UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 105 74-22

DEPLOIEMENT (UNI)-VERSEL DES FONCTIONS G-INVARIANTES

par

V. POENARU

INTRODUCTION

On va considérer un groupe de Lie compact, G, opérant orthogonalement sur R^n. On va désigner par X le germe de R^n $(\ni x)$ à l'origine, par $C^\infty(R^n)^G$ l'algèbre des fonctions C^∞, réelles, G-invariantes, sur R^n, et par $C^\infty(x)^G$ l'algèbre locale des germes de fonctions C^∞, G-invariantes, sur X.

On va considérer des "espaces de paramètres" $U, V, \ldots$ qui seront les germes de R^p, R^q, ... en 0. On va faire agir G trivialement sur les paramètres $U \ni u$, $V \ni v, \ldots$.

Dans ces conditions, si

$$f(x) \in C^\infty(x)^G$$

est donné, un

$$F(x,u) \in C^\infty(x,u)^G$$

tel que $F(x,0) \equiv f(x)$ est, par définition, un déploiement de f.

Le déploiement $F(x,u)$ de $f(x)$ est, par définition, VERSEL, si tout autre déploiement $H(x,v)$ (de f), peut être INDUIT, à partir de F, de la manière suivante :

il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times V & \xrightarrow{\Phi} & X \times U \\ \downarrow \text{proj.} & & \downarrow \text{projection} \\ V & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

tel que : a) Φ et φ sont de classe C^∞.

b) $\Phi | X \times 0 = \mathrm{id}(X)$.

c) Φ est G-équivariante :

$$\Phi(g.(x,v)) \equiv \Phi(gx,v) = g.\Phi(x,v).$$

d) $H = F \circ \Phi$.

Dans ce qui suit on va donner une condition suffisante, infinitésimale, pour la versalité. Avant de l'énoncer, on va faire quelques remarques.

Chaque $g \in G$ définit canoniquement un difféomorphisme (linéaire) :

$$(R^n,0) \xrightarrow{g} (R^n,0).$$

On peut donc parler des champs de vecteurs $\xi \in \Gamma^\infty(TR^n)$, G-invariants, caractérisés par la propriété :

$$g\,\xi(x) = Tg(\xi(x)) = \xi(gx).$$

L'ensemble des champs G-invariants, $\Gamma^\infty(TR^n)^G$, forment un $C^\infty(R^n)^G$-module. De même, en prenant les germes de champs invariants, en 0 : $\Gamma^\infty(TX)^G$, on a un $C^\infty(x)^G$-module.

Enfin, si $\xi \in \Gamma^\infty(TX)^G$ et $f \in C^\infty(x)^G$, le germe de fonction $df(\xi) \in C^\infty(x)$ est en fait dans $C^\infty(x)^G$.

L'ensemble :

$$\mathcal{J}_G(f) = \{<df,\xi> = df(\xi),\ \ \xi \in \Gamma^\infty(TX)^G\} \subset C^\infty(x)^G$$

est un <u>idéal</u> de l'anneau $C^\infty(x)^G$. On l'appellera <u>l'idéal</u> G-<u>jacobien</u> de f (ou, quand il n'y a pas lieu de confusion tout simplement <u>idéal</u> <u>jacobien</u> de f).

On va supposer dorénavant que $f \in C^\infty(x)^G$ est tel que :

$$\dim_R C^\infty(x)^G/\mathcal{J}_G(f) < \infty .$$

Si $F(x,u) \in C^\infty(x,u)^G$ est un déploiement de f, et $(u_1,\ldots,u_k) = u$ un système local de coordonnées, on remarque que

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}(x,0) \in C^\infty(x)^G .$$

Par définition, le déploiement $F(x,u)$ est INFINITESIMALEMENT VERSEL si

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}(x,0),\ldots,\frac{\partial F}{\partial u_k}(x,0) \in C^\infty(x)^G/\mathcal{J}_G(f)$$

engendrent $C^\infty(x)^G/\mathcal{J}_G(f)$, en tant qu'espace vectoriel.

On a le :

THEOREME DE VERSALITE :

"Soit $F(x,u) \in C^\infty(x,u)^G$ un déploiement de $f(x) \in C^\infty(x)^G$. Si F est infinitésimalement versel, alors F est versel." □

Ce théorème devrait avoir des applications à une "théorie des catastrophes en présence de la symétrie". [9], [10].

Le présent travail est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre on donne une version <u>équivariante</u> du théorème de préparation différentiable de Weierstrass-Malgrange-Mather [4], [5]. La démonstration utilise le théorème de division, comme dans le cas ordinaire, mais aussi, la version C^∞ du théorème de finitude (de la théorie des invariants) de Hilbert [2], [11]; ce théorème, qui dit en substance que si G est un groupe de Lie compact, opérant orthogonalement sur $R^n \ni x$, les générateurs (homogènes, de degré > 0), $\rho_1(x), \ldots, \rho_k(x)$ de l'algèbre polynomiale $R[x]^G$, engendrent aussi (dans un sens qu'il faut préciser) $C^\infty(R^n)^G$, vient d'être prouvé par G. Schwarz [8] (voir aussi [3]). Ce résultat est fondamental pour le présent travail.

J'espère, dans un certain avenir, mettre au point les détails d'une ébauche de démonstration différente, qui traine déjà depuis plusieurs années (et qui, on l'espère, marchera aussi pour le cas C^k, $k < \infty$).

Remarquons, enfin, que si G est <u>fini</u>, le théorème de finitude est une conséquence facile du théorème de préparation de Malgrange-Mather (voir par exemple [1]).

Le chapitre II, qui s'inspire largement du travail de Zakalioukine [12], [7] donne la démonstration du théorème de versalité, moyennant le théorème de préparation équivariant.

Le chapitre III contient quelques mises au point et exemples. A la fin du chapitre III se trouve un THEOREME D'UNICITE qui établit l'existence du déploiement <u>UNIVERSEL</u>.

Dans ce travail on s'est occupé constamment de déploiements de fonctions (but de dimension 1). En compliquant un peu les notations, les énoncés et démonstrations se généralisent sans peine pour des DEPLOIEMENTS D'APPLICATIONS (but de dimension $\geqslant 1$).

L'idée générale est que, une fois qu'on a le théorème de finitude des invariants (C^∞), les principaux résultats de la théorie de Mather restent valables quand on impose une symétrie provenant d'un groupe de Lie compact. On se propose de poursuivre cette idée dans des travaux ultérieurs.

CHAPITRE I.- LE THEOREME DE PREPARATION EQUIVARIANT.

1) Enoncé du résultat : Soit G un groupe de Lie compact, agissant orthogonalement sur les espaces euclidiens R^n et R^p. On va désigner par X (Y) le germe de R^n (R^p) autour de $0 \in R^n$ $(0 \in R^p)$. Par $C^\infty(x)^G$ (respectivement $C^\infty(y)^G$ on va désigner l'anneau local des germes de fonctions C^∞, G-invariantes sur X (respectivement sur Y).

On va se donner un germe d'application C^∞

$$(X,o) \xrightarrow{f} (Y,o),$$

équivariante, c'est-à-dire telle que

$$(*) \qquad f(gx) = gf(x).$$

[Puisque G agit orthogonalement, toute petite boule autour de l'origine, dans R^n ou R^p, est G-invariante. L'interprétation de l'égalité $(*)$ ne pose donc aucun problème.]

f induit un morphisme local

$$C^\infty(x)^G \xleftarrow{f^*} C^\infty(y)^G .$$

On a le :

Théorème 1. "Soit M un $C^\infty(x)^G$-module fini tel que

$$\dim_R M/f^*(\mathfrak{m}\, C^\infty(y)^G)M < \infty .$$

Alors M est $C^\infty(y)^G$-module fini". $\square$

Remarques : 1) Il s'agit ici de la structure de $C^\infty(y)^G$-module de M, obtenue par restriction des scalaires, via f^*.

2) En général, si $u : A \longrightarrow B$ est un morphisme (local) entre anneaux locaux, on dira que u possède la PROPRIETE DE WEIERSTRASS si, chaque fois que M est un B-module fini, tel que $M/u(\mathfrak{m}A)M$ est A-fini, il résulte que M est A-fini.

Le théorème 1 nous dit donc que f^* possède la propriété de Weierstrass.

3) La propriété de Weierstrass est associative : si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$ et si u, v ont la propriété $W \Longrightarrow v \circ u$ a la propriété W.

4) Le théorème 1 et le lemme de Nakayama impliquent le

Corollaire 1. "Dans les conditions du théorème 1, supposons que $a_1, \dots, a_q$ sont des éléments de M qui engendrent $M/\mathfrak{m}\, C^\infty(y)^G M$ en tant qu'espace vectoriel. Alors $a_1, \dots, a_q$ engendrent M en tant que $C^\infty(y)^G$-module". □

La démonstration du théorème 1 sera donnée dans les paragraphes qui suivent. Elle est une extension de la démonstration de Malgrange-Mather $(G = 1)$.

2) Le théorème de division : On a le :

Lemme 1. "Soit G un groupe de Lie compact agissant orthogonalement sur R^n. On va considérer aussi R, R^p sur lesquels G agira trivialement. On désignera les points courants par : $x \in R^n$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in R^p$, $t \in R$.

Soit
$$\Gamma(t,\lambda) = t^p + \lambda_1 t^{p-1} + \dots + \lambda_p .$$
Pour chaque fonction C^∞, G-invariante :
$$f \in C^\infty(R^n \times R)^G ,$$
il existe :
$$q \in C^\infty(R^n \times R^p \times R)^G \text{ et}$$
$R_1, \dots, R_p \in C^\infty(R^n \times R^p)^G$, telles que :
$$(**) \qquad f(x,t) = \Gamma(t,\lambda)\, q(x,\lambda,t) + \sum_{i=1}^{p} R_i(x,\lambda) t^{p-i} \text{"}. \quad \square$$

Démonstration : D'après Mather [5], [6] il existe $q_1 \in C^\infty(R^n \times R^p \times R)$, $r_i \in C^\infty(R^n \times R^p)$ (pas nécessairement invariantes), telles que $(**)$ soit satisfaite avec q_1 à la place de q, r_i à la place de R_i. Soit $d\mu(g)$ une mesure de Haar sur G, telle que :
$$\int_G d\mu(g) = 1 .$$
On a :
$$f(x,t) = \int_G f(gx,t)\, d\mu(g) = \Gamma(t,\lambda) \int_G q_1(gx,\lambda,t)\, d\mu(g) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} t^{p-i} \int_G r_i(gx,\lambda)\, d\mu(g).$$

On peut prendre :

$$q(x,\lambda,t) = \int_G q_1(gx,\lambda,\ t)\ d\mu(g),\ \text{et}$$
$$R_i(x,\lambda) = \int_G r_i(gx,\lambda)\ d\mu(g). \qquad \text{q.e.d.}$$

Lemme 2. "Soit G un groupe de Lie compact, agissant orthogonalement sur R^n. Si $f \in C^\infty(x)^G$ est un germe de fonction C^∞, G-invariante, il existe une fonction $F \in C^\infty(R^n)^G$, G-invariante, telle que :

$$\{\text{le germe de } F \text{ en } o\} = f\ ." \ \square$$

Démonstration : Soit $H \in C^\infty(R^n)$ une fonction quelconque, dont le germe en o est f. On prend :

$$F(x) = \int_G H(gx)\ d\mu(g) \qquad \text{e.a.d.s.}$$

En combinant les lemmes 1 et 2, on a le :

Lemme 3. "Soit $f(x,t) \in C^\infty(x,t)^G$ un germe G-invariant. Alors il existe des germes G-invariants :

$$q(x,\lambda,t) \in C^\infty(x,\lambda,t)^G$$
$$R_i(x,\lambda) \in C^\infty(x,\lambda)^G$$

tels que :

$$f = \Gamma(t,\lambda).q + \sum_1^p t^{p-i} R_i\ ." \ \square$$

3) Invariants différentiables : Soit G un groupe de Lie compact agissant orthogonalement sur $R^n \ni x$. Soit $R[x]$ l'algèbre des polynômes (réels) sur R^n et $R[x]^G \subset R[x]$ la sous algèbre des polynômes G-invariants. D'après un théorème classique de Hilbert [2], [11], il existe des polynômes G-invariants, en nombre-fini :

$$\rho_1(x),\ldots,\rho_k(x) \in R[x]^G$$

qui engendrent $R[x]^G$ en tant que R-algèbre. En d'autres termes on a le :

Lemme 4 (Théorème de finitude de Hilbert) : "Considérons l'action orthogonale de G sur R^n (donnée ci-dessus), et l'action triviale de G sur R^k. Il existe une application polynomiale, G-équivariante :

$$R^n \xrightarrow{\ \rho\ } R^k \quad (y = \rho(x)),$$

telle que

$$0 \longleftarrow R[x]^G \xleftarrow{\rho^*} R[y]^G \equiv R[y]$$

soit surjective." □

Remarque : Sans perte de généralité, les ρ_i sont homogènes de degré >0 .

En particulier ρ va respecter o :

$$(R^n,o) \xrightarrow{\rho} (R^k,o).$$

Dorénavant, le groupe G (agissant orthogonalement sur R^n) sera équipé de $\{\rho_1,\dots,\rho_k\}$.

Il existe un analogue C^∞ du théorème de finitude de Hilbert.

Lemme 5. (G. Schwarz [8]). "Si ρ est l'application polynomiale G-invariante, fournie par le théorème de finitude de Hilbert,

$$0 \longleftarrow C^\infty(R^n)^G \xleftarrow{\rho^*} C^\infty(R^k)^G \equiv C^\infty(R^k)$$

est surjective." □

(Voir aussi Glaeser [3].)

Lemme 6. "Si ρ est l'application polynomiale G-invariante, fournie par le théorème de finitude de Hilbert, alors, au niveau des germes C^∞ invariants, l'application :

$$0 \longleftarrow C^\infty(x)^G \xleftarrow{\rho^*} C^\infty(y)^G \equiv C^\infty(y)$$

est surjective." □ (Ceci a un sens puisque ρ respecte o).

Démonstration : Soit $f(x) \in C^\infty(x)^G$. D'après le lemme 2, il existe $F \in C^\infty(R^n)^G$ telle que $F|_{\text{germe en } o} = f$.

D'après le lemme 5, il existe $H \in C^\infty(R^k)$ telle que :

$$F(x) = H(\rho(x)).$$

On a :

$$f = \rho^*(\{\text{le germe de } H \text{ en } o\}). \qquad \text{c.a.d.s.}$$

4) Fonctions implicites : On peut généraliser le théorème des fonctions inverses comme suit :

Lemme 7. "Soit G un groupe de Lie agissant orthogonalement sur R^n , et

$$(R^n,o) \xrightarrow{\varphi} (R^n,o)$$

un germe d'application C^∞, telle que :

a) φ est G-équivariante.

b) $D\varphi(o) \in L(R^n,R^n)$ est inversible.

Dans ces conditions (l'unique) inverse de φ est G-équivariante." $\square$

Ceci est immédiat.

Lemme 8. "Soit G comme ci-dessus (c'est-à-dire agissant orthogonalement sur R^n et trivialement sur R^p) et

$$(R^n \times R^p,\ o \times o) \xrightarrow{\Phi} (R^p,o)$$

un germe d'application C^∞ tel que :

a) Si l'on introduit la notation : $x \in R^n$, $y \in R^p$, alors :

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{o,o} \in L(R^p,R^p)$$

est inversible.

b) Pour tous $x \in R^n$, $y \in R^p$, $g \in G$, on a : $\Phi(gx,y) = \Phi(x,y)$.

Soit $y = \psi(x)$ (l'unique) germe d'application C^∞, tel que $o = \psi(o)$ et $\Phi(x,\psi(x)) \equiv o$.

Alors : $\psi(gx) = \psi(x)$." $\square$

Démonstration : Considérons l'action

$$G \times (R^n \times R^p) \longrightarrow (R^n \times R^p)$$

définie par : $g.(x,y) = (gx,y)$.

L'application

$$R^n \times R^p \xrightarrow{\bar{\Psi}} R^n \times R^p$$

définie par $\bar{\Psi}(x,y) = (x, \bar{\Phi}(x,y))$ est G-équivariante et possède la propriété que $D\bar{\Psi}(o)$ est inversible. D'après le lemme précédent, son inverse

$$(x,y) \xrightarrow{\bar{\Psi}^{-1}} (x,\ h(x,y))$$

est aussi équivariante, donc :

$$h(gx,y) \equiv h(x,y).$$

D'autre part $\psi(x) = h(x,o)$, e.a.d.s.

5) <u>Division par un germe de fonction non dégénérée</u> : On a le lemme suivant :

<u>Lemme 9</u>. "Soit G un groupe de Lie compact, agissant orthogonalement sur $R^n \ni x$ et trivialement sur $R \ni t$.

Soit f un germe G-invariant :

$$f(x,t) \in C^{\infty}(x,t)^G ,$$

tel que

$$f(o,o) = \frac{\partial f}{\partial t}(o,o) = \ldots = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}(o,o) = o \neq \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(o,o).$$

Alors, pour tout

$$g(x,t) \in C^{\infty}(x,t)^G$$

il existe

$$q(x,t) \in C^{\infty}(x,t)^G \text{ et}$$

$$r_i(x) \in C^{\infty}(x)^G$$

tels que :

$$g(x,t) = f(x,t)\, q(x,t) + \sum_{i=1}^{p} t^{p-i} r_i(x)." \quad \square$$

Démonstration : On introduit des paramètres $\lambda = (\lambda_o, \ldots, \lambda_{p-1}) \in R^p$ et $\Gamma(t,\lambda) = t^p + \sum_{o}^{p-1} \lambda_i t^i$.

D'après le lemme 3, il existe :

$$Q(x,\lambda,t) \in C^{\infty}(x,\lambda,t)^G$$

$$R_i(x,\lambda) \in C^{\infty}(x,\lambda)^G$$

(G agissant trivialement sur R^p), tels que :

$$f(x,t) = \Gamma(t,\lambda)\, Q(x,\lambda,t) + \sum_{i=o}^{p-1} t^i R_i(x,\lambda).$$

En comparant les développements tayloriens en o, des deux côtés, on trouve :

$$Q(o,o,o) \neq o = R_i(o,o) \qquad (i = o, \ldots, p-1).$$

En appliquant $\partial^{j+1}/\partial t^j \partial\lambda_i \big|_{(o,o,o)}$ des deux côtés on trouve (pour $j < p$) :

$$o = \frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\Gamma(t,\lambda)\frac{\partial Q}{\partial \lambda_i}\right) + \frac{\partial^j}{\partial t^j}(t^i Q) + j!\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_i} .$$

On remarque que $\frac{\partial^j}{\partial t^j}(t^i Q)\Big|_{(o,o,o)}$ est o si $j < i$ et $\neq o$ si $j = i$. D'autre part $\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(\Gamma\frac{\partial Q}{\partial \lambda_i}\right)\Big|_{(o,o,o)}$ est o pour $j < p$, puisque Γ est un polynôme homogène de degré p en (t,λ). Donc :

$$\det\left(\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_i}\right)\Big|_{(o,o,o)} \neq o .$$

D'après le lemme 8, on peut trouver des $\lambda_i = \lambda_i(x)$, G-invariants, tels que $\lambda(o) = o$ et que $R_i(x,\lambda(x)) \equiv o$. Donc :

$$f(x,t) = \Gamma(t,\lambda(x))\, Q(x,\lambda(x),t).$$

On remarque que :

$$Q(gx,\lambda(gx),t) = Q(gx,\lambda(x),t) = Q(x,\lambda(x),t).$$

Donc $Q(x,\lambda(x),t) \in C^\infty(x,t)^G$. De même $\Gamma(t,\lambda(x)) \in C^\infty(x,t)^G$. Enfin :

$$Q(o,\lambda(o),o) = Q(o,o,o) \neq o ,$$

donc $Q(x,\lambda(x),t)$ est une unité de l'anneau $C^\infty(x,t)^G$.

On a (lemme 3) :

$$g(x,t) = \Gamma(t,\lambda(x))\, q(x,\lambda(x),t) + \sum_i t^{p-i}\, r_i(x,\lambda(x))$$

avec $q(x,\lambda(x),t) \in C^\infty(x,t)^G$, $r_i(x,\lambda(x)) \in C^\infty(x)^G$.

En remplaçant Γ par $f\,Q^{-1}$ on a q.e.d.

6) <u>Démonstration du théorème de préparation</u> : On se place dans les conditions du paragraphe 1. D'après le lemme 6, on peut prendre une application G-équivariante: (germifiée en o) :

$$x \in (R^n,o) = X \xrightarrow{\rho} (R^k,o) \ni z$$

avec G agissant <u>trivialement</u> sur R^n , telle que :

$$\rho^* C^\infty(z)^G \equiv \rho^* C^\infty(z) = C^\infty(x)^G .$$

Considérons $z = (z_1,\dots,z_p)$ et :

$$R^j = \{(z_1,\dots,z_j)\} \xrightarrow[\pi_j]{} \{(z_1,\dots,z_{j-1})\} = R^{j-1} .$$

On peut factoriser f :

$$\underbrace{X \xrightarrow[(f,\rho)]{} Y\times R^k \xrightarrow[(id,\,\pi_k)]{} Y\times R^{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Y\times R \xrightarrow[(id,\pi_1)]{} Y}_{f} .$$

Si G agit trivialement sur R^k , R^{k-1} ,..., R , toutes les flèches (f,ρ), (id,π_k),... (id,π_1) sont G-équivariantes ; elles transportent donc les fonctions (germes) G-invariantes dans les fonctions (germes) G-invariantes. Vu la transitivité de la propriété de Weierstrass, pour démontrer le théorème 1, il suffit de montrer que

$(f,\rho)^*$, $(\mathrm{id}, \pi_j)^*$ (définies au niveau des germes G-invariants) possèdent la propriété de Weierstrass.

Pour $(f,\rho)^*$ il n'y a aucun problème, vu que

$$C^\infty(x)^G \xleftarrow{(f,\rho)^*} C^\infty(y,z)^G$$

est surjective.

Pour finir la démonstration du théorème 1, on est ainsi ramenés au lemme suivant :

Lemme 10. "Soit G un groupe de Lie compact, agissant orthogonalement sur $x \in R^n$ et trivialement sur R.

Considérons :

$$(x,t) \in R^n \times R \xrightarrow{\pi} R^n \ni x$$

et

$$C^\infty(x,t)^G \xleftarrow{\pi^*} C^\infty(x)^G .$$

Alors π^* possède la propriété de WEIERSTRASS". $\square$

Démonstration : Soit M un $C^\infty(x,t)^G$-module fini, tel que

$$\dim_R M/\mathfrak{m}\, C^\infty(x)^G.M < \infty .$$

On peut choisir des éléments $a_1, \ldots, a_q \in M$ qui engendrent M (sur $C^\infty(x,t)^G$) et $M/\mathfrak{m}C^\infty(x)^G.M$ (sur R).

Vu que $t \in C^\infty(x,t)^G$, on peut donc écrire :

$$ta_j = \sum_i \lambda_{ij}\, a_i + \sum_i \varphi_{ij}(x,t)\, a_i$$

où :

$$\varphi_{ij}(x,t) = \sum_k \alpha_{ijk}(x)\, \beta_{ijk}(x,t) \quad \text{et}$$
$$\lambda_{ij} \in R,\ \alpha_{ijk}(x) \in \mathfrak{m}C^\infty(x)^G ,$$
$$\beta_{ijk} \in C^\infty(x,t)^G .$$

Soit

$$\Delta(x,t) = \det(t\,\delta_{ij} - \lambda_{ij} - \varphi_{ij}(x,t)) \in C^\infty(x,t)^G .$$

D'après Cramer on a

$$\Delta.a_i = 0 ,$$

donc $\Delta M = 0$, donc $C^\infty(x,t)^G$ agit sur M par l'intermédiaire de l'anneau

$$C = C^\infty(x,t)^G/\Delta\,.C^\infty(x,t)^G .$$

Si $\Delta(o) \neq o$, il résulte que $M = o$ et on a fini.

Si $\Delta(o) = o$, on remarque que

$$\frac{\partial^q \Delta}{\partial t^q}(o,o) \neq o ,$$

ce qui, d'après le lemme 9 nous permet d'écrire : (pour un $g(x,t) \in C^\infty(x,t)^G$ quelconque et un certain $p \leqslant q$) :

$$g(x,t) = \Delta(x,t)\, Q(x,t) + \sum_{i=1}^{p} t^{p-i}\, r_i(x),$$

avec $Q(x,t) \in C^\infty(x,t)^G$, $r_i(x) \in C^\infty(x)^G$.

Il résulte que l'anneau C , considéré comme $C^\infty(x)^G$-module, par :

$$C^\infty(x)^G \xrightarrow[\pi^*]{} C^\infty(x,t)^G \xrightarrow[\text{proj}]{} C$$

est un $C^\infty(x)^G$-module <u>fini</u>. Comme M est C-fini, il est donc, aussi $C^\infty(x)^G$-fini.

q.e.d.

CHAPITRE II.- DEMONSTRATION DU THEOREME DU DEPLOIEMENT VERSEL.

1) Une application du théorème de préparation. Soit G un groupe de Lie compact opérant orthogonalement sur R^m.

On va considérer les champs de vecteurs C^∞, G-invariants :

$$\Gamma^\infty(TR^m)^G \subset \Gamma^\infty(TR^m),$$

c'est-à-dire les champs $\xi(x) \in T_x R^m$ tels que

$$\xi(gx) = Tg(\xi(x)) = g.\xi(x).$$

[Ici on pense à ξ comme étant une application C^∞ :

$$R^m \xrightarrow{\ \xi\ } V \approx R^m$$

où V est R^m considéré comme espace vectoriel de dimension m sur R (sur lequel G opère linéairement)].

On va considérer, aussi les 1-formes G-invariantes (champs de co-vecteurs C^∞, G-invariants) :

$$\Gamma^\infty(T^* R^m)^G \subset \Gamma^\infty(T^* R^m).$$

Si l'on pense à $\eta \in \Gamma^\infty(T R^m)$ comme étant une application

$$R^m \xrightarrow{\ \eta\ } V^*,$$

alors $\eta \in \Gamma^\infty(T^* R^m)^G$ veut dire que, pour tout $x \in R$, $v \in V$ on a :

$$\langle \eta(gx), v \rangle = \langle \eta(x), g^{-1}v \rangle \in R .$$

[Ici $\langle \ldots, \ldots \rangle$ désigne l'accouplement canonique $V^* \otimes V \longrightarrow R$.]

Si $f \in C^\infty(R^m)^G$, alors

$$df \in \Gamma^\infty(T^* R^m)^G .$$

Enfin, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^\infty(T R^m) \underset{C^\infty(R^m)}{\otimes} \Gamma^\infty(T R^m) \arrow[r, "\langle , \rangle"'] & C^\infty(R^m) \\
\Gamma^\infty(T R^m)^G \underset{C^\infty(R^m)^G}{\otimes} \Gamma^\infty(T R^m)^G \arrow[u, "\text{incl.}"'] \arrow[r, "\langle , \rangle"'] & C^\infty(R^m)^G \arrow[u, "\text{incl.}"']
\end{tikzcd}$$

Ici $\Gamma^{\infty}(TR^m)^G$ et $\Gamma^{\infty}(T^*R^m)^G$ sont considérés comme des $C^{\infty}(R^m)^G$-modules.

Toutes les sorites précédentes fonctionnent, aussi, dans le cas germifié.

On va considérer maintenant une décomposition $R^m = R^n \times R^k$ $(m = n+k)$ où il est entendu que l'action de G sur R^m provient d'une action orthogonale sur R^n et de l'action triviale sur R^k.

Sur R^k les champs $\Gamma^{\infty}(TR^k)^G$ sont exactement les champs quelconques. C'est-à-dire que

$$\Gamma^{\infty}(TR^k)^G \equiv \Gamma^{\infty}(TR^k) \supset \{\text{l'espace vectoriel } R^k\}, \text{ et}$$
$$\Gamma^{\infty}(T^*R^k)^G \equiv \Gamma^{\infty}(T^*R^k).$$

Soit x (respectivement u) un système local de coordonnées sur R^n (R^k), autour de 0.

On va considérer $f(x) \in C^{\infty}(x)^G$ et $F(x,u) \in C^{\infty}(x,u)^G$, déploiement de f.

On a :

$$dF(x,u) \in \Gamma^{\infty}((TX \times TU)^*)^G = \Gamma^{\infty}((TX \times U)^*)^G \oplus \Gamma^{\infty}((X \times TU)^*)^G ,$$

donc : $$dF(x,u) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,u) \oplus \frac{\partial F}{\partial u}(x,u)$$

avec $$\frac{\partial F}{\partial x}(x,u) \in \Gamma^{\infty}((TX \times U)^*)^G$$
$$\frac{\partial F}{\partial u}(x,u) \in \Gamma^{\infty}((X \times TU)^*)^G .$$

Le lecteur remarquera que les éléments de $\Gamma^{\infty}((X \times TU)^*)^G$ ne sont rien d'autre que des $\Phi(x,u) \in (R^k)^*$ (dépendant d'une manière C^{∞} de (x,u)), tels que $\Phi(gx,u) = \Phi(x,u)$.

De même, les éléments de $\Gamma^{\infty}((TX \times U)^*)^G$ ne sont rien d'autre que des éléments de $\Gamma^{\infty}(T^*X)^G$, paramétrisés par U.

Si f, F satisfont à l'hypothèse infinitésimale du théorème de versalité de l'introduction, cela veut dire, exactement, que pour tout $g(x) \in C^{\infty}(x)^G$, il existe des

$$\xi(x) \in \Gamma^{\infty}(TX)^G \quad \text{et} \quad v \in R^k \text{, tels que :}$$
$$g(x) = \langle \frac{\partial F}{\partial x}(x,o),\ \xi(x) \rangle + \langle \frac{\partial F}{\partial u}(x,o),\ v \rangle .$$

On aura, aussi, à considérer les champs G-invariants :

$$\xi(x,u) \in \Gamma^{\infty}(TX \times TU)^G .$$

$\xi(x,u)$ se décompose, canoniquement, en une composante verticale, élément de $\Gamma^{\infty}(TX)^G$, paramétré par U, et une composante horizontale qui s'identifie à une application G-invariante $X \times U \longrightarrow R^k$.

On a comme avant l'accouplement canonique :

$$\Gamma^{\infty}((TX \times TU)^*)^G \otimes \Gamma^{\infty}(TX \times TU)^G \xrightarrow[\langle\, ,\, \rangle]{} C^{\infty}(x,u)^G .$$

Enfin, si $\Phi(x,u) \in \Gamma^{\infty}((TX \times TU)^*)^G$, vu l'interprétation explicite des deux composantes de $\Gamma^{\infty}((TX \times TU)^*)^G$ qu'on vient de donner plus haut, on peut interpréter, <u>canoniquement</u>, $\Phi(x,o)$ comme élément de $\Gamma^{\infty}((TX \times TU)^*)^G$, ("indépendant" de u).

<u>Lemme 11.</u> "Il existe un opérateur

$$\Gamma^{\infty}((TX \times TU)^*)^G \xrightarrow{A} [\Gamma^{\infty}((TX \times TU)^*)^G]^k$$

(dépendant du système de coordonnées locales $u = (u_1, \ldots, u_k)$ sur U), tel que, si

$$A\Phi = (A_1\Phi, \ldots, A_k\Phi),$$

alors :

$$\Phi(x,u) = \Phi(x,o) + \sum_1^k u_i . A_i\Phi ." \quad \square$$

(Ici $u_i \in C^{\infty}(u) \subset C^{\infty}(x,u)^G$ et $\Gamma^{\infty}((TX \times TU)^*)^G$ est considéré comme $C^{\infty}(x,u)^G$-module).

Démonstration : Il suffit de poser :

$$A_i\Phi = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} \Phi(x,tu)dt$$

et de vérifier que l'intégrale représente bien un élément de $\Gamma^{\infty}((TX \times TU)^*)^G$. q.e.d.

<u>Lemme 12.</u> "Soient F et f comme dans le théorème de versalité. Soit aussi Λ un second germe d'espace de paramètres et :

$$M(x,u,\lambda) \in C^{\infty}(\Lambda, \Gamma^{\infty}((TX \times U)^*)^G)$$

$$N(x,u,\lambda) \in C^{\infty}(\Lambda, \Gamma^{\infty}((X \times TU)^*)^G)$$

tels que :

$$M(x,o,o) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,o) = df(x)$$

$$N(x,o,o) = \frac{\partial F}{\partial u}(x,o).$$

Dans ces conditions, pour tout (germe de) fonction :

$$h(x,u,\lambda) \in C^\infty(x,u,\lambda)^G$$

(où il est entendu que G agit trivialement sur $U \times \Lambda$), il existe un

$$\xi(x,u,\lambda) \in C^\infty(\Lambda,\ \Gamma^\infty(TX \times TU)^G)$$

tel que :

1°. Considérons les deux projections naturelles :

$$\begin{tikzcd} & \Gamma^\infty(TX \times U)^G \\ \Gamma^\infty(TX \times TU)^G \arrow[ur, "p_X"] \arrow[dr, "p_U"'] & \\ & \Gamma^\infty(X \times TU)^G . \end{tikzcd}$$

$p_U\,\xi(x,u,\lambda)$ ne dépend <u>pas</u> de x .

2°. $h(x,u,\lambda) = \langle M \oplus N\ ,\ \xi(x,u,\lambda)\rangle$." □

Démonstration : On va considérer $C^\infty(x,u,\lambda)^G$ comme module sur lui-même et

$\Gamma_o = \{$ l'ensemble des éléments de $C^\infty(x,u,\lambda)^G$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\langle M(x,u,\lambda), \xi_1(x,u,\lambda)\rangle$, avec $\xi_1 \in C^\infty(\Lambda,\ \Gamma^\infty(TX \times U)^G)\}$.

Γ_o forme un $C^\infty(x,u,\lambda)^G$-sous-module.

On peut donc considérer le $C^\infty(x,u,\lambda)^G$-module <u>fini</u> : $\Gamma_1 = C^\infty(x,u,\lambda)^G/\Gamma_o$.

Par la projection

$$(x,u,\lambda) \xrightarrow{\ \pi\ } (u,\lambda),$$

on a un morphisme local :

$$C^\infty(x,u,\lambda)^G \xleftarrow{\ \pi^*\ } C^\infty(u,\lambda) \equiv C^\infty(u,\lambda)^G$$

et tout $C^\infty(x,u,\lambda)^G$-module devient (par restriction des scalaires) un $C^\infty(u,\lambda)$-module.

Si $h(x,u,\lambda) \in C^\infty(x,u,\lambda)^G$, on voit (comme dans le lemme 11) que :

(1) $$h(x,u,\lambda) - h(x,o,o) \in \eta\ C^\infty(u,\lambda).C^\infty(x,u,\lambda)^G$$

(ici $h(x,o,o) \in C^\infty(x)^G \subset C^\infty(x,u,\lambda)^G$).

Notre hypothèse sur M, N (combinée avec l'hypothèse infinitésimale du théorème de versalité) implique l'existence de

$$\eta(x) \in \Gamma^\infty(TX)^G,\quad v \in R^k\ ,\ \text{tels que}$$

(2) $$h(x,o,o) = \langle M(x,o,o), \eta(x)\rangle + \langle N(x,o,o), v\rangle .$$

On a des inclusions naturelles :

$$\Gamma^\infty(TX)^G \subset \Gamma^\infty(TX \times U)^G \subset C^\infty(\Lambda,\ \Gamma^\infty(TX \times U)^G)$$
$$R^k \subset \Gamma^\infty(TU)^G \subset \Gamma^\infty(X \times TU)^G \subset C^\infty(\Lambda,\ \Gamma^\infty(X \times TU)^G),$$

qui nous permettent de considérer l'expression :

$$< M(x,u,\lambda),\ \eta(x) > \ + < N(x,u,\lambda),\ v > \in C^\infty(x,u,\lambda)^G .$$

Pour la même raison qu'avant, on a :

(3) $$< M(x,u,\lambda), \eta(x) > + < N(x,u,\lambda),\ v > - < M(x,o,o),\ \eta(x) > -$$
$$- < N(x,o,o),\ v > \in \mathfrak{m}\, C^\infty(u,\lambda).C^\infty(x,u,\lambda)^G .$$

Soit $e^1, \ldots, e^k$ la base canonique de R^k correspondant aux coordonnées $u = (u_1, \ldots, u_k))$. Donc

$$v = v_1 e^1 + \ldots + v_k e^k .$$

On considère les fonctions invariantes :

$$< N(x,u,\lambda),\ e^i > \in C^\infty(x,u,\lambda)^G .$$

Les égalités (1), (2), (3), impliquent que l'espace vectoriel $\Gamma_1 / \mathfrak{m}\, C^\infty(u,\lambda).\Gamma_1$ est engendré par les k éléments $< N, e^i >$.

Donc, d'après le théorème de préparation équivariant, et le lemme de Nakayama, Γ_1 est un $C^\infty(u,\lambda)$-module <u>fini</u>, engendré par les (images des) $< N, e^i >$.

Donc, pour tout $h(x,u,\lambda) \in C^\infty(x,u,\lambda)^G$, il existe $\eta(x,u,\lambda) \in C^\infty(\Lambda,\ \Gamma^\infty(TX \times U)^G)$ et $\varphi_1(u,\lambda), \ldots, \varphi_k(u,\lambda) \in C^\infty(u,\lambda)$, tels que

$$h(x,u,\lambda) = < M(x,u,\lambda), \eta(x,u,\lambda) > + \sum_1^k \varphi_i(u,\lambda) < N(x,u,\lambda),\ e^i > .$$

Si l'on pose :

$$\xi(x,u,\lambda) = \eta(x,u,\lambda) \oplus \sum_1^k \varphi_i(u,\lambda) e^i$$

on a q.e.d.

2) <u>Déploiements (infinitésimalement) équivalents</u>.

Soit $f(x) \in C^\infty(x)^G$, U un espace de paramètres muni de coordonnées locales $u_1, \ldots, u_k$ et $F(x,u)$, $H(x,u) \in C^\infty(x,u)^G$ deux déploiements de $f(x)$.

On dira que F et H sont INFINITESIMALEMENT EQUIVALENTS si

$$\frac{\partial}{\partial u_j} (F-H)(x,o) \in \mathcal{J}_G(f) \subset C^\infty(x)^G .$$

Cette définition est clairement indépendante du système de coordonnées $(u_1, \ldots, u_k)$. Aussi, un déploiement infinitésimalement équivalent à un déploiement infinitésalement versel, est lui-même infinitésimalement versel.

F et H sont EQUIVALENTS, s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times U & \xrightarrow{\Phi} & X \times U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

tel que : a) Φ et φ sont des (germes de) <u>difféomorphismes</u> de classe C^∞.

b) $\Phi \,|\, X \times o \equiv id(X)$.

c) Φ est G-équivariante.

d) $H = F \circ \Phi$.

Dans les paragraphes suivants on va démontrer le :

<u>Théorème 2.</u> "Soit $f(x) \in C^\infty(x)^G$ tel que

$$\dim_R C^\infty(x)^G/\gamma_G(f) < \infty ,$$

et $F(x,u)$, $H(x,u) \in C^\infty(x,u)^G$ deux déploiements de f (avec <u>même</u> espace de paramètres, U) tels que :

1) F est infinitésimalement versel.

2) F et H sont infinitésimalement équivalents.

Alors F et H sont équivalents." □

Avant de démontrer ce théorème, on va montrer comment il implique le THEOREME DE VERSALITE.

On commence par le

<u>Corollaire (du théorème 2)</u>. "Soit $F(x,u)$ un déploiement de f, infinitésimalement versel.

Soit $(u_1, \ldots, u_k)$ un système de coordonnées local de U et $F'(x,u) \in C^\infty(x,u)^G$ le déploiement de f obtenu par <u>linéarisation de F</u> :

$$F'(x,u) = f(x) + \sum_1^k u_i \frac{\partial F}{\partial u_i}(x,o).$$

F et F' sont équivalents." □

En effet, il suffit de remarquer que F et F' sont infinitésimalement équivalents ce qui est immédiat. □

Soit maintenant V un nouvel espace de paramètres, et $A(x,v)$ un déploiement de

$f(x)$. $(A(x,v) \in C^{\infty}(x,v)^G)$.

$A(x,v)$ peut être induit à partir de

$$\tilde{A}(x,v,u) = A(x,v) + \sum_1^k u_i \frac{\partial F}{\partial u_i}(x,o) \in C^{\infty}(x,v,u)^G,$$

par le plongement équivariant :

$$(x,v) \equiv (x,v,o) \hookrightarrow (x,v,u).$$

Soit $v = (v_1, \ldots, v_q)$ un système local de coordonnées sur V. D'après nos hypothèses sur f, F, il existe :

$$\xi_j(x) \in \Gamma^{\infty}(TX)^G, \quad {}_j\nu \in R^k,$$

tels que :

$$\frac{\partial A}{\partial v_j}(x,o) = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial v_j}(x,o,o) = \langle \frac{\partial F}{\partial x}(x,o), \xi_j(x) \rangle + \langle \frac{\partial F}{\partial u}(x,o), {}_j\nu \rangle.$$

On va définir le déploiement de $f(x)$:

$$\tilde{F}(x,v,u) \in C^{\infty}(x,v,u)^G \text{, par :}$$

$$\tilde{F}(x,v,u) = f(x) + \sum_1^k u_i \frac{\partial F}{\partial u_i}(x,o) + \sum_1^q v_j \langle \frac{\partial F}{\partial u}(x,o), {}_j\nu \rangle.$$

$\tilde{F}$ est infinitésimalement versel (puisque F l'est déjà). D'autre part, $\tilde{F}$ et $\tilde{A}$ sont infinitésimalement équivalents, puisque :

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial u_i}(x,o,o) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_i}(x,o,o) \text{ et}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial v_j}(x,o,o) - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v_j}(x,o,o) = \langle df(x), \xi_j(x) \rangle \in \mathcal{J}_G(f).$$

Donc, $\tilde{A}$ et $\tilde{F}$ sont équivalents. En particulier, $\tilde{A}$ peut être induit à partir de $\tilde{F}$.

Soit maintenant L l'homomorphisme R-linéaire

$$R^q \xrightarrow{L} R^k,$$

défini par :

$$L\left(\sum_1^q v_j \varepsilon^j\right) = \sum_1^q v_j \cdot {}_j\nu$$

(ici ε^j est la base canonique de R^q, v_j sont des scalaires quelconques, et, comme avant, ${}_j\nu \in R^k$).

Soit, aussi, $e^1, \ldots, e^k$ la base canonique de R^k. Alors :

$$\sum_1^k u_i \frac{\partial F}{\partial u_i}(x,o) + \sum_1^q v_j \langle \frac{\partial F}{\partial u}(x,o), {}_j\nu \rangle = \langle \frac{\partial F}{\partial u}(x,o), \left(\sum_1^k u_i e^i\right) + L\left(\sum_1^q v_j \varepsilon^j\right) \rangle,$$

où, bien entendu

$$\sum_i u_i \frac{\partial F}{\partial u_i}(x,o) = \langle \frac{\partial F}{\partial u}(x,o), \sum_i u_i e_i \rangle.$$

On peut donc induire $\tilde{F}$ à partir de F' (le linéarisé de notre F initial), par un simple changement de paramètres :

$$R^k \times R^q \ni (u,v) \longrightarrow (u+L(v)) \in R^k .$$

Ceci finit la démonstration du théorème de versalité, modulo le théorème 2 dont on va s'occuper maintenant.

3) <u>Construction explicite de M, N</u> .

On se donne f, F, H comme dans le théorème 2. D'une manière explicite, il existe des

$$R_j(x) \in \Gamma^\infty(TX)^G ,$$

tels que

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(H-F)(x,o) = \langle df(x), R_j(x) \rangle \in \mathcal{J}_G(f).$$

En revenant aux notations du paragraphe 1, chapitre II, on introduira un espace de paramètre supplémentaire :

$$\Lambda = R^k \times R^k \ni \lambda = (\lambda', \lambda'').$$

On va construire explicitement des

$$M(x, u, \lambda) = M(x,u, \lambda', \lambda'') \in C^\infty(\Lambda, \Gamma^\infty((TX \times U)^*)^G)$$

$$N(x, u, \lambda) = N(x,u, \lambda', \lambda'') \in C^\infty(\Lambda, \Gamma^\infty((X \times TU)^*)^G).$$

Remarquons que, si l'on se donne un

$$\psi \in C^\infty(U,\Lambda), \text{ alors :}$$

$M(x,u,\psi(u))$ (respectivement $N(x,u, \psi(u))$), représente un élément de $\Gamma^\infty((TX \times U)^*)^G$ (respectivement de $\Gamma^\infty((X \times TU)^*)^G$).

Enfin on va introduire le paramètre <u>non germifié</u>, $t \in [0,1] = I$ et considérer :

$$H_t(x,u) = F(x,u) + t(H(x,u) - F(x,u)).$$

On a : $H_t(x,u) \in C^\infty(x,u,I)^G = \{$germes de fonctions C^∞, G-invariantes, de $R^n \times R^k \times I$, le long de $o \times o \times I\}$. On pense à $dH_t(x,u)$ comme étant élément de $C^\infty(I, \Gamma^\infty((TX \times TU)^*)^G)$.

Manifestement, $H_o = F$, $H_1 = H$.

<u>Lemme 13</u>. "Il existe des

$$M(x,u,\lambda) \in C^{\infty}(\Lambda,\ \Gamma^{\infty}((TX \times U)^*)^G)$$

$$N(x,u,\lambda) \in C^{\infty}(\Lambda,\ \Gamma^{\infty}((X \times TU)^*)^G),$$

tels que : 1°. $M(x,o,o) = df(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,o)$,

2°. $N(x,o,o) = \frac{\partial F}{\partial u}(x,o)$.

(Donc M, N sont comme dans le lemme 12).

Enfin si l'on considère : $\lambda' = tu$, $\lambda'' = t^2u$, donc :

$$M(x,u,tu,t^2u) \in C^{\infty}(I,\ \Gamma^{\infty}((TX \times U)^*)^G)$$

$$N(x,u,tu,t^2u) \in C^{\infty}(I,\ \Gamma^{\infty}((X \times TU)^*)^G),\text{ alors}$$

on a : 3°. $M(x,u,tu,t^2u) = \frac{\partial H_t}{\partial x}(x,u)$.

4°. Soit $e^1,\ldots,e^k$ la base canonique de R^k et $e_1^*,\ldots,e_k^*$ la base de $(R^k)^*$, duale.

Il existe des

$$\eta_j(x,u,t) \in C^{\infty}(I,\ \Gamma^{\infty}(TX \times U)^G)$$

$(j = 1,\ldots,k)$, tels que

$$N(x,u,tu,t^2u) = \frac{\partial H_t}{\partial u}(x,u) + \sum_{j=1}^{k} \left\langle \frac{\partial H_t}{\partial x}(x,u),\ \eta_j(x,u,t) \right\rangle e_j^*.\text{"} \ \square$$

Démonstration : On pose, par définition (en utilisant les notations du lemme 11).

$$M(x,u,\lambda) = M(x,u,\lambda') = \frac{\partial F}{\partial x}(x,u) + \sum_{1}^{k} \lambda_i' A_i \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,u)$$

$$N(x,u,\lambda) = N(x,u,\lambda',\lambda'') = \frac{\partial F}{\partial u}(x,u) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i' A_i\left(\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u}\right)(x,u) -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i' . \langle A_i\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,u),\ R_j(x) \rangle . e_j^* - \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i'' . \langle A_i\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,u),\ R_j(x) \rangle . e_j^* .$$

Les propriétés 1° et 2° sont immédiates.

Pour prouver 3°, on fait le calcul suivant :

$$M(x,u,tu) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,u) + \underbrace{t \sum_{1}^{k} u_i A_i \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,u)}_{\frac{\partial}{\partial x}(H-F)} = \frac{\partial H_t}{\partial x}(x,u).$$

[On vient d'utiliser ici le fait que

$$H(x,o) - F(x,o) \equiv 0 .]$$

Pour prouver 4°, on fait le calcul suivant :

$$N(x,u,tu,t^2u) = \left[\frac{\partial F}{\partial u}(x,u) + t\sum_1^k u_i\, A_i\left(\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u}\right)(x,u) + t\,\frac{\partial}{\partial u}(H-F)(x,o)\right]$$
$$+ \left[-t\sum_1^k \langle \frac{\partial F}{\partial x}(x,o),\ R_j(x)\rangle \cdot e_j^* - \sum_{i,j} tu_i \,\langle A_i\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,u),\ R_j(x)\rangle \cdot e_j^* -\right.$$
$$\left.- \sum_{i,j} t^2 u_i \langle A_i\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\right)(x,u),\ R_j(x)\rangle \cdot e_j^*\right] = \frac{\partial H_t}{\partial u}(x,u) - \sum_1^k \langle \frac{\partial H_t}{\partial x}(x,u), t\,R_j(x)\rangle e_j^* .$$

On peut donc poser :

$$-\eta_j(x,u,t) = t\,R_j(x), \qquad \text{e.a.d.s.}$$

Lemme 14. "Soient H, F comme dans le théorème 2. Il existe un champ de vecteurs :

$$\nu(x,u,t) \in C^\infty(I,\ \Gamma^\infty(TX \times TU)^G)\ ,$$

tel que : α) La composante horizontale de ν :

$$p_U\nu(x,u,t) \in C^\infty(I,\ \Gamma^\infty(X \times TU)^G),$$

est indépendante de x .

β) $\nu(x,o,t) \equiv 0$.

γ) On a :

$$H(x,u) - F(x,u) = \langle dH_t(x,u),\ \nu(x,u,t)\rangle$$

pour $t \in I$." □

Démonstration. Soit $\varphi(x,u) \in C^\infty(x,u)^G$. En considérant les M, N du lemme précédent et en utilisant le lemme 12, (et les propriétés 1°, 2° du lemme précédent) on voit qu'il existe des champs :

$$\nu_1(x,u,t) \in C^\infty(I,\ \Gamma^\infty(TX \times U)^G)$$
$$\nu_2(u,t) \in C^\infty(I,\ \Gamma^\infty(X \times TU)^G)$$

tels que :

$$\varphi(x,u) = \langle M(x,u,tu,t^2u),\ \nu_1(x,u,t)\rangle + \langle N(x,u,tu,t^2u),\ \nu_2(u,t)\rangle =$$
$$= \langle \frac{\partial H_t}{\partial x}(x,u),\ \nu_1(x,u,t)\rangle + \langle \frac{\partial H_t}{\partial u}(x,u),\ \nu_2(u,t)\rangle +$$
$$+ \langle \frac{\partial H_t}{\partial x}(x,u),\ \sum_1^k \eta_j(x,u,t).\langle e_j^*, \nu_2(u,t)\rangle\rangle = \langle dH_t(x,u),\ \tilde\nu(x,u,t)\rangle$$

où $\tilde\nu(x,u,t) = [\nu_1 + \sum_j \eta_j.\langle e_j^*, \nu_2\rangle] \oplus \nu_2$.

Maintenant, puisque $H(x,o) - F(x,o) \equiv 0$, on a :

$$H(x,u) - F(x,u) = \sum_j u_j\,\varphi_j(x,u)$$

avec $\varphi_j(x,u) \in C^\infty(x,u)^G$. Pour chaque φ_j on construit un $\tilde{\nu}_j$ comme ci-dessus, et

$$\nu(x,u,t) = \sum_j u_j \tilde{\nu}_j(x,u,t)$$

a toutes les propriétés voulues.

4) Fin de la démonstration du théorème 2.

Soit X le germe de R^n autour de 0 et $\xi(x,t) \in \Gamma^\infty(TX)$ un champ de vecteurs dépendant du temps $(t \in I)$, tel que $\xi(o,t) \equiv 0$. Le théorème fondamental des systèmes dynamiques, nous dit qu'il existe un (et un seul)

$$S_t(x) \in C^\infty(I, \mathrm{Diff}^\infty(X))$$

tel que $S_o \equiv \mathrm{id}(X)$ et :

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} \circ S_t^{-1}(x,t) = \xi(x,t).$$

Si, en plus, $\xi(x,t) \in \Gamma^\infty(TX)^G$, avec G groupe de Lie compact, opérant orthogonalement sur $X(R^n)$, on voit que les difféomorphismes S_t sont G-équivariants :

$$S_t(gx) = g\, S_t(x).$$

Considérons le champ invariant $\nu(x,u,t)$ (sur $X \times U$) du lemme 14, et le champ $p_U \nu(x,u,t) = p_U \nu(u,t)$ sur U, (il s'agit de champs de vecteurs dépendant du temps).

On considère les S_t, s_t respectifs. On voit facilement que : S_t recouvre s_t, S_t est équivariant, $S_t | X \times 0 = \mathrm{id}\, X$ (quel que soit t). Je dis que :

$$(*) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(H_t \circ S_t) = 0 .$$

En effet, si l'on considère : $\frac{\partial S_t}{\partial t} = \nu \circ S_t \in C^\infty(I, \Gamma^\infty(TX \times TU)^G)$, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_t \circ S_t) = (H-F)\circ S_t + \left\langle dH_t(S_t(x,u)), \frac{\partial S_t}{\partial t}(x,u)\right\rangle =$$

$$= (H-F) \circ S_t + \left\langle dH_t , \frac{\partial S_t}{\partial t} \circ S_t^{-1}\right\rangle \circ S_t = \left[(H-F) - \langle dH_t, \nu\rangle\right] \circ S_t = 0 .$$

Comme, d'autre part $H_o \circ S_o = F$, $(*)$ implique que $H_1 \circ S_1 = F$. Puisque $H_1 = H$, il suffit de prendre $\Phi = S_1^{-1}$, e.a.d.s.. Le théorème 2 est démontré.

CHAPITRE III.- L'IDEAL $\mathcal{J}_G$; LE THEOREME D'UNICITE.

1) Images directes de champs de vecteurs G-invariants.

Soit G un groupe de Lie compact opérant orthogonalement sur R^n, R^n/G l'espace quotient de l'action, et

$$\rho : R^n \longrightarrow R^k$$

l'application polynomiale de Hilbert, définie par $\rho(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_k(x))$ où

$$\rho_i(x) \in R[x]^G ,$$

$\rho_i(x)$ est homogène de degré > 0, et les $\rho_i(x)$ engendrent l'algèbre $R[x]^G$.

Lemme 15. "Il existe un diagramme commutatif d'applications continues :

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "proj"'] & & \rho R^n \subset R^k \\ & R^n/G \arrow[ur, "\rho'"'] & \end{tikzcd}$$

où ρ' est un homéomorphisme. ρ est propre." $\square$

[On peut donc identifier, au moins du point de vue topologique, l'espace-quotient R^n/G et l'espace semi-algébrique $\rho R^n \subset R^k$]. Le lemme 5 exprime le fait beaucoup plus subtil, que ρ' est un isomorphisme des deux "structures différentiables" suivantes :

$$\{R^n/G \text{ muni de l'anneau } C^\infty(R^n)^G\}$$

et

$$\{\rho R^n \text{ muni de l'anneau } C^\infty(R^k)|\rho R^n\}.]$$

Démonstration : Soit $q : R^n \longrightarrow R$ une forme quadratique positive non-dégénérée ;

$$q_1(x) = \int_G q(gx)\, d\mu(g)$$

est encore une forme quadratique, positive non dégénérée ; mais en plus elle est G-invariante. Donc d'après Hilbert, il existe un $P \in R[y]$ tel que

$$q_1(x) = P(\rho(x)).$$

Si $|x_n| \longrightarrow \infty$ on a $|q_1(x_n)| \longrightarrow \infty$, donc $|\rho(x_n)| \longrightarrow \infty$; donc ρ est propre.

D'autre part, ρ sépare les orbites. En effet, soient $x', x'' \in R^n$ tels que les orbites Gx', Gx'' soient distinctes.

Soit $K = Gx' \cup Gx'' \subset R^n$ et $\psi : K \longrightarrow R$ la fonction continue

$$\psi(Gx') \equiv 0, \quad \psi(Gx'') \equiv 1 .$$

Vu que l'ensemble K est compact on peut approcher ψ uniformément par un polynôme. Vu que, en plus, ψ est G-invariante, on peut l'approcher par un polynôme <u>invariant</u>. Donc

$$\rho(Gx') \neq \rho(Gx'').$$

A partir de là le lemme découle tout de suite.

Considérons maintenant un champ de vecteurs G-invariant, C^∞ :

$$\xi \in \Gamma^\infty(TR^n)^G .$$

Donc, ξ a la propriété que

$$\xi(gx) = g.\xi(x)$$

(G opère canoniquement sur les vecteurs de R^n, même si ces vecteurs ne sont pas basés à l'origine).

C'est facile à voir que si x et y sont dans la même G-orbite, donc si $\rho(x) = \rho(y)$, alors :

$$T\rho\,(\xi(x)) = T\rho\,(\xi(y)) \in T_{\rho x}R^k .$$

Il existe donc une opération <u>d'image directe</u>, bien définie :

$$\Gamma^\infty(TR^n)^G \xrightarrow[\rho_*]{} \Gamma^0(TR^k|\rho R^n).$$

<u>Théorème 2</u>. "Soit

$$\xi \in \Gamma^\infty(TR^n)^G .$$

Il existe un

$$\eta \in \Gamma^\infty(TR^k)$$

tel que $\qquad \eta \,|\, \rho R^n \equiv \rho_* \xi$." $\square$

Démonstration : On munit R^k des coordonnées $y_1, \dots, y_k$, telles que ρ soit $y_i = \rho_i(x)$.

On considère $\rho_i(x) \in C^\infty(R^n)^G$ et

$$\langle d\rho_i(x), \xi(x) \rangle \in C^\infty(R^n)^G .$$

$\langle d\rho_i(x), \xi(x) \rangle$ définit canoniquement une fonction continue $\alpha_i : \rho R^n \equiv R^n/G \longrightarrow R$. Si $z \in \rho R^n \subset R^k$ est le point courant de ρR^n et $e^1, \dots, e^k$ la base canonique de R^k (correspondant aux coordonnées $y_1, \dots, y_k$), alors :

$$(\rho_* \xi)(z) = \sum_1^k \alpha_i(z)\, e^i .$$

D'après le lemme 5, les α_i se prolongent en des $A_i \in C^\infty(R^k)$. En posant

$$\eta = \sum A_i e^i$$

on a q.e.d.

Lemme 16. "La version germifiée du théorème 2 est vraie." □

Corollaire 17. "Soit X (respectivement Y) le germe de R^n (de R^k) autour de 0 , et

$$X \xrightarrow{\rho} Y$$

d'application de Hilbert. Si $f(y) \in C^\infty(y)$ on considère l'idéal jacobien (habituel) :

$$\mathcal{J}(f) \subset C^\infty(y) \equiv C^\infty(y)^G ,$$

et $\rho^* \mathcal{J}(f) \subset C^\infty(x)^G$. On a :

$$\rho^* \mathcal{J}(f) \supset \mathcal{J}_G(\rho^* f) .\text{"} \quad \square$$

Démonstration : Soit $\xi \in \Gamma^\infty(TX)^G$, et $\eta \in \Gamma^\infty(TY)$ tel que $\eta | \rho X \equiv \rho_* \xi$.

On considère $\langle d(\rho^* f), \xi(x) \rangle \in \mathcal{J}_G(\rho^* f)$ et $\langle df, \eta \rangle \in \mathcal{J}(f) \subset C^\infty(y)$.

On a :

$$\rho^* \langle df, \eta \rangle = \langle d(\rho^* f), \xi \rangle .$$

Comme tout élément de $\mathcal{J}_G(\rho^* f)$ est (par définition) de la forme

$$\langle d(\rho^* f), \xi \rangle ,$$

on a q.e.d.

Ceci nous donne le critère suivant pour trouver des singularités (G-invariantes) de codimension finie (dans $C^\infty(x)^G$) :

"Si $f(y) \in C^\infty(y)$ est de codimension finie, dans le sens que

$$\dim_R C^\infty(y)/\mathcal{J}(f) < \infty$$

et si (f, ρ) sont tels que :

$$\dim_R \rho^* \mathcal{J}(f)/\mathcal{J}_G(\rho^* f) < \infty$$

alors $\rho^* f \in C^\infty(x)^G$ est de codimension finie :

$$\dim_R C^\infty(x)^G/\mathcal{J}_G(\rho^* f) < \infty ." \ \square$$

Dans le paragraphe suivant, on donne un autre genre de critère.

2) Exemples : Soit $d\mu(g)$ une mesure de Haar sur G, telle que

$$\int_G d\mu(g) = 1 .$$

On définit la retraction

$$C^\infty(x) \xrightarrow{Av} C^\infty(x)^G ,$$

par :

$$Av\,\varphi(x) = \int_G \varphi(gx)\, d\mu(g).$$

De même, on définit la retraction :

$$\Gamma^\infty(TX) \xrightarrow{Av} \Gamma^\infty(TX)^G$$

par :

$$Av\,\eta(x) = \int_G g^{-1}\eta(gx)\, d\mu(g).$$

Lemme 18. "Soit $f(x) \in C^\infty(x)^G$ telle que

$$\dim_R C^\infty(x)/\mathcal{J}(f) < \infty .$$

On a : 1) $\dim_R C^\infty(x)^G/\mathcal{J}_G(f) \leqslant \dim_R C^\infty(x)/\mathcal{J}(f)$.

2) Si $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_p(x) \in C^\infty(x)$ engendrent $C^\infty(x)/\mathcal{J}(f)$ comme espace vectoriel, alors $Av\,\varphi_1,\ldots, Av\,\varphi_p$, engendrent $C^\infty(x)^G/\mathcal{J}_G(f)$ (comme espace vectoriel)." $\square$

Démonstration : Il suffit de montrer 2). L'hypothèse de 2) est que, pour tout $g_1(x) \in C^\infty(x)$, il existe $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in R$ et $\xi(x) \in \Gamma^\infty(TX)$, tels que :

$$g_1(x) = \sum_1^p \lambda_i\,\varphi_i(x) + \langle df(x), \xi(x)\rangle .$$

Puisque $f \in C^\infty(x)^G$, on a que

$$df(x) \in \Gamma^\infty(T^*X)^G,$$

donc : $\langle df(gx),\ldots\rangle = \langle df(x), g^{-1}\ldots\rangle$.

Donc :

$$Av\,\langle df(x),\xi(x)\rangle = \int_G \langle df(gx),\xi(gx)\rangle\, d\mu(g) =$$
$$= \int_G \langle df(x), g^{-1}\xi(gx)\rangle\, d\mu(g) = \langle df(x), Av\,\xi(x)\rangle .$$

Il s'ensuit que, si $g_1(x) \in C^\infty(x)^G$:

$$g_1 = \mathrm{Av}\, g_1 = \sum_i \lambda_i \, \mathrm{Av}\, \varphi_i + \langle df, \mathrm{Av}\, \xi \rangle ,$$

ce qui implique 2).

Ceci nous permet de construire autant d'exemples qu'on veut :

Disons, par exemple, que $f(x) = x^{2p}$ et que $G = Z/2Z$ agissant sur R par $x \longrightarrow (-x)$. Alors f est de codimension p, et son déploiement (uni) versel est :

$$x^{2p} + u_1 x^{2p-2} + u_2 x^{2p-4} + \dots + u_p .$$

Ou, disons que $f(x,y) = x^3 + y^3$ $(n = 2)$, et que G est le groupe symétrique $S(2)$. Son déploiement (uni) versel G-invariant est $x^3 + y^3 + u_1 xy + u_2(x+y) + u_3$.

e.a.d.s.

3) Déploiement Universel : On va considérer un germe

$$f(x) \in C^{\infty}(x)^G$$

tel que

$$\dim_R C^{\infty}(x)^G / \mathcal{J}_G(f) < \infty .$$

THEOREME D'UNICITE : "Soient $U = (u_1, \dots, u_k)$, $V = (v_1, \dots, v_k)$ deux espaces de paramètres et $F_1(x,u)$, $F_2(x,v)$ deux déploiements (versels) de $f(x)$ tels que :

1) $\left\{ \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(x,o), \dots, \frac{\partial F_1}{\partial u_k}(x,o) \right\}$ est une base de l'espace vectoriel $C^{\infty}(x)^G / \mathcal{J}_G(f)$.

2) $\left\{ \frac{\partial F_2}{\partial v_1}(x,o), \dots, \frac{\partial F_2}{\partial v_k}(x,o) \right\}$ est une base de l'espace vectoriel $C^{\infty}(x)^G / \mathcal{J}_G(f)$.

Alors F_1 et F_2 sont deux déploiements équivalents." □

Démonstration : D'après le chapitre II, F_1 et F_2 sont respectivement équivalents à leurs linéarisés :

$$F_1' = f(x) + \sum_1^k u_i \, \varphi_i(x)$$

$$F_2' = f(x) + \sum_1^k v_j \, \psi_j(x)$$

où : $\varphi_i(x) = \frac{\partial F_1}{\partial u_i}(x,o)$ et $\psi_j(x) = \frac{\partial F_2}{\partial v_j}(x,o)$.

Il suffit donc de montrer que F_1' et F_2' sont équivalents.

Notre hypothèse nous dit qu'il existe une matrice réelle (inversible) λ_{ij} , telle que :

$$(*) \qquad \varphi_i(x) - \sum_j \lambda_{ij}\, \psi_j(x) \in \mathcal{J}_G(f).$$

Considérons le difféomorphisme de (germes) d'espaces de paramètres

$$U \xrightarrow{\Lambda} V$$

donné par les formules :

$$v_j = \sum_i \lambda_{ij}\, u_i .$$

Via Λ les déploiements :

$$F'_2 \text{ et } F_3 = f(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij}\, \psi_j(x)\right)$$

sont équivalents.

Mais $(*)$ ci-dessus nous dit que F_3 et F'_1 sont infinitésimalement équivalents, donc, d'après le théorème 2 (chapitre II), F_3 et F'_1 sont équivalents.

Donc le théorème d'unicité est démontré.

On a donc une notion de DEPLOIEMENT UNI-VERSEL....

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Bierstone : "Smooth functions invariant under the action of a finite group". (à paraître)

[2] J. Dieudonné-J. Carrel : "Invariant theory, old and new". Adv. in Math. 1970.

[3] G. Glaeser : "Fonctions composées différentiables". Ann. of Math. 77, 1963 pp. 193-209.

[4] B. Malgrange : "Ideals of differentiable functions". Oxford 1964.

[5] J. Mather : "Stability of C^∞ mappings : I, the division theorem". Ann. of.Math. 87, 1968, pp. 89-104.

[6] V. Poénaru : "Analyse Différentielle". Springer Lecture Notes 371 (1974)

[7] V. Poénaru : "Lectures on the singularities of C^∞ mappings". C.I.M.E. 1974 (à paraître).

[8] G. Schwarz : "Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group" (à paraître).

[9] R. Thom : "Stabilité structurelle et morphogénèse." Benjamin 1972.

[10] R. Thom : "La théorie des catastrophes" dans : Manifolds, Warwick 1973.

[11] H. Weyl : "The classical groups". Princeton 1946.

[12] V. M. Zakalioukine : "Teorema versalnosti" (en russe) Funcl. Anal.