{\rho_0}{\rho q^2} \left( 1 - \frac{q^2}{c_q^2} \right) .$$

Donc (13) se ramène à :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = \frac{\rho_0}{\rho} q \frac{\partial \psi}{\partial q} .$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial q} = q \frac{d}{dq} \left( \frac{\rho_0}{\rho q} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = - \frac{\rho_0}{\rho q} \left( 1 - \frac{q^2}{c_q^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

et en éliminant  $\theta$ , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\rho_0 q}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\rho_0}{\rho q} \left( 1 - \frac{q^2}{c_q^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0 .$$

soit :



$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{q}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right) + \frac{1}{\rho q} \left( 1 - \frac{q^2}{c_q^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 .$$

ou encore l'équation de Tchaplyguine :

$$(14) \quad \boxed{q \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{q\rho} \right) \psi_{\theta\theta} = \left( \frac{q}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial q} \right)_q}$$

On remplace la variable  $q$  par la variable  $\sigma$  définie par :

$$(15) \quad \sigma = \int_q^{c_q} \frac{h(q)}{q} dq$$

$$d'où \quad d\sigma = - \frac{\rho}{q} dq$$

$$\psi_{\sigma} = - \psi_q \frac{q}{\rho} .$$

$$\frac{d}{dq} \left( \frac{1}{q\rho} \right) = - \left( \frac{q\rho' + \rho}{q^2 \rho} \right) = - \frac{\left( 1 - \frac{q^2}{c_q^2} \right) \frac{q}{\rho}}{q^2 \rho}$$

$\rho'$  désignant la dérivée de  $\rho$  par rapport à  $q$  . L'équation (14)

se transforme alors en posant

$$k = \frac{1 - \frac{q^2}{c_q^2}}{\rho}$$

en :

$$(16) \quad k\psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0 .$$

On désigne par  $M$  le nombre de Mach de l'écoulement c'est-à-dire le

rapport  $M = \frac{q}{C_q}$  .

On a les résultats suivants :

$q < C_q \iff M < 1 \iff \sigma > 0$  vitesse subsonique

$q = C_q \iff M = 1 \iff \sigma = 0$  vitesse sonique

$q > C_q \iff M > 1 \iff \sigma < 0$  vitesse supersonique.

L'équation (16) est de type elliptique ( $k > 0$ ) si le problème reste complètement subsonique et de type hyperbolique ( $k < 0$ ) si le problème est supersonique.

Nous nous limiterons dans tout ce qui va suivre à l'étude du problème subsonique.

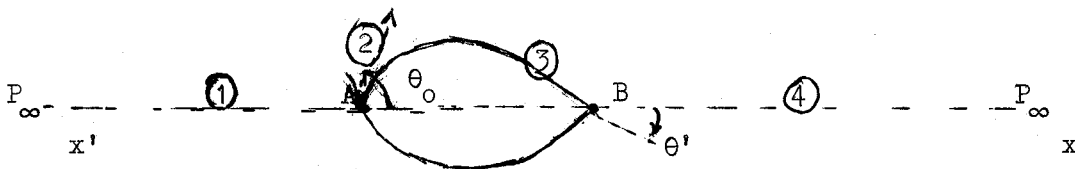
### 3) Conditions aux limites dans l'hodographe.

Le profil  $\mathcal{P}$  est supposé symétrique par rapport à l'axe  $x'x$  qui porte  $\vec{q}_\infty$  et on considère des écoulements symétriques autour de  $\mathcal{P}$ . On se restreindra alors à l'étude de cet écoulement dans le demi-plan supérieur.

Remarque. La fonction  $\psi$  vérifie  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_0} u$ , la composante  $u$  de la vitesse est toujours positive, on en déduit que  $\psi$  est une fonction

croissante de  $y$  .

D'autre part les lignes  $\psi = \text{cte}$  sont tangentes en chacun de leurs points, au vecteur vitesse ; ce sont les lignes de courant. En particulier, le profil  $\mathcal{P}$ , qui représente une paroi rigide, est une ligne  $\psi = \text{cte}$  (le fluide glisse le long de la paroi en excluant à la fois la pénétration et la cavitation) on peut choisir cette constante nulle car  $\psi$  est définie à une constante additive près, donc on aura  $\psi > 0$  dans le demi-plan supérieur.



Soit  $\mathcal{C}'$  la transformation  $(x,y) \rightarrow (\sigma,\theta)$ . Le profil  $\mathcal{P}$  est transformé par  $\mathcal{C}'$  en une courbe  $(\Gamma)$  entièrement située dans le demi-plan  $\sigma > 0$  si l'écoulement est totalement subsonique, ce que nous avons supposé.

On désigne par  $\theta = \theta(P)$  l'angle que la tangente en  $P \in \mathcal{P}$  forme avec  $x'x$  et par  $R(\theta)$  le rayon de courbure algébrique de  $P$  en  $\mathcal{P}$ .

On pose  $\theta_0 = \theta(A)$ ,  $\theta_1 = \theta(B)$  et on supposera le profil  $\mathcal{P}$  globalement convexe (avec cependant  $|\theta_0 - \theta_1| \neq \pi$ ).

La courbe  $(\Gamma)$  dépend donc de  $\psi$  et le lieu des points où  $\psi = 0$  n'est pas donné à priori dans le plan de l'hodographe mais doit être considéré comme une frontière libre.

On va examiner comment se transforment par  $\mathcal{C}$  les arcs ①, ②, ③, ④ de  $x'ABx$ .

Arc ④:  $\theta = 0$  et  $\sigma$  varie de  $\sigma_\infty$  (défini par

$$\sigma_\infty = \int_{q_\infty}^{q_\infty} \frac{h(q)}{q} \cdot dq) \text{ à l'infini (en effet le fluide étant parfait}$$

la vitesse normale sur le profil  $\mathcal{P}$  est nulle et d'autre part  $\vec{q}$  en A est dirigé selon  $x'x$  par raison de symétrie donc on peut en déduire que  $q \rightarrow 0$  quand  $P \rightarrow A$ )

①

Arc ②:  $\theta$  varie de  $\theta_0$  à 0.

$\sigma$  varie de  $+\infty$  à une valeur  $> 0$   $\sigma_0$ .

Au point A  $q = 0$ , mais au passage de l'arc ① à l'arc ② il y a discontinuité par  $\theta$  qui passe de 0 à  $\theta_0$ .

Le point  $\mathcal{C}(A)$  du plan de l'hodographe est le point de l'infini situé soit sur l'axe  $\theta = 0$  (si  $P \rightarrow A$  sur l'arc ①) soit sur l'axe  $\theta = \theta_0$  (si  $P \rightarrow A$  sur l'arc ②).

Arc ③:  $\theta$  varie de 0 à  $\theta_1$ .

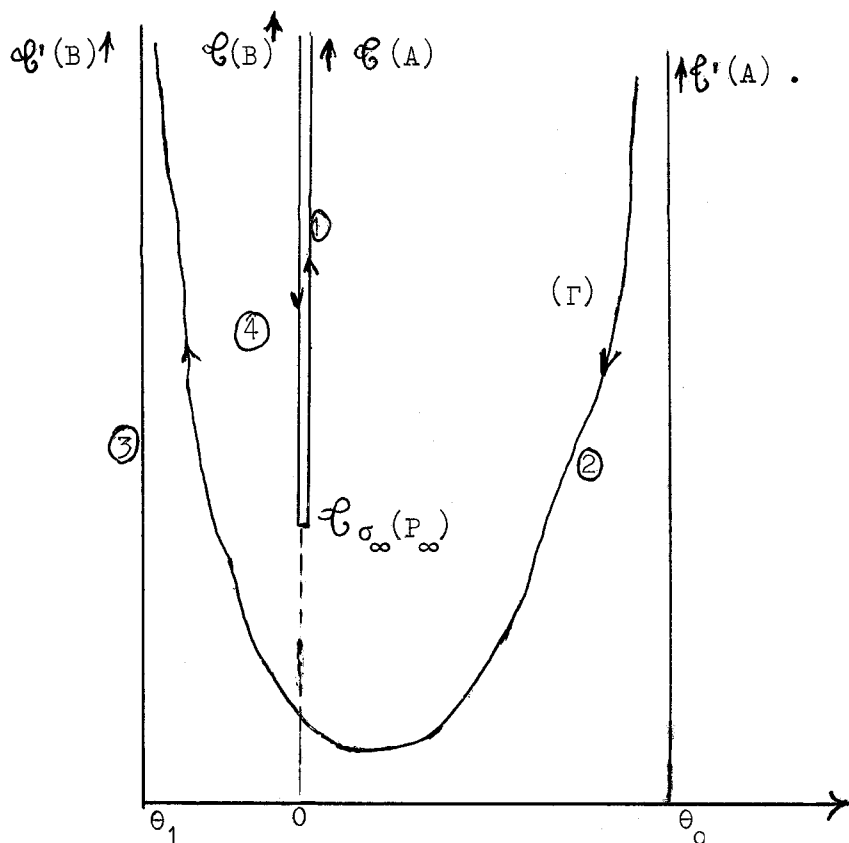
$\sigma$  varie de  $\sigma_\infty$  à  $+\infty$ .

Le point B est transformé en le point  $\mathcal{E}'(B)$ , qui est le point à l'infini du plan de l'hodographe situé sur l'axe  $\theta = \theta_1$  (mêmes considérations qu'en ce qui concerne le point A).

Arc ④:  $\theta = 0$

$\sigma$  varie de  $+\infty$  à  $\sigma'_\infty$

Le point  $\theta = 0$ ,  $\sigma = \sigma_\infty$  est le transformé de  $P_\infty$ .



Conditions le long de  $(\Gamma)$  .

Soit  $\sigma = \rho(\theta)$  la fonction représentant l'équation de  $(\Gamma)$  .

Le long de  $(\Gamma)$  par hypothèse  $\psi = 0$  .

D'autre part :

$$dz = \frac{1}{q} e^{i\theta} (d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi) .$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial q} = \frac{1}{q} e^{i\theta} (\varphi_q + i \frac{\rho_0}{\rho} \psi_q)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{1}{q} e^{i\theta} (\varphi_\theta + i \frac{\rho_0}{\rho} \psi_\theta) .$$

En éliminant  $z$  entre ces deux équations on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_0}{\rho q} \psi_q = - \frac{1}{q^2} \varphi_\theta \\ - \frac{1}{q} \varphi_q = \frac{d}{dq} \left( \frac{\rho_0}{\rho q} \right) \psi_\theta \end{array} \right.$$

soit

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_\theta = - \frac{\rho_0}{\rho} q \psi_q = \rho_0 \psi_\sigma . \\ \varphi_q = - \frac{\rho_0 \rho}{q} k \psi_\theta = - \frac{\rho}{q} \psi_\sigma . \end{array} \right.$$

calcul du

Procédons alors au rayon de courbure le long d'une ligne de courant

(ce qui entraîne  $d\psi = 0$ ) on a :

$$dx = \frac{1}{q} (u d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} v d\psi) .$$

$$dy = \frac{1}{q} (v d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} u d\psi)$$

et on en déduit :

$$dx = \frac{1}{q} u d\varphi = \frac{\cos \theta}{q} (\varphi_\theta + \varphi_\sigma \frac{d\sigma}{d\theta}) d\theta$$

$$dy = \frac{\sin \theta}{q} (\varphi_\theta + \varphi_\sigma \frac{d\sigma}{d\theta}) d\theta .$$

Ces équations deviennent en utilisant (17)

$$dx = \frac{\cos \theta}{q} (\rho_0 \psi_\sigma + \rho_0 k \psi_\theta \frac{d\sigma}{d\theta}) d\theta .$$

$$dy = \frac{\sin \theta}{q} (\rho_0 \psi_\sigma + \rho_0 k \psi_\theta \frac{d\sigma}{d\theta}) d\theta .$$

Par définition le module du rayon de courbure  $R$  est donné par

$$|R| = \left| \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\theta} \right|$$

et est donc égal d'après ce qui précède à

$$\left| \frac{1}{q} (\rho_0 \psi_\sigma + \rho_0 k \psi_\theta \frac{d\sigma}{d\theta}) \right| .$$

D'autre part le long de  $\Gamma$  on a  $\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d\ell}{d\theta}$  .

Par ailleurs le long de toute ligne de courant  $\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\psi_\theta}{\psi_\sigma}$  .

D'où les conditions de long de  $(\Gamma)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{\sigma} = \frac{R_q}{1 + k\left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2} \\ \phi_{\theta} = \frac{R_q \frac{d\ell}{d\theta}}{1 + k\left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2} \end{array} \right. \quad (\text{on a posé } \rho_o = 1) .$$

La détermination de  $\phi$  se ramène donc à la résolution de (16) avec

les conditions aux limites suivantes :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi = 0 . \\ \phi'_{\sigma} = \frac{R_q}{1 + k\left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2} \\ \phi_{\theta} = \frac{R_q \frac{d\ell}{d\theta}}{1 + k\left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2} \end{array} \right. \quad \text{sur } (\Gamma)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi(\theta, \sigma) \rightarrow 0 \text{ quand } \sigma \rightarrow +\infty \\ \phi(0, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \geq \sigma_{\infty} . \end{array} \right\}$$



II : NOUVELLE FORMULATION DU PROBLEME.

1) Changement de fonction inconnue.

On pose pour  $\sigma < l$  et  $\theta_1 < \theta < \theta_0$

$$u(\theta, \sigma) = \int_{l(\theta)}^{\sigma} \frac{k}{q} \psi d\sigma$$

ce qui entraîne :

$$u_{\sigma} = \frac{k}{q} \psi \quad \text{et} \quad u_{\sigma}(l(\sigma)) = 0 .$$

On se propose de transformer l'équation (I-14)

On a :

$$\frac{d}{d\sigma}(q\psi) = \frac{dq}{d\sigma} \psi + q\psi_{\sigma} = -\frac{q}{\rho} \psi + q\psi_{\sigma} .$$

D'où

$$\frac{1}{q} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{q^2}{k} u_{\sigma} \right) = -\frac{1}{q\rho} \psi + \frac{1}{q} \psi_{\sigma} .$$

D'autre part :

$$u_{\theta} = \int_{l(\theta)}^{\sigma} \frac{k}{q} \psi_{\sigma} d\sigma - \frac{dl}{d\theta} \frac{k}{q} \psi(l(\theta))$$

mais  $\psi(l(\theta)) = 0$  donc  $u_{\theta}(l(\theta)) = 0$

$$\text{et} \quad u_{\theta\theta} = \int_{l(\theta)}^{\sigma} \frac{-k}{q} \psi_{\theta\theta} d\sigma - \frac{dl}{d\theta} \frac{k}{q} \psi_{\theta}(l(\theta))$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{k}{q} \psi_{\theta\theta} d\sigma &= - \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{\psi_{\sigma\sigma}}{q} d\sigma \\
&= - \frac{1}{q} \psi_{\sigma} + \frac{1}{q} \psi_{\sigma}(\rho(\theta)) + \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \left(-\frac{1}{q^2}\right) \frac{dq}{d\sigma} (\psi_{\sigma}) d\sigma \\
&= - \frac{1}{q} \psi_{\sigma} + \frac{1}{q} \psi_{\sigma}(\ell(\theta)) + \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{1}{q^{\ell}} \psi_{\sigma} d\sigma
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
u_{\theta\theta} &= - \frac{1}{q} \psi_{\sigma} + \frac{1}{q} \psi_{\sigma}(\ell(\theta)) + \frac{\ell}{q\ell} \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{k\rho}{q} \psi\left(-\frac{q}{\rho}\right) d\sigma \\
&\quad - \frac{d\rho}{d\theta} \frac{k}{q} \psi_{\theta}(\rho(\theta)) .
\end{aligned}$$

et par conséquence :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q^2} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{q^2}{k} u_{\sigma} \right) + u_{\theta\theta} + u \\
&= - \frac{1}{q^{\rho}} \psi + \frac{1}{q} \psi_{\sigma} - \frac{1}{q} \psi_{\sigma}(\rho(\theta)) + \frac{1}{q\rho} \psi + \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} -\frac{k}{q} \psi d\sigma \\
&\quad - \frac{d\ell}{d\theta} \frac{k}{q} \psi_{\theta}(\ell) + \int_{\ell(\theta)}^{\sigma} \frac{k}{q} \psi_{\sigma} d\sigma . \\
&= - \frac{1}{q} \left( \frac{R_q}{1 + k \left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2} + \frac{k \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 R_q}{1 + k \left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$= - R$$

On obtient donc l'équation :

$$\frac{1}{q} \left( \frac{q^2}{k} u_{\sigma} \right)_{\sigma} + u_{\theta\theta} + u = -R \quad (1).$$

Nous introduisons les notations suivantes :

$$D = \{[\theta, \sigma], \sigma > \ell(\theta) \text{ et } \theta_1 < \theta < \theta_0\} - \{[0, \sigma], \sigma \geq \sigma_{\infty}\}$$

$$\Omega = \{[\theta, \sigma], \theta_1 < \theta < \theta_0 \text{ et } \sigma > 0\}$$

La fonction  $u$  vérifie alors :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{q} \left( \frac{q^2}{k} u_{\sigma} \right)_{\sigma} + u_{\theta\theta} + u = -R & \text{dans } (D) \\ u = 0 \\ \text{grad } u = 0 \\ u(0, \sigma) = H_{\rho} = \text{constante pour } \sigma \geq \sigma_{\infty} \end{cases}$$

$$\text{En effet } u(0, \sigma) = \int_{\ell(0)}^{\sigma} \frac{k}{q} \psi(0, \sigma) d\sigma.$$

$$\text{or } \psi = 0 \text{ pour } \sigma \geq \sigma_{\infty}$$

$$\text{d'où } u(0, \sigma) = \int_{\ell(0)}^{\sigma} \psi(0, \sigma) \frac{k}{q} d\sigma = H_{\rho} \text{ pour } \sigma \geq \sigma_{\infty}.$$

## 2) Formulation variationnelle :

On prolonge la fonction  $u$  par 0 dans  $\Omega$  et on considère l'espace fonctionnel :

$$V = \{v \mid q v \in L^2(\Omega), q v_{\theta} \in L^2(\Omega), \frac{q}{\sqrt{k}} v_{\sigma} \in L^2(\Omega)$$

et  $v = 0$  sur  $\partial\Omega\}$ .

muni de la norme

$$\|v\|_V = \left( \int_{\Omega} \left( \frac{1}{k} v_{\sigma}^2 + u_{\theta}^2 + u^2 \right) q^2 d\theta d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

et pour tout  $H > 0$  le convexe.

$$K_H = \{v \in U \mid v \geq 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } v(0, \sigma) = H \text{ pour } \sigma \geq \sigma_{\infty}\}.$$

On introduit alors la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{k} u v_{\sigma} + u_{\theta} v_{\theta} - uv \right) q^2 d\theta d\sigma.$$

Lemme 1.

$a(u, v)$  est continue sur  $V$ .

Preuve :

$$\begin{aligned} |a(u, v)|^2 &= \left( \int_{\Omega} \left( \frac{1}{k} u v_{\sigma} + u_{\theta} v_{\theta} - uv \right) q^2 d\theta d\sigma \right)^2 \\ &\leq 2 \left[ \left( \int_{\Omega} \frac{1}{k} u v_{\sigma} q^2 d\theta d\sigma \right)^2 + \left( \int_{\Omega} u_{\theta} v_{\theta} q^2 d\theta d\sigma \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{\Omega} uv d^2 d\theta d\sigma \right)^2 \right] \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

$$\begin{aligned}
 |a(u,v)|^2 &\leq 2 \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{k} u_{\sigma}^2 q^2 d\theta d\sigma \int_{\Omega} \frac{1}{k} v_{\sigma}^2 q^2 d\theta d\sigma + \right. \\
 &\int_{\Omega} u_{\theta}^2 q^2 d\theta d\sigma \int_{\Omega} v_{\theta}^2 q^2 d\theta d\sigma + \int_{\Omega} u^2 q^2 d\theta d\sigma \int_{\Omega} v^2 q^2 d\theta d\sigma \left. \right] \\
 &\leq 2 \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{k} u_{\sigma}^2 q^2 d\theta d\sigma + \int_{\Omega} u_{\theta}^2 q^2 d\theta d\sigma + \int_{\Omega} u^2 q^2 d\theta d\sigma \right] \\
 &\quad \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{k} v_{\sigma}^2 q^2 d\theta d\sigma + \int_{\Omega} v_{\theta}^2 q^2 d\theta d\sigma + \int_{\Omega} v^2 q^2 d\theta d\sigma \right]
 \end{aligned}$$

ce qui conduit finalement à :

$$(3) \quad |a(u,v)| \leq \sqrt{2} \|u\|_V \|v\|_V .$$

Lemme 2.

Sous l'hypothèse  $|\theta_0 - \theta_1| < \Pi$ , la forme  $a(u,v)$  est  
coercive sur  $V$ .

On essaie de déterminer  $\alpha > 0$  tel que l'on ait

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2 .$$

Pour cela on va utiliser le :

Lemme 3.

Pour tout  $u \in H'_0(\theta_1, \theta_0)$  on a :

$$(4) \quad \|u_\theta\|_{L^2[\theta_1, \theta_0]} \geq \frac{\Pi}{\theta_0 - \theta_1} \|u\|_{L^2[\theta_1, \theta_0]}$$

Démonstration :

1) On démontre l'inégalité (4) pour les vecteurs propres de l'opérateur laplacien dans  $H'_0[\theta_0, \theta_1]$  .

Soient  $\lambda$  et  $u$  tels que l'on ait

$$(5) \quad \begin{aligned} u_{\theta\theta} + \lambda u &= 0 . \\ u(\theta_0) &= u(\theta_1) = 0 . \\ u &\neq 0 . \end{aligned}$$

De (5) on déduit :

$$\lambda > 0 \quad \text{et} \quad u = Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$$

et en posant  $\lambda = w^2$  on obtient :

$$A \cos w \theta_0 + B \sin w \theta_0 = 0 .$$

$$\text{et} \quad A \cos w \theta_1 + B \sin w \theta_1 = 0 .$$

$$\text{donc : } w(\theta_0 - \theta_1) = k\Pi .$$

La plus petite valeur non nulle pour  $w$  est donc  $\frac{\Pi}{\theta_0 - \theta_1}$  , soit

$w_0$  cette valeur, alors :

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_0} u_{\theta}^2 d\theta &= [u, u_{\theta}]_{\theta_1}^{\theta_0} - \int_{\theta_1}^{\theta_0} u_{\theta\theta} \cdot u d\theta \quad . \\ &= - \int_{\theta_1}^{\theta_0} u_{\theta\theta} \cdot u d\theta \quad . \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_0} w^2 u^2 d\theta \quad . \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\|u_{\theta}\|_{L^2[\theta_1, \theta_0]} \geq w_0 \|u\|_{L^2[\theta_1, \theta_0]}$$

Or l'inf  $\frac{\|u_{\theta}\|_{L^2[\theta_1, \theta_0]}}{\|u\|_{L^2[\theta_1, \theta_0]}}$  est atteint pour

$u$  vecteur propre et  $\lambda$  plus petite valeur propre d'où le lemme 3.

### Preuve du lemme 2.

Du lemme 3 on déduit :

$$\|qu_{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \geq w_0 \|qu\|_{L^2(\Omega)} \quad .$$

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{k} u_{\sigma}^2 + u_{\theta}^2 - u^2 \right) q^2 d\theta d\sigma$$

$$= \left\| \frac{q}{\sqrt{k}} u_{\sigma} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|qu_{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|qu\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad .$$

On cherche  $\alpha > 0$  tel que l'on ait

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{q}{\sqrt{k}} u_\sigma \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|qu_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|qu\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \geq \alpha \left( \left\| \frac{q}{\sqrt{k}} u_\sigma \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|qu_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|qu\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) . \end{aligned}$$

Il suffit pour que l'inégalité précédente soit vérifiée que  $\alpha$  vérifie :

$$\|qu_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|qu\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha \left( \|qu_a\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|qu\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

ce qui est équivalent à :

$$(5) \quad \|qu_\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \|qu\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

L'inégalité (5) sera vérifiée si l'on a :

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \leq w_0^2$$

$$\text{soit } \alpha \leq \frac{w_0^2 - 1}{w_0^2 + 1} .$$

Comme on a  $|\theta_0 - \theta_1| < \Pi$  ceci entraîne  $w_0 > 1$ , et on peut déduire l'existence de  $\alpha > 0$  et le lemme 2.



Théorème 1.

On suppose que  $R \leq 0$  ce qui correspond à un profil convexe, alors toute solution de (2) est solution de l'inéquation variationnelle :

$$u \in K_H \quad \text{et}$$

$$a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} R(v - u)q^2 d\theta d\sigma \quad \forall v \in K_H$$

Preuve :

Calculons  $a(u, v - u)$  pour  $v \in K_H$

$$\begin{aligned} a(u, v - u) &= \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{k} u_{\sigma} (v_{\sigma} - u_{\sigma}) + u_{\theta} (v_{\theta} - u_{\theta}) - u(v - u) \right] q^2 d\theta d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \left[ -q^2 u_{\theta\theta} (v - u) - \left( \frac{q^2}{k} u_{\sigma} \right)_{\sigma} (v - u) - q^2 u(v - u) \right] d\theta d\sigma \\ &= - \int_{\Omega} q^2 (v - u) q^2 d\theta d\sigma \quad (\text{car } u = 0 \text{ en dehors de } D). \\ &= \int_{\Omega} R(v - u) q^2 d\theta d\sigma - \int_{\Omega-D} R(v - u) q^2 d\theta d\sigma . \end{aligned}$$

or sur  $\Omega - D$  on a  $u = 0$  et comme par hypothèse  $R \leq 0$ , ceci entraîne que  $- \int_{\Omega-D} R(v - u) q^2 d\theta d\sigma$  est positif d'où l'inégalité

cherchée :

$$a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} R(v - u) q^2 d\theta d\sigma .$$

Lemme 4.

Si  $R \in L^2[\theta_1, \theta_0]$ , l'application

$$u \in V \rightarrow \int_{\Omega} Rq^2 u d\theta d\sigma$$

est une forme linéaire continue sur  $V$ .

Démonstration :

$$\left| \int_{\Omega} Rq^2 u d\theta d\sigma \right| \leq \left| \int_{\Omega} R^2 q^4 d\theta d\sigma \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int_{\Omega} u^2 d\theta d\sigma \right|^{\frac{1}{2}}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et d'autre part comme  $q$  est fonction uniquement de  $\sigma$  et  $R$  uniquement fonction de  $\theta$

$$\int_{\Omega} R^2 q^4 d\theta d\sigma = \int_0^{+\infty} q^4 d\sigma \int_{\theta_1}^{\theta_0} R^2 d\theta$$

or  $\int_0^{+\infty} q^4 d\sigma$  est égal à  $\int_0^{Cq} q^3 p dq$  donc est borné par une constante

$M$

et ceci conduit finalement à

$$\left| \int_{\Omega} Rq^2 u d\theta d\sigma \right| \leq M \|u\|_{L^2(\Omega)} \int_{\theta_1}^{\theta_0} R^2 d\theta .$$

$$\leq M' \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq M' \|u\|_V .$$

Théorème 2.

Si  $R \in L^2[\theta_1, \theta_0]$  et si  $R$  est négatif ou nul, il existe  $u \in K_H$ , unique solution de l'inéquation (6).

Ce théorème est une conséquence immédiate des lemmes (1), (2) et (4).

3) Détermination de  $H$  :

On montre cf [1], que  $w(\theta) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} u(\theta, \sigma)$  est la solution

de l'inéquation variationnelle

$$(7) \int_{\theta_1}^{\theta_0} w_{\theta} (\zeta_{\theta} - w_{\theta}) - w(\zeta - w) d\theta \geq \int_{\theta_1}^{\theta_0} R(\zeta - w) d\theta \quad \forall \zeta \in K_H$$

ou  $K_H$  est l'ensemble des  $\zeta \in H_0^1[\theta_1, \theta_0]$

$$\text{vérifiant : } \begin{cases} \zeta \geq 0 & \text{sur } ]\theta_1, \theta_0[ \\ \zeta(0) = H \end{cases}$$

La résolution de cette inéquation (7) va nous permettre de déterminer

$H$ .

Résolution de (7).

Si  $w$  est solution de (7) alors  $w$  vérifie

$$-\int_{\theta_1}^{\theta_0} (w_{\theta\theta} + w) (\zeta - w) d\theta \geq \int_{\theta_1}^{\theta_0} R(\zeta - w) d\theta$$

$$\forall \zeta \in K_H .$$

Par ailleurs il est nécessaire d'avoir  $w > 0$  sur  $]\theta_1, \theta_0[$  et

$$w_{\theta}(\theta_1) = 0$$

$$w_{\theta}(\theta_0) = 0 .$$

Posons  $\zeta = w + \lambda\mu$  .

alors  $w$  vérifié

$$(8) - \int_{\theta_1}^{\theta_0} (w_{\theta\theta} + w) \lambda \mu d\theta \geq \int_{\theta_1}^{\theta_0} R \lambda \mu d\theta$$

pour tout  $\mu$  tel que  $\mu(\theta_1) = \mu(\theta_0) = 0$  .

et pour tout  $\lambda$  tel que  $w + \lambda\mu > 0$  .

Il existe un intervalle  $I_0 = [-\lambda_0, +\lambda_0]$  tel que  $\forall \lambda$  appartenant à  $I_0$  , la condition  $w + \lambda\mu > 0$  soit vérifiée.

En changeant  $\lambda$  en  $-\lambda$  l'équation (8) devient :

$$-\int_{\theta_1}^{\theta_0} (w_{\theta\theta} + w) \lambda \mu d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_0} R \lambda \mu d\theta$$

ce qui est équivalent à

$$(9) \quad w_{\theta\theta} + w = -R \quad \forall \theta \in ]\theta_1, 0[ \quad ]0, \theta_0[ \quad .$$

La résolution de (7) se ramène donc à la résolution de l'équation

(9) avec les conditions limites suivantes :

$$w(\theta_1) = 0 \quad w(\theta_0) = 0 .$$

$$w_{\theta}(\theta_1) = 0 \quad w_{\theta}(\theta_0) = 0 .$$

$$w(0) = H .$$

Sur chacun des intervalles  $]\theta_1, 0[$  et  $]0, \theta_0[$  la solution de

(9) est de la forme

$$w = A \cos \theta + B \sin \theta .$$

Sur  $]\theta_1, 0[$  on a donc à résoudre :

$$A_1' \cos \theta + B_1' \sin \theta = 0 . \quad (\text{méthode de variation de la constante}).$$

$$A_1' \sin \theta + B_1' \cos \theta = -R .$$

Avec les conditions aux limites précisées plus haut ceci entraîne

$$A(\theta_1) = B(\theta_1) = 0$$

$$\text{et } A_1(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta} R \sin \theta \, d\theta .$$

$$B_1(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta} -R \cos \theta \, d\theta .$$

Sur  $]0, \theta_0[$  le même raisonnement permet d'obtenir :

$$A_2(\theta) = - \int_{\theta}^{\theta_0} R \sin \theta \, d\theta \quad .$$

$$B_2(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_0} R \cos \theta \, d\theta \quad .$$

La condition  $w(0) = H$  implique que la seule valeur acceptable pour  $H$  soit

$$H = \int_{\theta_1}^0 R \sin \theta \, d\theta = - \int_0^{\theta_0} R \sin \theta \, d\theta \quad .$$

Cette valeur  $H$  représente la demi-hauteur du profil (En effet

$$R(\theta) = \frac{ds}{d\theta} \quad \text{et} \quad H = \int_{\theta_1}^0 \sin \theta \, ds).$$

### III : APPROXIMATION DE L'ESPACE V.

Définition 1. On appelle approximation interne d'un espace normé  $V$  l'ensemble constitué par une famille de triplets  $\{V_h, p_h, r_h\}$ , où

- i)  $V_h$  est un espace normé
- ii)  $p_h$  est un opérateur linéaire continu de  $V_h$  dans  $V$ .
- iii)  $r_h$  est un opérateur continu de  $V$  dans  $V_h$ .

Il sera intéressant pour les approximations numériques de considérer un espace  $V_h$  de dimension finie.

Définition 2. Approximation stable.

Les opérateurs de prolongement  $p_h$  et de restriction  $r_h$  sont dits stables si leurs normes

$$\|p_h\| = \sup_{\substack{u_h \in V_h \\ \|u_h\|_h \leq 1}} \|p_h u_h\|$$

$$\text{et } \|r_h\| = \sup_{\substack{u \in V \\ \|u\| \leq 1}} \|r_h u\|_h .$$

sont majorées indépendamment de  $h$ .

Proposition 1.

Soit  $\{V_h, p_h, r_h\}$  une approximation stable de l'espace  $V$ .

Pour que cette approximation soit convergente il faut et il suffit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - p_h r_h u\| = 0$$

pour tous les  $u$  d'un sous-espace dense  $\mathcal{N}$  de  $V$ .

Le paragraphe 1 a pour but de définir  $\mathcal{N}$ .

Le paragraphe 2 et les suivants vont nous permettre de définir

$V_h$ .

1) Théorème de densité.

On va essayer de déterminer un espace de fonctions suffisamment régulières et qui soit dense dans l'espace  $V$  considérée au paragraphe précédent. En réalité on démontrera que  $D(\Omega)$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans  $\Omega$  est dense dans  $V$ .

Le résultat qui nous intéresse est un cas particulier du théorème qui va suivre.

Notations :

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  on note par  $L^2_\mu(\Omega)$  l'ensemble des fonctions



mesurables et de carré intégrable pour la mesure  $x^\mu dx dy$  muni

de la norme  $\|u\|_{L^2_\mu(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x,y)|^2 x^\mu dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$

$V_\mu(\Omega)$  est l'ensemble des  $u$  appartenant à  $L^2(\Omega)$  telles que l'on

ait  $\frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2_\mu(\Omega)$  et soit

$\overset{\circ}{V}_\mu(\Omega)$  la fermeture de  $D(\Omega)$  dans  $V_\mu(\Omega)$ .

Les résultats suivants ont été obtenus par Guisvard (cf. [3]), pour un espace légèrement différent où le poids intervient pour la fonction et pour toutes les dérivées. Nous donnerons donc ici, sans démonstrations, les théorèmes et lemmes permettant d'obtenir le résultat pour l'espace  $V_\mu$  considéré ici :

Théorème 1.

Soit  $\Omega = \mathbb{R}^{2+} = \{(x,y) \mid x > 0\}$ .

Alors si  $\mu < 1$ ,  $\overset{\circ}{V}_\mu(\Omega)$  est formé des fonctions de  $V_\mu(\Omega)$

telles que  $u(0,y) = 0$ .

Pour cela on démontre les lemmes suivants :

Lemme 1. E. Banach.

Pour  $\mu < 1$  on a :

$V_\mu(0, +\infty; E) \subset \mathcal{C}^0([0, +\infty[; E)$ .

Conséquence :

Pour  $u \in V_{\mu}(0, +\infty; L^2(\mathbb{R}))$  on peut définir

$\gamma u = \lim_{y \rightarrow 0} u(\cdot, y)$  comme un élément de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Lemme 2.

$$\Omega = \mathbb{R}^{2+}.$$

Soit  $\mathcal{E}'(I \times \mathbb{R})$  l'espace des distributions à support dans  $I \times \mathbb{R}$  telles que  $I$  soit un compact de  $]0, +\infty[$ . Alors :

$\overset{\circ}{V}_{\mu}(\Omega)$  est la fermeture de  $V_{\mu}(\Omega) \cap \mathcal{E}'(I \times \mathbb{R})$  dans  $V_{\mu}(\Omega)$ .

Lemme 3.

Les fonctions de  $V_{\mu}(\Omega)$  qui sont nulles pour  $x$  assez grand et bornées forment un sous-espace dense dans  $V_{\mu}(\Omega)$ .

Lemme 4.

Si on a  $\mu < 1$  alors :

$$\overset{\circ}{V}_{\mu}(\Omega) = V_{\mu}(\Omega) \cap L^2_{\mu-2}(\Omega).$$

Lemme 5.

Si on a  $\mu < 1$  alors  $V_{\mu}(\Omega)$  est formé des fonctions de  $V_{\mu}(\Omega)$  telles que  $\gamma u = 0$ .

Théorème 2.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tel que

$$\Omega = \{(x, y) \mid y > 0, \quad x_0 < x < x_1\}$$

et désignons par  $\overset{\sim}{V}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de

$L^2(\Omega)$  telles que :  $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega)$  et  $\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)$  et  $u = 0$  sur

$\partial\Omega$  .

Alors :

$D(\Omega)$  est dense dans  $\overset{\sim}{V}(\Omega)$  .

Ce théorème se déduit facilement du théorème 1.

Soit maintenant  $\Omega$  l'ouvert défini précédemment c'est-à-dire :

$$\Omega = \{(\theta, \sigma) \mid \sigma > 0 \quad \text{et} \quad \theta_1 < \theta < \theta_0\}$$

et  $V$  l'espace défini dans le paragraphe I

$$V = \{v \mid qv \in L^2(\Omega), \quad qv_{\theta} \in L^2(\Omega), \quad \frac{q}{\sqrt{k}} v_{\sigma} \in L^2(\Omega) \text{ et}$$

$$v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} .$$

Théorème 3.

$D(\Omega)$  est dense dans  $\overset{\sim}{V}(\Omega)$  .

D'après les lemmes 2,3,5 on sait que  $\overset{\sim}{V}(\Omega) \cap \mathcal{E}'(I \times \mathbb{R})$  est dense dans  $\overset{\sim}{V}(\Omega)$ , or sur tout compact  $K \subset I \times \mathbb{R}$  on a :

$$0 < q_0 \leq q \leq C \quad \text{donc si l'on note par } \overset{\sim}{V}(\Omega)$$

l'ensemble des fonctions de  $L^2(\Omega)$  telle que  $v_\theta \in L^2(\Omega)$ ,

$\frac{v}{\sqrt{k}} \in L^2(\Omega)$  et  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$  on peut en déduire que  $V(\Omega) = \overset{\sim}{V}(\Omega)$ .

pour tout ouvert  $\Omega'$  borné inclus dans  $\Omega$ .

$$\text{Soient } \|v\|_{V(\Omega)} = \|qv\|_{L^2(\Omega)} + \|qv_\theta\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{qv}{\sqrt{k}} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{et } \|v\|_{\overset{\sim}{V}(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v_\theta\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{v}{\sqrt{k}} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

alors les normes de  $V(\Omega)$  et de  $\overset{\sim}{V}(\Omega)$  sont équivalentes.

#### Lemme 6.

Au voisinage de  $\sigma = 0$  on a  $k$  équivalent à  $\lambda\sigma$ .

On rappelle la définition de  $\sigma$ .

$$\sigma = \int_q^{c_q} \frac{\rho}{q} dq$$

donc pour  $q$  voisin de  $Cq$  on a  $\sigma \approx \rho_c \text{Log} \frac{c}{q} \approx \rho_c \frac{c - q}{c_q}$ .

$\rho_c$  désignant la densité pour  $q = c_q$ .

D'autre part

$$k = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{c - q}{c} \cdot \frac{c + q}{c}\right),$$

cette dernière quantité est équivalente à

$$\frac{1}{\rho_c} \left( \frac{c-q}{c} \cdot \frac{c+q}{c} \right) \text{ soit } \frac{2\sigma}{\rho_c},$$

ceci achève la démonstration du lemme avec  $\lambda = \frac{2}{\rho_c}$ .

Le lemme 6 montre donc que

$$\tilde{V}(\Omega) = v(\Omega)$$

avec  $\|v\|_{\tilde{V}(\Omega)}$  équivalente à  $\|v\|_{v(\Omega)}$

et par application du théorème 2 on déduit le théorème 3.

Remarque.

D'après le lemme 2 on peut conclure que les fonctions de  $\tilde{V}$ , à support compact dans  $\Omega$  forment un ensemble dense dans  $\tilde{V}$ , ceci est particulièrement important pour l'approximation numérique, puisqu'il ne sera possible que de considérer des domaines  $\Omega$  bornés.

2) Approximation de l'espace  $V_L$  par des éléments finis.

On va, dans ce paragraphe, essayer de définir un espace de dimension finie  $V_h$ , réalisant une approximation interne stable de l'espace  $V$ , il faudra en particulier que les éléments de  $V_h$  satisfassent à la condition  $\frac{v}{\sqrt{\sigma}} \in L^2(\Omega)$ .

Notations.

On définit le domaine ouvert :

$$\Omega_L = \{ [\theta, \sigma] \mid \theta_1 < \theta < \theta_0 \quad \text{et} \quad 0 < \sigma < L < +\infty \}.$$

et on note  $\gamma$  la partie de la frontière de  $\Omega$  qu'on a soit

$\theta = \theta_1$ , soit  $\theta = \theta_0$ , soit  $\sigma = 0$  et  $\bar{\gamma}$  le complémentaire de

$\gamma$  dans  $\partial\Omega$ .

D'autre part soit :

$$V_L = \{ v \mid qv \in L^2(\Omega_L), qv_\theta \in L^2(\Omega_L), \frac{q}{\sqrt{k}} v_\sigma \in L^2(\Omega_L) \}$$

et  $v = 0$  sur  $\gamma$  }.

Dans tout ce qui suit on notera

$$\|v\| = \|v\|_L = \|qv\|_{L^2(\Omega_2)} + \|qv_\theta\|_{L^2(\Omega_2)} + \left\| \frac{q}{\sqrt{k}} v_\sigma \right\|_{L^2(\Omega_2)}$$

Etant donné des paramètres  $k > 0$  et  $h_j > 0$  destinés à tendre vers

0 on associe à  $(k, h_j)_j$  un recouvrement de  $\bar{\Omega}_L$  par des rectangles

$R_{ij}$  tels que :

(i) Tout rectangle  $R_{ij}$  du recouvrement a une largeur égale à  $k$

et une longueur égale à  $h_j$ .

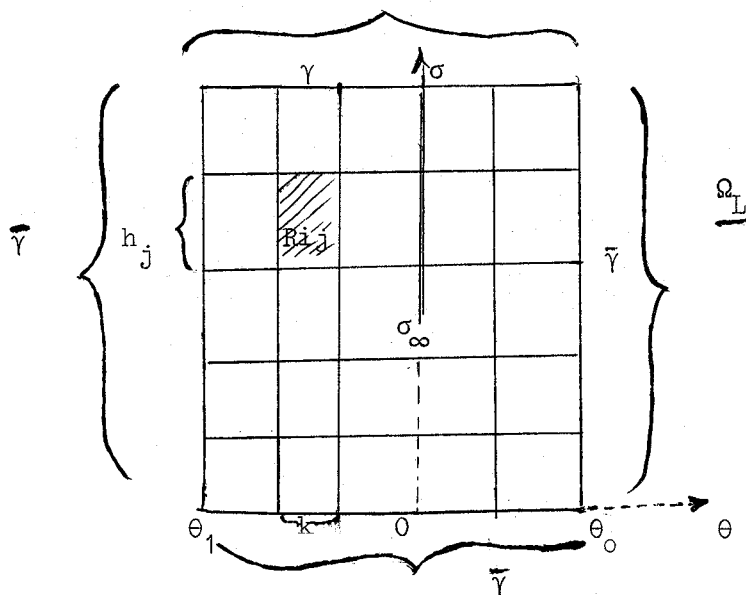
(ii) Deux rectangles distincts  $R_{ij}$  et  $R_{i'j'}$  du recouvrement ont :

- soit une intersection vide

- soit une intersection réduite à un sommet commun.
- soit une intersection égale à un côté commun en entier.

iii) La droite d'équation  $\theta = 0$  et les rectangles  $R_{ij}$  ont

- soit une intersection vide
- soit une intersection réduite à un côté ou à un sommet du rectangle.



On désigne par  $\mathcal{P}$  l'espace des fonctions de la forme

$$p(\theta, \sigma) = \alpha\theta + \beta\sigma\sqrt{\sigma} + \gamma\theta\sigma\sqrt{\sigma} + \delta .$$

Remarques :

- a) Les fonctions  $p$  sont affines par rapport à la variable  $\theta$   
(et aussi par rapport à la variable  $\sigma\sqrt{\sigma}$ ).

b) Comme  $\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \sqrt{\sigma} (\beta + \gamma\theta)$ , sur tout domaine  $S$  borné, la quantité

$$\int_S \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)^2 d\theta d\sigma \text{ est finie.}$$

On définit l'espace  $V_h$  comme étant l'espace des fonctions  $v_h$  vérifiant les conditions suivantes .

i) la restriction de  $v_h$  à chaque rectangle  $R_{ij}$  est une fonction de  $\Phi$  .

ii) la restriction de  $v_h$  à  $\gamma$  est nulle.

Lemme 7.

Etant donné un rectangle  $R$  de sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et quatre nombre  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , il existe une fonction  $v$  et une seule appartenant à  $\Phi$  telle que  $v(A_i) = u_i \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$  .

Preuve.

Soient  $(\theta_i, \sigma_i)$  les coordonnées du point  $A_i$  .

La détermination de  $v$  se ramène à la détermination de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

vérifiant :

$$(1) \quad \alpha\theta_i + \beta\sigma_i \sqrt{\sigma_i} + \gamma\theta_i\sigma_i\sqrt{\sigma_i} + \delta_i = u_i \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 .$$



Si  $h$  et  $k$  sont les dimensions du rectangle  $R$  la matrice  $M$  du système (1) s'écrit :

$$M \begin{vmatrix} \theta & \sigma\sqrt{\sigma} & \theta\sigma\sqrt{\sigma} & 1 \\ \theta + k & \sigma\sqrt{\sigma} & (\theta+k)\sigma\sqrt{\sigma} & 1 \\ \theta & (\sigma+h)\sqrt{\sigma+h} & \theta(\sigma+h)\sqrt{\sigma+h} & 1 \\ \theta + k & (\sigma+h)\sqrt{\sigma+h} & (\theta+h)\sqrt{\sigma+h} & 1 \end{vmatrix}$$

Si  $h$  et  $k$  sont différents de 0, le déterminant de  $M$  est non nul, et le système (1) est un système de Cramer ce qui achève la démonstration du lemme 7.

Remarque.

Si on note par  $\Omega_h$  l'ensemble des points de discrétisation de  $\bar{\Omega}_L$  et par  $\overset{\circ}{\Omega}_h$  l'ensemble des points de  $\Omega_h$  intérieurs à  $\Omega_L$  ou situés sur  $\bar{\gamma}$  alors toute fonction  $v_h$  de  $V_h$  est entièrement déterminée et de manière unique par ses valeurs aux points de  $\overset{\circ}{\Omega}_h$ .

3) Détermination des fonctions de base.

Soit  $a_{ij} \in \overset{\circ}{\Omega}_h$ ,  $a_{ij}$  a pour coordonnées  $\theta_i = ik$   $\sigma_i = \sum_{j=1}^l h_j$ .

On désigne par  $w_{ij}$  la fonction dont la restriction à chaque rectangle du recouvrement est dans  $\mathcal{P}$  et est telle que

$$w_{ij}(a_{ij}) = 1 .$$

$$w_{ij}(a_{k\ell}) = 0 \quad \text{pour } (i,j) \neq (k,\ell)$$

Le graphe suivant représente les valeurs de  $w_{ij}$  .

	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$
$\updownarrow$ $\times$ $\updownarrow$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}^1$	$w_{ij}^2$	$w_{ij}=0$
	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}^4$	$w_{ij}^3$	$w_{ij}=0$
	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$
	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$	$w_{ij}=0$

k.

$\bar{\Omega}_i$

Représentation  
des valeurs de  
 $w_{ij}$  dans  $\bar{\Omega}_i$

Valeurs des  $w_{ij}^n$  .

En notant  $s_j = (\sum_{\ell=1}^j h_\ell)^{3/2}$  on obtient :

$$w_{i,j}^1 = \frac{s_{j+1}}{s_{j+1}-s_j} \frac{\theta}{k} + (i-1) \frac{\sigma\sqrt{\sigma}}{s_{j+1}-s_j} - \frac{\theta\sigma\sqrt{\sigma}}{k(s_{j+1}-s_j)} - (i-1) \frac{s_{j+1}}{s_{j+1}-s_j}$$

$$w_{i,j}^2 = -\frac{s_{j+1}}{s_{j+1}-s_j} \frac{\theta}{k} - (i+1) \frac{\sigma\sqrt{\sigma}}{s_{j+1}-s_j} + \frac{\theta\sigma\sqrt{\sigma}}{k(s_{j+1}-s_j)} + (i+1) \frac{s_{j+1}}{s_{j+1}-s_j}$$

$$w_{i,j}^3 = \frac{s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} \frac{\theta}{k} + (i+1) \frac{\sigma\sqrt{\sigma}}{s_j - s_{j-1}} - \frac{\theta\sigma\sqrt{\sigma}}{k(s_j - s_{j-1})} - (i+1) \frac{s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}}$$

$$w_{i,j}^4 = - \frac{s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}} \frac{\theta}{k} - \frac{(i-1)\sigma\sqrt{\sigma}}{s_j - s_{j-1}} + \frac{\theta\sigma\sqrt{\sigma}}{k(s_j - s_{j+1})} + (i-1) \frac{s_{j-1}}{s_j - s_{j-1}}$$

Théorème 4.

Les fonctions  $w_{ij}$  sont continues sur  $\bar{\Omega}_L$ .

Preuve :

Soit  $S_{ij}$  la réunion des quatre rectangles dont un des sommets est  $a_{ij}$ .

On voit immédiatement que  $w_{ij} = 0$  sur  $\partial S_{ij}$ , c'est-à-dire que  $\text{supp } w_{ij} = S_{ij}$ .

On va montrer que  $w_{ij}$  est continue à l'intérieur de  $S_{ij}$ , ce qui revient à montrer la continuité sur les côtés des rectangles intérieurs à  $S_{ij}$ .

a) Sur les segments  $\sigma = \text{constante}$ .

La restriction de  $w_{ij}$  à ces segments est une fonction linéaire de  $\theta$ , donc déterminé par les valeurs en deux points, on en déduit donc la continuité de  $w_{ij}$  sur ces segments.

b) Sur les segments  $\theta = \text{constante}$

Par exemple comparons  $w_{ij}^1(ik, \sigma)$  et  $w_{ij}^2(ik, \sigma)$ .

$$\begin{aligned} w_{ij}^1(ik, \sigma) &= i \frac{s_{j+1}}{s_{j+1} - s_j} + (i-1) \frac{\sigma\sqrt{\sigma}}{s_{j+1} - s_j} - \frac{i\sigma\sqrt{\sigma}}{s_{j+1} - s_j} - \frac{(i-1)s_{j+1}}{s_{j+1} - s_j} \\ &= \frac{s_{j+1}}{s_{j+1} - s_j} - \frac{\sigma\sqrt{\sigma}}{s_{j+1} - s_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{ij}^2(ik, \sigma) &= -i \frac{s_{j+1}}{s_{j+1} - s_j} - (i+1) \frac{\sigma\sqrt{\sigma}}{s_{j+1} - s_j} + \frac{i\sigma\sqrt{\sigma}}{s_{j+1} - s_j} \\ &= \frac{s_{j+1}}{s_{j+1} - s_j} - \frac{\sigma\sqrt{\sigma}}{s_{j+1} - s_j} \end{aligned}$$

Donc  $w_{i,j}^1(ik, \sigma) = w_{ij}^2(ik, \sigma)$

et de même :  $w_{ij}^4(ik, \sigma) = w_{ij}^3(ik, \sigma)$  (c.q.f.d.)

Théorème 5.

Les fonctions  $w_{ij}$  appartiennent à  $V_L$ .

Il est évident que  $w_{ij}$  et  $(w_{ij})_\theta$  appartiennent à  $L^2(\Omega_L)$  et d'après la remarque b) du paragraphe (III.2) on a aussi

$\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} w_{ij}\right)_\sigma$  qui appartient à  $L^2(\Omega_L)$ .

Donc les fonctions  $w_{ij}$  appartiennent à l'espace  $\tilde{V}(\Omega_L)$  défini dans le paragraphe (III.1), et donc les  $w_{ij}$  appartiennent à  $V_L$ .

Théorème 6.

$V_h$  est un sous-espace de dimension finie de  $V_L$ .

Ceci est une conséquence du Théorème 5.

Définition.

Soit  $r_h$  l'opérateur de  $V \rightarrow V_h$  qui à  $u \in V$  associe une fonction  $r_h u$  de  $V_h$  définie par

$$r_h u(a_{ij}) = u(a_{ij}) \quad \forall a_{ij} \in \Omega_h.$$

$r_h u$  s'appelle l'interpolée de  $u$ .

On munit  $V_h$  alors du produit scalaire suivant :

$u_h$  et  $v_h$  appartenant à  $V_h$ .

$$((u_h, v_h))_h = \int_{\Omega_L} (r_h q u_h)(r_h^q v_h) d\theta d\sigma$$

$$+ \int_{\Omega_L} (r_h q(u_h)_\theta)(r_h q(v_h)_\theta) d\theta d\sigma + \int_{\Omega_L} (r_h \left(\frac{q}{\sqrt{k}}(u_h)_\sigma\right))(r_h \left(\frac{q}{\sqrt{k}}(v_h)_\sigma\right)) d\theta d\sigma$$

Conclusion.

1) Les fonctions de  $V_h$  égales à 1 sur un certain sommet appartenant à  $\Omega_h$  et nulles sur tous les autres sommets forment une base de  $V_h$ . Par suite la dimension de  $V_h$  est égale au nombre de points de  $\Omega_h$ .

2) L'espace  $V_h$  constitue une approximation interne et stable de l'espace  $V$  (les normes des opérateurs de prolongement  $p_h$  et de restriction  $r_h$  sont évidemment majorées).

4) Un type de coordonnées adaptées au problème (coordonnées pseudo-barycentriques).

Soit  $P$  un point de  $\mathbb{R}^2$  appartenant à  $\bar{\Omega}_L$ . Il existe un rectangle  $R_p$  et un seul tel que  $P$  appartienne à  $R_p$ . Soient  $A_1, A_2, A_3, A_4$  de coordonnées  $(\theta_i, \sigma_i)$   $i = 1, \dots, 4$  les sommets de  $R_p$ .

Théorème 7.

$P$  étant donné, appartenant à  $\bar{\Omega}_L$  et  $A_1, A_2, A_3, A_4$  définis comme précédemment, il existe 4 nombres réels  $\lambda_i = \lambda_i(P)$  tels que si  $P$  a pour coordonnées  $(\theta, \sigma)$  on ait :

$$\theta = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \theta_i$$

$$\sigma \sqrt{\sigma} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \sigma_i \sqrt{\sigma_i}$$

$$\theta \sigma \sqrt{\sigma} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \theta_i \sigma_i \sqrt{\sigma_i}$$

$$1 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i$$

De plus les  $\lambda_i$  sont déterminés de façon unique. Les  $\lambda_i$  sont appelées les coordonnées pseudo-barycentriques de  $P$  par rapport

au système  $A_1, A_2, A_3, A_4$  .

Preuve.

La matrice du système (2) est la transposée de la matrice  $M$  du système (1) défini au paragraphe (III.2.). Le système (2) a donc une solution et une seule.

Remarques.

1) Les  $\lambda_i$  vérifient

$$(3) \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i (\theta_i - \theta) = 0 .$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i (\sigma_i \sqrt{\sigma_i} - \sigma \sqrt{\sigma}) = 0 .$$

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i (\theta_i \sigma_i \sqrt{\sigma_i} - \theta \sigma \sqrt{\sigma}) = 0$$

2) D'après le lemme 7 , étant donnés quatre scalaires  $u_1, u_2, u_3, u_4$  et un rectangle  $R$  de sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  il existe une fonction  $u$  et une seule appartenant à  $\mathcal{Q}$  telle que  $u(A_i) = u_i$  . De plus pour tout point  $P$  de  $R$ ,  $u(P)$  s'écrit comme  $\sum_{i=1}^4 u_i \lambda_i(P)$  .

En effet  $u(P) = \alpha \theta + \beta \sigma \sqrt{\sigma} + \gamma \theta \sigma \sqrt{\sigma} + \delta$

et d'après la définitions des  $\lambda_i$

$$\begin{aligned}
u(P) &= \alpha \sum_{i=1}^4 \lambda_i \theta_i + \beta \sum_{i=1}^4 \lambda_i \sigma_i \sqrt{\sigma_i} \\
&\quad + \gamma \sum_{i=1}^4 \lambda_i \theta_i \sigma_i \sqrt{\sigma_i} + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \delta \\
&= \sum_{i=1}^4 (\alpha \theta_i + \beta \sigma_i \sqrt{\sigma_i} + \gamma \theta_i \sigma_i \sqrt{\sigma_i} + \delta) \lambda_i
\end{aligned}$$

donc

$$(4) \quad u(P) = \sum_{i=1}^4 u_i \lambda_i(P) \quad .$$

5) Estimation de certains coefficients.

Soit  $B = (b_{ij})$  la matrice inverse de la transposée de  $M$  et on considère le rectangle  $R$  dont les sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ont respectivement pour coordonnées  $(\theta, \sigma), (\theta', \sigma), (\theta', \sigma'), (\theta, \sigma')$

On note  $z = \sigma \sqrt{\sigma}$ .

$$h = \sigma' \sqrt{\sigma'} - \sigma \sqrt{\sigma} \quad .$$

$$k = \theta' - \theta \quad .$$

Alors on obtient les résultats suivants.



$$(5) \quad \begin{aligned} b_{13} &= \frac{1}{hk} \\ b_{23} &= -\frac{1}{hk} \\ b_{33} &= \frac{1}{hk} \\ b_{43} &= -\frac{1}{hk} \end{aligned}$$

$$(5)' \quad \begin{aligned} b_{11} &= -\frac{z+h}{hk} & b_{12} &= \frac{\theta+k}{hk} \\ b_{21} &= \frac{z+h}{hk} & b_{22} &= \frac{\theta+k}{hk} \\ b_{31} &= -\frac{z}{hk} & b_{32} &= \frac{-\theta}{hk} \\ b_{41} &= \frac{z}{hk} & b_{42} &= \frac{\theta}{hk} \end{aligned}$$

6) Propriétés différentielles.

Par différenciation des relations (1) on obtient,  $D$  étant l'opérateur gradient.

$$(7) \quad \sum_{i=1}^4 D\lambda_i = 0$$

et par différenciation de (6)

$$(7)' \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta} = b_{i1} + b_{i3}z = +\frac{1}{k} \text{ d'après (5)'}$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z} = b_{i2} + b_{i3}\theta = + \frac{1}{h} = (-1)^i \frac{1}{h}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} D\lambda_i(P) \cdot PA_j &= D\lambda_i(P) \cdot OA_j - D\lambda_i(P) \cdot OP \\ &= (b_{i1} + b_{i3}z)\theta_j + (b_{i2} + b_{i3}\theta)z_j \\ &\quad - [(b_{i1} + b_{i3}z)\theta + (b_{i2} + b_{i3}\theta)z] \\ &= \delta_{ij} - b_{i3}\theta_j z_j - b_{i4} - \lambda_i(P) + b_{i4} \\ &\quad - b_{i3}z\theta + b_{i3}(z\theta_j + z_j\theta) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(8) \quad D\lambda_i(P) \cdot PA_j = \delta_{ij} - \lambda_i(P) - b_{i3}(\theta - \theta_j)(z - z_j) \quad .$$

7) Calcul de l'erreur d'interpolation pour une fonction  $u$  de  $C^3(\bar{\Omega})$ .

On rappelle les notations :

$$z = \sigma\sqrt{\sigma} \quad .$$

$r_h u$  = interpolée de  $u$ ,  $\forall u \in C^3(\bar{\Omega})$

$$w(\theta, z) = u(\theta, \sigma) \quad .$$

$$w_h(\theta, z) = r_h u(\theta, z) \quad .$$

On va comparer  $w$  et  $w_h$  sur chaque rectangle  $R$  de la quadrangulation, de sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . D'après la formule de Taylor,

$w$  appartenant à  $\mathcal{E}^2(\bar{\Omega})$  on a :

$$W(A_i) = w(P) + D_j w(P) \xi_{j,i} + \frac{1}{2} D_{j,k} w(P_i) \xi_{j,i} \xi_{k,i}$$

où  $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}) = PA_i$

et où  $P_i$  est un point du segment  $PA_i$ .

D'après la remarque du paragraphe 3 on a également

$$(10) \quad w_h(P) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i(P) w(A_i) \quad \forall P \in R$$

et d'après (2) et (3)

$$\sum \lambda_i D_j w(P) \xi_{j,i} = 0.$$

Il résulte donc de ce qui précède que :

$$w_h(P) = w(P) + \frac{1}{2} D_{j,k} w(P_i) \xi_{j,i} \xi_{k,i}$$

et donc :

$$|w_h(P) - w(P)| \leq \left( \sum_{j,k} D_{j,k} |w(P_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\xi_{j,i}| |\xi_{k,i}|$$

ou encore

$$(11) \quad \sup |w_h(P) - w(P)| \leq C_1(w) \rho^2(h,k)$$

où  $\rho(h,k) = \sup(h,k)$ .

On s'intéresse maintenant à une estimation d'erreur concernant la déri-

vée de  $w$ .

En différenciant (10) on obtient

$$Dw_h(P) = \sum_{i=1}^4 w(A_i) D\lambda_i .$$

$$(12) \quad Dw_h(P) = \sum_{i=1}^4 w(P) D\lambda_i + \sum_{i=1}^4 D_j w(P) \xi_{j,i} D\lambda_i$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 D_{j,k} w(P_i) \xi_{j,i} \xi_{k,i} D\lambda_i$$

En vertu de (7) le premier terme du second membre de l'égalité

est nul. On va montrer que le second terme n'est autre que  $Dw(P)$ .

Comme les vecteurs  $PA_1, PA_2$  sont linéairement indépendants (sauf

si  $P \in A_1 A_2$ , auquel cas on choisit comme vecteurs indépendants

$PA_1$  et  $PA_3$ ) il suffit de prouver que :

$$\left( \sum_{i=1}^4 D_j w(P) \xi_{j,i} D\lambda_i \right) \cdot PA_k = Dw(P) \cdot PA_k$$

En utilisant (8) on obtient :

$$\left( \sum_{i=1}^4 D_j w(P) \xi_{j,i} D\lambda_i \right) \cdot PA_k$$

$$= \sum_{i=1}^4 Dw(P) PA_i (\delta_{ik} - \lambda_i(P) - b_{ij}(\theta - \theta_j)(z - z_j))$$

mais  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i(P) \cdot PA_i = 0$ .

et d'après (6)

$$\sum_{i=1}^4 PA_i b_{ij}(\theta - \theta_j)(z - z_j) = 0$$

donc

$$\left( \sum_{i=1}^4 D_j^w(P) \xi_{j,i} D\lambda_i \right), PA_k = Dw(P) \cdot PA_k$$

En utilisant (12) on a le résultat suivant :

$$\begin{aligned} |Dw_h(P) - Dw(P)| &< \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 |D\lambda_i| |D_{j,k}^w(P_i) \xi_{j,i} \xi_{k,i}| \\ &\leq C_2(w) |D\lambda_i| \rho^2(h,k) . \end{aligned}$$

mais d'après (7')

$$|D\lambda_i| < \frac{1}{\rho^1(h,k)}$$

où  $\rho^1(h,k) = \inf(h,k)$ .

et on obtient :

$$(13) \quad \sup_{P \in R} \text{ess} |Dw_h(P) - Dw(P)| \leq C_2(w) \frac{\rho^2(h,k)}{\rho^1(h,k)}$$

Soit maintenant  $\tilde{D}$  l'opérateur de composantes

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial w}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 8.

Sur chaque rectangle de la quadrangulation dont les sommets ont pour coordonnées  $(\theta, \sigma), (\theta', \sigma), (\theta', \sigma'), (\theta, \sigma')$

on désigne par  $h = \sigma' \vee \sigma' - \sigma \vee \sigma$  .

$$k = \theta' - \theta$$

$$\rho(h, k) = \sup(h, k)$$

$$\rho'(h, k) = \inf(h, k) ,$$

et pour toute fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  par  $u_h$  la fonction interpolée de  $u$  définie par

$$u_h(M) = u(M) \quad \forall M \in \Omega_h .$$

Alors

$$\sup_{p \in \Omega} |u_h(p) - u(p)| \leq C_1(u) \rho^2(h, k) .$$

$$\sup_{p \in \Omega} \text{ess} |Du_h(p) - Du(p)| \leq C_2(u) \frac{\rho^2(h, k)}{\rho'(h, k)}$$

Conclusion.

L'approximation ainsi définie de l'espace  $V_L$  est stable et convergente dès que la quantité  $\delta(h, k) = \sup_{R, k} (\rho(h, k) / \rho'(h, k))$  reste bornée quand  $\rho'(h, k) \rightarrow 0$

8) Calcul de l'erreur d'interpolation pour une fonction  $u$  de

$\tilde{V}_2(\Omega_L)$  où

$$\tilde{V}_2(\Omega_L) = \left\{ u \in \tilde{V}(\Omega_L) \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(\Omega_L), \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \in L^2(\Omega_L), \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \in L^2(\Omega_L), \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \in L^2(\Omega_L) \right\},$$

Remarque.

$\tilde{V}_2(\Omega_L)$  est inclus dans  $H^2(\Omega_L)$  ( $H^2(\Omega_L)$  : espace de Sobolev), on en déduit que  $\tilde{V}_2(\Omega_L)$  est inclus dans  $C^0(\bar{\Omega}_L)$ , espace des fonctions continues sur  $\Omega_L$ . On peut donc définir pour tout  $u \in \tilde{V}_2(\Omega_L)$  une fonction  $r_h u$  interpolée de  $u$ .

Lemme 8.

L'injection de  $\tilde{V}_2(\Omega_L)$  dans  $V(\Omega_L)$  est compacte.

Posons  $w_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $w_2 = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $u \in \tilde{V}_1(\Omega_L)$

$w = (w_1, w_2) \in [L^2(\Omega_L)]^2$ .

Si  $u \in \tilde{V}_2(\Omega_L)$  alors  $w \in [H^1(\Omega_L)]^2$ .

L'injection de  $H$  dans  $L^2$  étant compacte on en déduit le résultat.

Théorème 9.

Soit  $P = \{ \text{fonctions de la forme } \alpha x + \beta y\sqrt{y} + \gamma xy\sqrt{y} + \delta \}$ .

Il existe une constante  $C(K)$  telle que pour tout compact  $K \subset \Omega$  et pour tout opérateur  $\pi$  linéaire continu de  $V_2(K)$  dans  $V_1(K)$  vérifiant  $\forall v \in P \quad \pi v = v$  on ait la majoration

$$\forall v \in \tilde{V}_2(\Omega_L)$$

$$\|v - \pi v\|_1 \leq C \|I - II\|_{\mathcal{B}(\tilde{V}_2; \tilde{V}_1)} |v|_2$$

où

$$\|I\|_1 = \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2} + \left\| \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L_2} + \|u\|_{L_2}$$

$$\|II\|_2 = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L_2} + \left\| \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\|_2 + \left\| \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2} +$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\|_{L_2}$$

Moyennant le lemme 8, ce théorème est obtenu comme dans [6].

En effectuant ensuite le changement de variable  $z = y\sqrt{y}$ , on peut, comme dans [6] déduire le théorème 10.

Théorème 10.

Il existe une constante  $C$  telle que  $\forall v \in \tilde{V}_2(K)$ ,  $K$  rectangle  $\subset \Omega$

$$\|v - \pi v\|_1 \leq C \frac{(h^2 + k^2)}{\inf(h, k)} |v|_2$$

ou  $\|I\|_1 = \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2} + \left\| \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L_2}$  et  $h, k$  dimensions du rectangle.



IV : TRANSFORMATION DU PROBLEME P EN UN PROBLEME DE RECHERCHE DE POINT DE SELLE.

On rappelle les notations

$$\Omega_L = \{[\theta, \sigma] \mid \theta_1 < \theta < \theta_0 \text{ et } 0 < \sigma < L < +\infty\}$$

$$\gamma = \{\text{partie de } \partial\Omega_L \mid \theta = \theta_1 \text{ ou } \theta = \theta_0 \text{ ou } \sigma = 0\}$$

$$V_L = \{v \mid q \cdot v \in L^2(\Omega_L), q \cdot v_\theta \in L^2(\Omega_L), \frac{q}{\sqrt{k}} \cdot v_\sigma \in L^2(\Omega_L),$$

$$v = 0 \text{ sur } \gamma\}$$

$$K_{HL} = \{v \in V_L \mid v(0, \sigma) = H, \sigma \geq \sigma_\infty, \text{ et}$$

$$v(\theta, L) = w(\theta), v \geq 0\}.$$

où  $w$  représente la fonction étudiée en II et définie par

$$w(\theta) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} u(\theta, \sigma).$$

Problème  $P_1$ . On suppose que  $R$  est tel que  $Rq^2 \in L^2(\Omega_L)$

Alors on se propose de :

Trouver  $u \in K_{HL}$  tel que  $\forall w \in K_{HL}$  on ait

$$a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} R(v - u)q^2 d\theta d\sigma.$$

Où  $a(u, v)$ , et  $R$  sont définies comme dans II.

Le problème  $P_1$  admet une solution unique.

Théorème 1.

Le problème  $P_1$  est équivalent au problème  $P_2$  .

On définit :

$$J(v) = a(v,v) - 2 \int Rvq^2 d\theta d\sigma$$

$$P_2 \mid \text{ Trouver } u \in K_{HL} \text{ tel que}$$

$$J(u) = \inf_{v \in K_{HL}} J(v)$$

Soit :  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$

$v \rightarrow \int Rvq^2 d\theta d\sigma$  . C'est une forme linéaire continue sur  $V$ .

$a(u,v)$  est une forme bilinéaire, continue, symétrique et coercive sur

$V$ ,  $K$  un ensemble convexe fermé dans  $V$  .

Sous ces conditions le théorème 1 est un résultat bien connu,

cf. [4]

On définit

$$K'_{HL} = \{v \in V_L \mid v(o,\sigma) = H, \sigma \geq \sigma_\infty \text{ et}$$

$$v(\theta,L) = w(\theta)\}$$

Théorème 2.

Le problème  $P_2$  est équivalent au problème  $P_3$

$$\left[ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } u \in K_{HL} \text{ tel que} \\
 P_3 \quad J(u) = \inf_{v \in K'_{HL}} \sup_{p \in (L^2(\Omega))^+} (J(v) - (p, qv)) \\
 (,) \text{ désignant le produit scalaire dans } L^2
 \end{array} \right.$$

Preuve. Si  $v < 0$   $\sup (J(v) - (p, qv)) = +\infty$ .

Donc  $\inf_{v \in K'_{HL}} \sup_{p \in (L^2(\Omega))^+} [J(v) - (p, qv)]$  n'est certainement pas

atteint pour  $v < 0$

#### V. : DESCRIPTION DU PROBLEME APPROCHE.

##### 1) Définition.

###### Notations.

L'espace  $V_h$  est définie comme en IV.

$$K_{HL}^h = \{v \in V_h \mid v_h(\theta, \sigma) = H, \sigma \geq \sigma_\infty \text{ et} \\
 v_h(\theta, L) = w_h(\theta), v_h \geq 0\}.$$

où  $w_h(\theta)$  est la fonction de  $V_h$  définie par  $w_h(\theta) = w(\theta)$  en tout point du maillage appartenant à  $\bar{\gamma}$

$$L_h : V_h \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v_h \rightarrow \int_{\Omega} R_h v_h q_h^2 d\theta d\sigma$$

où  $R_h q_h^2$  désigne la fonction interpolée de  $Rq^2$ .  $L_h$  est donc une forme linéaire continue sur  $V_h$ . On définit les problèmes équivalents suivants.

Problème  $P_{1h}$  .

Trouver  $u_h \in K_{HL}^h$  tel que  $\forall v_h \in K_{HL}^h$

on ait :

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq \int_{\Omega} R_h (v_h - u_h) q_h^2 \, d\sigma .$$

Théorème 1.

Il existe  $u_h \in K_{HL}^h$  unique solution du problème  $P_{1h}$  .

La démonstration est analogue à ce qui a été fait dans II. pour le problème continu  $P_1$  .

Problème  $P_{3h}$  .

Trouver  $u_h \in K_{HL}^e$  tel que

$$J_h(u_h) = \inf_{v_h \in K_{HL}^e} \sup_{p_h \in (L^2(\Omega_L))^+} (J_h(v_h) - (p_h, q_h v_h))$$

où  $J_h(v_h) = a(v_h, v_h) - 2 L_h(v_h)$  .

2) Estimation d'erreur.

Soient  $u$  et  $u_h$  respectivement les solutions des problèmes  $P_1$

et  $P_{1h}$ , on se propose de calculer  $\|u - u_h\|_V$

$a(u, v)$  étant coercive on a :

$$\|u - u_h\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} (u - u_h, u - u_h)$$

où  $\alpha$  est la constante de coercitivité.

Notons par  $f$  la fonction  $R_q^2$  et par  $f_h$  la fonction  $R_{h,q}^2$ . Alors

on a :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u, u) + a(u_h, u_h) - 2a(u, u_h) \\ &\leq (f, u - v) + a(u, v) + (f_h, u_h - v_h) + a(u_h, v_h) - 2a(u, u_h) \\ &\leq (f, u - v_h) + (f_h, u_h - v) + (f - f_h, v_h - v) + a(u, v) + \\ &\quad a(u_h, v_h) - 2a(u, u_h) . \\ &\leq (f - Au, u - v_h) + (f_h - Au, u_h - v) + (f - f_h, v_h - v) \\ &\quad + a(u, u) - a(u, v_h) + a(u, u_h) - a(u, v) + a(u, v) \\ &\quad + a(u_h, v_h) - 2a(u, u_h) . \\ &\leq (f - Au, u - v_h) + (f_h - Au, u_h - v) + (f - f_h, v_h - v) \\ &\quad + a(u - u_h; u - v_h) . \\ &\leq |f - Au|_{L^2(\Omega)} |u - v_h|_{L^2(\Omega)} + |f - f_h|_{L^2(\Omega)} |u_h - v|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V + |f - f_h|_{L^2(\Omega)} |v_h - v|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

où  $M$  désigne la constante de continuité. De l'inégalité précédente on déduit facilement le théorème suivant.

Théorème 2.

Soient  $u$  et  $u_h$  les solutions des problèmes  $P_1$  et  $P_1^h$ ,  $\alpha$  et  $M$  respectivement les constantes de coercitivité et de continuité alors

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{1}{2\alpha} \{M \|u - v_h\|_V + (M^2 \|u - v_h\|_V^2 + 4 [|f - Au| |u - v_h| + |f_h - Au| |u_h - v| + |f - f_h| |v_h - v|])^{1/2}\} \quad (2)$$

Supposons que  $u$  appartienne à  $C^3(\Omega)$  et choisissons pour  $v$  une fonction de  $C^3(\Omega)$  dont  $u_h$  est l'interpolée et pour  $v_h$  l'interpolée de  $u$ .

D'après III  $\|u - v_h\|_V \leq c_2 \frac{\rho^2}{\rho^1}$

$$\|u - v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \rho^2$$

$$\|u_h - v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \rho^2 .$$

De même si  $f \in C^2(\Omega)$   $|f - f_h|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \rho^2$  .

D'autre part  $|f - Au|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega-D} f^2 d\theta d\sigma$  .

$$\text{et } |f_h - Au|_{L^2(\Omega)} \leq |f - f_h|_{L^2(\Omega)} + |f - Au|_{L^2(\Omega)}$$

D étant l'intérieur du domaine où l'équation  $Au = f$  est vérifiée.

Puisque  $f \in L^2(\Omega)$ , on en déduit que les 2 quantités précédentes sont bornées et de même  $v_h$  et  $v$  appartenant à  $L^2(\Omega)$ , la quantité  $|v_h - v|_{L^2(\Omega)}$  est également bornée.

On a donc comme conséquence immédiate des résultats précédents et en utilisant le fait que  $\rho/\rho' > 1$  le

### Théorème 3.

Si  $u$  et  $f$  appartiennent à  $C^2(\Omega)$ , alors il existe une constante  $\beta = \beta(\alpha, M)$  telle que  $u$  et  $u_h$  étant les solutions des problèmes  $P_1$  et  $P_{1,h}$  on ait

$$\|u - u_h\|_V \leq \beta(\alpha, M) \frac{\rho}{\rho'}^2$$

D'après le théorème de densité démontré en III, on peut déduire du théorème 3 le théorème 4.

### Théorème 4.

Soient  $u$  et  $u_h$  les solutions des problèmes  $P_1$  et  $P_{1,h}$

alors  $u_h \rightarrow u$  dans  $V$  fort quand  $(h,k) \rightarrow 0$ , le rapport  $\frac{\sup(h,k)}{\inf(h,k)}$  restant borné.

3) Description de l'algorithme de résolution du Problème  $P_1^h$ .

On va utiliser l'algorithme d'Uzawa (cf. [5]). Ceci revient à construire deux suites d'éléments  $u_n^k \in K_{HL}^h$ ,  $p_h^n \in (L^2(\Omega_L))^+$  ainsi définies : on part de  $p_h^0 \in (L^2(\Omega))^+$  quelconque, on calcule

$u_h^0, p_h^1, u_h^1, \dots$  par :

(2)  $p_h^n$  étant connu, on détermine  $u_h^n$  comme l'élément de  $K_{HL}^h$  qui minimise.

$$J_h(v_h) - (q_n p_h, q_h v_h) = J_h(v_h) - (p_h, q_h^2 v_h) .$$

On définit ensuite

$$p_h^{n+1} = \Pi_{(L^2(\Omega))^+} (p_h^n - \rho_n q_h^2 u_h^n)$$

$\Pi$  : opérateur de projection.

où  $\rho_n > 0$  sera déterminé plus loin.

Description de l'algorithme permettant de résoudre (2).

$p_h^n$  étant connu on détermine  $u_h^{n+1}$  par

$$(3) \quad u_h^{n+1} = u_h^n - \rho_1 S_h^{-1} (A u_h^n - R_h q_h^2 - p_h^n q_h^2) .$$

où  $\rho_1$  sera précisé ultérieurement.



et  $S_h$  isomorphisme canonique de  $V_h$  sur  $V'_h$ .

Soient  $K_{oL}^h = \{v \in V_h \mid u_h(0, \sigma) = 0, \sigma \geq \sigma_\infty\}$  et

$$u_h(\theta, L) = 0, \quad u_h \geq 0.$$

Théorème 5.

On a (3)  $\Leftrightarrow$  (4) où

$$(4) \quad ((u_h^{n+1}, \theta_h))_{V_h} = ((u_h^n, \theta_h))_{V_h} - \rho_1 (Au_h^n - R_h q_h^2 - q_h^2 p_h, \theta_h)$$

$$\forall \theta_h \in B_0.$$

$B_0$  = base de l'ensemble des fonctions de  $V_h$  nulles sur les sommets appartenant à la demi-droite  $\theta = 0, \sigma \geq \sigma_\infty$  et au segment  $\sigma = L, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$ .

Preuve :

On a immédiatement  $3 \Leftrightarrow (5)$ .

$$(5) \quad ((u_h^{n+1}, \theta_h))_{V_h} = ((u_h^n, \theta_h))_{V_h} - \rho_1 ((S^{-1} Au_h^n - R_h q_h^2 - q_h^2 p_h, \theta_h))_{V_h}$$

$$\forall \theta_h \in K_{oL}^h.$$

et (5)  $\Leftrightarrow$  (6).

$$(6) \quad ((u_h^{n+1}, \theta_h))_{V_h} = ((u_h^n, \theta_h))_{V_h} - \rho_1 (S^{-1} A u_h^n - R_h q_h^2 - q_h^2 p_h, \theta_h)_{V_h}^2$$

$$\forall \theta_h \in K_{OL}^h .$$

On va montrer maintenant que l'on a aussi :

$$(6) \Leftrightarrow (4)$$

En effet  $p_h^n$  étant fixé l'algorithme décrit par (4) permet de déterminer la solution du problème suivant.

$$(7) \quad \text{Trouver } u_h \in K_{HL}' \text{ (défini en (1)) tel que } \forall v_h \in K_{HL}'$$

on ait

$$a(u_h, u_h - v_h) \geq \int_{\Omega} (R_h q_h^2 - q_h^2 p_h)(u_h - v_h) d\theta d\sigma .$$

Puis :

$$(7) \Leftrightarrow (8) .$$

$$(8) \quad \text{Trouver } u_h \in K_{HL}' \text{ tel que } \forall \theta_h \in B_0 \text{ on ait}$$

$$a(u_h, \theta_h) \geq \int_{\Omega} (R_h q_h^2 - q_h^2 p_h) \theta_h d\theta d\sigma .$$

Et en changeant  $\theta_h$  en  $-\theta_h$  .

$$(8) \Leftrightarrow (9) .$$

Trouver  $u_h \in K_{HL}'$  tel que  $\forall \theta_h \in B_0$  on ait

$$(9) \quad a(u_h, \theta_h) = \int_{\Omega} (R_h q_h^2 - q_h^2 p_h) \theta_h \, d\sigma \quad .$$

Ceci prouve le théorème (5).

4) Conditions de convergence de l'algorithme précédent.

D'après [5] l'algorithme précédent converge à condition de choisir

$\rho_1$  tel que :

$$(10) \quad \|I - \rho_1 \delta^{-1} A\|_{\mathcal{L}(V)} \leq \beta < 1 \quad .$$

et  $\rho_2$  suffisamment petit.

## RESULTATS NUMERIQUES.

I) Introduction.

Les principales difficultés numériques résident dans les points suivants.

1) L'infinité du domaine  $\Omega$  : on limite arbitrairement ce domaine à  $\sigma = L$  et on suppose que les conditions pour  $\sigma = L$  sont les mêmes que pour  $\sigma$  infini. Il en résulte notamment qu'il est impossible de prendre en considération les résultats numériques pour  $\sigma$  voisin de  $L$ .

2) La coupure du domaine  $\Omega$  par la demi-droite  $\{\theta = 0, \sigma \geq \sigma_\infty\}$ , ceci entraîne entre autres un problème de numérisation des éléments finis et un problème de stockage en mémoire machine (de façon à réaliser un encombrement minimum) des coefficients de la matrice  $A$  des produits scalaires  $((w_{ij}, w_{i'j'}))_h$ .

3) La complexité des coefficients intervenant dans le produit scalaire et dans la forme bilinéaire  $a$ , en particulier l'impossibilité de calculer explicitement  $q$ , et donc  $k$ , en fonction de  $\sigma$ . Pour cette raison et pour tenir compte de considérations d'ordre physique, on a choisi un maillage uniforme par rapport à la variable  $q$  (et donc dépendant de  $\sigma$ ), ceci correspond à peu près à un maillage logarithmique, notamment la hauteur des rectangles  $R_{ij}$  est très petite pour  $\sigma$  voisin

de 0 (donc  $q$  voisin de la vitesse du son). Cependant pour des commodités de tracé les courbes et surfaces sont données avec une échelle telle que l'on obtienne une variation constante pour  $\sigma$ .

4) Le choix de paramètres  $\rho_1$  et  $\rho_2$  permettant la convergence de l'algorithme, ces paramètres sont déterminés par essai numérique.

## II) Description du programme (et des divers sous-programmes).

1) Il faut d'abord faire choix d'un profil. On a considéré la partie supérieure d'une ellipse (grand axe : 200, petit axe : 100, angle du vecteur tangent à la surface variant entre  $-0.3$  radian et  $+0.3$  radian). Un sous-programme consiste à déterminer le rayon de courbure en tout point du profil ainsi que sa hauteur maximale.

2) Le maillage de  $\Omega$  étant choisi ainsi : variations en  $\theta$  constantes, ainsi que les variations par rapport à la vitesse, on détermine les coefficients de la matrice  $A = ((w_{ij}, w_{i'j'}))_h$ . Il faut donner quelques précisions sur la façon dont est fait le calcul des produits scalaires. Soit  $q_I$  la vitesse du fluide à l'infini, dans les calculs numériques on ne fait pas varier  $q$  de 0 à  $C_q$  ( $C_q$  : vitesse locale du son) mais entre les bornes  $q_I - \lambda\omega$  et  $\inf(q_I + \mu\omega, C_q)$  où  $\omega =$  variation en  $q$  (sera prise égale à  $3m/s$ )

$\lambda$  sera choisi égal à 30 en général et  $\mu$  sera choisi égal à 15.

Dans le cas où  $\inf(q_I + \beta\omega, C_q)$  est égal ou très proche de  $C_q$  on

remplace dans la région où  $q$  est voisin de  $C_q$ , la fonction  $k$  par

une fonction équivalente à savoir  $\frac{2}{\rho_c^3} \sigma$  ( $\rho_c$  : densité du fluide pour

$q = c_q$ ) et donc le produit  $\frac{1}{k} \frac{\partial w_{ij}}{\partial \sigma} \frac{\partial w_{i',j'}}{\partial \sigma}$  par (on rappelle que  $w_{ij}$

s'écrit  $\alpha_{ij}\theta + \beta_{ij}\sigma\sqrt{\sigma + \gamma_{ij}\theta} + \varphi_{ij}$ )  $\frac{9}{4} \frac{\rho_c^3}{2} (\beta_{ij} + \gamma_{ij}\theta)(\beta_{i',j'} + \gamma_{i',j'}\theta)$ .

3) On écrit ensuite le sous-programme de résolution de  $AX = B$ .

La matrice  $A$  est une matrice tridiagonale par blocs (la dimension des

blocs étant  $n$  ou  $n-1$  selon que  $\sigma$  est supérieur ou non à  $\sigma_\infty$ ,  $n$  :

nombre de points de discrétisation par rapport à la variable  $\theta$ ),

chaque bloc étant lui-même une matrice tridiagonale. La méthode employée

est naturellement une méthode de relaxation par blocs, le paramètre de

relaxation sera d'abord choisi égal à 1, puis égal à 1,4 (en réalité

cette modification n'entraîne pas de variation très sensible des résultats).

tats).

4) Programme principal.

On initialise  $u$  à 0, excepté en dehors des segments  $\{\sigma = L\}$

où  $u = w(\theta)$  donné, et  $\{\theta = 0, \sigma \geq \sigma_\infty\}$  où  $u = H$ .

On initialise également  $p$  à 0

$N^{\text{ième}}$  itération :

$p^{N-1}$  étant fixé on détermine  $u^{N-1}$  comme la solution de

$$J(u^{N-1}) = \inf J(v)$$

Pour cela on utilise l'algorithme décrit en (V.3). L'arrêt des itérations pour cet algorithme se fait par test soit sur la norme

$$\sup_{\theta, \sigma} |u_n^N(\theta, \sigma) - u_{n-1}^N(\theta, \sigma)| \quad , \text{ soit sur le nombre maximum}$$

d'itérations.

Le paramètre  $\rho_1$  sera choisi égal à 1.

$U^N$  étant ainsi déterminé on pose

$$\rho^N = \sup (0, p^{N-1} - \rho_{\ell} U^N) .$$

L'arrêt de cet algorithme se fait aussi par test soit

$$N \leq 20 .$$

Soit

$$\sup_{\theta, \sigma} |u^N(\theta, \sigma) - u^{N-1}(\theta, \sigma)| \leq E$$

On choisira ici  $E = 0.02$ .

#### 4) Premiers essais.

On choisit :

$$q_I = 100\text{m/s} .$$

$$\rho_2 = 300$$

L'arrêt des itérations se fait pour  $N = 20$  ce qui demande un temps de calcul assez important ( $T \approx 5$ mn. IBM 370).

Les graphes suivants donnent  $u$  en fonction de  $\theta$  et de  $\sigma$ .

On remarque que les solutions croissent très rapidement au voisinage de  $\sigma = L = 2,26$  (la vitesse en ce point est égale à 10m/s).



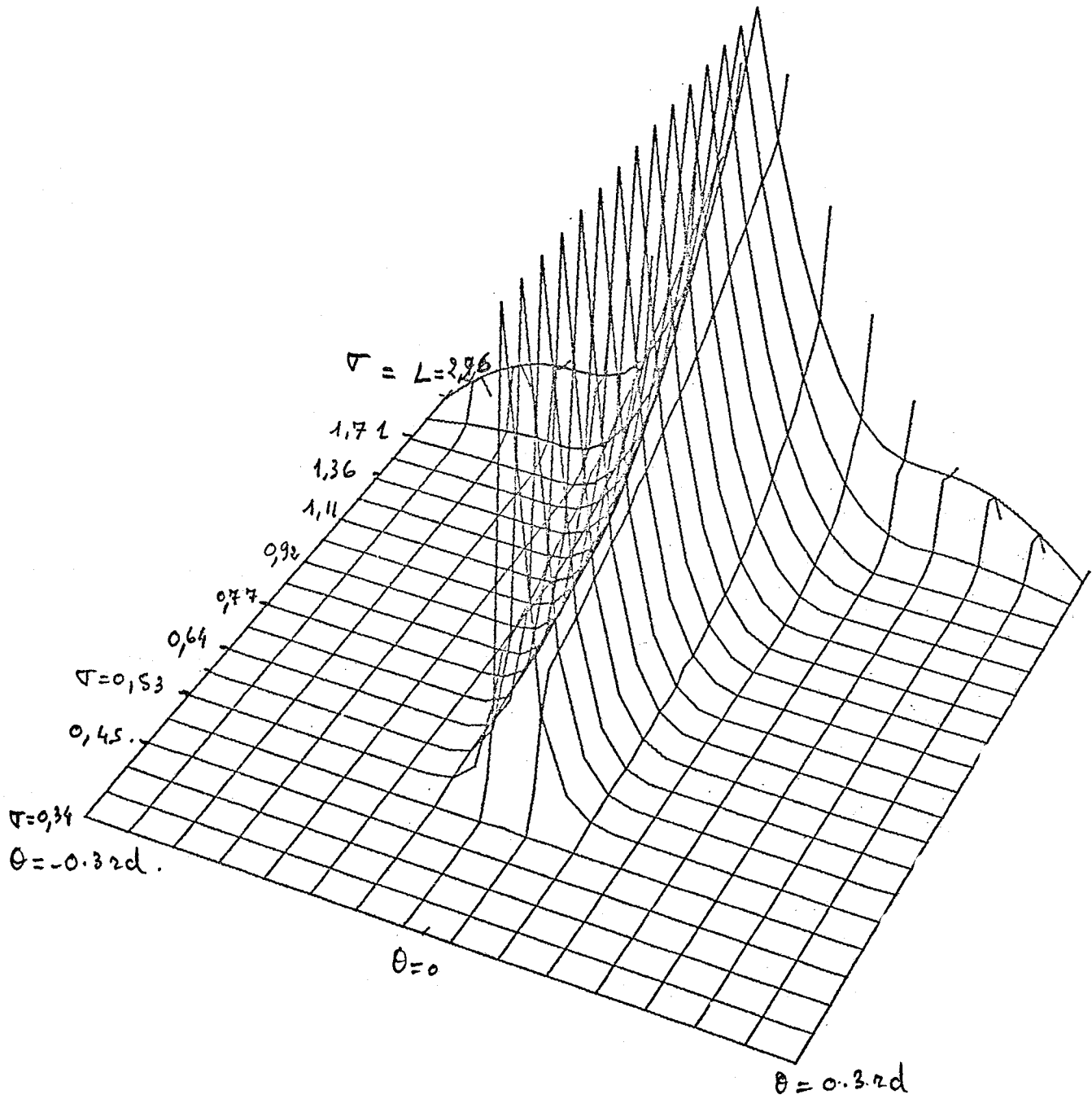


Fig 1

$\beta E = 100 \text{ m/s}$

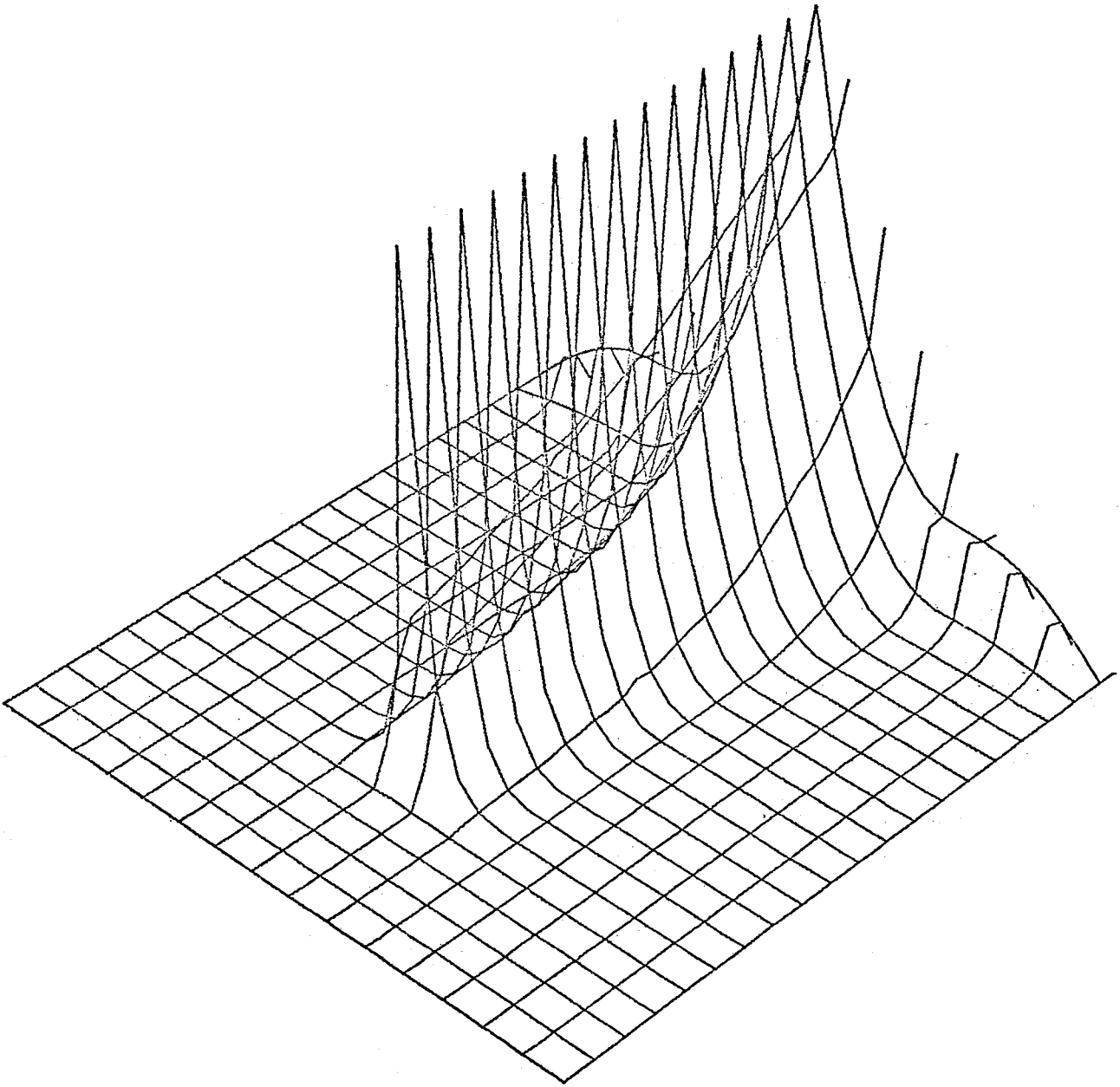


Fig 2 (Fig 1 regardie avec un point de vue different)

On refait les mêmes calculs en prenant  $\rho$  variable décroissant  
2  
(quand  $\sigma$  augmente) de 600 à 150.

Le graphe  $u = u(\theta, \sigma)$  n'est pas sensiblement modifié sauf en ce  
qui concerne les valeurs de  $\sigma$  voisines de  $L$ . (fig. 3 et 4).

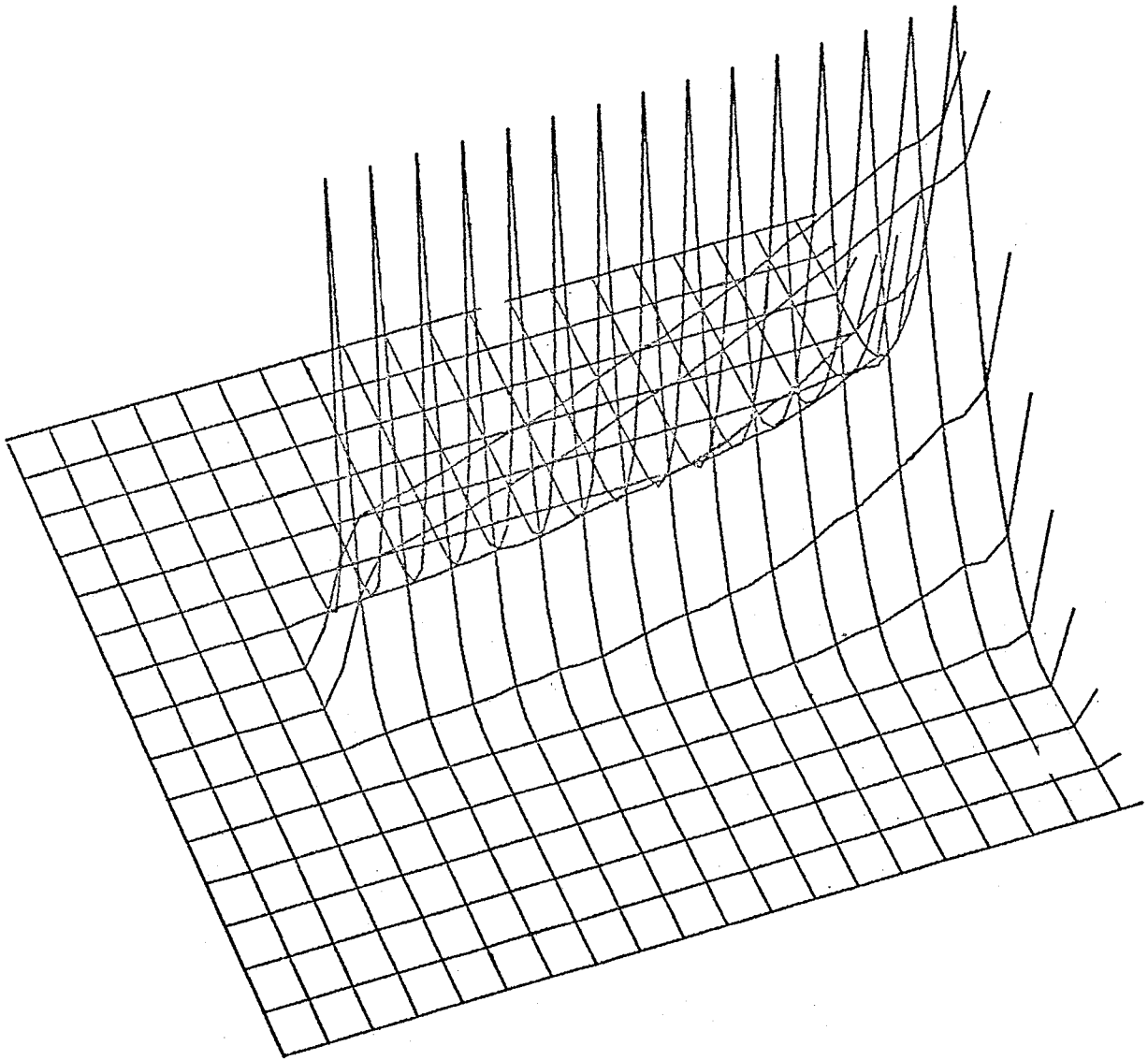


Fig 3

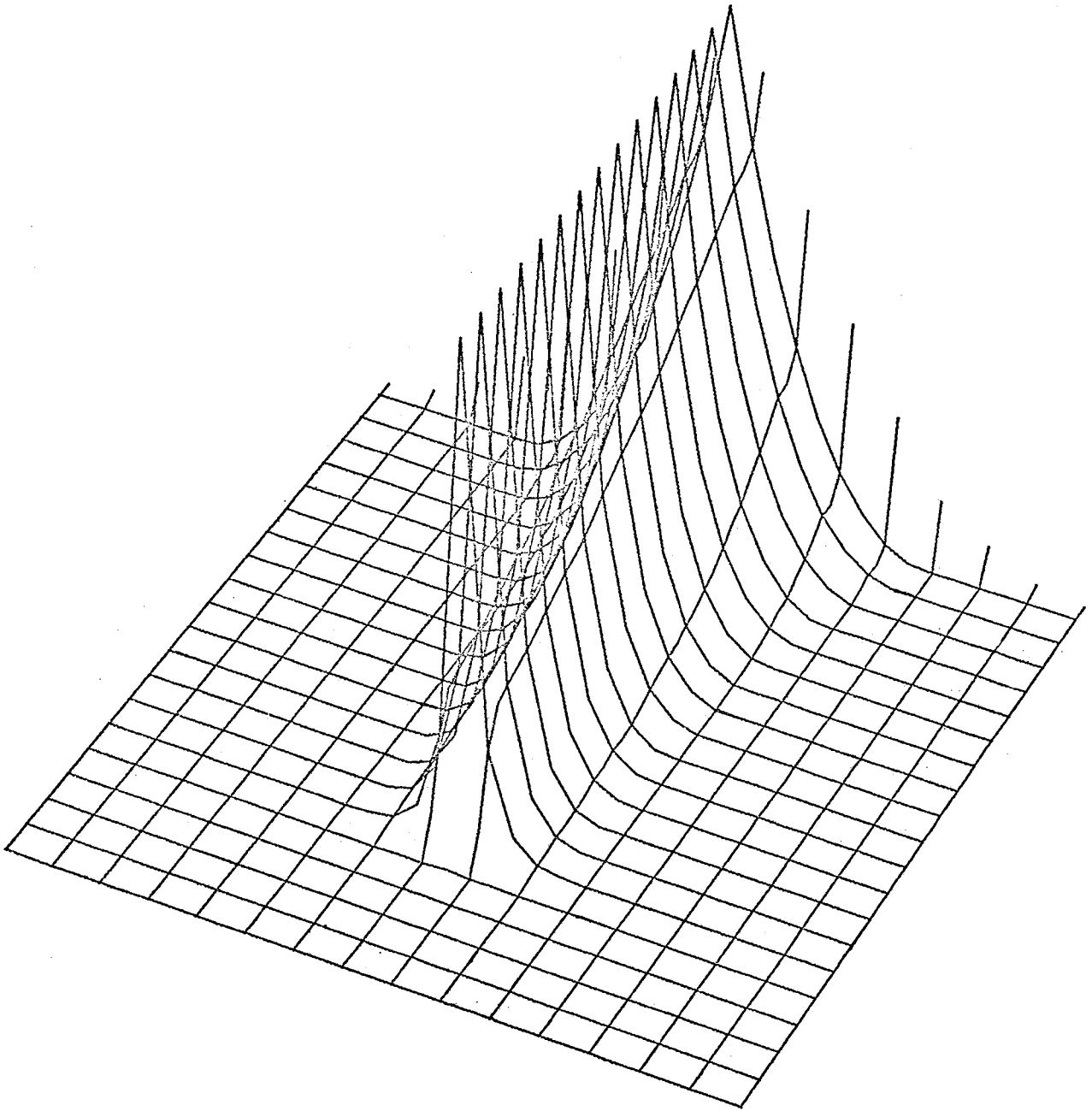


Fig 4

V) Détermination de la frontière libre.

Dans les graphes suivants on essaie de déterminer la frontière libre en mettant une <sup>barre</sup> verticale (1) aux points où  $u > \mu_1 > 0$ , et un  $w$  aux points où  $u < \mu_2 < 0$ .

Les figures 5.6.7.8. représentent les graphes obtenus pour différentes valeurs de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

Les figures 9.10 représentent les résultats obtenus, en doublant le nombre de points de discrétisation de la variable  $\theta$ , la valeur de  $u(\theta, \sigma)$  aux points intermédiaires étant obtenu par interpolation linéaire.

cas :  $q_I = 100$  m/s .

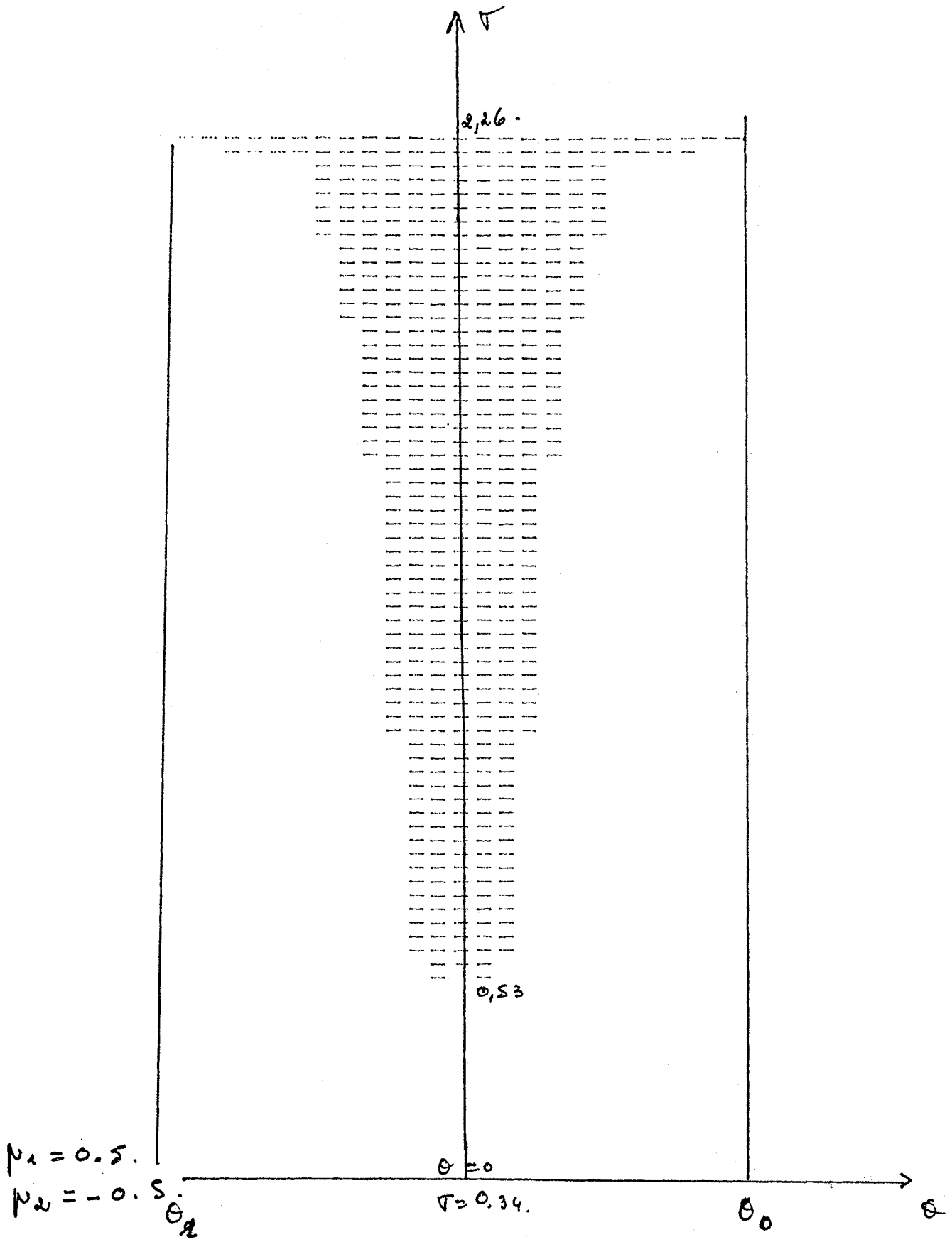


Fig 5.

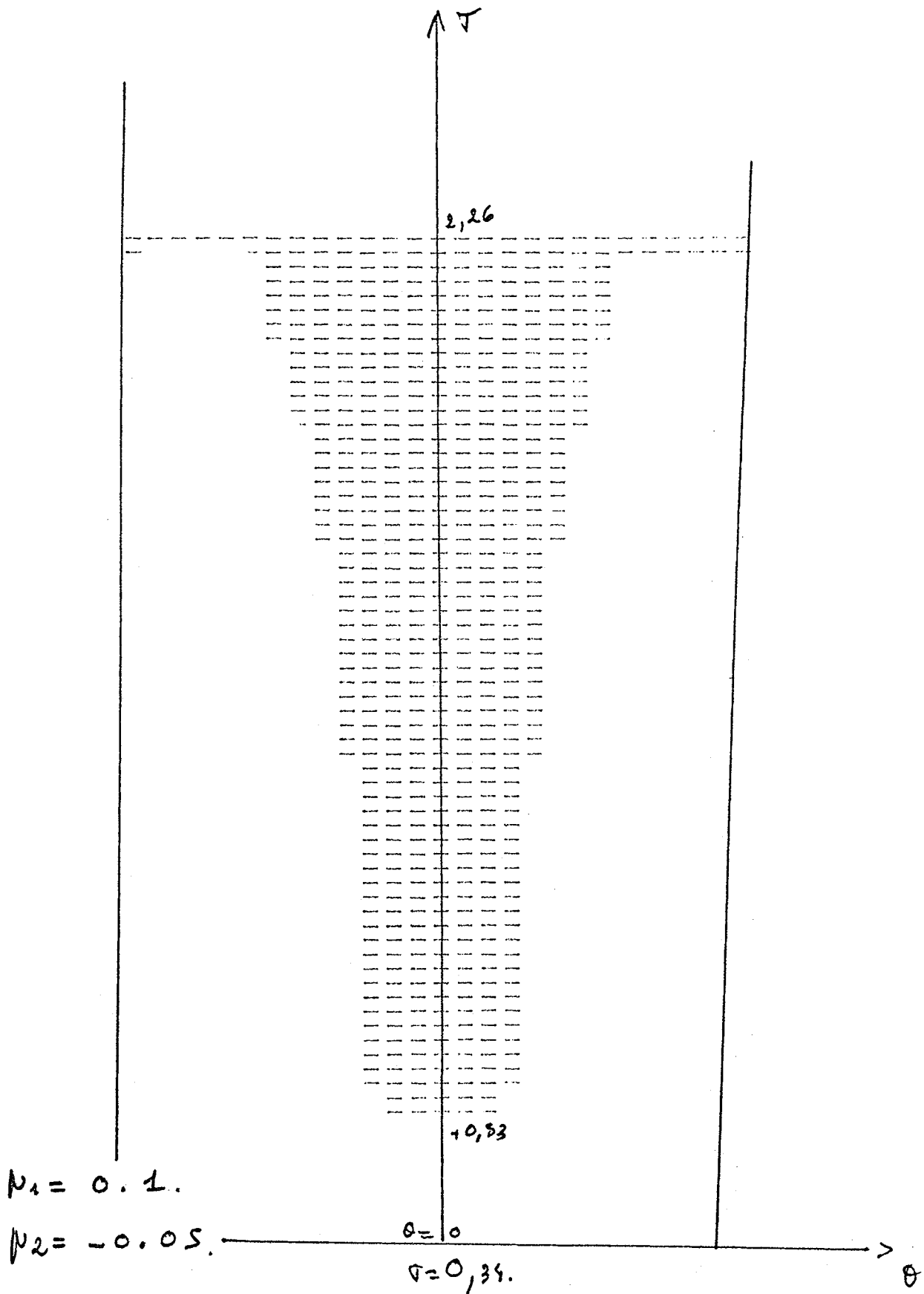


Fig 6.



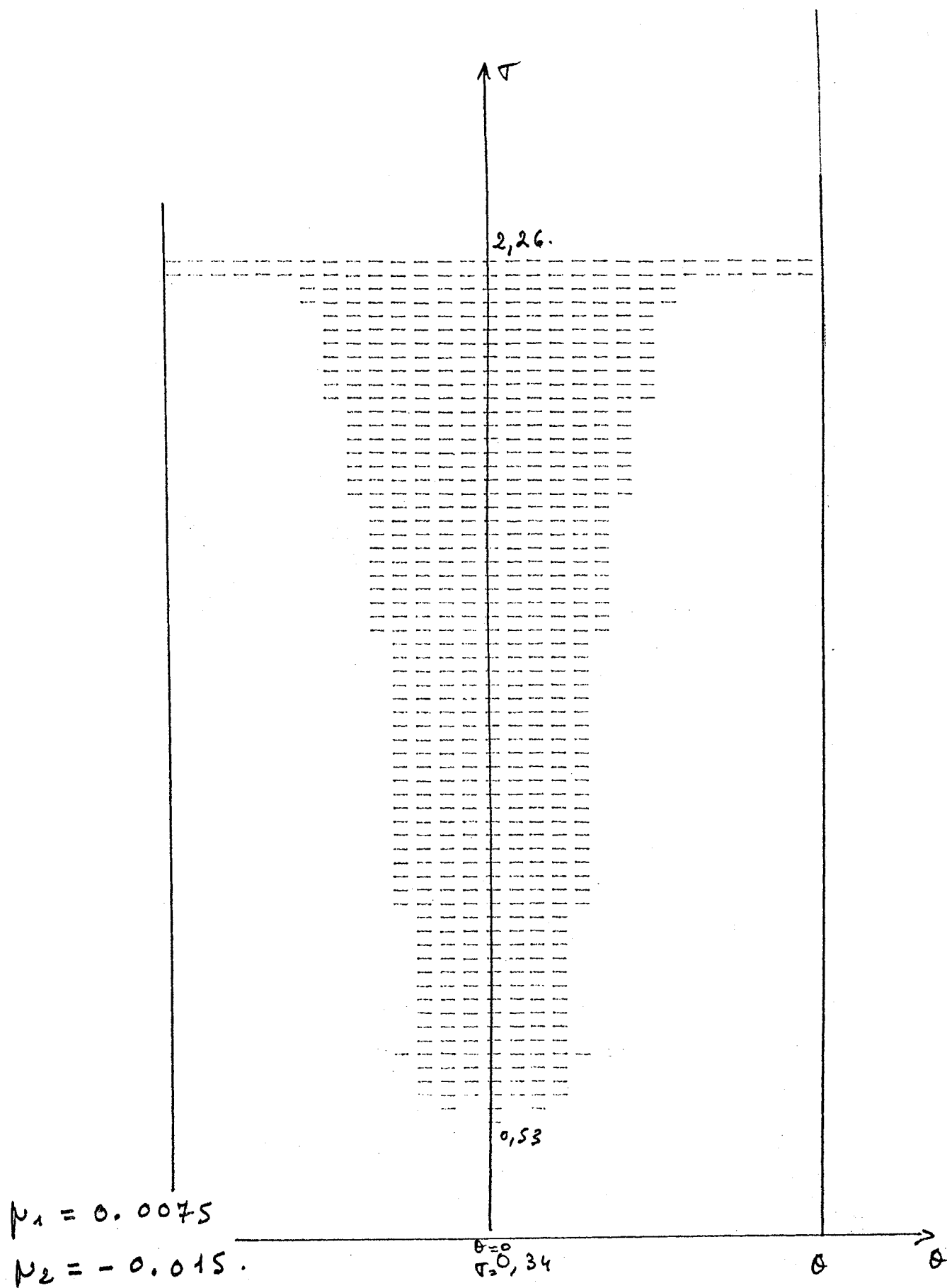


Fig 7.

Fig 8.

$$\mu_1 = 0.015$$

$$\mu_2 = 0.$$

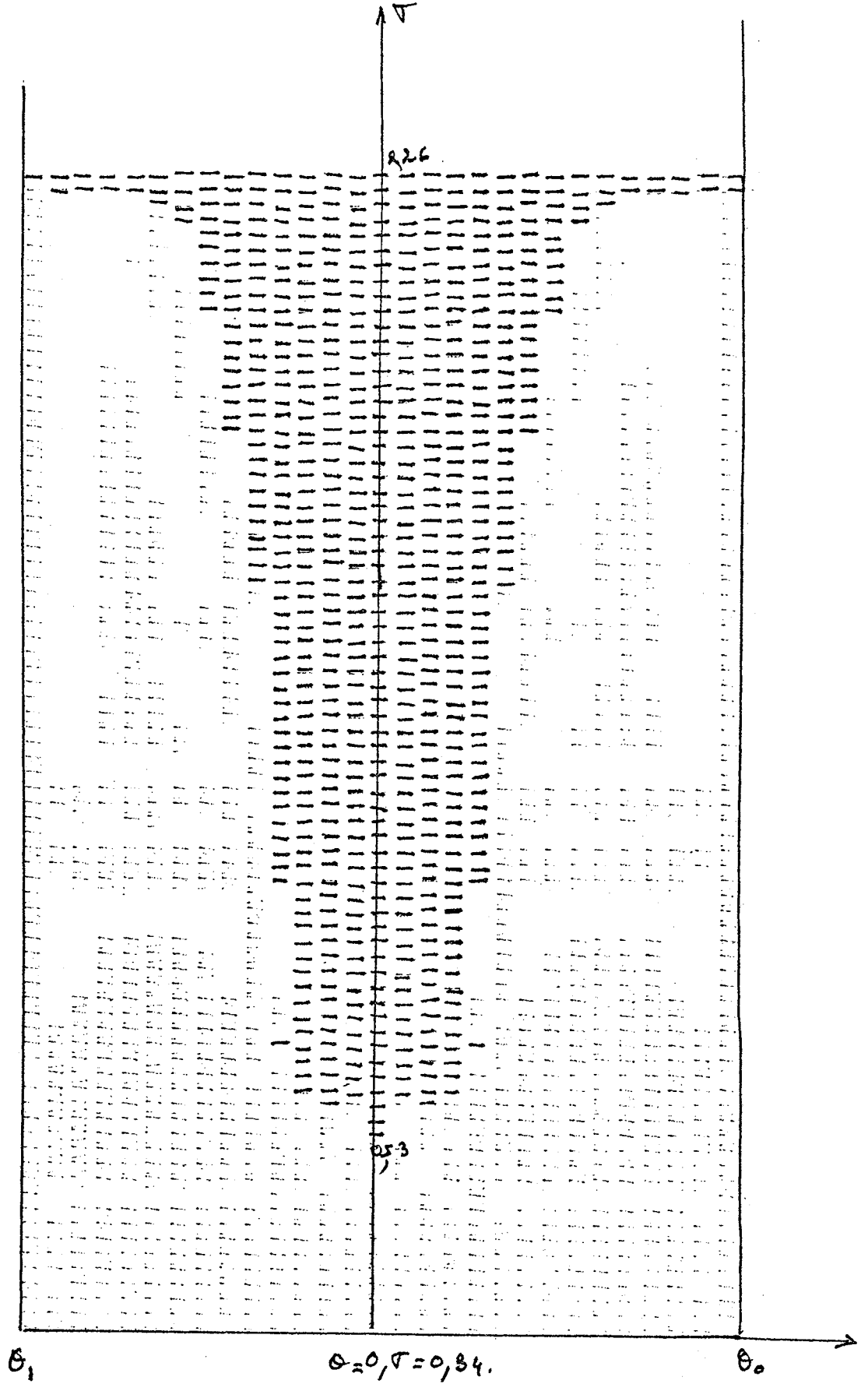
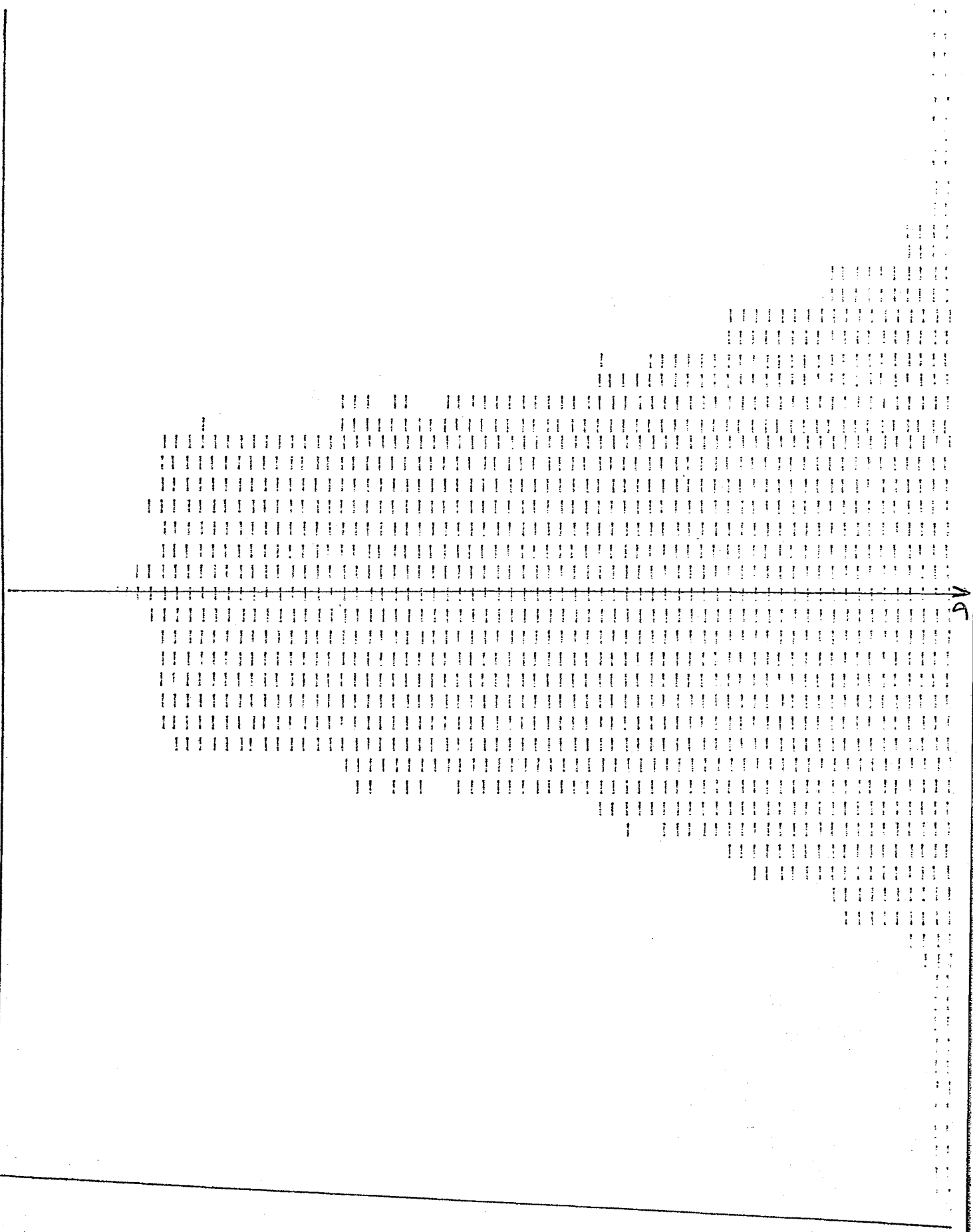


Fig 9

$$\mu_1 = 0.015.$$

$$\mu_2 = -0.015.$$



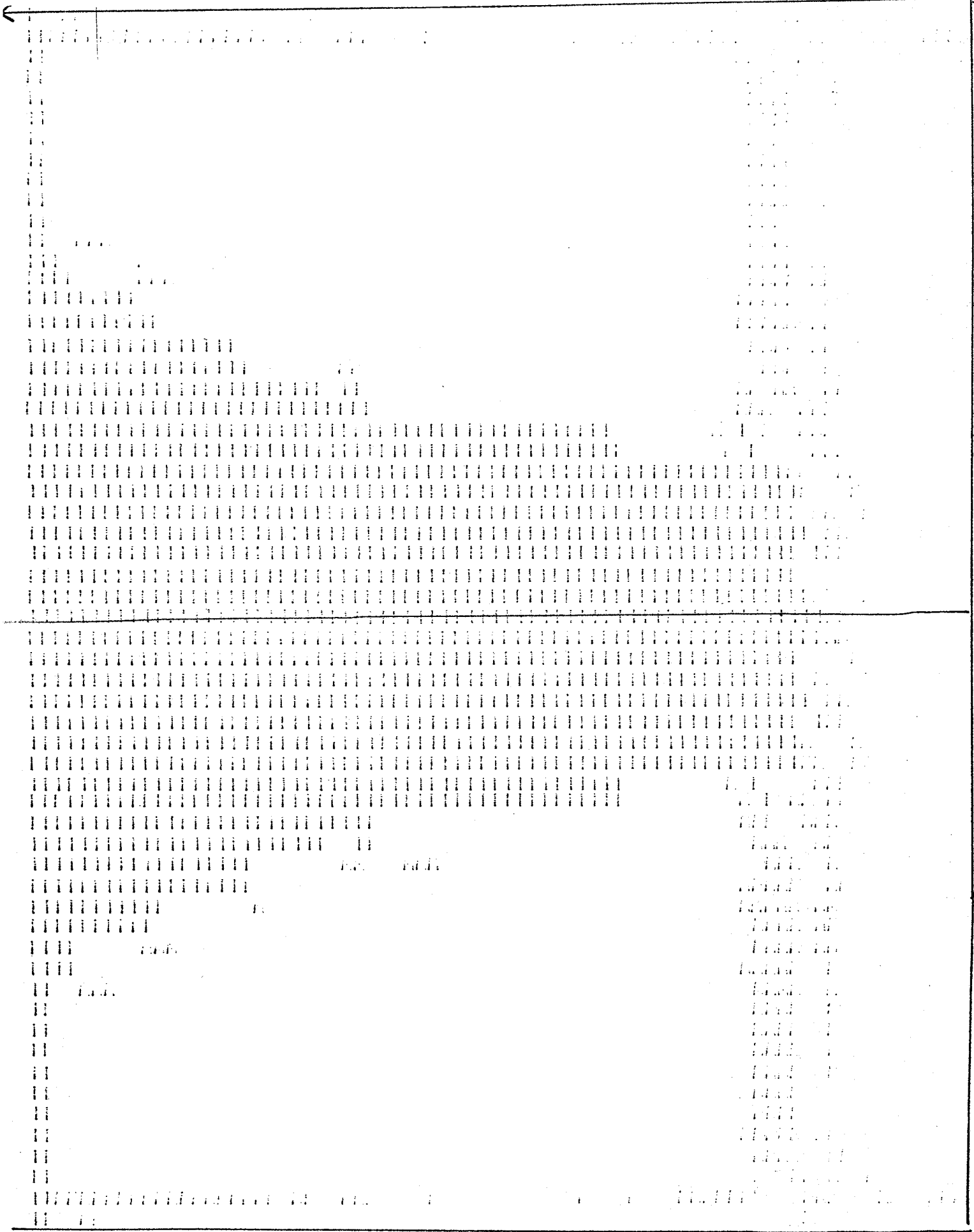
00

00

ry

$$\mu_1 = 0.0045$$

$$\mu_2 = -0.005$$



## VI) Variations de la vitesse initiale.

Les graphes suivants représentent les variations de  $u(\theta, \sigma)$  pour différentes valeurs de la vitesse initiale.

### Fig. 11 et 12.

$q_I = 200\text{m/s}$  . (nombre de Mach  $\sim 0,6$ ).

$\rho_2$  décroît régulièrement de 600 à 200.  
(quand  $\sigma$  croît).

### Fig. 13 et 14.

$q_I = 300\text{m/s}$  .

$\rho_2$  décroît régulièrement de 1000 à 550.

### Fig. 15 et 16.

$q_I = 320\text{m/s}$  (nombre de Mach  $\approx 0,9$ ).

$\rho_2$  décroît régulièrement de 1200 à 750 .

Dans ces deux derniers cas on constate que le graphe présente une anomalie pour  $\theta$  petit,  $q$  voisin de  $q_I$  . Il est probable que pour  $q_I$  voisin de  $Cq$  le problème devient <sup>supersonique</sup> et la formulation utilisée n'est donc plus valable en particulier la condition  $u(\theta, 0) = 0$  devient aberrante.

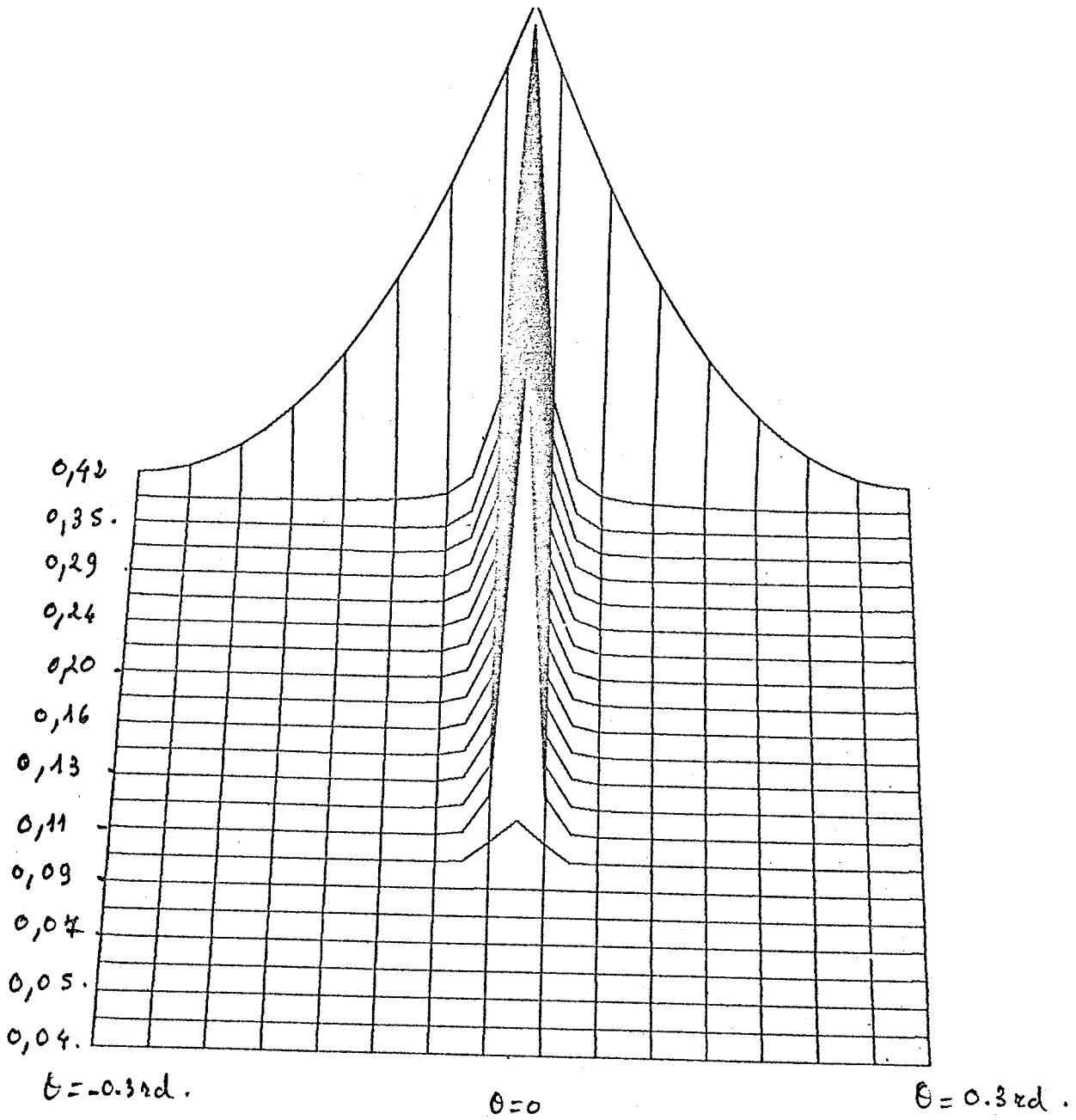


Fig 11

$\varphi I = 200 \text{ m/s.}$

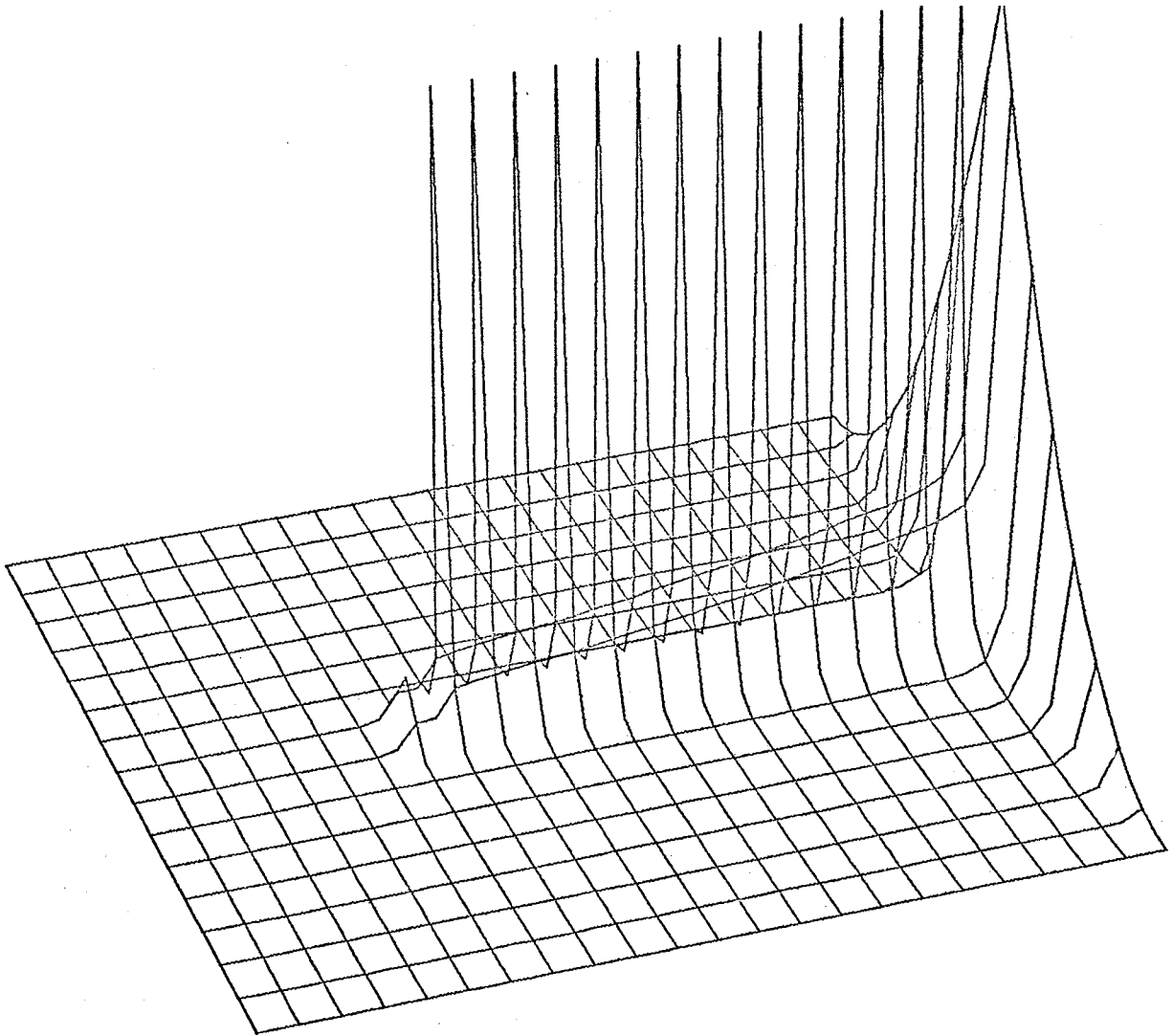


Fig 12

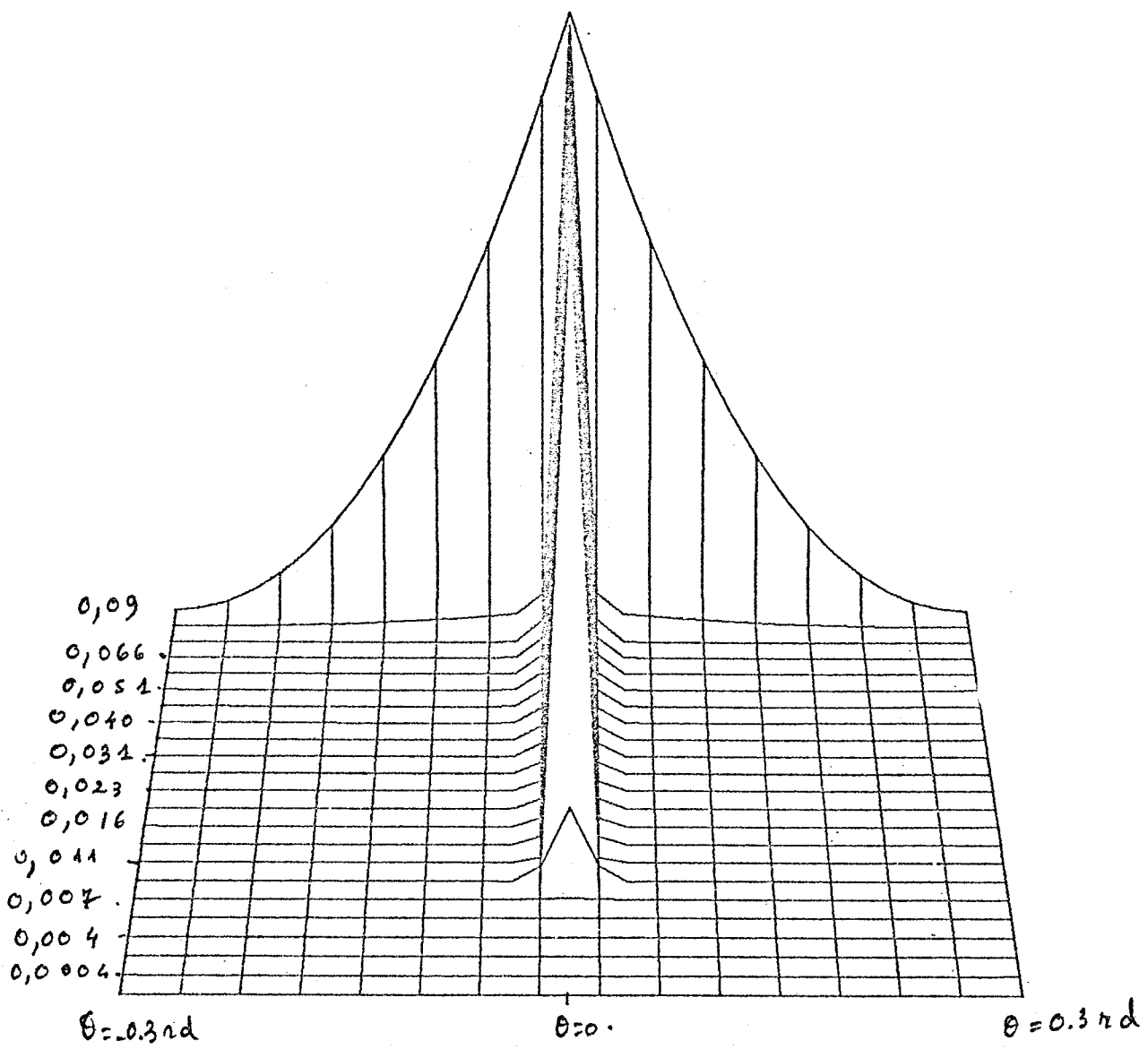


Fig 13.

$\phi E = 300 \text{ m/s.}$



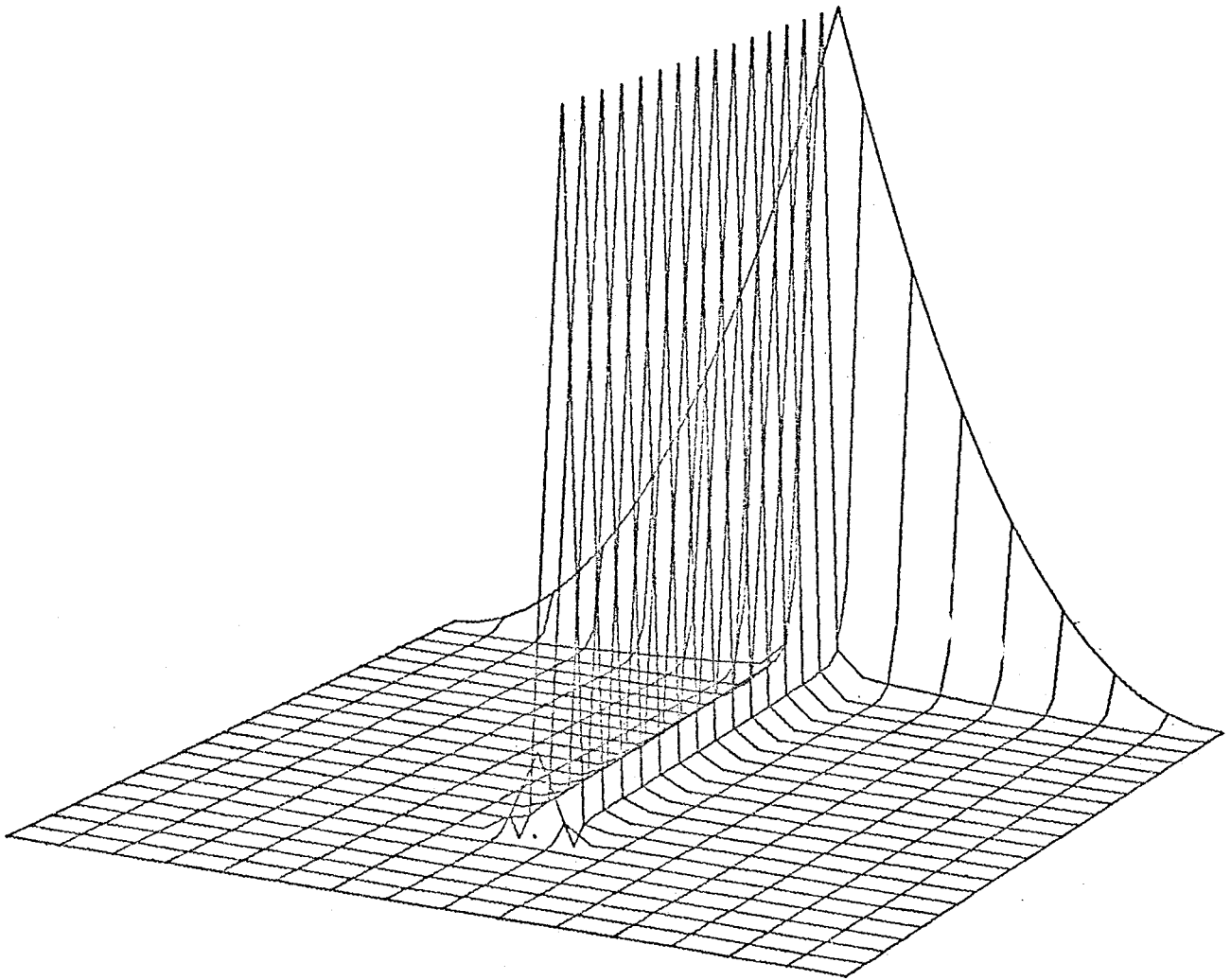


Fig. 14

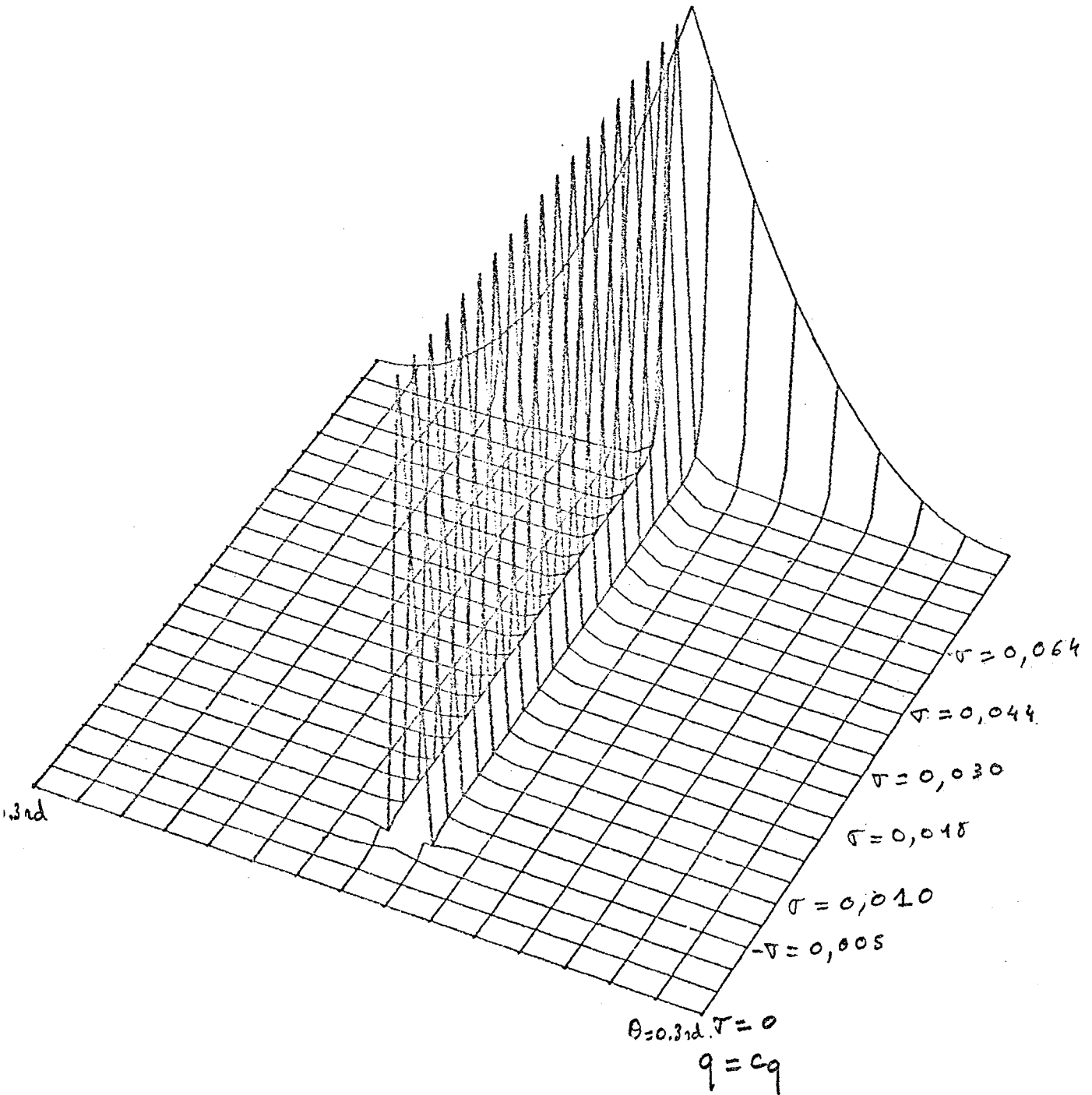
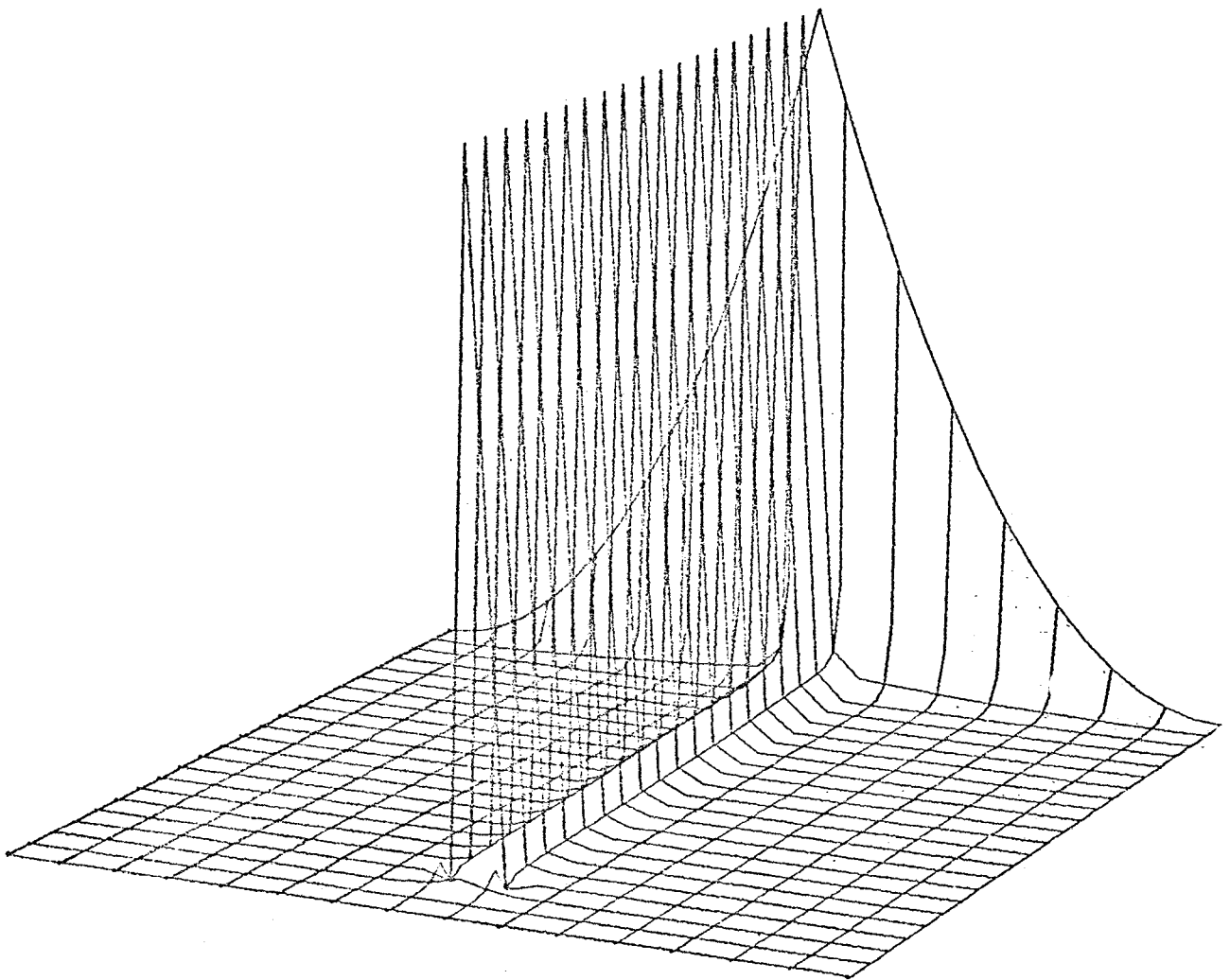


Fig 15.

$GE = 320 \text{ m/s}$ .



$$\Gamma = 0$$
$$q = c_q$$

Fig 16

Conclusion.

La résolution numérique de l'inéquation variationnelle est satisfaisante cependant l'interprétation physique des résultats obtenus est très difficile. Ceci est dû d'une part à la difficulté de l'approximation de la frontière libre et d'autre part au fait que le problème est ramené à un problème dans le plan de l'hodographe. Il reste donc de nombreux points à résoudre, et notamment, déterminer la précision avec laquelle on peut espérer connaître le résultat dans le plan physique (quand toutefois la transformation permettant de passer du plan physique au plan de l'hodographe est effectivement réversible) : par exemple, lorsque la vitesse à l'infini  $q_{\infty}$  est proche de la vitesse du son, la distance dans le plan de l'hodographe entre les points  $(\theta = 0, \sigma = \sigma_{\infty})$  et  $(\theta = 0, \sigma = 0)$  est faible ( $\sigma_{\infty}$  est la valeur de  $\sigma$  pour  $q = q_{\infty}$ ) alors que dans le plan physique ceci correspond à une distance variant de quelques mètres à l'infini.

Dans une étude ultérieure nous espérons pouvoir obtenir davantage de renseignements sur ce qui se passe quand la vitesse à l'infini est proche de la vitesse du son et essayer de déterminer le  $q_{\infty}$  maximum pour lequel le problème reste subsonique.

La méthode a été testée, actuellement pour un seul profil choisi au hasard, nous nous proposons de l'appliquer aux profils pour lesquels on a quelquefois des solutions analytiques (obtenues par Caius Jacob, cf. [ 2 ]) et aussi de regarder numériquement ce que deviennent les résultats dans le cas où l'on a  $\theta_0 - \theta_1 = \Pi$ . (cas par exemple de la demi-ellipse) et comparer les résultats, par exemple, à ceux obtenus par Van-Dyke grâce à des développements asymptotiques.

Bibliographie.

- [1] H. Brezis, G. Stampacchia  
"Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires".  
CRAS janvier 1973.
- [2] Caius Jacob.  
" Sur la détermination en seconde approximation du potentiel  
complexe de l'écoulement compressible subsonique autour de certains  
profils donnés." Beitrage Zur Analysis (1968).
- [3] P. Grisvard.  
"Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids".  
Annales de l'Ecole Normale de Pise (1963).
- [4] J.L. Lions.  
Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux  
dérivées partielles". Dunod Paris (1968).
- [5] R. Temam - J. Ekeland.  
"Analyse convexe et problèmes variationnels".  
Dunod Paris (1974).