F A C U L T E   D E S   S C I E N C E S   D ' O R S A

Cours de $C_3$.

# *** T O P O L O G I E   A L G E B R I Q U E ***

-::-::-

Professé par : ROSENBERG H.

Rédigé par : BETTINELLI B.

-:-

3ème partie

Année 1968 - 1969

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

Cours de $C_3$.

# *** TOPOLOGIE ALGEBRIQUE ***

-::-::-


Professé par : ROSENBERG H.

Rédigé par : BETTINELLI B.


-:-

3ème partie

Année 1968 - 1969

INTRODUCTION

-:-

## PRELIMINAIRES TOPOLOGIQUES.

Le lecteur trouvera ici rassemblés rapidement, les notions de base de topologie générale qui seront utilisées dans la suite du cours.

### Définition (espace topologique) 0.1.

Un espace topologique $X$ est un ensemble $X$, muni d'une collection $G$ de sous-ensembles de $X$, appelés ouverts de $X$ et vérifiant :

a) $X \in G$ , $\emptyset \in G$

b) Si $U_1$ , $U_2 \in G$ $\quad U_1 \cap U_2 \in G$

c) Pour toute famille $\{U_i\}_{i \in I}$ d'ouverts de $G$ $\quad \bigcup_{i \in I} U_i \in G$

### Définitions (fermé, frontière, voisinage) 0.2.

a) Un sous-ensemble de $X$ est dit fermé si $\complement X$ est ouvert.

b) On appelle intérieur $A \subset X$ , le plus grand ouvert $\mathring{A}$ de $X$ inclus dans $A$.

c) On appelle adhérence de $A \subset X$ , le plus petit fermé $\bar{A}$ contenant $A$.

d) On appelle frontière (ou bord) de $A \subset X$ , l'ensemble

$$\dot{A} = \partial A = \bar{A} \cap \overline{\complement A}$$

e) Un voisinage de $x \in X$ $(A \subset X)$ est un ensemble dontenant un ouvert $U$ tel que $x \in U$ $(A \subset U)$.

Définitions (base d'ouverts) 0.3.

a) Une base d'ouverts $B$ de $X$ est un ensemble d'ouverts tel que tout ouvert $U$ de $X$ soit réunion d'ensembles de $B$.

b) Une sous-base $\mathcal{S}$ de $X$ est un ensemble d'ouverts tel que $\{ \bigcap_1^k U_i \mid U_i \in \mathcal{S} , \; k \in \mathbb{N}\}$ soit une base d'ouverts de $X$.

c) Si la famille $B$ est dénombrable, $X$ est dit espace topologique à base dénombrable.

Définitions (topologies discrète et grossière) 0.4.

a) $x \in X$ est isolé si et seulement si $\{U\}$ est ouvert.

b) La topologie discrète sur $X$ est celle pour laquelle tout point est isolé.

c) La topologie grossière sur $X$ est définie par $G = \{\emptyset, X\}$.

d) $A \subset X$ est dense si $\bar{A} = X$.

e) $A \subset X$ n'est dense nulle part si $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$.

f) $A \subset X$ est discret si $G' = \{U \cap A \mid U \in G\}$ est la topologie discrète sur $A$.

Définitions (espace séparé, normal) 0.5.

a) Un espace topologique $X$ est dit séparé, ou de Hausdorf si deux points distincts quelconque possèdent des voisinages distincts.

b) Un espace topologique $X$ est dit normal si deux fermés disjoints quelconques possèdent des voisinages disjoints.

Théorème (Urizohn) 0.6.

Dans un espace $X$ normal, soient $A$ et $B$ deux fermés disjoints. Alors il existe une fonction continue

$$f : X \to [01] = I$$

telle que $f \mid A = 0$ ; $f \mid B = 1$ .

Définition (convergence) 0.7.

a) Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de l'espace topologique $X$ converge vers $x$ (pour la topologie $G$) si tout voisinage $U$ de $x$ contient presque tous les $x_n$ (i.e. tous sauf un nombre fini).

b) Une fonction $f : X \to Y$ où $X$ et $Y$ sont des espaces topologiques converge vers $y_0$ lorsque $x$ converge vers $x_0 \in X$ si pour tout voisinage $V$ de $y_0$ , il existe un voisinage $U$ de $x_0$ tel que

$$f(U) \subset V \ .$$

Définition (continuité) 0.8.

a) Une fonction $f : X \to Y$ est continue en $x_0$ si elle converge vers $f(x_0)$ lorsque $x$ converge vers $x_0$ .

b) Une fonction $f : X \to Y$ est continue si pour tout ouvert $V$ de $Y$ , $f^{-1}(V)$ est ouvert de $X$ .

Proposition 0.9.

$f : X \to Y$ est continue si et seulement si elle est continue en tout point.

Proposition 0.10.

$f : X \to Y$ est continue si et seulement si pour tout $A \subset X$ , $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

Proposition 0.11.

Soit $X$ un espace topologique tel que tout point possède un système fondamental dénombrable de voisinages $\{U_n\}$ (i.e : Pour tout $x \in X$ et $U \in G$

tels que $x \in U$ , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n \subset U$) .

a) Soit $A \subset X$ . Alors $x \in \bar{A}$ si et seulement si une suite de points de $A$ converge vers $x$ (pour la topologie de $X$) .

b) $f : X \to Y$ est continue en $x_o$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)$ convergeant vers $x_o$ , $f(x_n)$ converge vers $f(x_o)$

Définition (homéomorphisme) 0.12.

$f : X \to Y$ est un homéomorphisme si elle est bijective et si $f$ et $f^{-1}$ sont continues.

Définition (compacité) 0.13.

Soit $X$ un espace topologique et $A \subset X$ - $A$ est dit compact si de tout recouvrement $R$ de $A$ par des ouverts de $X$ (i.e. $\bigcup_{U \in R} U \supset A$) on peut extraire un sous-recouvrement fini de $A$ .

Définition (compacité locale) 0.14.

Un espace $X$ est localement compadt si tout point $x \in X$ possède un voisinage compact.

Théorème (Wereistrass Bolzano) 0.15.

Si $X$ est un espace tel que tout point possède un système dénombrable de voisinages, alors de toute suite $(x_n)$ de $X$ , on peut extraire une sous-suite convergente.

De plus la réciproque est vraie pour un espace métrique.

Proposition 0.16.

Soit $X$ un espace séparé

a) Tout sous-ensemble compact $A \subset X$ est fermé.

b) Si $X$ est compact, il est normal.

Proposition 0.17.

Soit X un espace <u>séparé</u> localement homéomorphe à un espace localement compact, <u>séparé</u> Y (i.e. : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x homéomorphe à un ouvert V de Y).

Alors X est localement compact.

(Ce sera le cas en particulier des variétés).

Définition (connexité) 0.18.

a) Un espace X est connexe si les seuls ouverts et fermés de X sont $\emptyset$ et X.

ou, ce qui est équivalent, pour tout recouvrement de X par deux ouverts dijsoints U et V, l'un d'eux est $\emptyset$.

b) $A \subset X$ est connexe si les seuls ouverts et fermés de la topologie (induite) définie par $G' = \{U \cap A | U \in G\}$ sont A et $\emptyset$.

c) X est localement connexe si pour tous $x \in X$, $U \in G$ $x \in U$, il existe un voisinage connnexe de x, N tel que

$$N \subset U .$$

Remarque 0.19.

Dire que X est localement connexe ne signifie pas que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage connexe. Sinon tout espace connexe est localement connexe ce qui est faux

Contre-exemple : $(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Delta_q) \cup (y=o) \subset R^2$, où $\Delta_q$ est la droite $(x = q)$

Proposition 0.20.

Soit $f : X \to Y$ continue surjective

a) Si X est compact, Y aussi.

b) Si X est connexe, Y aussi.

Proposition 0.21.

Soit $f : X \to Y$ continue bijective si $X$ est compact, $f$ est un homéomorphisme.

Proposition 0.22.

Soit un espace $X$ et $A \subset X$ connexe

a) Pour tout $B$ tel que $A \subset B \subset \bar{A}$ , $B$ est connexe.

b) Si $\{B_i\}_{i \in I}$ est une famille d'ensembles connexes

$$A \cup \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \text{ est connexe.}$$

Corollaire 0.23.

a) Les composantes connexes d'un espace (i.e. les ensembles connexes maximaux de $X$) sont fermées.

b) $X$ est l'union disjointe de ses composantes connexes.

c) Si $X$ est localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes et fermées.

Proposition 0.24

Soit $X$ un espace compact séparé tel que tout point possède un système dénombrable de voisinages, et $(A_n)$ une suite décroissante d'ensembles fermés connexes de $X$.

Alors $A = \bigcap_1^\infty A_n$ est connexe.

Définition (connexité par arcs) 0.25.

Soit un espace topologique $X$

a) Un chemin dans $X$ entre $x_0$ et $x_1$ est une application continue $\alpha : I \to X$ telle que $\alpha(0) = x_0$ , $\alpha(1) = x_1$ .

b) $A \subset X$ est connexe par arcs si pour tout couple de points $(x,y)$ de $A$ , il existe un chemin qui les joint.

c) $X$ est localement connexe par arcs si pour tous $x \in X$ , $U \in G$ , $x \in U$ , il existe un voisinage connexe par arcs $N$ tel que $N \subset U$ .

Remarque 0.26.

Les propositions 1-19, 1-20, 1-22 b), 1-23 b)c) se reproduisent en remplaçant par connexe par arcs. Mais 1.22 a), 123a) et 1.24 utilisant le fait que l'adhérence d'un connexe est connexe ne se reproduisent pas.

Proposition 0.27.

a) Tout espace connexe par arcs est connexe.

b) Tout espace connexe, localement connexe par arcs est connexe par arcs.

c) Pour un espace localement connexe par arcs les composantes connexes et les composantes connexes par arcs coïncident.

Définition (comparaison des topologies) 0.28.

Jusqu'alors nous avons supposé $X$ muni d'une topologie $G$ donnée. Nous allons maintenant comparer les topologies dont on peut munir un espace $X$ pour pouvoir conserver toujours celle qui est le mieux appropriée à un problème donné.

a) On dit que la topologie $G'$ est plus fine que $G$ , sur $X$ si

$$G \subset G'$$

b) La topologie grossière est la moins fine des topologies, la topologie discrète est la plus fine de toutes.

c) Etant donnée une proposition $P$ , vérifiée par la topologie grossière, on peut toujours parler de la topologie la plus fine qui vérifie $P$ car l'ensemble

$$T = \{G \mid G : \text{topologie qui vérifie } P\}$$

est un ensemble inductif non vide, donc possède un élément maximal d'après le théorème de Zorn.

d) De même étant donnée une proposition $P$ vérifiée par la topologie discrète, on peut toujours parler de la topologie la moins fine qui vérifie $P$ (l'ordre dans $T$ étant maintenant "être moins fin").

Proposition 0.29.

La topologie $G'$ sur $X$ est plus fine que $G$ si et seulement si

$$(X,G') \xrightarrow{Id} (X,G)$$

est continue ($(X,G)$ désigne $X$ muni de $G$).

Définition (topologie induite par $\{f_j\}$) 0.30.

Etant donné un ensemble $X$, des espaces topologiques $X_j$, $j \in J$ et des applications (entre ensembles)

$$f_j : X \to X_j$$

on appelle topologie induite sur $X$ par $\{f_j\}$ la moins fine des topologies qui rendent toutes les $f_j$ continues.

Proposition 0.31.

La topologie induite sur $X$ par $\{f_j : X \to X_j\}$ où $X_j$ est un espace topologique pour $j \in J$, est caractérisée par la propriété :

Pour tout espace topologique $Y$ et $g : Y \to X$, $g$ est continue si et seulement si $f_j \circ g$ est continue pour tout $j$.

Exemples 0.32.

a) Un sous-espace $A$ de $X$ est l'ensemble $A \subset X$ muni de la topologie induite par l'inclusion $A \subset X$ (On l'appelle topologie induite sur $A$).

b) Le produit topologique d'une feuille d'espaces topologiques $X_j$, est l'ensemble $\prod_{j \in J} X_j$ des $J$-uplets muni de la topologie induite par les projections

$$\pi_j : \prod X_j \to X_j$$

Remarque 0.33.

La topologie induite sur $X$ par $\{f_j\}$ est engendrée par les images récirpoques d'ouverts de $X_j$ (engendrée signifie formée des réunions d'intersections finies). On retrouve ainsi dans les deux cas les définitions classiques.

Définitions (topologie coïnduite par $\{g_j\}$) 0.34.

Etant donnés un ensemble $X$, des espaces topologiques $X_j$, $j \in J$ et des applications (entre ensembles).

$$g_j : X_j \to X$$

on appelle topologie coïnduite sur $X$ par $\{g_j\}$ la plus fine des topologies qui rendent toutes les $g_j$ continues.

Proposition 0.35.

La topologie coïnduite sur $X$ par $\{g_f : X_j \to X\}$ où $X_j$ est un espace topologique pour $j \in J$, est caractérisée par la propriété :
Pour tout espace $Y$ et $f : X \to Y$, $f$ est continue si et seulement si toutes les $f \circ g_j$ le sont.

Exemples 0.36.

a) Un espace quotient $X'$ de $X$ est l'ensemble quotient $X'$ muni de la topologie coïnduite par la projection.
En particulier, on a un quotient de $X$ en prenant $X/R$ où $R$ est une relation d'équivalence sur $X$ (appelée identification), ou en prenant $X/A$ pour $A \subset X$ fermé obtenu en identifiant $A$ en un point (i.e. : $X/A = X/R$ où $R$ est l'identité sur $X - A$, et $xRy$ pour tous $x,y \in A$).

b) La somme topologique d'une famille d'espaces topologiques $X_j$, $j \in J$ est l'ensemble somme directe (des J-uplets presque toujours nuls) muni de la topologie coïnduite par les injections :

$$X_j \hookrightarrow \oplus X_j$$

Remarque 0.37.

La topologie coïnduite sur $X$ par $\{g_j\}$ est engendrée par les ensembles $U$ tels que $g_j^{-1}(U)$ soit ouvert de $X_j$ pour tout $j$.

On retrouve ainsi les définitions classiques de quotient et sommes topologiques.

Définition (topologie cohérente avec $\{A\}$) 0.38.

Soit $A = \{A\}$ une collection de sous-espaces de l'espace topologique $X$.

a) $X$ a une topologie cohérente avec $A$ (ou la topologie faible par rapport à $A$) si la topologie de $X$ est coïnduite par la famille d'inclusions $\{A \subset X\}$

b) La topologie de $X$ cohérente avec $A$ est exactement la moins fine telle que toute fonction

$$f : X \to Y$$

dont les restrictions $f|A$ sont continues, soit continue (1.35).

Proposition 0.39.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $X$ a une topologie cohérente avec $\{A\}$

b) $B \subset X$ est fermé (ou ouvert) dans $X$ si et seulement si $B$ $A$ est fermé (ou ouvert) dans $A$ pour tout $A \in \{A\}$.

Proposition 0.40.

a) Si $A$ est un recouvrement ouvert quelconque de $X$ ou

b) si $A$ est un recouvrement fermé localement fini (i.e : pour tout $x \in X$, il existe $U \in G$, $x \in G$ tel que $\{U \cap A\}$ soit finie) de $X$.

Alors $X$ a une topologie cohérente avec $A$.

Proposition 0.41.

Soit un ensemble $X$ et $\{A_j\}_{j \in J}$ une famille d'espaces topologiques inclus dans X telle que

a) $A_j \cap A_{j'}$ soit toujours fermé (ou ouvert) dans $A_j$ et $A_{j'}$ .

b) Les topologies induites sur $A_j$ $A_{j'}$ par $A_j$ et $A_{j'}$ coïncident.

Alors la topologie coïnduite sur X par $\{A_j \subset X\}$ est caractérisée par :

Les fermés (ou ouverts) de X sont engendrés par les fermés (ou ouverts) de X (engendré par les fermés singifie intersections d'union finies).

En particulier chaque $A_j$ est fermé (ou ouvert) dans X et X a une topologie cohérente avec $\{A_j\}$

Remarque et définition 0.42.

La différence entre 1.37 et 1.40 est que dans 1.40 chaque $A_j$ a une topologie propre, et on étudie sous quelles conditions il existe une topologie sur X qui rende chaque $A_j$ sous-espace de X .

b) La topologie définie en 1.40 est appelée : la topologie de X cohérente avec $\{A_j\}$ .

Définition (k-espace) 0.43.

Un k-espace est un espace topologique séparé qui a une topologie cohérente avec ses sous-espaces compactes.

Proposition 0.44.

Un espace séparé X est un k-espace dans les deux cas suivants :

a) X est localement compact.

b) Tout $x \in X$ possède un système dénombrable de voisinages.

Proposition 0.45.

Si X est un k-espace et Y un espace séparé localement compact, $X \times Y$ est un k-espace.

Définition $(Y^X)$ 0.46.

Soient $X,Y$ deux espaces topologiques.

a) Pour $A \subset X$ , $B \subset Y$ , on note $< A,B >$ l'ensemble des fonctions continues $f : X \to Y$ telles que $f(A) \subset B$ .

b) La topologie compacte-ouverte (CO) sur l'ensemble des fonctions continues $\{f : X \to Y\}$ est celle engendrée par la sous-base $\{< K,U > \mid K$ compact, $U$ ouvert, de $X\}$.

c) $Y^X$ désigne l'espace des fonctions continues de $X$ dans $Y$ munie de la topologie CO

d) Si $A \subset X$ , $B \subset Y$ , $(Y,B)^{(X,A)}$ est le sous-espace de $Y^X$ tel que $f(A) \subset B$ .

e) On définit la fonction évaluation :

$$E : Y^X \times X \to Y \qquad E(f,x) = f(x)$$

f) Pour $g : Z \to Y^X$ on a une fonction

$$Eo(g \times Id) : Z \times X \to Y^X \times X \to Y$$

Théorème 0.47.

Soient $X,Y,Z$ des espaces topologiques ; si $X$ est séparé, localement compact,

Alors $g : Z \to Y^X$ est continue si et seulement si $Eo(g \times Id) : Z \times X \to Y$ est continue.

Loi exponentielle 0.48.

Soient $X,Y,Z$ trois espaces. Si $X$ et $Z$ sont séparés, et $X$ localement compact,

Alors $\phi : (Y^X)^Z \to Y^{Z\times X}$ $\qquad \phi(g) = Eo(g \times Id)$

est un homéomorphisme.

Définition (distance) 0.49.

a) Une distance (ou métrique) sur un ensemble $X$ est une fonction

$$d : X \times X \to R$$

telle que :

(i) $d(xy) \geqslant 0 \quad x,y \in X$

(ii) $d(x.y) \Longleftrightarrow x = y$

(iii) $d(xy) = d(yx) \quad x,y \in X$

(iv) $d(xz) \leqslant d(xy) + d(yz) \quad x,y,z \in X$

b) Une pseudo-métrique sur $X$ est une fonction

$$d : X \times X \to R$$

telle que :

(i) $d(xy) \geqslant 0 \quad x,y \in X$

(ii) $d(x,x) = 0 \quad x \in X$

(iii) $d(xy) = d(yx) \quad x,y \in X$

(iv) $d(xz) \leqslant d(xy) + d(yz) \quad x,y,z \in X$

Définition (espace métrique) 0.50.

a) Un espace métrique $X$ est un ensemble $X$ muni d'une distance $d$.

b) Un espace pseudo-métrique $X$ est un ensemble $X$ muni d'une pseudo-métrique $d$.

Dans les deux cas $X$ est muni de la topologie définie par $d$ (i.e. : la topologie dont une base d'ouverts est $\{B(x,r) | x \in X , r \in R^+\}$ où

$$B(x,r) = \{y \in X | d(xy) < r\}$$

Définitions (isométrie, métriques équivalentes) 0.51.

a) Une isométrie entre deux espaces métriques $(X,d)$ et $(Yd')$ est une application.

$$f : X \to Y \quad \text{telle que} \quad d'(f(x)),f(y)) = d(xy) \quad x,y \in X$$

b) Deux métriques (ou pseudo-métriques) $d$ et $d'$ sur $X$ sont équivalentes si

$$Id : (X,d) \to (Xd')$$

est un homéomorphisme.

Proposition 0.52.

Toute isométrie est une injection continue.

Définition (complet) 0.53.

a) Une suite de Cauchy d'un espace métrique est une suite telle que :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \quad m,n > N \Longrightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon \ .$$

b) Un espace métrique $X$ est complet si toute suite de Cauchy converge dans $X$.

c) Tout espace métrique $(Xd)$ peut être complété par un espace métrique $(\hat{X},\hat{d})$ , i.e : $X \subset \hat{X}$ , $\hat{d}|X = d$ , $\hat{X}$ complet et $\bar{X} = \hat{X}$ où $\bar{X}$ est l'adhérence de $X$ dans $\hat{X}$.

($\hat{X} = \mathscr{C}/_{\mathscr{R}}$ où $\mathscr{C}$ est l'ensemble des suites de Cauchy de $X$ , $R$ l'équivalence $(x_n) R (y_n) \Longleftrightarrow d(x_n,y_n) \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0$ , $X \subset \hat{X}$ par $x \to (x_n = x \ , n \in \mathbb{N})$ et $\hat{d}$ prolongement unique de $d$) .

Définition (norme) 0.54.

Une norme sur un $K$-espace vectoriel $E$ est une fonction $\|.\| : E \to R$ telle que :

(i) $\|x\| \geqslant 0 \qquad x \in E$

(ii) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \ \|x\| \qquad \lambda \in K \ , \ x \in E$

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad x,y \in E$

Définition (espace normé) 0.55.

a) Un espace normé $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel $E$ muni d'une norme $\| \|$

Sa topologie est celle de la distance

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

b) Un espace normé $E$ est un espace de Banach s'il est complet pour $d$ .

Exemple 0.56.

L'espace $R^n = R \times R \times \ldots \times R$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|x\| = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}$$

(comme pour toute autre norme, car sur $R^n$ , toutes les normes sont équivalentes).

Proposition 0.57.

Si $(Xd)$ et $(Yd')$ sont deux espaces métriques, alors l'espace topologique $X \times Y$ peut être muni de la distance

$$d + d' : (X \times Y) \times (X \times Y) \to R$$

$$(d + d')\,((x_1y_1),(x_2y_2)) = d(x_1x_2) + d'(y_1\;,\;y_2)$$

et sa topologie est celle de $d + d'$

Proposition 0.58.

Si $X$ est un espace séparé compact, et $(Y,d)$ un espace métrique.
Alors $Y^X$ peu~~t~~-être muni de la métrique

$$d'(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x)\;,\;g(x))$$

et sa topologie est celle de $d'$.

Remarque 0.59.

Dans tout ce qui suit, un espace désignera un espace topologique et une application, une application continue.

Un espace compact, localement compact, paracompact ou régulier sera toujours supposé séparé.

Théorème 0.60.

Si $X$ est un espace compact métrique,

Alors tout recouvrement $\mathcal{U}$ de $X$ possède un nombre de Lebesgue $\lambda$.

i.e. : il existe $\lambda > 0$ tel que pour tous $x, x' \in X$ $d(x,x') < \lambda$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U$, $x' \in U$.

Preuve.

Sinon il existerait $x_n$, $x'_n \in X$ tels que $d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$.

Comme $X$ est compact, on peut en extraire deux sous-suites simultanément convergentes $x_n^1$ et $x'^1_n$. Comme elles sont adjacentes, elles ont même limite $x_o$. Il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x_o \in U$ ; donc $U$ contient presque tous les $x_n^1$ et $x'^1_n$ ce qui contredit l'hypothèse.

Définition (para-compacité) 0.61.

Soit un espace topologique $X$.

a) Un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de $X$ est plus fin qu'un recouvrement $(V_j)_{j \in J}$ si pour tout $U_i \in \{U_i\}$ il existe un $V_j \in \{V_j\}$ tel que $U_i \subset V_j$.

b) Un recouvrement $(U_i)_{i \in J}$ de $X$ est localement fini si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U_x$ qui ne coupe qu'un nombre fini de $U_i$.

c) Un espace $X$ est paracompact si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)$ de $X$ il existe un recouvrement ouvert $(V_j)$ de $X$ localement fini et plus fin que $(U_i)$.

Proposition 0.62.

Un espace séparé $X$ dont toutes les composantes connexes sont localement compactes, dénombrables à l'infini, (i.e. : union dénombrable de compacts) est para-compact.

Définition (partition de l'unité) 0.63.

Soit un espace $X$ et un recouvrement ouvert $(U_i)$ de $X$.

Une partition de l'unité subordonnée à $(U_i)$ est un couple $(V_j , g_j)$ où $(V_j)$ est un recouvrement ouvert localement fini plus fin que $(U_i)$ et où

$$g_j : X \to I \quad \text{est continue telle que :}$$

(i) supp $g_j = \overline{\{x \in X/g_j(x) \neq 0\}} \subset V_j$ et supp $g_j$ est compact.

(ii) pour tout $x \in X$ $\sum_j g_j(x) = 1$

(cette somme est bien définie car elle est localement finie).

Déposition 0.64.

Si $X$ est un espace paracompact, il existe une partition de l'unité subordonnée à chaque recouvrement ouvert de $X$.

-::-::-::-

Annexe au

CHAPITRE II.

-::-

RELEVEMENTS et FIBRATIONS.

Définition (relèvement) 2.47.

Soient $p : E \to B$ , $f : X \to B$ continues

Un relèvement de $f$ est une application

$$f' : X \to E$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[ur, dashed, "f'"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

telle que $f = p \circ f'$ .

On dit que $f$ se relève à $E$ si un relèvement de $f$ existe.

Définition (Relèvement des homotopies) 2.48.

$\rho : E \to B$ possède la propriété de relèvement des homotopies (P.R.H.) par rapport à l'espace $X$ si pour toutes

$$\begin{tikzcd} X \times 0 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "\rho"] \\ X \times I \arrow[r] \arrow[ur, "F'"] & B \end{tikzcd}$$

$f' : X \to E$ , $F : X \times I \to B$

tels que $F(x,0) = \rho f'(x)$ $x \in X$

il existe $F' : X \times I \to E$ telle que

$$F'(x,0) = f'(x) \ , \quad x \in X \ ; \quad \text{et} \quad \rho F' = F$$

Proposition 2.49.

Si $p : E \to B$ a la P.H.R. par rapport à $X$ , deux applications homotopes

$$f_0 \ , f_1 : X \to B$$

soit se relèvent simultanément, soit ne se relèvent pas (alors le problème de relèvement se pose dans la catégorie des homotopies).

Définition (fibration) 2.50.

$\rho : E \to B$ est une fibration si elle a la P.R.H. par rapport à tout espace.

$E$ est l'éspace total, $B$ est la base de la fibration $\rho^{-1}(b)$ est la fibre sur $b \in B$ .

Proposition 2.51.

Si $p : E \to B$ est une fibration, tout chemin $\omega : I \to B$ tel que $\omega(0) \in p(E)$ , se relève à $E$ .

Preuve. On prend $X = \{1 \text{ pt}\}$ .

Exemple 2.52.

$p : B \times F \to B$ , $(p(b,f) = b)$ est une fibration.

Théorème 2.53.

Un recouvrement est une fibration.

Preuve. C'est 2.15.

Définition (RUC) 2.54.

Une application $\rho : E \to B$ est à relèvement unique pour les chemins si pour tous chemins $\omega$ et $\omega'$ de $E$ tels que $p\omega = p\omega'$ et $\omega(0) = \omega'(0)$ on a $\omega = \omega'$

Un revêtement est à RUC .

Lemme 2.55.

Si $p : E \to B$ est à RUC , alors pour tout espace $Y$ connexe par arcs, chaque $f : Y \to B$ possède au plus un relèvement.

Preuve. comme 2.10.

Théorème 2.56.

Une fibration est à RUC si et seulement si tous les chemins de chaque fibre sont constants.

Preuve.

Soit $p : E \to B$ à RUC . Les chemins $\omega$ de $p^{-1}(b)$ et $\omega_o$ tel que $\omega_o(t) = \omega(0)$ vérifient $p\omega = p\omega_o$

donc $\omega = \omega_o$

Réciproquement : soient $\omega$ et $\omega'$ dans E tels que $p\omega = p\omega'$ et $\omega(0) = \omega'(0)$

Soit
$$\omega''_t(t') = \begin{cases} \omega((1 - 2t')t) & 0 \leqslant t' \leqslant \frac{1}{2} \\ \omega'((2t' - 1)t) & \frac{1}{2} \leqslant t' \leqslant 1 \end{cases}$$

$\omega''_t$ est un chemin de $\omega(t)$ à $\omega'(t)$

$p\omega''_t$ est un lacet en $p\omega(t)$ dans B

$$p\omega''_t \sim \varepsilon_{\omega(t)} \ \mathrm{rel} \partial I$$

En relevant cette homotopie on a $F' : I \times I \to E$ tel que $F'(t',0) = \omega''_t(t')$

De plus $F'(0 \times I \cup 1 \times I \cup I \times 1) \subset p^{-1}(p\omega(t))$ . Par hypothèse cet ensemble est un seul point

$$F'(0,0) = F'(1,0) \quad \text{ou} \quad \omega''_t(0) = \omega''_t(1)$$

$$\omega = \omega'$$

Suivent deux théorèmes évidents, faux pour des revêtements.

Théorème 2.57.

La composée de fibrations (à RUC ) est une fibration (à RUC).

Théorème 2.58.

Le produit de fibrations (à RUC) est une fibration (à RUC)

FIBRES (Localement triviaux) et THEOREME DE DOLD.

Définition (fibré) 2.59.

Un fibré $\xi(E,B,F,p)$ est la donnée de :

a) un espace total $E$

b) une base $B$

c) une fibre $F$

d) une projection $p : E \to B$

tels qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U\}$ de $B$ et pour chaque $U \in \mathcal{U}$ , un homéomorphisme

$$\varphi u : U \times F \to p^{-1}(U)$$

tel que $p \circ \varphi_u : U \times F \to p^{-1}(U) \to U$

soit la première projection.

Remarque 2.60.

$p^{-1}(b)$ , $b \in B$ est appelé fibre au-dessus de $b$. Toutes les fibres sont homéomorphes à $F$ .

Définition 2.61.

Soit $G$ un groupe d'homéomorphismes de $F$ et $\varphi : F \to F'$ . On définit l'application

$$\varphi g : F \to F' \quad \text{pour} \quad g \in G \quad \text{par} \quad \varphi g(y) = \varphi(gy)$$

Définition (G-structure) 2.62.

Une collection $\phi = \{\varphi\}$ d'homéomorphismes.

$\varphi : F \to F'$ est une G-structure de $F'$ si

a) $G$ opère à droite sur $\phi$ (i.e. : $\varphi \in \phi$ , $g \in G \Longrightarrow \varphi g \in \phi$) .

b) L'opération est transitive (i.e. : $\varphi_1$ , $\varphi_2 \in \phi \Longrightarrow \exists g \in G \mid \varphi_1 = \varphi_2 g$) .

Définition (Groupe de structure) 2.63.

Un fibré $(E,B,F,p)$ a le groupe de structure $G$ si chaque fibre $p^{-1}(b)$ a une G-structure $\phi(b)$ telle qu'il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ de $B$ et pour chaque $U \in \mathcal{U}$ un homéomorphisme

$$\varphi_U : U \times F \to p^{-1}(U)$$

tel que pour tout $b \in B$ $\varphi_U(b,.) \in \phi\ (b)$

Définition (fibré vectoriel) 2.64.

Un fibré vectoriel réel (complexe) est un fibré dont la fibre est $\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ et dont le groupe de structure est $GL(\mathbb{R}^n)$ $(GL(\mathbb{C}^n))$

Exemples 2.65.

a) Pour les espaces $B,F$ , on a le fibré trivial $(B \times F, B, F, p_B)$ de groupe de structure trivial.

b) Soit $p : \tilde{X} \to X$ un revêtement de $X$ connexe et $x_o \in X$. On a le fibré $(\tilde{X},X,p^{-1}(x_o),p)$ .

Si $X$ est connexe par arcs, il a le groupe de structure $\pi_1(X,x_o)$ où l'opération de $\pi_1(X,x_o)$ sur $p^{-1}(x_o)$ est :

$$[\alpha]\tilde{x} = \tilde{\alpha}(1) \quad \text{où } \tilde{\alpha} \text{ est le relèvement de } \alpha \text{ qui}$$

commence en $\tilde{x}$ .

c) Le fibré tangent à une n-variété différentiable $M$

$$TM = \{(x,v) \mid x \in M \quad , \quad v \in T_x M\}$$

est un fibré vectoriel réel.

d) Si $H$ est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie $G$ , si $G/H$ est l'espace des classes à gauche de $G$ par $H$ et si $\rho : G \to G/H$ est la projection, $(G, G/H , H, \rho)$ est un fibré du groupe de structure $H$ opérant sur lui-même par translations à gauche.

e) De même que $p : S^n \to P^n(\mathbb{R})$ est un revêtement, on montre que si $p : S^{2n+1} \to P^n(C)$ est la projection du fibré $(S^{2n+1}, P^n(\mathbb{C}), S^1, p)$ qui a pour groupe de structure $S^1$ opérant sur lui-même par translations à gauche. C'est le fibré de Hopf.

<u>Définition (fibré par $S^n$) 2.66.</u>

On appelle fibré par $S^n$ un fibré dont la fibre est $S^n$ et dont le groupe de structure est le groupe orthogonal $O(n+1)$ desisométries de $GL(\mathbb{R}^{n+1})$ .

<u>Proposition 2.67.</u>

Si $(\dot{E},B,S^n,p)$ est un fibré par $S^n$ , le cylindre d'application, $E$ , de la projection $p : E \to B$ est l'espace total du fibré $(E,B,D^{n+1},r)$ où $r$ est la rétraction $E \to B$ .

<u>Définition (Equivalence) 2.68.</u>

a) Deux fibrés $(E_1 , B,F,p_1)$ et $(E_2,B,F,p_2)$ de même base et même fibre sont dits équivalents s'il existe un homéomorphisme $h : E_1 \to E_2$ tel que $p_2h = p_1$

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

b) Deux fibrés $(E_1,B,F,p_1)$ et $(E_2,B,F,p_2)$ ayant même groupe de structure $G$ sont dits équivalents par rapport à $G$ s'ils sont équivalents et si pour tout $b \in B$ et $\varphi_1 \in \phi_1(b)$ $h \circ \varphi_1 \in \phi_2(b)$ .

Définition (trivial) 2.69.

Un fibré est dit trivial s'il est équivalent à un produit.

ou, ce qui est équivalent, s'il admet $\{1\}$ comme groupe de structure.

Définition (fibration locale) 2.70.

$p : E \to B$ est une fibration locale s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U\}$ de $B$ tel que

$$p|p^{-1}(U) : p^{-1}(U) \to U$$

soit une fibration pour tout $U \in \mathcal{U}$.

Remarques 2.71.

a) Toute fibration est une fibration locale.

b) Toute projection de fibré est une fibration locale.

Définition (Relèvement) 2.72.

Soit $p : E \to B$ et $\bar{B} \subset E \times B^I$ défini par :

$$\bar{B} = \{e,\omega) \in E \times B^I | \omega(0) = p(e)\}$$

On définit : $p : E^I \to B$ par :

$$\bar{p}(\bar{\omega}) = (\bar{\omega}(0), p \circ \bar{\omega})$$

Un relèvement de $p$ est une application

$$\lambda : \bar{B} \to E^I$$

telle que $\bar{p} \circ \lambda = \mathrm{Id}_{\bar{B}}$.

Théorème 2.73.

$p : E \to B$ est une fibration si et seulement s'il existe un relèvement de $p$.

Preuve :

Soit $p$ une fibration

On définit $f' : \bar{B} \to E \quad f'(e,\omega) = e$

$F : B \times I \to B \qquad F((e,\omega),t) = \omega(t)$

$$F((e,\omega),0) = p \circ f(e,\omega) = p(e)$$

D'après le relèvement des homotopies, on a

$$F' : \bar{B} \times I \to E$$

Telle que $F'((e,\omega),0) = f'(e,\omega) = e$ et $p \circ F' = F$

On définit $\lambda : \bar{B} \to E^I \qquad \lambda(e,\omega)t = F'((e,\omega,t)$

Réciproquement soit $\lambda$ un relèvement de $p$

Pour $f : X \to E$ et $F : X \times I \to B$ telles que $F(x,o) = p \circ f(x)$ on définit

$$g : X \to B^I \qquad g(x)t = F(x,t)$$

$$F'(x,t) = \lambda(f'(x)\ ,\ g(x))\ t \qquad F' : X \times I \to E$$

est un relèvement de $F$.

Définition (relèvement étendu) 2.74.

Soit $p : E \to B$ et $W \supset B^I$

Soit $\tilde{W} = \{(e,\omega,s) \in E \times W \times I \mid \omega(S) = p(e)\}$

Un relèvement étendu à $W$ est une fonction

$$\Lambda : \tilde{W} \to E^I$$

telle que : $p(\Lambda(e,\omega,s)t) = \omega(t)$ et $\Lambda(e,\omega,s)\ s = e$.

Lemme 2.75.

$p : E \to B$ possède un relèvement si et seulement s'il possède un relèvement étendu à $B^I$ .

Preuve :

Si $\Lambda$ est le relèvement à $B^I$ , le relèvement est

$$\lambda : \bar{B} \to E^I \qquad \lambda(e,\omega) = \Lambda(e,\omega,0)$$

Réciproquement, soit $\omega$ un chemin dans $B$ et $\omega_s$ $\omega^s$ définis par :

$$\omega_s(t) = \begin{cases} \omega(s-t) & o \leqslant t \leqslant s \\ \omega(0) & s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \quad ; \quad \omega^s(t) = \begin{cases} \omega(s+t) & o \leqslant t \leqslant 1-s \\ \omega(1) & 1-s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Les applications $(\omega,s) \to \omega_s$ et $(\omega,s) \to \omega^s$ sont continues $B^I \times I \to B^I$

Soit $\lambda$ le relèvement de $p$ $\lambda : B \to E^I$ . On définit le relèvement étendu à $B^I$ par

$$\Lambda(e,\omega,s)t = \begin{cases} \lambda(e,\omega_s)(s-t) & o \leqslant t \leqslant S \\ \lambda(e,\omega^s)(t-s) & s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Définition 2.76.

a) Un recouvrement $\{W\}$ de l'espace $X$ est localement fini si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage $U_x$ de $x$ qui ne coupe qu'un nombre fini de $W$.

b) Un recouvrement $\{W\}$ est dit numérable s'il est localement fini et si pour chaque $W$ , il existe

$$f_W : X \to I \qquad \text{telle que} \qquad W = \{x \in X \mid f_W(x) \neq 0\}$$

Lemme 2.77.

Soit $p : E \to B$ . S'il existe un recouvrement numérable $\{W_j\}$ de $B^I$ tel que pour tout $j$ , il existe un relèvement étendu à $W_j$ , alors il existe un relèvement de $p$ .

Preuve :

$J = \{j\}$ et $f_j : B^I \to I$ $f_j = f_{Wj}$

Pour tout $\alpha \subset J$ , soit $W_\alpha = U_\alpha = U_{J\in\alpha} W_j$ et

$$f_\alpha : B^I \to R^+ \qquad f_\alpha(\omega) = \sum_{j\in\alpha} f_j(\omega)$$

$$W_\alpha = \{\omega \in B^I | f_\alpha(\omega) \neq 0\}$$

On définit $\overline{B}_\alpha = \{(e,\omega) \in \overline{B} \mid \omega \in W_\alpha\}$

L'ensemble des couples $(\alpha,\lambda_\alpha)$ , où $\alpha \subset J$ et où $\lambda_\alpha : \overline{B}_\alpha \to E^I$ est un relèvement étendu à $\overline{B}_\alpha$ ,

(Un tel relèvement existe d'après l'hypothèse pour tout $\{j_o\} \subset J$) est muni de l'ordre partiel :

$$(\alpha,\lambda_\alpha) \leqslant (\beta,\lambda_\beta) \quad \text{si} \quad \alpha \subset \beta \quad \text{et} \quad \lambda_\alpha = \lambda_\beta | \overline{B}_\alpha$$

Toute chaîne totalement ordonnée $(\alpha_i , \lambda_{\alpha_i})$ possède une bonne chaîne supérieure : $(\beta,\lambda_\beta)$

$\beta = U\alpha_i$ . Pour tout ouvert $U \subset W_\beta$ ne rencontrant qu'un nombre fini $W_{j_1},\dots, W_{j_r}$ de $W_j$ $j \in \beta$ , on choisit $\alpha_i$ tel que $j_1 ,\dots, j_r \in \alpha_i$

On choisit $\lambda_\beta(e,\omega) = \lambda\alpha_i(e,\omega)$ pour $(e,\omega) \in \overline{B}_{\alpha_i}$ .

Comme pour tout $(e,\omega) \in \overline{B}_\beta$ , il existe $\alpha_i$ tel que $(e\omega) \in B_{\alpha_i}$ et que si $(\alpha_i , \lambda\alpha_i) < (\alpha_k , \lambda_{\alpha_k})$ .

$$\lambda_{\alpha_i}(e,\omega) = \lambda_{\alpha_k}(e,\omega)$$

$\lambda_\beta$ est bien défini sur $\overline{B}_\beta$ et c'est un majorant de la chaîne $(\alpha_i , \lambda_{\alpha_i})$

D'après le lemme de Zorn , il existe donc un élément maximal $(\alpha,\lambda_\alpha)$ dans cet ensemble

Si $\alpha \neq J$ , soit $j_o \in J - \alpha$ et $\beta = \alpha\, U\{j_o\}$

$$g : W_\beta \to R \qquad g(\omega) = \frac{f_\alpha(\omega)}{f_\beta(\omega)}$$

$$\mu : \bar{B}_{j_o} \to E \qquad \mu(e,\omega) = \begin{cases} \lambda_\alpha(e,\omega)(g(\omega)) & g(\omega) \neq 0 \\ e & g(\omega) = 0 \end{cases}$$

Soit $\Lambda_{j_o}$ un relèvement étendu à $W_{j_o}$ et $\lambda_\beta : \bar{B}_\beta \to E^I$

$$\lambda_\beta(e,\omega)t = \begin{cases} \lambda_\alpha(e,\omega)(t) & o \leqslant t \leqslant g(\omega) \\ \Lambda_{j_o}(\mu(e,\omega), \omega , g(\omega))t & g(\omega) \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Alors $(\beta,\lambda_\beta) > (\alpha, \lambda_\alpha)$ dans l'ensemble ordonné. C'est impossible car $(\alpha,\lambda\alpha)$ est maximal et $\alpha = J$ .

Remarque 2.78.

Si $p$ est à RUC , le lemme 2.77 est vrai pour tout recouvrement ouvert $\{W_j\}$ de $B^I$ tel qu'il existe un relèvement étendu à $W_j$ , pour tout $j$ ; car dans ce cas l'unicité des relèvements de chemins permet le recollement des relèvements pour faire un relèvement de $p$ .

Lemme 2.79.

Soit $p : E \to B$ et $U_1 ,\dots, U_k$ des sous-ensembles de $B$ qui possèdent un relèvement étendu, $\Lambda_i$, à $U_i^I$ .

Alors l'ensemble $W \subset B^I$

$W = \{\omega \in B^I \mid \omega([\frac{i-1}{k} , \frac{i}{k}]) \subset U_i \quad i = 1,2,\dots, k\}$ possède un relèvement étendu.

Preuve :

Pour $\omega \in W$ , soit $\omega_i$ le chemin égal à $\omega$ sur $[\frac{i-1}{k} , \frac{i}{k}]$ , et constant à l'extérieur.

Soit $(e,\omega,s) \in W$ tel que $\frac{n-1}{k} \leqslant S \leqslant \frac{n}{k}$

On définit par récurrence $e_i \in E$ par

$$e_{n-1} = \Lambda_n(e,\omega_n,S)\ (\tfrac{n-1}{k})$$

$$e_n = \Lambda_n(e,\omega_n,S)\ (\tfrac{n}{k})$$

$$e_{i-1} = \Lambda_{i-1}(e_i,\omega_{i-1}\ ,\ \tfrac{i}{k})\ (\tfrac{i-1}{k}) \qquad 0 \leqslant i < n-1$$

$$e_{i+1} = \Lambda_{i+1}(e_i\ ,\ \omega_{i+1},\ \tfrac{i}{k})\ (\tfrac{i+1}{k}) \qquad n < i+1 \leqslant k$$

Un relèvement $\Lambda$ étendu à $W$ est :

$$\Lambda(e,\omega,s)t = \Lambda_i(e_{i-1}\ ,\ \omega_i\ ,\ \tfrac{i-1}{k})t \qquad \tfrac{i-1}{k} \leqslant t \leqslant \tfrac{i}{k} \qquad i = 1,2,\ldots,k$$

<u>Théorème 2.80.</u>

Soit $p : E \to B$ et un recouvrement numérable $U$ de $B$ tel que pour chaque $U \in U$

$$p|p^{-1}(U_j) : p^{-1}(U_j) \to U_j$$

soit une fibration.

Alors $p$ est une fibration.

<u>Preuve</u> : Soit $W_{j_1\ldots j_k} \subset B^I$ l'ensemble $W$ défini en 2.79 correspondant à $U_{j_1}, \ldots, U_{j_k} \in U$

La famille $\{W_{j_1\ldots j_k}\}$ pour $k \in \mathbb{N}$ , $i = 1,2,\ldots,k$ , $j_i \in J$ est un recouvrement ouvert de $B^I$ :

a) $W$ de 2.79 est ouvert dans la topologie CO comme intersection de $k$ ouverts de la base de cette topologie de la forme $V_i = \{\omega | \omega\ [\frac{i-1}{k}\ ,\ \frac{i}{k}] \subset U_i\}$

b) Chaque $\omega \in B^I$ est recouvert par $U_{j_1} \dots U_{j_k} \in U$ donc il existe un nombre de Lebesgue $\lambda$ et pour $k' \geqslant \sup(\frac{1}{\lambda}, k)$ $\omega \in W_{j_1 \dots j_{k'}}$ (formé à partir des $U_{j_i}$ avec répétition).

c) $p|p^{-1}(U_j)$ étant une fibration (donc possèdant un relèvement d'après 2.73, donc un relèvement étendu à $U_j^I$ d'après 2.75) possède un relèvement étendu à chaque $W_{j_1 \dots j_k}$ d'après 2.79.

d) De plus, pour k fixé et $\omega \in B^I$, il existe un voisinage $V_i$ de $\omega[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ qui ne rencontre qu'un nombre fini de $U_j$ (d'après la compacité de $\omega[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ et la finitude locale de $U$).

Donc $\bigcap_{i=1}^{k} V_i$ (définis en a)) est un voisinage de $\omega$ qui ne rencontre qu'un nombre fini de $W_{j_1 \dots j_k}$ (<u>k fixé</u> !).

e) Soit $f_j : B \to I$ le $f_{U_j}$

On définit $f_{j_1 \dots j_k} : B^I \to I$ par

$$f_{j_1 \dots j_k}(\omega) = \inf\{f_{j_i}\,\omega(t) \mid \frac{i-1}{k} \leqslant t \leqslant \frac{i}{k}\}$$

$$\bar{f}_{j_1 \dots j_k}(\omega) \neq 0 \iff \omega \in W_{j_1 \dots j_k} \quad \text{(d'après a))}$$

La collection $\{W_{j_1 \dots j_k}\}$, si elle était localement finie, nous permettrait de finir la preuve grâce à 2.77.

f) Comme cela n'est pas nous allons restreindre notre recouvrement.

D'après d) $\{W_{j_1 \dots j_k}, k < m\}$ est localement fini pour m fixé. Donc la somme

$$g_m = \sum_{k<m} \bar{f}_{j_1 \dots j_k} \qquad B^I \to R$$

est une fonction continue. Soit $f'_{j_1 \dots j_m} : B^I \to I$

$$f'_{j_1\dots j_m} = \inf[\sup(0,\bar{f}_{j_1\dots j_m} - mg_m);1]$$

et $W'_{j_1\dots j_m} = \{\omega \in B^I | f'_{j_1\dots j_m}(\omega) \neq 0\}$

On a donc aussi défini une famille d'ouverts $W'_{j_1\dots j_m} \subset B^I$ telle que $W'_{j_1\dots j_m} \subset W_{j_1\dots j_m}$ , donc qui possède pour chaque ouvert un relèvement étendu à lui.

g) $\{W'_{j_1\dots j_m}\}$ est un recouvrement numérable de $B^I$ : On sait déjà qu'il existe : $f_{W_{j_1\dots j_m}} = f'_{j_1\dots j_m}$ convenable.

Soit $\omega \in B^I$ . La famille des $(j_1,\dots j_k)$ $k \in \mathbb{N}$ $j_i \in J$ telle que $\bar{f}_{j_1\dots j_k}(\omega) \neq 0$ est non vide car $\{W_{j_1\dots j_k}\}$ recouvre $B^I$ :

Soit $m$ l'entier le plus petit tel que :

$$f_{j_1\dots j_m}(\omega) \neq 0 .$$

Alors $g_m(\omega) = 0$ et $f'_{j_1\dots j_m}(\omega) = \bar{f}_{j_1\dots j_m}(\omega) \neq 0$

Donc $\{W'_{j_1\dots j_k}\}$ est un recouvrement de $B^I$ .

Soit maintenant $N > m$ tel que $\bar{f}_{j_1\dots j_m}(\omega) > \frac{1}{N}$

Par définition de $g_N$ : $g_N(\omega) \geqslant \bar{f}_{j_1\dots j_m}(\omega) > \frac{1}{N}$

donc $Ng_N(\omega) > 1$ . Il existe donc un voisinage $V$ de $\omega$ dans $B^I$ tel que

$$\omega' \in V \implies Ng_N(\omega') > 1$$

De même pour $k \geqslant N$ $kg_h(\omega') > 1$ $\omega' \in V$

(car $k \to kg_k(\omega')$ est une fonction croissante).

Donc toutes les fonctions $f'_{j_1\dots j_k}$ s'annulent sur $V$ pour $k \geqslant N$ , i.e :

$V$ est disjoint des $W'_{j_1\dots j_k}$ $k \geqslant N$. Comme l'ensemble des $W'_{j_1\dots j_k}$ qui coupent $V$ pour $k < N$ est localement fini, $\{W'_{j_1\dots j_k}\}$ est dans son entier localement fini.

h) On peut donc terminer en lui appliquant 2.77 .

Définition (paracompacité) 2.81.

Un espace topologique $X$ est paracompact s'il est séparé, et si pour tout recouvrement ouvert de $x$ , il existe un recouvrement de $X$ localement fini plus fin que lui.

Exemples 2.82.

a) Toutes les variétés plongées dans $R^n$ sont paracompactes. Il suffit de le voir pour $R^n$ lui-même. (Soit $U$ un recouvrement ouvert de $R^n$ , $x \in R^n$ . On prend deux boules centrées en $x$ : $B_1$ et $B_2$ telles que $B_1 \subset \mathring{B}_2$ . Alors

$$U'_x = \{U - \bar{B}_1 \mid U \in U\} \cup \{U_i \cap B_2 \mid i = 1,2,\dots,k\}$$

(où le second ensemble est un sous-recouvrement fini du recouvrement $U$ de $\bar{B}_2$ compact), est un recouvrement de $R^n$ , "localement fini dans $B_1$ "

On sait que $R^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_h$ où $B_k$ est la boule de centre $0$ , de rayon $k$

On applique inductivement notre construction à $B_1 = B_k, B_2 = B_{k+1}$ de telle manière qu'à chaque pas la famille finie soit croissante. (la première famille décroît évidemment vers $\emptyset$) .

On obtient $U_k = U_k^1 \cup U_k^2$ $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k^1 = \emptyset$ , $U_k^2$ fini.

Soit $U' = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k^2$

Alors $U'$ est un recouvrement de $X$ , localement fini plus fin que $U$ .

b) Chacun voit bien que ce raisonnement s'étend à tout espace localement compact dénombrable à l'infini et même à tout espace dont les composantes connexes sont localement compactes dénombrables à l'infini.

Lemme 2.83.

Pour tout recouvrement d'un espace paracompact, il existe un recouvrement numérable plus fin que lui.

Théorème de Dold 2.84.

Soit $p : E \to B$ où $B$ est paracompact.

Alors $p$ est une fibration si et seulement si c'est une fibration locale.

Corollaire 2.85.

Pour tout fibré $(E,B,F,p)$ dont la base est paracompacte,, $p$ est une fibration.

-::-::-::-

# CHAPITRE VII.

## THEORIE de L'HOMOTOPIE.

### SUITES EXACTES en HOMOTOPIE.

7.1. Définitions.

a) Dans tout ce chapitre, un espace $X$ désignera un espace pointé $(X, x_o)$ ; une paire $(X, A)$ est une paire d'espaces pointés, de même point base, et tel que $A$ soit fermé dans $X$.

b) $f : X \longrightarrow Y$ est censée conserver les points base.

c) $X/A$ désigne le quotient $\frac{X}{R}$ où $R$ est l'identification de tous les points de $A$.

d) Si $A$ et $X'$ sont fermés dans $X$, $A/_{A \cap X'}$ est un sous-ensemble fermé de $X/_{X'}$ et on note

$$(X/_{X'}, A/_{A \cap X'}) = (X, A)/_X$$

e) $I = ([0, 1], 0)$

f) le cône réduit sur $X$ : $CX$ est défini par

$$CX = X \times Y/_{X \times 0 \cup x_o \times I}$$

(i.e. $X \times I$ où on réunit $X \times 0$ et $x_o \times I$ en un point).

On note $[x, t]$ la classe de $(x, t)$

$$X \hookrightarrow CX \qquad x \longmapsto [x, 1]$$

$$C(X, A) = (CX, CA)$$

g) Dans la suite, on abrégera : si et seulement si en ssi.

7.2. Lemme.

$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ est homotope à une constante ssi $f$ s'étend en $F : C(X, A) \longrightarrow (Y, B)$.

7.3. Lemme.

Le couple $(C(X, A), (X, A))$ possède la P E H pour tout espace (propriété d'extension des homotopies).

Preuve. Soient

$$f : C(X, A) \longrightarrow (Y\ B)$$

$$G : (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$$

telles que $f[x, 1] = G(x, 0) \quad x \in X.$

Il existe $F : C(X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$ qui les prolonge

$$F[(x, t), \tau] = \begin{cases} f[x, t(1+\tau)] & t(1+\tau) \leq 1 \\ G(x, t(1+\tau) - 1) & 1 \leq t(1+\tau) \end{cases}$$

7.4. <u>Remarque</u>.

On note $0$ la classe de l'application constante dans $[X, A ; Y, B]$. Cet espace est pointé par $0$.

7.5. <u>Définitions</u> (<u>cône d'application</u>, <u>Ker $f_\#$</u>).

Soit $f : (X', A') \longrightarrow (X, A)$ .

a) On définit $f^\# : [X, A ; Y, B] \longrightarrow [X', A' ; Y, B]$

$$f_\# : [Y, B ; X', A'] \longrightarrow [Y, B ; X, A]$$

par

$$f^\# [g] = [g \circ f] \; ; \quad f_\# [g] = [f \circ g]$$

et $\quad \text{Ker } f^\# = f^{\#^{-1}}(0) \quad ; \quad \text{Ker } f_\# = f_\#^{-1}(0)$ .

b) Le cône d'applications $C_f$ de $f : X' \longrightarrow X$ est $\dfrac{CX' + X}{R}$

$[x', 1] \; R \; f(x') \quad x' \in X'$.

c) $C_{f|A'}$ est fermé dans $C_{f|X'}$ .

Donc $C_f = (C_{f|X'}, C_{f|A'}) = (C_{f'}, C_{f''}) \quad (f' = f|X' \; , \; f'' = f|A')$.

7.6. <u>Définitions (exactitude)</u>.

Une suite de paires $(X', A') \longrightarrow (X, A) \longrightarrow (X'', A'')$ est dite

a) exacte si pour tout $(Y, B)$ ($B$ non nécessairement fermé) la suite :

$$[Y, B ; X', A'] \xrightarrow{f_\#} [Y, B ; X, A] \xrightarrow{g_\#} [Y, B ; X'', A'']$$

est exacte (i.e. $\text{Ker } g_\# = \text{Im } f_\#$ )

b) coexacte si pour toute $(Y, B)$, la suite :

$$[X'', A'', Y, B] \xrightarrow{g^\#} [X \; A \; ; Y \; B] \xrightarrow{f^\#} [X' \; A' \; ; Y \; B]$$

est exacte.

7.7. <u>Théorème</u>.

Pour tout $f : (X' \; A') \longrightarrow (X \; A)$ la suite

$(X' \; A') \xrightarrow{f} (X \; A) \xhookrightarrow{i} (C_{f|X'}, C_{f|A})$ est exacte.

<u>Preuve.</u>

Soit $(Y, B)$ quelconque. On a la suite exacte

$$[C_{f|X'}, C_{f|A} \; ; \; Y, B] \xrightarrow{i^{\#}} [X, A \; ; \; Y \; B] \xrightarrow{f^{\#}} [X' \; A', \; Y \; B] \; .$$

a) $f^{\#} \circ i^{\#} = (i \circ f)^{\#} = 0$.

Car $i \circ f : (X', A') \longrightarrow (C_{f|X'}, C_{f|A'})$ s'obitent par :

$$(X', A') \hookrightarrow C(X', A') \hookrightarrow C(X' \; A') + (X \; A) \xrightarrow{p} (C_{f|X'}, C_{f|A'})$$

où la première inclusion est homotope à Cte d'après 7.2.

b) Soit $g : X(A) \longrightarrow Y(B)$ telle que $f^{\#}[g] = 0$ (i.e. $g \circ f \approx$ Cte).

D'après 7.2. , on a $G : C(X' \; A') \longrightarrow (Y \; B)$ qui s'étend $g \circ f$. Soit

$$G' : C(X' \; A') + (X \; A) \longrightarrow (Y \; B)$$

extension commune de $g$ et $G$. Comme

$$G'[x' \; 1] = g \circ f[x' \; 1] = g \; f(x') = G'(f(x')) \qquad x' \in X'$$

$G'$ passe au quotient en

$$h : (C_{f|X'}, C_{f|A'}) \longrightarrow (Y \; B)$$

et

$$[g] = i^{\#}[h] \; .$$

7.8. <u>Corollaire.</u>

Soit $f : (X' \; A') \longrightarrow (X, A)$ .

On a la suite coexacte infinie :

$$(X' \; A') \xrightarrow{f} (X \; A) \xhookrightarrow{i} (C_{f|X'}, C_{f|A'}) \xhookrightarrow{j} (C_{i|C_{f|X'}}, C_{i|C_{f|A'}}) \xhookrightarrow{\ell} (C_{j'}, C_{j''}) \hookrightarrow$$

7.9. <u>Lemme.</u>

Soit $(Y, B)$ et $Y' \subset Y$ fermé.

S'il existe une homotopie : $H : (Y \; B) \times I \longrightarrow (Y, B)$ telle que

a) $H(y, 0) = y \quad y \in Y$

b) $H(Y' \times I) \subset Y'$

c) $H(Y' \times 1) = y_0$

Alors la projection $p : (Y, B) \longrightarrow (Y, B)/_{Y'}$ est une équivalence d'homotopie.

<u>Preuve.</u> Soit $f : (Y, B)/_{Y'} \longrightarrow (Y \; B)$ définie par $f(p(y)) = H(y, 1) \quad y \in Y$ .

1) $H : \mathrm{Id}_{(Y,\, B)} \simeq f \circ p$.

2) Soit $H' : (Y, B)/_{Y'} \times I \longrightarrow (Y, B)/_{Y'}$

$$H'(p(y), t) = p(H(y, t)) \quad y \in Y \quad t \in I$$

$$H' = \mathrm{Id}_{(Y,B)/_{Y'}} \sim p \circ f \quad .$$

7.10. Corollaire.

Soit $(X' \; A') \xrightarrow{f} (X, A) \overset{i}{\hookrightarrow} (C_{f|X'}, C_{f|A'})$ .

Alors $CX$ s'inclut dans $C_{i'}$ et

$$(C_{i'}, C_{i''})/_{CX} = (C_{f'}, C_{f''})/_{X} \quad .$$

D'autre part, la projection $p : (C_{i'}, C_{i''}) \longrightarrow (C_{i'}, C_{i''})/_{CX}$ est une équivalence d'homotopie.

Preuve.

a) $C_{i'} = \dfrac{CX' + CX}{R} \quad [x', 1] \, R \, [f(x'), 1] \quad x' \in X'$. Donc $CX \subset C_{i'}$ .

Comme $C_{i'} = CX \cup C_{f'}$

$$C_{i'}/CX = C_{f'}/C_{f'} \cap CX = C_{f'}/ X$$

et de même avec $f'' = f|A'$.

b) Soit $F : C(X, A) \times I \longrightarrow C(X, A) \quad F([xt] \, t') = [x, (1-t') \, t]$

et $g : C(X' \; A') \quad C(X' \; A') \to C(X \; A) \longrightarrow (C_{i'} \; C_{i''})$ .

On définit $G : (X', A') \times I \longrightarrow (C_{i'}, C_{i''})$ par

$$(X' \; A') \times I \xrightarrow{f\times \mathrm{Id}} (X \; A) \times I \hookrightarrow C(X, A) \times I \xrightarrow{F} C(X, A) \hookrightarrow (C_{i'}, C_{i''})$$

$$G(x', 0) = [f(x'), 1] = g[x' \; 1] \; .$$

D'après 7.3. on a une homotopie $F'$ qui prolonge $G$ et $g$

$$F' : C(X' \; A') \times I \longrightarrow (C_{i'}, C_{i''}) \; .$$

Alors $H : (C_{i'}, C_{i''}) \times I \longrightarrow (C_{i'}, C_{i''})$

$$H([x' \; t] \; t') = F'([x' \; t], t') \quad x' \in X'$$

$$H([x \; t] \; t') = F([x \; t], t') \quad x \in X$$

$p$ est une équivalence d'homotopie d'après 7.9.

7.11. Définition (suspension).

a) Pour l'espace $(X, x_0)$, on définit la suspension $SX$ (ou suspension réduite) par

$$SX = X \times I/_{(X \times 0 \cup x_0 \times I \cup X \times 1)} = CX/_X$$

b) Pour $f : X' \longrightarrow X$, on définit l'application suspension de $f$ par

$$Sf : SX' \longrightarrow SX$$

$$Sf[x, t] = [f(x), t]$$

7.12. Lemme. Pour $n \geq 0$ $S(S^n)$ est homéomorphe à $S^{n+1}$.

Preuve.

$$S^n = \{x \in R^{n+2} \mid \|x\| = 1 \quad x_{n+2} = 0\}$$

$$E^{n+1} = \{x \in R^{n+2} \mid \|x\| \leq 1 \quad x_{n+2} = 0\}$$

$$E_+^{n+2} = \{x \in R^{n+2} \mid \|x\| = 1 \quad x_{n+2} \geq 0\}$$

$$E_-^{n+2} = \{x \in R^{n+2} \mid \|x\| = 1 \quad x_{n+2} \leq 0\}$$

La projection $p : R^{n+2} \longrightarrow R^{n+1}$ définit deux homéomorphismes $p_+ : E_+^{n+2} \longrightarrow E^{n+1}$ ; $p_- : E_-^{n+2} \longrightarrow E^{n+1}$. On définit l'homéomorphisme $f : S(S^n) \longrightarrow S^{n+1}$ par

$$f[x, t] = \begin{cases} p_-^{-1}(2tx + (1-2t)\, p_0) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ p_+^{-1}((2-2t)\, x + (2t-1)\, p_0) & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

où $p_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.

7.13. Théorème.

Soient deux objets $X, Y$. S'il existe deux lois de composition de même élément neutre et mutuellement distributives sur $\mathrm{Hom}(X\,Y) = \{f : X \longrightarrow Y\}$.

Ces deux lois sont égales, commutatives et distributives.

Preuve.

Soient $\circ$ et $\times$ ces lois, $f_0$ l'élément neutre

$$f \circ f_0 = f_0 \circ f = f = f \times f_0 = f_0 \times f \qquad f \in \mathrm{Hom}(X\,Y)$$

$$(f_1 \circ f_2) \times (g_1 \circ g_2) = (f_1 \times g_1) \circ (f_2 \times g_2) .$$

Alors

$$f \circ g = (f \times f_0) \circ (f_0 \times g) = (f \circ f_0) \times (f_0 \circ g) = f \times g$$

$$g \circ f = (f_0 \times g) \circ (f \times f_0) = (f_0 \circ g) \times (g \circ f_0) = f \times g$$

$$(f \circ g) \circ h = (f \circ g) \times (f_0 \circ h) = (f \times f_0) \circ (g \times h) = f \circ (g \circ h)$$

7.14. Corollaire. Pour tous $X, Y$, $[S(SX) ; Y]$ est un groupe abélien.

Preuve. On définit les deux lois

$$f \circ g([[x t], \tau]) = \begin{cases} f[[x, 2t] \tau] & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g[[x, 2t-1] \tau] & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$f \times g([[x, t] \tau]) = \begin{cases} f[[x, t] 2\tau] & 0 \leq \tau \leq 1/2 \\ g[[x, t] 2\tau-1] & 1/2 \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

Sur les classes d'homotopie $[S(SX) ; Y]$ il correspond deux lois $\circ$ et $\times$ qui vérifient 7.13.

7.15. <u>Définition (suspension)</u>.

a) Pour une paire $(X, A)$ on définit la suspension par :

$$S(X, A) = (SX, SA) = (CX/_X, CA/_A)$$

b) Pour $f : (X', A') \longrightarrow (X A)$ on a

$$(C_{f'}, C_{f''})/_X = S(X', A')$$

et on note la projection $h : (C_{f'}, C_{f''}) \longrightarrow S(X' A')$.

7.16. <u>Lemme</u>. Pour toute $f : (X' A') \longrightarrow (X, A)$ on a la suite coexacte :

$$(X' A') \xrightarrow{f} (X A) \xrightarrow{i} (C_{f'} C_{f''}) \xrightarrow{k} S(X' A') \xrightarrow{Sf} S(X A) .$$

<u>Preuve</u>. D'après 7.8. on a la suite coexacte

$$(X' A') \xrightarrow{f} (X A) \hookrightarrow^{i} (C_{f'} C_{f''}) \hookrightarrow^{j} (C_{i'} C_{i''}) \hookrightarrow^{\ell} (C_{j'} C_{j''}) .$$

D'après 7.10. $k' : (C_{i'}, C_{i''}) \longrightarrow (C_{f'} C_{f''})/_X = S(X', A')$ est une équivalence d'homotopie et $k : (C_{f'}, C_{f''}) \hookrightarrow^{j} (C_{i'} C_{i''}) \xrightarrow{h'} S(X' A')$.

De même pour

$$k'' : (C_{j'}, C_{j''}) \longrightarrow (C_{j'} C_{j''})/_{CC_{f'}} = (C_{i'} C_{i''})/_{C_{f'}} = S(X A)$$

K'' est une équivalence et on a la projection

$$\bar{k} : (C_{i'} C_{i''}) \longrightarrow (C_{j'} C_{j''}) \xrightarrow{h''} (C_{j'} C_{j''})/_{CC_{f'}} = S(X A) .$$

Ceci nous permettra de changer $(C_{i'} C_{i''})$ et $(C_{j'} C_{j''})$ de 7.8. en $S(X' A')$ et $S(X A)$. Il reste à voir de quelle façon se transforme par ces équivalences.

Soit $g : S(X' A') \longrightarrow S(X A)$ $\quad g[x' t] = [f(x'), 1-t]$

$$\bar{k} , g \circ k' : (C_{i'} C_{i''}) \longrightarrow S(X A)$$

sont homotopes par :

$$H([x' t] \tau) = [f(x'), 1 - t \tau] \qquad x' \in X'$$

$$H([x t] \tau) = [x, (1 - \tau) t] \qquad x \in X$$

qui est bien définie car : $H([-x' \; 1] \; \tau) = [f(x'), 1-\tau] = H([f(x') \; 1] \; \tau)$.

Donc on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (C_{f'}, C_{f''}) \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "k"] & (C_{i'} \; C_{i''}) \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "k'"] & (C_{j'} \; C_{j''}) \arrow[d, "k''"] \\ & S(X' \; A') \arrow[r, "g"] & S(X \; A) \end{tikzcd}$$

où $k'$ et $k''$ sont des équivalences. On a donc la suite coexacte

$$(X' \; A') \xrightarrow{f} (X \; A) \xrightarrow{i} (C_{f'} \; C_{f''}) \xrightarrow{h} S(X' \; A') \xrightarrow{g} S(X \; A)$$

En composant par l'homéomorphisme

$$h : S(X \; A) \longrightarrow S(X \; A) \qquad h[x \; t] = [x, 1-t]$$

$$h \circ g : S(X' \; A') \longrightarrow S(X \; A) \qquad h \circ g[x' \; t] = [f(x') \; t]$$

donc $h \circ g = Sf$ et on obtient la bonne suite coexacte.

7.17. <u>Définition (espace des lacets)</u>.

a) Etant donné un espace topologique $(X, x_o)$, on appelle espace des lacets de X en $x_o$, l'espace

$$\Omega(X) = \Omega(X, x_o) = \{\alpha : (I, \partial I) \longrightarrow (X, x_o)\}$$

muni de la topologie CO (compact-ouverte).

Cet espace est pointé par $\varepsilon x_o$.

b) Pour $f : (X', x'_o) \longrightarrow (X, x_o)$ on définit

$\Omega f : \Omega X' \longrightarrow \Omega X$ par $\Omega f(\alpha) \, t = f(\alpha(t))$.

c) Pour une paire $(X, A)$, l'espace des lacets est

$$\Omega(X, A) = (\Omega X, \Omega A) \qquad (\Omega A \text{ est fermé dans } \Omega X).$$

d) Pour $f : (X' \; A') \longrightarrow (X \; A)$ $\quad \Omega f = (\Omega f|X', \Omega f|A')$

$$\Omega f : \Omega(X' \; A') \longrightarrow \Omega(X \; A).$$

7.18. <u>Proposition</u>.

a) Il existe une équivalence $h : \mathrm{Hom}(S(X, A) \; ; Y \; B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(XA \; ; \Omega(Y \; B))$

b) Il existe une équivalence $\bar{h} : [S(X \; A) \; ; Y \; B] \longrightarrow [X \; A \; ; \Omega(Y \; B)]$.

<u>Preuve</u>.

a) Soit $g : S(X \; A) \longrightarrow (Y \; B)$.

On définit $hg : (X \; A) \longrightarrow \Omega(Y \; B)$ par $hg(x) \; t = g[x \; t] \quad x \in X$

dont la réciproque est évidente.

Les carrés ci-dessous se correspondent

$$\begin{array}{ccc} S(X' A') & \xrightarrow{Sf} & S(X A) \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (Y', B') & \xrightarrow{k} & (Y, B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (X' A') & \xrightarrow{f} & (X A) \\ {\scriptstyle h'g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle hg} \\ \Omega(Y' B') & \xrightarrow{\Omega k} & \Omega(Y B) \end{array}$$

et ils sont simultanément commutatifs.

b) Soit $G$ une homotopie $G : (X A) \times I \longrightarrow (Y, B)$. Par le quotient elle donne $F : (X, A) \times I/_{x_o \times I} \longrightarrow (Y, B)$. Or

$$S((X, A) \times I/_{x_o} \times I) = S(X, A) \times I/_{x_o} \times I$$

(par l'homéomorphisme $[(x, t)\, \tau] \longleftrightarrow ([x\ \tau]\ t))$. Donc les homotopies $F : (X A) \times I/_{x_o} \times I \longrightarrow \Omega(Y B)$ correspondent bijectivement aux homotopies $F' : S(X A) \times I/_{x_o} \times I \longrightarrow (Y B)$ d'après a).

7.19. Lemme. Si la suite

$$(X' A') \xrightarrow{f} (X A) \xrightarrow{g} (X'' A'') \qquad \text{est exacte}$$

il en est de même de :

$$S(X' A') \xrightarrow{Sf} S(X A) \xrightarrow{Sg} S(X'' A'')$$

Preuve. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} [S(X'' A'') ; Y B] & \xrightarrow{Sg^{\#}} & [S(X A) ; Y B] & \xrightarrow{Sf^{\#}} & [S(X' A') ; Y, B] \\ \downarrow{\scriptstyle h''} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ [X'' A'' ; \Omega(Y B)] & \xrightarrow{g^{\#}} & [X A ; Y, B] & \xrightarrow{f^{\#}} & [X' A' ; Y B] \end{array}$$

$$\mathrm{Im}\ (Sg)^{\#} = \mathrm{Ker}(Sf)^{\#} \iff \mathrm{Im}\ g^{\#} = \mathrm{Ker}\ f^{\#} .$$

7.20. Définition ($n^{-}$ suspension).

On définit par induction $S^n(X A)$ et $S^n(f)$ pour $f : (X' A') \longrightarrow (X A)$

par a) $S^o(X A) = (X A)$

$S^n(X A) = S(S^{n-1}(X A)) \qquad n > 0$

b) $S^n f ; S^n(X' A') \longrightarrow S^n(X A)$

$S^o f = f ; \quad S^n f = S(S^{n-1} f) \qquad n > 0.$

7.21. Théorème. Pour toute application $f : (X' A') \longrightarrow (X A)$

on a la suite coexacte

$$(X' A') \xrightarrow{f} (X A) \xrightarrow{i} (C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{k} \dots \longrightarrow S^n(X' A') \xrightarrow{S^n f} S^n(X A) \xrightarrow{S^n i}$$

$$S^n(C_{f'}, C_{f''}) \xrightarrow{S^n f} S^{n+1}(X' A') \longrightarrow \dots$$

GROUPES d'HOMOTOPIE.

7.22. Définition (groupes d'homotopie)

a) Pour un espace pointé X, on définit :

$$\pi_n(X) \quad (\text{ou } \pi_n(X\ x_o)) = [S^n(\partial I)\ ;\ X] \qquad n \geq 0$$

( $\partial I$ est homéomorphisme à $S^o$ et $S^n = S^n(\partial I)$ d'après 7.12.)

($\pi_o(X) = [\partial I\ ;\ X] = \{$composantes connexes par arcs de $X\}$ ).

D'après 7.14. , $\pi_n(X)$ est un groupe pour $n \geq 1$, abélien pour $n \geq 2$.

b) Pour une paire (X A), on définit :

$$\pi_n(X\ A) \quad (\text{ou } \pi_n(X\ A\ x_o)) = [S^{n-1}(I,\ \partial I)\ ;\ X,\ A] \qquad n \geq 1$$

Pour $n = 1$, on a un espace pointé ; pour $n = 2$ un groupe ; pour $n \geq 3$ un groupe abélein d'après 7.14.

7.23. Remarques.

a) $S(\partial I)$ est homéomorphe à $I/_{\partial I}$ et sous cette identification

$$S^n(\partial I) = S^{n-1}(I/_{\partial I}) = S^{n-1}(I)/_{S^{n-1}(\partial I)}$$

Donc $\pi_n(X) = [S^n(\partial I)\ ;\ X] = [S^{n-1}(I/_{\partial I})\ ;\ X,\ \{x_o\}] = \pi_n(X,\ \{x_o\})$

pour $n \geq 1$.

b) $j : (X,\ x_o) \hookrightarrow (X\ A)$ induit $j_\# : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(X\ A)$ $n \geq 1$.

c) Pour $n \geq 1$ on a un homéomorphisme

$$h : S^{n-1}(I,\ \partial I) \longrightarrow (I \times I^{n-1},\ \partial I \times I^{n-1})/(I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$$

(construit par induction).

Donc $\pi_n(X\ A\ x_o) = [I^n,\ \partial I^n,\ I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}\ ;\ X\ ;\ A\ ;\ x_o]$ .

d) $I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}$ est constratile. Donc pour $z_o = (0,\ldots,0)$

$$i : (I^n,\ \partial I^n,\ z_o) \hookrightarrow (I^n,\ \partial I^n,\ I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$$

est une équivalence d'homotopie.

Or $(I^n,\ \partial I^n,\ z_o)$ est homéomorphe à $(E^n,\ S^{n-1},\ p_o)$ donc pour $n \geq 1$ ($E^n$ est le disque unité de $R^n$ noté aussi $D^n$ ailleurs)

$$\pi_n(X,\ A,\ x_o) = [E^n,\ S^{n-1},\ p_o\ ;\ X,\ A,\ x_o]$$

7.24. Théorème.

a) $\alpha : S^n \longrightarrow X$ représente l'élément neutre de $\pi_n(X)$ pour $n \geq 1$ ssi $\alpha$ s'étend à $E^{n+1}$.

b) $\alpha : (E^n, S^{n-1}, p_o) \longrightarrow (X A x_o)$ représente l'élément neutre de $\pi_n(X A x_o)$ ssi $\alpha$ est homotope à une application $\beta : E^n \longrightarrow A$ relativement à $S^{n-1}$.

Preuve de b).

$[\alpha] = 0$. Donc on a $H : (E^n, S^{n-1}) \times I \longrightarrow (X A)$ $\qquad H : \alpha \sim \varepsilon x_o$

$$H'(z, t) = \begin{cases} H(\frac{z}{1 - \frac{t}{2}}, t) & 0 \leq \|z\| \leq 1 - \frac{t}{2} \\ H(\frac{z}{\|z\|}, 2 - 2\|z\|) & 1 - \frac{t}{2} \leq \|z\| \leq 1 \end{cases}$$

$$H' : \alpha \sim \beta \quad \text{rel } S^{n-1}$$

Réciproquement $\alpha \sim \beta$ donc $[\alpha] = [\beta]$.

Or $\quad H : \beta \sim \varepsilon x_o$

$$H(z, t) = \beta\,[(1-t)\, z + t\, p_o].$$

7.25. Définition (n-connexité).

a) $(X A)$ est n-connexe si pour tout $k \leq n$ et

$$\alpha : (E^k, S^{k-1}) \longrightarrow (X A)$$

$\alpha$ est homotope à une $p : E^k \longrightarrow A$ relativement à $S^{k-1}$.

b) Donc $(X A)$ est 0-connexe si tout $x \in X$ est lié par un chemin à un point de $A$.

7.26. Corollaire. $(X A)$ est n-connexe ssi chaque composante par arcs de $X$ coupe $A$ et pour $a \in A$, $1 \leq k \leq n$

$$\pi_k(X, A, a) = 0.$$

7.27. Définition ($\partial$).

a) Pour $n \geq 1$, on a une application (homomorphisme pour $n \geq 2$)

$$\partial : \pi_n(X, A, x_o) \longrightarrow \pi_{n-1}(A x_o)$$

$$\alpha : S^{n-1}(I, \partial I) \longrightarrow (X, A) \qquad \partial[\alpha] = [\alpha \mid S^{n-1}(\partial I)]$$

et pour $f : (X' A') \longrightarrow (X A)$ on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X' A') & \xrightarrow{f_\#} & \pi_n(X A) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \pi_{n-1}(A') & \xrightarrow{(f|A')_\#} & \pi_{n-1}(A) \end{array}$$

b) Si $i : A \hookrightarrow X$ $j : (X, x_o) \hookrightarrow (X A)$, on a la suite

$$\ldots \longrightarrow \pi_{n+1}(X A) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A) \xrightarrow{i_\#} \pi_n(X) \xrightarrow{j_\#} \pi_n(X A) \xrightarrow{\partial} \ldots \longrightarrow \pi_o(X)$$

appelée suite d'homotopie de $(X A)$.

7.28. Théorème.

La suite d'homotopie de $(X A)$ est exacte.

Preuve. On a une suite coexacte

$$(\partial I, 0) \xhookrightarrow{\ell} (\partial I, \partial I) \xhookrightarrow{m} (C_{\ell'}, C_{\ell''}) \xrightarrow{k} S(\partial I, 0) \xrightarrow{S\ell} S(\partial I, \partial I) .$$

On a un homéomorphisme $g : (C_{\ell'}, C_{\ell''}) \longrightarrow (I, \partial I)$

$$g[0\ t] = 0, \qquad g[1, t] = t$$

et

$$(\partial I, \partial I) \xrightarrow{m} (C_{\ell'}, C_{\ell''}) \xrightarrow{g} (I \partial I) \xrightarrow{g^{-1}} (C_{\ell'}, C_{\ell''}) \xrightarrow{k} S(\partial I, 0)$$

$$i' = g \circ m : (\partial I, \partial I) \hookrightarrow (I, \partial I) \ ; \ kg^{-1} : (I, \partial I) \xrightarrow{k} (I/_{\partial I}, 0) \xrightarrow{h} (S(\partial I), 0) .$$

On a donc la suite coexacte

$$(\partial I, 0) \xrightarrow{\ell} (\partial I, \partial I) \xhookrightarrow{i'} (I, \partial I) \xrightarrow{kg^{-1}} S(\partial I, 0) \xrightarrow{S\ell}$$

Donc la suite exacte

$$\longrightarrow \pi_{n+1}(X, A) \xrightarrow{(S^n i')^\#} \pi_n(A) \xrightarrow{(S^n \ell)^\#} \pi_n(X) \xrightarrow{S^{n-1}(kg^{-1})^\#} \pi_n(X A) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \pi_o(X)$$

Mais bien sûr

$$(S^n i')^\# = \partial \ ; \quad (S^n \ell)^\# = i_\# \ ; \quad S^{n-1}(kg^{-1})^\# = j_\#$$

7.29. Corollaire. $(E^{n+1}, S^n)$ est n-connexe pour tout $n \geq 0$.

Preuve. $\pi_k(E^{n+1}, x) = 0 \qquad x \in S^n, \quad k \geq 0$

$\pi_k(S^n, x) = 0 \qquad 0 \leq k < n$ d'après 3.45.

donc $\pi_k(E^{n+1}, S^n, x) = 0 \qquad 0 \leq k \leq n$.

Il suffit d'appliquer 7.26.

7.30. Définition (fibration faible).

a) $p : E \longrightarrow B$ est une fibration faible si elle a la P.R.H. pour tout cube

$I^n \quad n \geq 0$.

b) $E$ est l'espace total, $B$ la base de la fibration faible et $p^{-1}(b) \quad b \in B$ est la fibre sur $b$.

c) Il revient au même de dire que $p$ a la P.R.H. pour tout simplexe $|S|$.

7.31. Exemples.

a) Une fibration.

b) Si $p : E \longrightarrow B$ est une fibration faible et $f : B' \longrightarrow B$

$$E' = \{(e, b') \in E \times B' \mid p(e) = f(b')\}$$

$$p' : E' \longrightarrow B' \qquad p'(e, b') = b'$$

est une fibration faible dite fibration faible induite par $f$ et $p$.

7.32. Lemme.

Soit $p : E \longrightarrow B$ est une fibration faible, $g : I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I \longrightarrow E$ et $H : I^n \times I \longrightarrow B$ tels que $H$ soit une extension de $p \circ g$.

Alors il existe $G : I^n \times I \longrightarrow E$ telle que

$$p \circ G = H \quad \text{et} \quad G | I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I = g.$$

Preuve. $(I^n \times I, I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I)$ est homéomorphe à $(I^n \times I, I^n \times 0)$ et $p$ possède la P.R.H. pour cette paire.

7.33. Théorème.

Soit $(X\ A)$ une paire de polyèdres et $p : E \longrightarrow B$ une fibration faible.

Pour toutes $g : X \times 0 \cup A \times I \longrightarrow E$, $H : X \times I \longrightarrow B$ telles que $H$ prolonge $p \circ g$. Il existe une extension $G : X \times I \longrightarrow E$ de $g$ telle que : $p \circ G = H$.

En particulier pour $A = \emptyset$, $p$ a la P.R.H. pour tout polyèdre.

Preuve. On peut supposer $(X\ A) = (|K|, |L|=$. Soit

$X_i = (|K| \times 0) \cup (|K^i \cup L| \times I)$.

On construit par induction $G_i : X_i \longrightarrow E$ telle que $G_i | X_{i-1} = G_{i-1}$ et $p \circ G_i = H \mid X_i \quad G_{-1} = g$.

Si $G_i$ est définie pour $i < n$, on connait pour tout $S \in X_n$

$$G_n \mid |S| \times 0 \cup |\mathring{S}| \times I = G_{n-1} \big| |S| \times 0 \cup |\mathring{S}| \times I \quad \text{et} \quad H \mid |S| \times I \quad .$$

Comme $(|S|, |\mathring{S}|)$ est homéomorphe à $(I^n, \partial I^n)$ pour $S \in X_n - X_{n-1}$ on applique 7.32. pour prolonger $G_{n-1}$ sur $|S| \times I$. Ceci définit $G_n$ $n \geq 0$ donc $G$ par $G \mid X_n = G_n$.

7.34. <u>Corollaire.</u>

Soit $(X\ A)$ une paire de polyèdres où $A$ est un rétract de déformation fort de $X$, et soit $p : E \longrightarrow B$ une fibration faible.

Pour toute $g : A \longrightarrow E$ et $H : X \longrightarrow B$ telles que $H|A = p \circ g$.

Il existe une extension $G : X \longrightarrow E$ de $g$ telle que $p \circ G = H$.

7.35. <u>Théorème.</u>

Soit $p : E \longrightarrow B$ une fibration et $b_o \in B' \subset B$. Soit $E' = p{-1}(B')$ et $e_o \in p^{-1}(b_o)$.

Alors $p$ induit une bijection (isomorphisme pour $n \geq 2$)

$$p_{\#} : \pi_n(E, E', e_o) \approx \pi_n(B, B', b_o) \qquad n \geq 1.$$

<u>Preuve.</u>

a) $p$ est surjective.

Soit $\alpha : (D^n, S^{n-1}, p_o) \longrightarrow (B, B', b_o)$ $p_o$ est un rétract de déformation fort de $D^n$ donc d'après 7.34. pour $g : \{p_o\} \longrightarrow E$ et $\alpha : D^n \longrightarrow B$ $(g(p_o) = e_o)$ il existe $\alpha' : D^n \longrightarrow E$ telle que $p \circ \alpha' = \alpha$ et $\alpha'(p_o) = e_o$

$$\alpha'(S^{n-1}) \subset p^{-1}\ \alpha(S^{n-1}) \subset p^{-1}(B4) = E'$$

Donc $$\alpha' : (D^n, S^{n-1}, p_o) \longrightarrow (E, E', e_o)$$

et $$p_{\#}[\alpha'] = [\alpha]$$

b) $p_{\#}$ est injective.

Soient $\alpha_o, \alpha_1 : (I^n, \partial I^n, z_o) \longrightarrow (E, E'\ e_o)$ telles que $p \circ \alpha_o \sim p \circ \alpha_1$.

Soient $X = I^n \times I$, $A = I^n \times 0 \cup z_o \times I \cup I^n \times 1$ $A$ est un rétract de déformation fort de $X$ (car tous deux sont contractiles).

Soit $g : A \longrightarrow E$ $(g(z, 0) = \alpha_o(z)$, $g(z\ 1) = \alpha_1(z)$ , $g(z_o, t) = e_o)$ et $H : X \longrightarrow B$ l'homotopie entre $p \circ \alpha_o$ et $p \circ \alpha_1$. D'après 7.34. $H$ se relève en $G : X \longrightarrow E$ qui est une homotopie entre $\alpha_0$ et $\alpha_1$.

7.36. Corollaire.

Soit $p : E \longrightarrow B$ une fibration faible, $b_0 \in B$, $F = p^{-1}(b_0)$, $e_0 \in F$.

Alors $p_\# : \pi_n(E, F, e_0) \approx \pi_n(B, b_0)$ $n \geq 1$.

7.37. Définition (suite d'homotopie d'une fibration faible).

a) Soit $p : E \longrightarrow B$ une fibration faible, $b_0 \in B$, $F = p^{-1}(b_0)$, $e_0 \in F$.

On définit $\bar{\partial} : \pi_n(B\ b_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, e_0)$ par

$$\bar{\partial} : \pi_n(B\ b_0) \xrightarrow{p_\#^{-1}} \pi_n(E, F, e_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0)$$

b) La suite d'homotopie de $p$ est :

$$\longrightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_\#} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_\#} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\bar{\partial}} \pi_{n-1}(F, e_0) \longrightarrow$$

7.38. Théorème. La suite d'homotopie d'une fibration faible est exacte.

7.39. Corollaires.

a) Si $p : E \longrightarrow B$ est une fibration faible à R.U.C.

$$p_\# : \pi_n(E, e_0) \approx \pi_n(B, b_0) \qquad n \geq 2.$$

b) $\pi_n(S^1) = 0$ $n \geq 2$.

c) Soit $p : S^{2n+1} \longrightarrow P_n(\mathbb{C})$ la fibration de Hopf

$$p_\# : \pi_p(S^{2n+1}) \approx \pi_p(P_n(\mathbb{C})) \qquad p \geq 3.$$

d) $\pi_3(S^2) \neq 0$.

Preuve :

a) $\pi_n(F, e_0) = 0$ $n \geq 1$ d'après 2.56. (tous les chemins dans $F$ sont constants).

b) On prend $p : R \longrightarrow S^1$.

c) $F = S^1$

d) $\pi_3(S^3) \neq 0$ (car $= H_3(S^3) \approx \mathbb{Z}$). On applique c) pour $n = 1$ car $P_1(\mathbb{C}) \approx S^2$.

7.40. Remarque.

a) Soit $a = (1, 00) \in E^2_+ \subset S^2$ $(S^2, E^2_+)$ a le type d'homotopie de $(S^2, \{a\})$. Donc $\pi_3(S^2, E^2_+) \approx \pi_3(S^2, \{a\}) = \pi_3(S^2) \neq 0$

$(S^2 - a, E^2_+ - a)$ a le type d'homotopie de $(D^2, S^1)$. Donc

$$\pi_3(S^2 - a, E^2_+ - a) \approx \pi_3(D^2, S^1) \approx \pi_2(S^1) = 0.$$

On n'a donc pas de rpopriété d'excision en homotopie.

b) En homologie, cohomologie et homotopie, nous avons vérifié l'axiome d'exactitude.

Cet axiome à lui seul permet de démontrer qu'étant donné un triple $(X, A, B)$ où $B \subset A \subset X$

$$i : (A, B) \subset (X\ B)$$

$$j : (X\ B) \subset (X\ A)$$

$$j' : A \subset (A\ B)$$

$$\partial' : T_n(X\ A) \xrightarrow{\partial} T_{n-1}(A) \xrightarrow{j'_\#} T_{n-1}(A\ B).$$

On a une suite exacte

$$\longrightarrow T_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial'} T_n(A, B) \xrightarrow{i_\#} T_n(X, B) \xrightarrow{j_\#} T_n(X\ A) \longrightarrow \dots \longrightarrow T_1(X\ A)$$

dite suite exacte du triple $(X\ A\ B)$ pour le foncteur $T$ (qui est soit $H_*$, $H^*$, $\pi_*(., x_0)$ $x_0 \in B$).

La démonstration est laissée au lecteur.

DEPENDANCE du POINT BASE.

7.41. Définitions (homotopie libre et $\omega$ - homotopie).

Soient $(X, A\ x_0)$ et $(Y\ B)$ deux paires.

a) Deux applications $\alpha_0, \alpha_1 : (X\ A) \longrightarrow (Y\ B)$ sont librement homotopes si elles sont homotopes entre paires non pointées.

b) Si $\omega$ est un chemin de $\alpha_0(x_0)$ à $\alpha_1(x_0)$, une $\omega$-homotopie entre $\alpha_0$ et $\alpha_1$ est une application

$$H : (X, A) \times I \longrightarrow (Y\ B)$$

telle que $H(x, 0) = \alpha_0(x)$, $H(x, 1) = \alpha_1(x)$ ; $H(x_0\ t) = \omega(t)$.

c) $\alpha_0$ et $\alpha_1$ sont librement homotopes ssi il existe $\omega$ de $\alpha_0(x_0)$ à

$\alpha_1(x_o)$ et si elles sont $\omega$-homotopes.

d) L' $\omega$-homotopie n'est généralement pas une relation d'équivalence.

7.42. Lemme.

a) Soit $f : (X' A' x'_o) \longrightarrow (X A x_o)$.

Si $\alpha_o, \alpha_1 : (X A) \longrightarrow (Y B)$ sont $\omega$-homotopes, il en est de même de $\alpha_o$ o f et $\alpha_1$ o f.

b) Soit $g : (Y B) \longrightarrow (Y' B')$.

Si $\alpha_o, \alpha_1 : (X A) \longrightarrow (Y B)$ sont $\omega$-homotopes, $g \circ \alpha_o$ et $g \circ \alpha_1$ sont $(g \circ \omega)$-homotopes.

c) Si $\alpha_o, \alpha'_o : (S(X A), x_o) \longrightarrow (Y B, \omega(0))$ ; $\alpha_1, \alpha'_1 :$ $(S(X A), x_o) \longrightarrow (Y, B, \omega(1))$ sont telles que $\alpha_o$ et $\alpha_1$ d'une part $\alpha'_o$ et $\alpha'_1$ d'autre part sont $\omega$-homotopes, il en est de même de $\alpha_o \bullet \alpha'_o$ et $\alpha_1 \bullet \alpha'_1$ ($\bullet$ étant la loi de groupe de $[S(X A) ; Y, B]$).

7.43. Définition (non dégénéré).

a) Le point base $x_o$ de la paire $(X A)$ est dit non dégénéré si $(x_o, x_o) \hookrightarrow (X, A)$ est une cofibration (i.e. : pour tout $\alpha_o : (X A) \longrightarrow (Y B)$, et $\omega : I \longrightarrow B$ il existe $H : (X A) \times I \longrightarrow (Y B)$ telle que

$$H(x, 0) = \alpha_o(x) \quad \text{et} \quad H(x_o\ t) = \omega(t) \ )$$

b) Comme pour une paire $(K L)$ de complexes simpliciaux tout point $x_o \in |L|$ est sommet d'une subdivision de $(K, L)$ et $|K| \times 0 \cup |L| \times I$ est rétract de déformation de $|K| \times I$, on peut affirmer que tout point base d'une paire de polyèdres est non dégénéré.

7.44. Lemme.

Soit $(X A x_o)$ une paire à point base non dégénéré, et $(Y B)$ une paire :

a) Pour tout chemin $\omega$ dans B , et application $\alpha_1 : (X A x_o) \longrightarrow (Y B \omega(1))$ il existe $\alpha_o : (X A x_o) \longrightarrow (Y, B, \omega(0))$ qui est $\omega^{-1}$-homotope à $\alpha_1$.

b) Si $\alpha_o, \alpha'_o : (X A x_o) \longrightarrow (Y B \omega(0))$ sont toutes deux $\omega$-homotopes à $\alpha_1$, alors $[\alpha_o] = [\alpha'_o] \in [X A x_o ; Y B \omega(0)]$ .

c) Si $\alpha_0$ est $\omega$-homotopie à $\alpha_1$ et

$$\alpha_0 \sim \alpha'_0 : (X\ A\ x_0) \longrightarrow (Y\ B\ \omega(0))$$

$$\alpha_1 \sim \alpha'_1 : (X\ A\ x_0) \longrightarrow (Y\ B\ \omega(1))$$

$$\omega \sim \omega' : I \longrightarrow B$$

Alors $\alpha'_0$ est $\omega'$-homotopie à $\alpha'_1$.

<u>Preuve</u>.

a) $x_0$ étant non dégénéré, il existe $H : (X\ A) \times I \longrightarrow (Y\ B)$ telle que $H(x, 0) = \alpha_1(x)$ et $H(x_0\ t) = \omega(1 - t)$ $\alpha_0(x) = H(x, 1)$.

b) Comme $(X, A ; x_0, x_0)$ a la P E H pour tout espace, en particulier : $(X \times 1 \cup x_0 \times I, A \times 1 \cup x_0 \times I) \subset (X \times 1 \cup x_0 \times I, A \times 1 \cup x_0 \times I)$ s'étend à $r : (X, A) \times I \longrightarrow (X \times 1 \cup x_0 \times I, A \times 1 \cup x_0 \times I)$ qui est une rétraction.

Soit $r_t : (X, A) \longrightarrow (X \times 1 \cup x_0 \times I, A \times 1 \cup x_0 \times I)$ $r_t(x) = r(x, t)$.

Et $G_\tau : (X \times 1 \cup x_0 \times I, A \times 1 \cup x_0 \times I) \longrightarrow (X, A) \times I$

$$G_\tau(x, t) = (x, t\,\tau)$$

$G_0 \circ r_1 \sim G_1 \circ r_0$ rel $x_0$ (par composition d'homotopies).

Si $H : \alpha_0 \sim_\omega \alpha_1$ et $H' : \alpha'_0 \sim_\omega \alpha_1$

$$\alpha_0 = H \circ G_0 \circ r_1 \sim H \circ G_1 \circ r_0 \quad \text{rel } x_0$$

$$\alpha'_0 = H' \circ G_0 \circ r_1 \sim H' \circ G_1 \circ r_0 \quad \text{rel } x_0$$

Mais $H \mid X \times 1 \cup x_0 \times I = H' \mid X \times 1 \cup x_0 \times I$ et

$$H' \circ G_1 \circ r_0 = H \circ G_1 \circ r_0$$

(car $\operatorname{Im} G_1 \circ r_0 \subset X \times 1 \cup x_0 \times I$) donc $\alpha_0 \sim \alpha'_0$ rel $x_0$.

c) Nous savons de b) que $(X \times 0 \cup x_0 \times I, A \times 0 \cup x_0 \times I)$ est un rétract de $(X,A) \times I$.

Donc $(X \times 0 \cup x_0 \times I, A \times 0 \cup x_0 \times I) \times I$ est un rétract de $[(X\ A) \times I] \times I$.

Soit un homéomorphisme

$$h : (I \times I, I \times 0 \cup \partial I \times I) \longrightarrow (I \times I, 0 \times I)$$

[illegible]

Donc on a un homéomorphisme

$$\mathrm{Id} \times h : (X \times I^2, A \times I^2) \longrightarrow (X \times I^2, A \times I^2)$$

$$h(X \times I \times 0 \cup X \times \partial I \times I \cup x_0 \times I^2) = (X \times 0 \times I \cup x_0 \times I^2) .$$

Donc l'inclusion :

$$(X \times \partial I \cup \alpha_0 \times I, A \times \partial I \cup x_0 \times I) \subset (X A) \times I$$

est une cofibration (i.e. on a P E H pour tout espace).

Soient $F, F' : (X \times \partial I \cup x_0 \times I, A \times \partial I \cup x_0 \times I) \longrightarrow (Y B)$

$$\begin{cases} F(x, 0) = \alpha_0(x) \\ F(x, 1) = \alpha_1(x) \\ F(x_0, t) = \omega(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} F'(x, 0) = \alpha'_0 \\ F'(x, 1) = \alpha'_1(x) \\ F'(x_0, t) = \omega'(t) \end{cases}$$

D'après les hypothèses $G : F \sim F'$.

Mais $\alpha_0 \sim_\omega \alpha_1$ donc $F$ s'étend à $H : (X, A) \times I \longrightarrow (Y B)$. On a donc

$$H : (X, A) \times I \longrightarrow (Y B)$$

et $$G : (X \times \partial I \cup x_0 \times I, A \times \partial I \cup x_0 \times I) \times I \longrightarrow (Y B) .$$

D'après la cofibration ci-dessus, l'homotopie $G$ s'étend à $(X, A) \times I^2$ en $G'$

$$H' : (X, A) \times I \longrightarrow (Y B) \qquad H'(x, t) = G'(x, t, 1)$$

$$H' : \alpha'_0 \sim_{\omega'} \alpha'_1 .$$

7.45. <u>Définition</u> ($h_{[\omega]}$) .

Nous savons donc que pour $\alpha_1$ et $\omega$ donnés par 7.44. . Les $\alpha_0 : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y B, \omega(0))$ $\omega$-homotopes à $\alpha_1$ sont toutes dans une classe d'homotopie (a) et b)) et qu'elles sont cette classe toute entière $[\alpha_0]$ qui ne dépend en fait que de $[\alpha_1]$ et $[\omega]$ .

On a donc une application :

$$h_{[\omega]} : [X, A, x_0 ; Y, B, \omega(1)] \longrightarrow [X, A, x_0 ; Y, B, \omega(1)]$$

$$h_{[\omega]}[\alpha_1] = [\alpha_0] \Longleftrightarrow \alpha_0 \sim_\omega \alpha_1$$

De plus d'après 7.42. c) on sait que si $(X A)$ est une suspension, $h_{[\omega]}$ est un homomorphisme.

7.46. Théorème.

Soit une paire $(X\ A)$ à point base non dégénéré $x_o$. Il existe un foncteur covariant $T$ du groupoïde fondamental de $B$, pour tout $(Y, B)$, défini par :

$$T(y_o) = [X, A, x_o ; Y, B, y_o]$$

$$T[\omega] = h_{[\omega]}$$

$T$ est à valeurs dans la catégorie des espaces pointés (et si $(X\ A)$ est une suspension, dans la catégorie des groupes).

Preuve. Il suffit de voir que $h_{[\varepsilon x_o]} = Id_{[X, A\ x_o ; X, A, x_o]}$

et $$h_{[\omega \circ \omega']} = h_{[\omega]} \circ h_{[\omega']}$$

ce qui est évident.

7.47. Corollaire.

Si $(X\ A)$ est à point base non dégénéré $x_o$ et $B$ $Y$ connexe par arcs ;

Alors pour tous $y_o, y_1$ $B$ on a une bijection

$$[X, A, x_o ; Y, B, y_o] \approx [X, A, x_o ; Y, B, y_1] .$$

D'autre part le groupe $\pi_1(B, y_o)$ opère à gauche sur $[X, A, x_o ; Y, B, y_o]$ et la bijection (isomorphisme de groupe si $(X\ A)$ est une suspension) ci-dessus est déterminée à cette opération près.

Preuve. Soit un chemin de $y_o$ à $y_1$

$$h_{[\omega]} : [X, A, x_o ; Y, B, y_o] \approx [X, A, x_o ; Y, B, y_1]$$

(car $h_{[\omega]}\, h_{[\omega^{-1}]} = h_{[\omega^{-1}]}\, h_{[\omega]} = Id$) .

De même si $[\omega] \in \pi_1(B, y_o)$ , on a l'opération

$$h_{[\omega]} : [X, A, x_o ; Y, B, y_o] \longrightarrow [X, A, x_o ; Y, B, y_o] .$$

Enfin on sait que l'ensemble des classes de chamins de $y_o$ à $y_1$ est en bijection avec $\pi_1(B, y_o)$ pour $B$ connexe par arcs.

7.48. Remarque.

En prenant $B = Y$ dans 7.47. on obtient. Si $X$ est à point base non dégénéré $x_o$, et $y_o \in Y$, $\pi_1(Y, y_o)$ opère à gauche sur $[X, x_o ; Y, y_o]$.
Si de plus $Y$ est connexe par arcs et $y_o$, $y_1 \in Y$, alors on a une bijection :

$$[X, x_o ; Y, y_o] \approx [X, x_o ; Y, y_1]$$

déterminée à l'opération de $\pi_1(Y, y_o)$ près.

7.49. Théorème.

Pour tout $X$ et $n \geq 1$, il existe un foncteur covariant $T$ du groupoïde fondamental de $X$ dans la catégorie des groupes

$$T(x) = \pi_n(X, x) \qquad x \in X, \quad \omega : I \longrightarrow X$$

$$T[\omega] = h_{[\omega]} : \pi_n(X, \omega(1)) \longrightarrow \pi_n(X, \omega(0))$$

Ainsi $\pi_1(X, x_o)$ opère à gauche sur $\pi_n(X, x_o)$ (par conjugaison pour $n = 1$).
De plus si $X$ est connexe par arcs et si $x_o$, $x_1 \in X$ alors $\pi_n(X\, x_o)$ et $\pi_n(X, x_1)$ sont isomorphes et l'isomorphisme est déterminé à l'opération de $\pi_1(X, x_o)$ près.

Preuve. $\pi_n(X, x_o) = [S^n(\partial I), S^n(\partial I), 0 ; X, X, x_o]$

On applique donc ce qui précède.

Pour $n = 1$, il reste à voir que : $h_{[\omega]}[\alpha_1] = [\omega][\alpha_1][\omega^{-1}]$. Soit

$\omega : I \longrightarrow X$ $\alpha_o$, $\alpha_1 : I \longrightarrow X$ $\alpha_o \sim_\omega \alpha_1$. On a donc une $\omega$-homotopie :
$H : I \times I \longrightarrow X$ telle que $H|0 \times I = H | 1 \times I = \omega$ ; $H|I \times 0 = \alpha_o$ ;
$H|I \times 1 = \alpha_1$. Comme l'application $\alpha_o\ \omega\ \alpha_1^{-1}\ \omega^{-1}$ définie sur $\partial I^2$ s'étend à $I^2$

$$[\alpha_o][\omega][\alpha_1^{-1}][\omega^{-1}] = [\varepsilon_{x_o}]$$

ou

$$h_{[\omega]}[\alpha_1] = [\alpha_o] = [\omega][\alpha_1][\omega^{-1}]$$

7.50. Théorème.

Pour toute $(X, A)$ et $n \geq 1$, il existe un foncteur covariant $T$ du groupoïde fondamental de $A$ dans lacatégorie des espaces pointés pour $n = 1$, dans la catégorie des groupes pour $n \geq 2$, défini par :

$$T(x) = \pi_n(X, A, x)$$

$$T[\omega] = h_{[\omega]} : \pi_n(X, A, \omega(1)) \longrightarrow \pi_n(X, A, \omega(0))$$

Ainsi $\pi_1(A, x_0)$ opère à gauche sur $\pi_n(X, A, x_0)$. De plus si $A$ est connexe par arcs et $x_0, x_1 \in A$ alors $\pi_n(X, A, x_0)$ et $\pi_n(X, A, x_1)$ sont isomorphes et l'isomorphe est déterminé à l'opération de $\pi_1(A, x_0)$ près.

7.51. Définition (n-simplicité).

a) Un espace connexe par arcs $X$ est n-simple si, pour un $x_0 \in X$ (donc tous les $x_0 \in X$) l'action de $\pi_1(X, x_0)$ est triviale sur $\pi_n(X\ x_0)$.

b) Une paire $(X, A)$ où $A$ est connexe par arcs est n-simple si pour un $x_0 \in A$ (donc tous les $x_0 \in A$), $\pi_1(A, x_0)$ opère trivialement sur $\pi_n(X, A, x_0)$.

7.52. Remarques.

a) Un espace simplement connexe $X$, ou une paire $(X\ A)$ où $A$ est simplement connexe, sont n-simples pour tout n.

b) $X$ est 1-simple ssi $\pi_1(X, x_0)$ est abélien ;

c) D'après 7.42. a) on a pour $n \geq 2$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X\ A\ \omega(1)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_{[\omega]}"'] & \pi_{n-1}(A, \omega(1)) \arrow[d, "h_{[\omega]}"'] \\
\pi_n(X, A, \quad (0)) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(A, \quad (0))
\end{tikzcd}$$

d) Si $X$ est n-simple, alors on a isomorphisme canonique

$\pi_n(X\ x_0) \approx \pi_n(X, x_1)$ $x_0, x_1 \in X$ et $\pi_n(X\ x_0)$ est isomorphe à $[S^n ; X]$.

On notera dans ce cas $\pi_n(X)$ ce groupe.

e) Si $(X, A)$ est n-simple, alors on a isomorphisme canonique

$\pi_n(X, A\ x_0) \approx \pi_n(X, A, x_1)$ $x_0, x_1 \in A$ et $\pi_n(X\ A\ x_0)$ est isomorphe à $[E^n, S^{n-1} ; X, A]$.

On notera dans ce cas $\pi_n(X, A)$ ce groupe.

7.53. Théorème.

Soit

$$f : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$$

$$g : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_1)$$

librement homotopes. Alors il existe un chemin $\omega$ dans $B$ de $y_0$ à $y_1$ tel que pour $n \geq 2$ ($n \geq 1$ si $A = \emptyset$)

$$f_\# = h_{[\omega]} \circ g_\# : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

Preuve. Soit $F : f \sim g$ et $\omega(t) = F(x_0, t)$. Soit $\alpha : (E^n, S^{n-1}, z_0) \longrightarrow (X\ A\ x_0)$. Un représentant de $[\alpha] \in \pi_n(X, A, x_0)$

$$F' : (E^n, S^{n-1}) \times I \xrightarrow{\alpha \times Id} (X, A) \times I \xrightarrow{F} (Y, B)$$

$F'$ est une $\omega$-homotopie de $f \circ \alpha$ à $g \circ \alpha$ et

$$f_\# [\alpha] = [f \circ \alpha] = h_{[\omega]} [g \circ \alpha] = (h_{[\omega]} \circ g_\#) [\alpha] .$$

7.54. Corollaire.

Soit $f : (X\ A) \longrightarrow (Y\ B)$ une équivalence d'homotopie.

Alors pour $x \in A$, $f$ induit des isomorphismes

$$f_\# : \pi_n(X, A, x) \approx \pi_n(Y, B, f(x)).$$

LES CW COMPLEXES (ou COMPLEXES CELLULAIRES).

Nous allons reprendre ici l'étude générale des CW complexes relatifs, qui dans le cas absolu a été introduite au chapitre VI dans le paragraphe : Décomposition cellulaire.

7.55. Lemme.

Si $X$ est obtenu par adjonction de $n$-cellules à $A$ (définition 6.22.), alors $X \times 0 \cup A \times I$ est un rétract de déformation fort de $X \times I$.

Preuve. Pour chaque $e_j^n$ de $X - A$ adjointe par $f_j$ (dite application caractéristique de $e_j^n$)

$$f_j : (E^n, S^{n-1}) \longrightarrow (e_j^n, \dot{e}_j^n) .$$

Soit $D : (E^n \times I) \times I \longrightarrow E^n \times I$ la rétraction de déformation forte de $E^n \times I$ sur $E^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$ (obtenue par projection de pôle $(0, 2)$ de $R^n \times R$).

On définit $D_j : (e_j^n \times I) \times I \longrightarrow (e_j^n \times I)$ par

$$D_j[(f_j(z), t)\ \tau] = (f_j \times Id_I)\ D(z, t, \tau) \qquad z \in E^n\ ;\ t, \tau \in I.$$

Ces applications s'étendent en

$$D' : (X \times I) \times I \longrightarrow (X \times I)$$

telle que $D' \mid (e_j^n \times I) \times I = D_j$ ; $D' \mid (A \times I) \times \{\tau\} = Id_{A \times I}$, $\tau \in I$

car la topologie de $X \times I$ est cohérente avec la famille $\{e_j^n \times I, A \times I\}$ d'après la définition 6.22.

$D'$ est la rétraction de déformation forte de $X \times I$ en $X \times 0 \cup A \times I$.

7.56. Corollaire.

Si $X$ est obtenu par adjonction de n-cellules à $A$. Alors l'inclusion $A \subset X$ est une cofibration.

7.57. Lemme.

Soit $X$ obtenu par adjonction de n-cellules à $A$ et $(Y\ B)$ une paire telle que :

a) Tout point de $Y$ est relié à $B$ par un chemin si $n = 0$.

b) $\pi_n(Y, B, b) = 0$ pour tous $b \in B$, si $n \geq 1$.

Alors toute application $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ est homotope relativement à $A$, à une application $g : X \longrightarrow B$.

Preuve. $n \geq 1$

Soit $f_j$ l'application caractéristique de $e^n$. Soit

$$\varphi_j : (E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{f_j} (X, A) \xrightarrow{f} (Y, B).$$

D'après 7.24. b) $\varphi_j$ est homotope à $\beta_j$ rel $S^{n-1}$ $\quad \beta_j : E^n \longrightarrow B$.

Donc $f \mid e_j^n$ est homotope rel $f_j(S^{n-1})$ à une application

$$g_j : e_j^n \longrightarrow B \qquad H_j : f \mid e_j^n \sim g_j \text{ rel } f_j(S^{n-1})$$

(en composant $\beta_j$ avec $(f_j \mid e_j^n - \mathring{e}_j^n)^{-1}$).

Comme en 7.55. , la cohérence de $X \times I$ avec $\{A \times I, e_j^n \times I\}$ permet de recoller les applications

$$H_j : e_j^n \times I \longrightarrow Y\ ; \quad H : A \times I \longrightarrow Y \quad H(a, t) = f(0)$$

en une homotopie $G : X \times I \longrightarrow Y$

telle que $G(x, 0) = f(x)$ ; $G(x, 1) \in B$ $x \in X$ .

7.58. <u>Définition</u> (CW-complexes relatif).

Un CW complexe relatif consiste en une paire $(X\ A)$ ($A$ fermé dans $X$) et une suite de sous-espaces $(X,A)^k$ appelés k-squelettes de $X$ relativement à $A$, tels que :

a) $(X, A)^o$ est obtenu par adjonction de points (0-cellules) à $A$ (i.e. : $(X, A)^o$ est l'union disjointe de $A$ et des points).

b) Pour $k \geq 1$ $(X, A)^k$ est obtenu par adjonction de k-cellules à $(X, A)^{k-1}$.

c) $X = U(X, A)^k$.

d) $X$ a une topologie cohérente avec la famille $\{(X, A)^k\}$ . On retrouve la notion 5.22. de CW-complexe absolu en prenant le CW-complexe relatif $(X, \emptyset)$.

7.59. <u>Remarques</u>.

a) Nous avons vu en 6.25. que $S^n$, $D^n$, $P^n(\mathbb{R})$, $P^n(\mathbb{C})$, tout complexe simplicial et toute 2-variété étaient des CW-complexes.

b) A une paire simpliciale $(K, L)$ correspond un CW-complexe relatif $(|K|, |L|)$ défini par :

$$(|K|, |L|)^n = |K^n \cup L| ;$$

c) Si $(X, A)$ est un CW-complexe, on a pour $n \in \mathbb{N}$ deux CW-complexes $(X, (X\ A)^n)$ et $((X, A)^n, A)$ définis par :

$$(X, (X,A)^n)^k = \begin{cases} (X\ A)^n & k \leq n \\ (X,A)^k & k > n \end{cases}$$

$$((X, A)^n, A)^k = \begin{cases} (X\ A)^k & k \leq n \\ (X\ A)^n & k > n \end{cases}$$

d) Si $(X\ A)$ est un CW-complexe, $(X, A) \times I$ aussi :

$$((X, A) \times I)^k = ((X, A)^k \times \partial I \cup (X, A)^{k-1} \times I \cup A \times I)$$

e) Si $(X, A)$ est un CW-complexe relatif, $X/_A$ est un CW-complexe et $(X, A)^k/_A = (X/_A)^k$ .

7.60. Définition (sous-complexe).

a) Un sous-complexe $(Y, B)$ du CW-complexe $(X A)$ est un CW-complexe relatif tel que $Y$ soit fermé dans $X$ et

$$(Y, B)^k = Y \cap (X, A)^k \qquad k \in \mathbb{N}$$

b) Si $(Y, B)$ est un sous-complexe de $(X, A)$, alors $(X, A \cup Y)$ est un CW-complexe relatif avec

$$(X, A \cup Y)^k = (X, A)^k \cup Y \qquad k \in \mathbb{N}$$

En particulier si $A$ est un sois-complexe du CW-complexe $X$, $(X, A)$ est un CW-complexe relatif.

c) Une paire CW est une paire $(X, A)$ où $X$ est un CW-complexe et $A$ un sous-complexe.

7.61. Théorème.

Si $(X A)$ est un CW-complexe relatif, alors $A \subset X$ est une cofibration.

Preuve.

D'après 7.56. $(X, A)^{k-1} \subset (X, A)^k$ est une cofibration pour $k \geq 1$. $A \subset (X, A)^o$ aussi bien sûr. Le lecteur montrera facilement que la composée de cofibration est une cofibration.

Donc $A \subset (X A)^n$ est une cofibration pour $n \geq 0$. Mais $X$ a une topologie cohérente avec $\{(X, A)^n\}$ donc $X \times I$ a une topologie cohérente avec $\{(X, A)^n \times I\}$ ce qui signifie que les extensions $(X, A)^n \times I \longrightarrow Y$ obtenues par la propriéte de cofibration de $A \subset (X A)^n$ se recollent en une extension : $X \times I \longrightarrow Y$.

7.62. Théorème.

Si $(X, A)$ est un CW-complexe relatif tel que $\dim(X - A) \leq n$, et $(Y, B)$ n-connexe.

Alors toute application $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ est homotope à une application de $X$ dans $B$, relativement à $A$.

Preuve. D'après 7.26. $\pi_k(Y, B, b) = 0 \quad 1 \leq k \leq n \quad b \in B$ et tout point de $Y$ est relié à un point de $B$.

On peut donc appliquer 7.57. et trouver par induction

$$g_k : (X, A)^k \longrightarrow B \qquad 1 \leq k \leq n$$

telle que $\qquad H_k : f|(X, A)^k \sim g_k \quad \mathrm{rel}(X\ A)^{k-1}$ .

En réutilisant le fait que $X \times I$ a une topologie cohérente avec $\{(X, A)^k \times I\}$ on peut affirmer que les $g_k$, $H_k$ se recollent sur $X \times (X, A)^n$ en

$$g : X \longrightarrow B \ , \quad H : X \times I \longrightarrow Y$$

telles que

$$H : f \sim g \quad \mathrm{rel}\ A$$

7.63. Corollaire.

Si $(X\ A)$ est un CW-complexe et si $(Y\ B)$ est n-connexe pour tout n, alors

$$f(X\ A) \longrightarrow (Y\ B)$$

est homotope à une application de $X$ dans $B$, relativement à $A$.

Preuve. D'après 7.62. et 7.63. , on a des homotopies

$$H_k : (X\ A) \times I \longrightarrow (Y\ B)$$

construites par induction sur $k \in \mathbb{N}$, telles que :

- $H_o(x, 0) = f(x) \qquad x \in X$
- $H_k(x, 1) = H_{k+1}(x, 0) \qquad x \in X$
- $H_k$ est une homotopie relative à $(X, A)^{k-1}$
- $H_k((X\ A)^k \times 1) \subset B$

On construit $\quad H : (X\ A) \times I \longrightarrow (Y\ B)$ par :

$$\begin{cases} H(x, t) = H_{k-1}\left(x, \dfrac{t - (1 - \frac{1}{k})}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}\right) & 1 - \frac{1}{k} \leq t \leq 1 - \frac{1}{k+1}, \quad x \in X \\ H(x, 1) = H_k(x, 1) & x \in (X\ A)^k \end{cases}$$

7.64. Lemme.

Si $X$ est obtenu par adjonction de n-cellules à $A$, pour $n \geq 1$.
Alors $(X\ A)$ est $(n-1)$-connexe.

Preuve.

a) Soit $k \leq n-1$ et $f : (E^k, S^{k-1}) \longrightarrow (X\ A)$ $\quad f(E^k)$ est compact donc ne coupe qu'un nombre fini de n-cellules : $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de $X$-$A$.

Soit $x_i \in e_i - \mathring{e}_i, \ldots, \left\{ Y = A \cup (e_1 - x_1) \cup \ldots \cup (e_m - x_m),\ e_i - \mathring{e}_i \right\}$ est un recouvrement ouvert de $f(E^k)$.

Comme maille $Sd^n K \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0$ pour tout complexe simplicial $K$, il existe une triangulation $K$ de $E^k$ telle que si $s \in K$, alors $|S| \subset Y$ ou $|S| \subset e_i - \mathring{e}_i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Soit

$$A' = \{ s \in K \mid |S| \subset Y \}$$
$$B_i = \{ s \in K \mid |S| \subset e_i - \mathring{e}_i \}$$

$S^{k-1} \subset A'$ et $E^k = A' \quad B_1 \cup \ldots \cup B_m$.

De plus si $\mathring{B}_i = B_i \cap A' \quad B_i - \mathring{B}_i \cap B_j - \mathring{B}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Il est clair que $(B_i, \mathring{B}_i)$ est un CW-complexe relatif de dimension au plus $k$ puisque c'est une paire simpliciale.

b) $(e_i - \mathring{e}_i, e_i - \mathring{e}_i - x_i)$ a le type d'homotopie de $(E^n, S^{n-1})$ qui est $(n-1)$ connexe d'après 7.29.

D'après 7.62., $f \mid (B_i, \mathring{B}_i)$ est homotope par $H_i$

$$g_i : B_i \longrightarrow e_i - \mathring{e}_i - x_i \quad \text{relativement à } \mathring{B}_i .$$

Ces applications $H_i$ sont donc définies sur une famille finie de fermés $\{B_i \times I\}$ et coïncident sur leurs intersections (car toutes sont alors égales à $f$), donc se recollent en

$$H' : E^k \times I \longrightarrow X$$

telle que $H' \mid E^k \times 1 = f'$ et $H' : f \sim f'$ rel $A'$.

Or $A$ est un rétract de déformation fort de $Y$, donc

$$f' \sim f'' \text{ rel } S^{k-1} \quad \text{où} \quad f'' : E^k \longrightarrow A .$$

Et finalement $\qquad f \sim f'' \text{ rel } S^{k-1}$

ce qui prouve d'après la définition que $(X\ A)$ est $(h-1)$-connexe.

7.65. <u>Corollaire.</u>

Si $(X\ A)$ est un CW-complexe, alors pour tout $n \geq 0$ $(X, (XA)^n)$ est n-connexe

<u>Preuve.</u>

a) $((X, A)^{n+1}, (X\ A)^n)$ est n-connexe d'après 7.64.

b) Supposons que $((X\ A)^{m-1}, (X\ A)^n)$ soit n-connexe pour $n < m-1$

$((X\ A)^m, (X\ A)^{m-1})$ est $(m-1)$-connexe donc n-connexe. D'après la suite exacte

(7.40 b)) du triple

$$((X, A)^m, (X A)^{m-1}, (X A)^n)$$

on voit que $((X A)^m, (X A)^n)$ est n-connexe d'après 7.26..

c) $(X, (X A)^n)$ estn-connexe car pour $0 \leq k \leq n$ et

$$f : (E^k, S^{k-1}) \longrightarrow (X, (X A)^n)$$

$f(E^k)$ étant compact, il existe m n tel que $f(E^k) \subset (X A)^m$ . Donc d'après b)

$$f \sim g \text{ rel } S^{k-1} \qquad g : E^k \longrightarrow (X A)^n$$

7.66. <u>Définition</u> (<u>application cellulaire</u>).

Soient $(X A)$ et $(X' A')$ deux CW-complexes

a) $f : (X A) \longrightarrow (X' A')$ est cellulaire si

$$f[(X A)^k] \subset (X' A')^k \qquad k \in \mathbb{N}$$

b) Une homotopie $F : (X A) \times I \longrightarrow (X' A')$ est cellulaire

$$F[(X A)^k \times I] \subset (X' A')^k \qquad k \in \mathbb{N}.$$

7.67. <u>Théorème</u>.

Soit $f : (X A) \longrightarrow (X' A')$, application entre CW-complexes, telle que f soit cellulaire sur le sous-complexe $(Y, B)$ de $(X A)$.

Alors il existe $g : (X A) \longrightarrow (X' A')$ cellulaire telle que $f \sim g$ rel Y.

<u>Preuve</u>. $(X', (X' A')^k)$ est k-connexe (7.65.)

et $f \mid (Y B)^k : (Y B)^k \longrightarrow (X' A')^k$ .

Alors $f : ((X A)^1, A \cup Y) \longrightarrow (X', (X' A')^1)$

(d'après 7.60 b) $((X A)^k, A \cup Y)$ est un CW-complexe) est homotope à

$$g_1 : (X A)^1 \longrightarrow (X' A')^1 \text{ rel } A \cup Y \qquad \text{d'après 7.62.}$$

Et par induction

$$f : ((X A)^k, (X A)^{k-1} \cup Y) \longrightarrow (X', (X' A')^k)$$

est homotope d'après 7.62. à $g_k : (X A)^k \longrightarrow (X' A')^k$ rel $(X A)^{k-1} \cup Y$ .

On a donc une suite d'homotopies :

$$H_k : (X A) \times I \longrightarrow (X' A') \qquad \text{telles que}$$

- $H_o(x, 0) = f(x) \qquad x \in X$
- $H_k(x\ 1) = H_{k+1}(x, 0) \qquad x \in X$
- $H_k$ est une homotopie relative à $(X A)^{k-1} \cup Y$

$$H_k((X\ A)^k \times 1) \subset (X'\ A')^k .$$

Alors on peut définir une homotopie H répondant à l'énoncé par

$$H : (X\ A) \times I \longrightarrow (X'\ A')$$

$$\begin{cases} H(x,\ t) = H_{k-1}\left(x,\ \dfrac{t-(1-\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}\right) & 1-\frac{1}{k} \leq t \leq 1-\frac{1}{k+1} \\ H(x,\ 1) = H_k(x,\ 1) & x \in (X\ A)^k \end{cases}$$

$$H : f \sim g \quad \text{rel } Y .$$

7.68. Corollaire.

a) Toute application entre CW-complexes est homotope à une application cellulaire.

b) Si deux applications cellulaires entre CW-complexes sont homotopes, il existe une homotopie cellulaire entre elles.

7.69. Définition (n-équivalence).

a) $f : X \longrightarrow Y$ est une n-équivalence pour $n \geq 1$ si $f$ induit une correspondance bijective entre les composantes connexes par arcs de $X$ et $Y$ et si pour $x \in X$

pour $0 < q < n$ $\quad f_{\#} : \pi_q(X,\ x) \approx \pi_q(Y,\ f(x))$

pour $n$ $\quad f_{\#} : \pi_n(X\ x) \longrightarrow \pi_n(Y,\ f(x))$ est surjectif.

b) $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie faible (ou $\infty$-équivalence) si elle est une n-équivalence pour tout $n \geq 1$.

7.70. Proposition.

a) La composée de n-équivalences est une n-équivalence.

b) Toute application homotope à une n-équivalence est une n-équivalence.

c) Une équivalence d'homotopie est une équivalence d'homotopie faible.

7.71. Proposition.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $Z_f$ son cylindre d'application.

Alors $f$ (ou $i : X \subset Z_f$) est une n-équivalence ssi $(Z_f,\ X)$ est n-connexe.

Preuve. Nous savons que $f = X \xrightarrow{i} Z_f \xrightarrow{r} Y$ où $r$ est une équivalence d'homotopie. Donc $f$ est une n-équivalence ssi $i$ en est une.

D'après 7.26. et la suite d'homotopie de $(Z_f, X)$ on obtient le résultat.

7.72. Théorème.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une n-équivalence (n fini ou infini) et $(P, Q)$ un CW-complexe relatif tel que $\dim(P - Q) \leq n$.

Alors pour toutes
$$g : Q \longrightarrow X$$
$$h : P \longrightarrow Y$$
telles que $f \circ g = h \mid Q$, il existe un prolongement de $g$ :
$$g' : P \longrightarrow X$$
tel que
$$f \circ g' \sim h \text{ rel } Q.$$

Preuve. $i : X \subset Z_f$ $j : Y \subset Z_f$ $r : Z_f \longrightarrow Y$.

D'après 7.71. il suffit de supposer que $i$ est une n-équivalence

$f \circ g = r \circ i \circ g = r \circ j \circ h \mid Q$ (car $r \circ i = f$ ; $r \circ j = Id_Y$).

Comme $r$ est une équivalence d'homotopie
$$i \circ g \sim j \circ h|Q.$$

D'après 7.61., il existe $h' : P \longrightarrow Z_f$ telle que
$$h'|Q = i \circ g \text{ et } r \circ h' \sim r \circ j \circ h \text{ rel } Q.$$

D'après 7.62. et 7.71. $h' : (P\ Q) \longrightarrow (Z_f, X)$ est homotope à
$$g' : P \longrightarrow X, \text{ relativement à } Q.$$

On a donc $g' \mid Q = g$ et $f \circ g' = r \circ i \circ g' \sim r \circ h' \sim r \circ j \circ h = h$ rel $Q$.

7.73. Corollaire.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une n-équivalence (n fini ou infini).

Alors si $P$ est un CW-complexe
$$f_{\#} : [P \ ; X] \longrightarrow [P \ ; Y]$$

a) si $\dim P \leq n$ $\quad f_{\#}$ est surjective

si $\dim P \leq n-1$ $\quad f_{\#}$ est injective.

Preuve.

a) Suit 7.72.

b) $(P \times I, P \times \partial I)$ est un CW-complexe auquel on applique 7.72.

Soit $g_o, g_1 : P \longrightarrow X$ telles que $H : f \circ g_o \sim f \circ g_1$.

Soit $g : P \times \partial I \longrightarrow X$ telle que $g \mid P \times 0 = g_o$, $g \mid P \times 1 = g_1$

$H : P \times I \longrightarrow Y$ est telle que $H \mid P \times \partial I = g$.

Il existe donc d'après 7.72. une extension $G$ de $g$ $G : P \times I \longrightarrow Y$

$G$ réalise une homotopie de $g_o$ à $g_1$.

7.74. <u>Corollaire.</u>

Une application entre CW-complexes est une équivalence d'homotopie ssi elle est une équivalence d'homotopie faible.

<u>Preuve.</u>

Soit $f : X \longrightarrow Y$ $\infty$-équivalence entre CW-complexes. D'après 7.73. , $f$ induit des bijections

$$f_{\#}[Y ; X] \longrightarrow [Y ; Y] \qquad f_{\#} : [X, X] \longrightarrow [X, Y] \quad .$$

Soit $g : Y \longrightarrow X$ telle que $f_{\#}[g] = [Id_Y]$

i.e. $f \circ g \sim Id_Y$

$$f_{\#}[g \circ f] = [f \circ g \circ f] = [Id_Y \circ f] = [f \circ Id_X] = f_{\#}[Id_X]$$

i.e. $g \circ f \sim Id_X$.

Donc $f$ est une équivalence d'homotopie. La réciproque suit 7.70 c).

<u>L'HOMOMORPHISME de HUREWICZ.</u>

7.75. <u>Définitions.</u>

a) $I_1^n = \{(t_1 \ldots t_n) \in I^n \mid t_n \leq \frac{1}{2}\}$

$I_2^n = \{(t_1 \ldots t_n) \in I^n \mid t_n \geq \frac{1}{2}\}$

b) $i_1 : (I_1^n, \partial I_1^n) \subset (I^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n)$

$i_2 : (I_2^n, \partial I_2^n) \subset (I^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n)$

c) $\nu_1 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (I_1^n, \partial I_1^n)$ $\qquad \nu_1(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, \frac{t_n}{2})$

$\nu_2 : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (I_2^n, \partial I_2^n)$ $\qquad \nu_2(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, \frac{1+t_n}{2})$

d) $i : (I^n, \partial I^n) \subset (I^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n)$ .

7.76. <u>Lemme</u>.

$$i_{1*} \oplus i_{2*} : H_q(I_1^n, \partial I_1^n) \oplus H_q(I_2^n, \partial I_2^n) \approx H_q(I^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n) .$$

<u>Preuve</u>. Par excision, on a

$$H_q(I_1^n, \partial I_1^n) \approx H_q(I_1^n \cup \partial I_2^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n)$$
$$H_q(I_2^n, \partial I_2^n) \approx H_q(\partial I_1^n \cup I_2^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n)$$

et ces deux isomorphismes sont induits par inclusions.

En combinant 5.79., 5.80., 5.82., on voit que :

$(I_1^n \cup \partial I_2^n, \; \partial I_1^n \cup I_2^n)$ est un couple excisif.

et comme

$$(I_1^n \cup \partial I_2^n) \cup (\partial I_1^n \cup I_2^n) = I^n$$
$$(I_1^n \cup \partial I_2^n) \cap (\partial I_1^n \cup I_2^n) = \partial I_1^n \cup \partial I_2^n ,$$

dans la suite de Mayer-Victoris des paires excisives :

$$(I_1^n \cup \partial I_2^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n ; \partial I_1^n \cup I_2^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n)$$

un terme sur trois est nul, et la suite est scindable. Donc

$$H_q(I_1^n \cup \partial I_2^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n) \oplus H_q(\partial I_1^n \cup I_2^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n) \approx H_q(I^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n).$$

Où l'isomorphisme est celui qui aux cycles $(z_1, z_2)$ associe la somme des cycles dans $H_q(I^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n)$.

En combinant les trois isomorphismes, on obtient le lemme :

7.77. <u>Corollaire</u>.

Pour $z \in H_n(I^n, \partial I^n)$ $\quad i_* z = i_{1*} \nu_{1*} z + i_{2*} \nu_{2*} z$ .

<u>Preuve</u>.

a) Soient
$$j_1 : (I^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n) \subset (I^n, I_1^n \cup \partial I_2^n)$$
$$j_2 : (I^n, \partial I_I^n \cup \partial I_2^n) \subset (I^n, \partial I_1^n \cup I_2^n)$$

Alors

$$j_{1*} i_{1*} = (j_1 \circ i_1)_* = 0 \quad \text{car} \quad j_1 i_1 : (I_1^n, \partial I_1^n) \subset (I^n, I_1^n \cup \partial I_2^n)$$

et $\quad j_{2*} i_{2*} = (j_2 \circ i_2)_* = 0$

$$j_{1*}\, i_{2*} : H_q(I^n_2, \partial I^n_2) \approx H_q(I^n, I^n_1 \cup \partial I^n_2)$$
$$j_{2*}\, i_{1*} : H_q(I^n_1, \partial I^n_1) \approx H_q(I^n, \partial I^n_1 \cup I^n_2)$$

car $j_1\, i_2 : (I^n_2, \partial I^n_2) \subset (I^n, I^n_1 \cup \partial I^n_2)$ réalise une excision.

b) D'après 7.76., $z \in H_q(I^n, \partial I^n_1 \cup \partial I^n_2)$ s'écrit

$$z = i_{1*}\, z_1 + i_{2*}\, z_2 \; .$$

Ceci démontre que $\operatorname{Ker} j_{1*} \cap \operatorname{Ker} j_{2*} = 0$ car si

$$j_{1*} z = j_{1*}\, i_{1*}\, z_1 + j_{1*}\, i_{2*}\, z_2 = 0 \; ,$$

il suit a) que $z_2 = 0$ et si $j_{2*}\, z = 0$, $z_1 = 0$.

Le corollaire sera prouvé si

$$i_* z - i_{1*}\, \nu_{1*}\, z - i_{2*}\, \nu_{2*}\, z \in \operatorname{Ker} j_{1*} \cap \operatorname{Ker} j_{2*} \; .$$

c) Par symétrie il ne reste à montrer que :

$$j_{1*}(i_1 z - i_{1*}\, \nu_{1*}\, z - i_{2*}\, \nu_{2*}\, z) = j_{1*} i_* z - j_{1*}\, i_{2*}\, \nu_{2*}\, z = 0 \; .$$

Mais
$$j_1 \circ i : (I^n, \partial I^n) \subset (I^n, I^n_1 \cup \partial I^n_2)$$

et
$$j_1\, i_2\, \nu_2 = f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (I^n, I^n_1 \cup \partial I^n_2)$$
$$f(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, \frac{1+t_n}{2}) \; .$$

On a donc
$$H : j_1 \circ i \sim f$$
$$H[(t_1, \ldots, t_n)\; t] = (t_1, \ldots, t_{n-1}, \frac{t+t_n}{1+t})$$

et
$$j_{1*}\, i_* = f_* = j_{1*}\, i_{2*}\, \nu_{2*} .$$

7.78. Lemme. On a des isomorphismes, pour tout $q$ :

a) pour $n \geq 1$ $\quad \partial : H_q(I^n, \partial I^n) \approx H_{q-1}(\partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$

b) pour $n \geq 2$ $\quad j_* : H_q(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \approx H_q(\partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$

Preuve.

a) $n \geq 1$ $\quad I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}$ est contractile, donc

$$H_q(I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}) = 0.$$

Dans la suite exacte d'homologie du triple

$$(I^n, \partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$$

un terme sur trois est nul, donc on a :

$$\partial : H_q(I^n, \partial I^n) \approx H_{q-1}( \partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n}-1.$$

b) $n \geq 2$.

Soit $j : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (\partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$

$j(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (1, t_1, \ldots, t_{n-1})$.

On obtient $j$ par composition

$$j : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (1 \times I^{n-1}, 1 \times \partial I^{n-1}) \hookrightarrow (\partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})$$

où la première flèche est un homéomorphisme et la seconde, une application excisive.

Donc :

$$j_* : H_q(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \approx H_q(\partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}).$$

7.79. Définition ($Z_n$)

On définit par induction des générateurs canoniques $Z_n \in H_n(I^n, \partial I^n)$ par :

a) $Z_1 \in H_1(I, \partial I)$ est l'unique élément tel que

$$\partial Z_1 = (1) - (0) \in H_0(\partial I)$$

b) pour $n \geq 2$ $Z_n$ est l'unique élément tel que

$$\partial Z_n = j_* Z_{n-1} \in H_{n-1}(\partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}).$$

7.80. Définition ($\varphi$).

a) Soit $\alpha : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, A)$

$\alpha_*(Z_n) \in H_n(X\ A)$ et si $\alpha \sim \beta$ $\alpha_*(Z_n) = \beta_*(Z_n)$.

On a donc une application pour $n \geq 1$

$$\varphi : \pi_n(X\ A, x_0) \longrightarrow H_n(X\ A)$$

définie par $\varphi[\alpha] = \alpha_*(Z_n)$.

b) En prenant $A = \{x_0\}$, par identification, on définit de même

$$\varphi : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X, x_0).$$

7.81. Théorème.

Si $n \geq 2$ (ou $n \geq 1$ si $A = \{x_0\}$), $\varphi$ est un homomorphisme

$$\varphi : \pi_n(X\ A\ x_0) \longrightarrow H_n(X\ A)$$

qui possède les propriétés suivantes :

pour $f : (X\ A\ x_0) \longrightarrow (Y\ B\ y_0)$, et $\partial$ défini en homologie et homotopie, on a les diagrammes commutatifs :

a)
$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, A, x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi_{n-1}(A\ x_0) \arrow[d, "\varphi"] \\ H_n(X\ A) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(A, x_0) \end{tikzcd}$$
b)
$$\begin{tikzcd} \pi_n(X\ A\ x_0) \arrow[r, "f_\#"] \arrow[d, "\varphi"'] & \pi_n(Y, B, y_0) \arrow[d, "\varphi"] \\ H_n(X\ A) \arrow[r, "f_*"] & H_n(Y\ B) \end{tikzcd}$$

Preuve.

Soient $\alpha_1, \alpha_2 : (I^n, \partial I^n, 0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ quitte à remplacer $\alpha_2$ par $\alpha_1 \bullet \alpha_2 \bullet \alpha_1^{-1}$, on peut supposer

$$\alpha_1(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1) = \alpha_2(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0) .$$

Alors $\alpha_1 \bullet \alpha_2 = \beta \circ i$ où $i = (I^n, \partial I^n) \subset (I^n, \partial I_1^n \cup \partial I_2^n)$

et
$$\beta(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} \alpha_1(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n) & t_n \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_{n-1}) & t_n \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\varphi[\alpha_1 \bullet \alpha_2] = \beta_* i_*(Z_n) = \beta_*(i_{1*} \nu_{1*} Z_n + i_{2*} \nu_{2*} Z_n)$$

d'après 7.77.

Or $\beta i_1 \nu_1 = \alpha_1 \quad \beta i_2 \nu_2 = \alpha_2$ ; donc

$$\varphi[\alpha_1 \bullet \alpha_2] = \varphi[\alpha_1] + \varphi[\alpha_2]$$

donc $\varphi$ est un homomorphisme chaque fois que $\pi_n(X\ A\ x_0)$ est un groupe.

a) Soit $\alpha : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X\ A)$ tel que

$$\alpha(I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}) = x_0$$

Alors $\partial[\alpha] = [\alpha']$ où $\alpha' : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \longrightarrow (A\ x_0)$

$$\alpha' = \alpha|(\partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}) \circ j$$

$$\begin{aligned} \varphi\partial[\alpha] = \alpha'_*(Z_{n-1}) &= (\alpha \mid \partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1})_* j_* Z_{n-1} \\ &= (\alpha \mid (\partial I^n, I \times \partial I^{n-1} \cup 0 \times I^{n-1}))_* \partial Z_n \\ &= \partial \alpha_* Z_n = \partial\varphi[\alpha] . \end{aligned}$$

b) Il suit l'égalité $(f\alpha)_* = f_* \alpha_*$.

Définition. $\varphi$ est appelé homomorphisme de Hurewicz.

7.82. Corollaire. L'homomorphisme de Hurewicz transforme la suite d'homotopie de $(X, A, x_0)$ en la suite d'homologie de $(X, A, x_0)$.

7.83. Lemme. Soient $[\alpha] \in \pi_n(X\ A\ x_0)$ pour $n \geq 2$ et $[\omega] \in \pi_1(A\ x_0)$.

Alors
$$\varphi[h_{[\omega]}[\alpha]] = \varphi[\alpha] .$$

Preuve. Soit $\alpha : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X\ A)$ et $\alpha'$ un représentant de $h_{[\omega]}[\alpha]$

$$\alpha' : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X\ A)$$

$\alpha$ et $\alpha'$ sont librement homotopes, donc

$$\varphi[\alpha] = \alpha_*(Z_n) = \alpha'_*(Z_n) = \varphi(h_{[\omega]}[\alpha]) .$$

7.84. Lemme. Soient $[\alpha] \in \pi_n(X\ x_o)$ et $[\omega] \in \pi_1(X, x_o)$ .

Alors
$$\varphi(h_{[\omega]}[\alpha]) = \varphi[\alpha] .$$

Preuve : On peut représenter $[\alpha]$ par

$$\alpha : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_o)$$

ou
$$\alpha : (I^n/_{\partial I^n}, 0) \longrightarrow (X, x_o)$$

Soit
$$g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (I^n/_{\partial I^n}, 0)$$

$\mathring{g}$ induit une bijection $g_\# : [I^n, \partial I^n ; X, x_o)] \longrightarrow [I^n/_{\partial I^n}, 0 ; X, x_o]$ .

Donc
$$\pi_n(X\ x_o) = [I^n/_{\partial I^n}, 0 ; X, x_o] .$$

Nous démontrerons en 7.86. que

$$g_* : H_n(I^n, \partial I^n) \quad H_n(I^n/_{\partial I^n}, 0)$$

Soit $Z'_n = g_*(Z_n)$ .

Donc pour $\alpha : (I^n/_{\partial I^n}, 0) \longrightarrow (X, x_o)$

$$\varphi[\alpha] = \alpha_*(Z'_n) .$$

Si $\alpha' : (I^n/_{\partial I^n}, 0) \longrightarrow (X\ x_o)$ représente $h_{[\omega]}[\alpha]$, alors $\alpha$ et $\alpha'$ sont librement homotopes.

Sous identification $\tilde{H}_n(I^n/_{\partial I^n}) = H_n(I^n/_{\partial I^n}, 0)$ et

$$H_n(X, x_o) = \tilde{H}_n(X)$$
$$\alpha_*(Z'_n) = \alpha'_*(Z'_n)$$

donc
$$\varphi(h_{[\omega]}[\alpha]) = \varphi[\alpha] .$$

7.85. Lemme.

Soit $(X, U, A)$ un triple tel que $U$ soit ouvert, $A$ fermé dans $X$, et tel que $A$ soit rétract de déformation fort de $U$ et $f : A \longrightarrow Y$.

Soit $Z = X \cup_f Y$ et $\bar{f} : X \hookrightarrow Z$ .

Alors $\bar{f}_* : H(X, A) \approx H(Z, Y)$.

Preuve.

D'après les suites exactes d'homotopie des triples $(X, U, A)$ et $(Z, Y \cup \bar{f}(U), Y)$, les inclusions induisent :

$$i_* : H_q(X A) \approx H_q(X, U)$$

$$j_* : H_q(Z Y) \approx H_q(Z, Y \cup \bar{f}(U)) .$$

D'autre part $\bar{f} : (X, U) \longrightarrow (Z, Y \cup \bar{f}(U))$

est clairement excisice donc $\bar{f}_* : H_q(X U) \approx H_q(Z, Y \cup \bar{f}(U))$ .

Le résultat est donc inscrit dans le diagramme commutatif d'isomorphismes suivant :

$$\begin{tikzcd} H_q(X A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\bar{f}_*"'] & H_q(X U) \arrow[d, "\bar{f}_*"] \\ H_q(Z Y) \arrow[r, "j_*"] & H_q(Z, Y \cup \bar{f}(U)) \end{tikzcd}$$

7.86. Corollaire.

Soit une paire $(X A)$ . S'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $A \subset U$ soit un rétract de déformation fort de $U$ ,

alors $H(X, A) \approx \tilde{H}(X/A)$ .

Preuve. On prend $Y = \{x_o\}$ , $f = Cx_o : A \longrightarrow \{x_o\}$ et on applique 7.85.

$$Z = X/_A$$

donc $H(X A) \approx H(X/_A , x_o) \approx \tilde{H}(X/_A)$ .

7.87. Définition.

a) On appelle abélianisé d'un groupe $G$, le quotient $G/_H$ où $H$ est le sous-groupe normal engendré par les commutateurs $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ $g_1, g_2 \in G$.

b) Soit $\pi'_n(X A x_o)$ l'abélianisé de $\pi_n(X A x_o)$ $n \geq 2$

$$\pi'_n(X A x_o) = \pi_n(X A x_o) \quad n \geq 3$$

$\varphi$ étant un homomorphisme à valeurs dans un groupe abélien passe au quotient par l'abélianisé

$$\varphi' : \pi'_n(X\ A\ x_o) \longrightarrow H_n(X\ A).$$

c) De même soit $\pi'_n(X\ x_o)$ l'abélianisé de $\pi_n(X\ x_o)$ $n \geq 1$

$$\pi'_n(X, x_o) = \pi_n(X\ x_o) \qquad n \geq 2.$$

Et on a comme ci-dessus

$$\varphi' : \pi'_n(X\ x_o) \longrightarrow H_n(X\ x_o) .$$

Il me semble que pour une première étude, le lecteur pourra admettre le très important théorème de Hurewicz dont la démonstration est assez longue :

7.88. <u>Théorème</u> (de Hurewicz).

Soit $x_o \in A \subset X$, où $X$ et $A$ sont connexes par arcs.

a) S'il existe $n \geq 2$ tel que $\pi_q(X, A, x_o) = 0$ pour $q < n$ alors $H_q(X\ A) = 0$ pour $q < n$ et $\varphi'$ est un isomorphisme

$$\varphi' : \pi'_n(X\ A\ x_o) \approx H_n(X\ A)$$

b) Si $A$ et $X$ sont simplement connexes et s'il existe $n \geq 2$ tel que $H_q(X\ A) = 0$ pour $q < n$, alors $\pi_q(X\ A\ x_o) = 0$ pour $q < n$ et $\varphi$ est un isomorphisme

$$\varphi : \pi_n(X\ A\ x_o) \approx H_n(X\ A).$$

7.89. <u>Théorème</u> (de Hurewicz).

Soit $x_o \in X$ où $X$ est connexe par arcs

a) S'il existe $n \geq 1$ tel que $\pi_q(X, x_o) = 0$ pour $q < n$ alors $H_q(X, x_o) = 0$ pour $q < n$ et $\varphi'$ est un isomorphisme :

$$\varphi' : \pi'_n(X\ x_o) \approx H_n(X, x_o)$$

b) Si $X$ est simplement connexe et s'il existe $n \geq 2$ tel que $H_q(X, x_o) = 0$ pour $q < n$ alors $\pi_q(X, x_o) = 0$ pour $q < n$ et $\varphi$ est un isomorphisme

$$\varphi : \pi_n(X\ x_o) \approx H_n(X, x_o)$$

<u>Remarque</u>. Ceci signifie donc que si $X$ et $A$ sont simplement connexes, alors le premier groupe d'homotopie non nul de $(X\ A)$ ou $(X, x_o)$ est isomorphe au premier groupe d'homologie non nul de $(X, A)$ ou $(X, x_o)$.

7.90. <u>Corollaire.</u> Pour $n \geq 1$, on a le diagramme commutatif d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(E^{n+1}, S^n, p_o) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(S^n, p_o) \\ \varphi \downarrow & & \varphi \downarrow \\ H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\partial} & H_n(S^n, p_o) \end{array}$$

7.91. <u>Théorème</u> <u>(du degré de Brouwer)</u>.

a) $f, g : S^n \longrightarrow S^n$ $n \geq 1$ sont homotopes ssi

$$f_* = g_* ; H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$$

b) $f, g : (E^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E^{n+1}, S^n)$ $n \geq 1$ sont homotopes ssi

$$f_* = g_* : H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) \longrightarrow H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) .$$

<u>Preuve.</u>

a) $S^n$ étant connexe par arcs, $f$ (et $g$) sont homotopes à $f'$ (et $g'$) telles que $$f'(p_o) = g'(p_o) = p_o$$
$S^n$ est n-simple, $f'$ et $g'$ sont librement homotopes ssi elles sont homotopes sur les espaces pointés :

$$f', g' : (S^n, p_o) \longrightarrow (S^n, p_o)$$

donc $f \sim g$ ssi $[f'] = [g'] \in \pi_n(S^n, p_o)$ ou d'après 7.89. ssi

$$\varphi[f'] = \varphi[g']$$

ou par définition de $\varphi$ ssi $f'_* = g'_* : H_n(S^n, p_o) \longrightarrow H_n(S^n, p_o)$

ou encore, par identification ssi $f_* = g_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ .

b) Comme $E^{n+1}$ est contractile

$$\partial : \pi_{n+1}(E^{n+1}, S^n, p_o) \approx \pi_n(S^n, p_o)$$

et comme $(E^{n+1}, S^n)$ est n-simple

$$f, g : (E^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E^{n+1}, S^n) \quad \text{sont homotopes ssi}$$

$$f|S^n, g|S^n : S^n \longrightarrow S^n \quad \text{sont homotopes.}$$

Grâce à 7.90., on est donc réduit au cas a).

7.92. <u>Corollaire.</u> Soit $x_o \in X$ .

L'application $\psi : [S^n, p_o ; X, x_o] \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_n(S^n, p_o), \pi_n(X, x_o))$ définie par $\psi[\alpha] - \alpha_{\#}$ est un isomorphisme.

7.93. <u>Théorème</u> (<u>de Whitehead</u>).

Soient $(X, x_o)$ , $(Y, y_o)$ connexes par arcs et $f : (X, x_o) \longrightarrow (Y, y_o)$.

a) S'il existe $n \geq 1$ tel que

$$f_{\#} : \pi_q(X\ x_o) \longrightarrow \pi_q(Y, y_o)$$

soit un isomorphisme pour $q < n$ et un épimorphisme pour $q = n$.

Il en est de même de

$$f_* : H_q(X, x_o) \longrightarrow H_q(Y, y_o) .$$

b) Si $X$ et $Y$ sont simplement connexes, et si $f_*$ est un isomorphisme pour $q < n$ et un épimorphisme pour $q = n$, il en est de même de $f_{\#}$.

<u>Preuve</u>.

a) Soit $Z$ le cylindre d'application de $f$

$$i : X \subset Z , \quad j : Y \subset Z , \quad r : Z \longrightarrow Y \quad f = r \circ i$$

$r$ est une équivalence d'homotopie donc :

$$r_{\#} : \pi_q(Z, y_o) \approx \pi_q(Y, y_o)$$

$$r_* : H_q(Z, y_o) \approx H_q(Y, y_o)$$

Mais $X$ et $Y$ sont connexes par arcs, donc $Z$ aussi et

$$\pi_q(Z, x_o) \approx \pi_q(Z, y_o)$$

Donc $r$ induit :

$$r_{\#} : \pi_q(Z, x_o) \approx \pi_q(Y, y_o)$$

$$r_* : H_q(Z, x_o) \approx H_q(Y, y_o) .$$

On peut donc remplacer $(Y, y_o)$ par $(Z, x_o)$ et $f$ par $i$ dans le théorème.

b) D'après les suites d'homotopie et d'homologie de $(Z, X, x_o)$

$i_{\#}$ est bijectif pour $q < n$ et surjectif pour $q = n$ ssi

$$\pi_q(Z, X, x_o) = 0 \quad \text{pour} \quad q \leq n.$$

$i_*$ est bijectif pour $q < n$ et surjectif pour $q = n$ ssi

$$H_q(Z, X) = 0 \quad \text{pour} \quad q \leq n.$$

Le résultat suit donc le théorème d'Hurewicz 7.88..

7.94. Corollaire.

Une équivalence d'homotopie faible induit des isomorphismes sur les groupes d'homologie singulière. Réciproquement une application entre espaces simplement connexes qui induit des isomorphismes sur les groupes d'homologie singulière est une équivalence d'homotopie faible.

Les quelques pages qui suivent complètent le cours de $C_3$ donné par H. ROSENBERG en 1968-1969.

On y trouvera rassemblés :

- un catalogue des résultats de base de topologie générale supposés connus pour l'étude de ce cours.

- la définition d'une fibration et d'un fibré ainsi que le très beau théorème de Dold qui relie ces notions.

- L'étude des groupes supérieurs d'homotopie et l'énoncé du théorème de Hurewicz.

Cette rédaction n'a pas la prétention d'être très originiale et on y trouvera de nombreuses parties copiées dans des ouvrages classiques de topologie, en particulier le livre "Algebraic topology" de Spanier.

Le but que je me suis proposé est d'offrir à des étudiants une connaissance de base en topologie algèbriques ni trop copieuse, ni trop sévère , digestible et dans leur langue.

B. Bettinelli

TABLE GENERALE DES MATIERES

-::-::-



.../...

-::-::-::-