

PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES D'ORSAY

**Sur la structure des sphères
d'homotopie lisses en dimension 3 (I)**

(pages 1 - 234)

par

Valentin POENARU

Juin 1971

SUR LA STRUCTURE DES SPHERES D'HOMOTOPIE LISSES DE

DIMENSION 3 .

(première partie)

par

Valentin Poénaru

Faculté des Sciences d'Orsay
Département de Mathématiques.

INTRODUCTION.

Le présent mémoire contient l'essentiel de la démonstration des théorèmes annoncés dans les notes [15], [15bis]. Notre principal résultat est un théorème de structure (le théorème B ci-dessous). Dans une seconde partie du mémoire on va montrer comment la totalité des résultats de [15], [15bis], et quelques autres, s'y déduisent.

Dans [15] on avait déjà annoncé que, si Σ_3 est une sphère d'homotopie lisse, de dimension 3, toutes les anses d'indice 1 de $\Sigma_3 \times I$ peuvent être tuées (voir aussi le travail de Wall [22]). D'autre part, la Conjecture de Poincaré dit qu'on peut déjà tuer les anses d'indice 1 de Σ_3 . Notre théorème de structure, se place, en quelque sorte, à mi-chemin entre ces deux énoncés.

Pour pouvoir expliquer tout cela, on commence par donner quelques définitions. On se place dorénavant, sauf mention explicite du contraire, dans la catégorie différentiable (C^∞) . Si X est une variété différentiable, le double de X : $2X$, sera, par définition, la variété différentiable obtenue en prenant deux exemplaires disjoints de X et en recollant leurs bords, suivant l'application identique: $id(\partial X) : \partial X \longrightarrow \partial X$. (En particulier, si $\partial X = \emptyset$, $2X$ consiste de deux exemplaires disjoints, de X). On va considérer l'inclusion $X \subset 2X$, qui identifie X avec le premier des deux termes $X + X = 2X$, ce qui définit une paire canonique $(2X, X)$, déterminée à difféomorphisme près. On a aussi une involution canonique : $i(X) : 2X \xrightarrow{\approx} 2X$ qui permute les deux termes de la somme $X + X = 2X$, et dont l'ensemble des points fixes est leur bord commun.

On considère maintenant la paire canonique:

$$(2(p \# (S_1 \times D_2) ; p \# (S_1 \times S_2)) = (p \# (S_1 \times S_2) , p \# (S_1 \times D_2))$$

(où $\#$ signifie somme connexe de variétés et: $p \# X_n = \underbrace{X_n \# X_n \# \dots \# X_n}_{p \text{ fois}}$).

Dans $p \# (S_1 \times S_2)$ on se donne p cercles différentiables (= sous-variétés diffeomorphes à S_1) , deux-à-deux disjoints: $\Sigma^1, \dots, \Sigma^p$. Soit T le triple:

$$T = (p \# (S_1 \times S_2) ; p \# (S_1 \times D_2) , \bigcup_{i=1}^p \Sigma^i) .$$

On dira que T est FAIBLEMENT NON-NOUE s'il existe un diffeomorphisme (de paires):

$$(p \# (S_1 \times S_2) , \bigcup_{i=1}^p \Sigma^i) \xrightarrow{\sim} [(S_1^1 \times S_2^1 , S_1^1 \times x_1) \#$$

$$(S_1^2 \times S_2^2 , S_1^2 \times x_2) \# \dots \# (S_1^p \times S_2^p , S_1^p \times x_p)]$$

(où $x_i \in S_2^i$, et les opérations de somme connexe ne touchent pas aux $S_1^i \times x_i$).

(Remarque importante: Tous les diffeomorphisme $(p \# (S_1 \times S_2)) \xrightarrow{f} (p \# (S_1 \times S_2))$,

considérés dans ce mémoire, s'étendent à un diffeomorphisme

$$(p \# (S_1 \times D_3)) \xrightarrow{F} (p \# (S_1 \times D_3)) , \text{ c'est-à-dire, qu'ils donnent lieu à un}$$

diagramme commutatif de diffeomorphismes et de plongements:

$$\begin{array}{ccc} \partial(p \# (S_1 \times D_3)) = p \# (S_1 \times S_2) & \xrightarrow[\approx]{f} & p \# (S_1 \times S_2) = \partial(p \# (S_1 \times D_3)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p \times (S_1 \times D_3) & \xrightarrow[\approx]{F} & p \times (S_1 \times D_3) . \end{array}$$

On dira, que T est MOYENNEMENT NON-NOUE s'il existe une partition $p = n+m$

($n, m \in \{0, 1, \dots\}$) , et un diffeomorphisme de triples:

$$(p \# (S_1 \times S_2) ; p \# (S_1 \times D_2) , \bigcup \Sigma^i) \xrightarrow{\sim} [(S_1^1 \times S_2^1 ; S_1^1 \times D_2^1 , S_1^1 \times x_1) \# \dots \# (S_1^p \times S_2^p ; S_1^p \times D_2^p , S_1^p \times x_p)]$$

où $x_i \in \text{int } D_2^i$ si $i \leq n$ et $x_j \in S_2^j - D_2^j$ si $j = n+1, \dots, p = n+m$

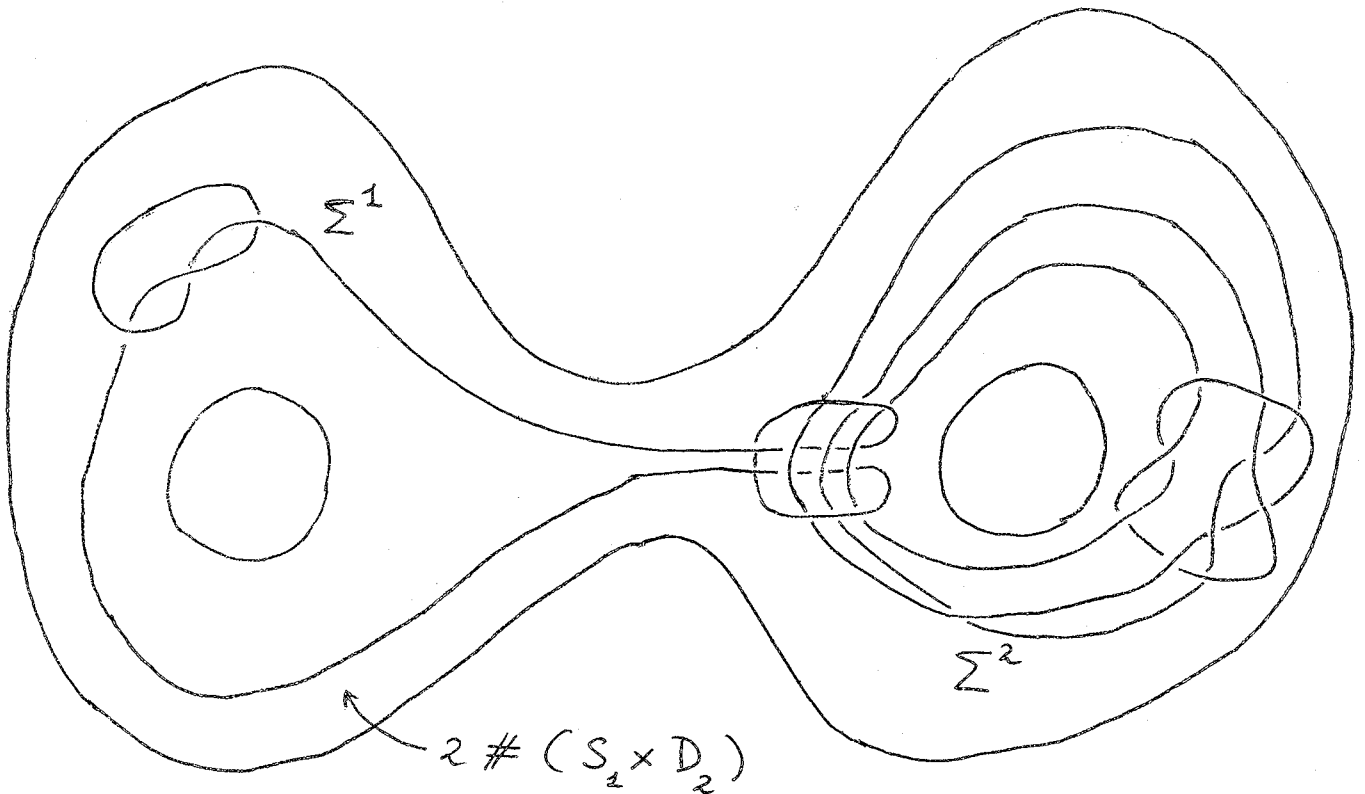


Figure 1. $\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \subset 2 \#(S_1 \times D_2) \subset 2 \#(S_1 \times 2 D_2)$ est faiblement non-noué (quoique $(2 \#(S_1 \times D_2), \Sigma^1 \cup \Sigma^2)$ soit noué!)

Enfin, on dira que T est FORTEMENT NON-NOUE, s'il existe un difféomorphisme de triples:

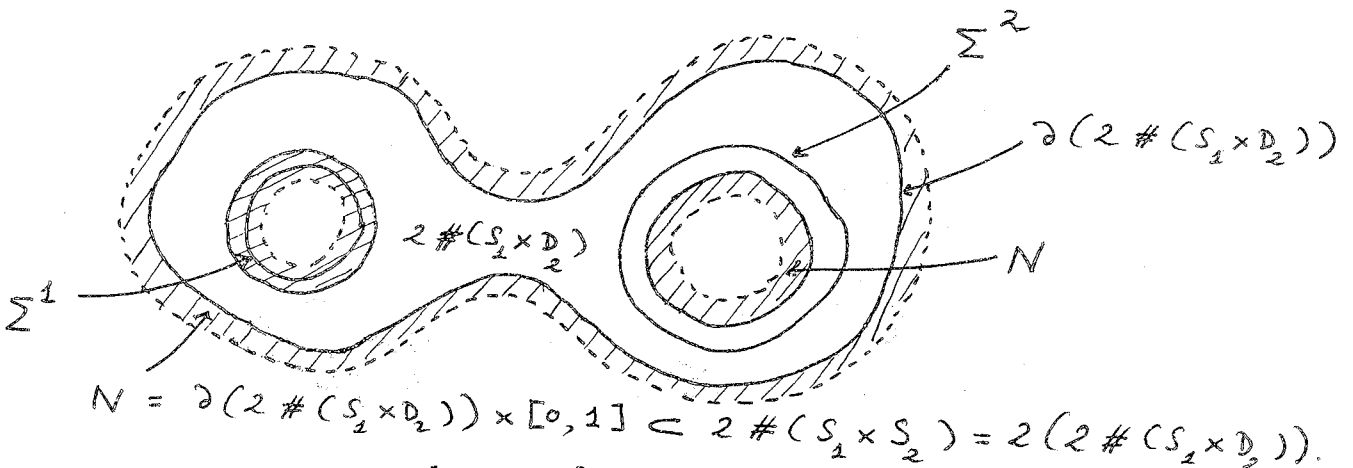


Figure 2. $\Sigma^1 \subset N, \Sigma^2 \subset 2 \#(S_1 \times D_2)$.

Le triple:

$(2 \#(S_1 \times S_2); 2 \#(S_1 \times D_2), \Sigma^1 \cup \Sigma^2)$ est moyennement non-noué.

$$(p \# (S_1 \times S_2) ; p \# (S_1 \times D_2) , \cup \Sigma^i) \xrightarrow{\approx} [(S_1^1 \times S_2^1 ; S_1^1 \times D_2^1, S_1^1 \times x_1) \# \dots \# (S_1^p \times S_2^p ; S_1^p \times D_2^p, S_1^p \times x_p)] ,$$

où tous les $x_i \in \text{int } D_2^i$ pour $i=1, \dots, p$.

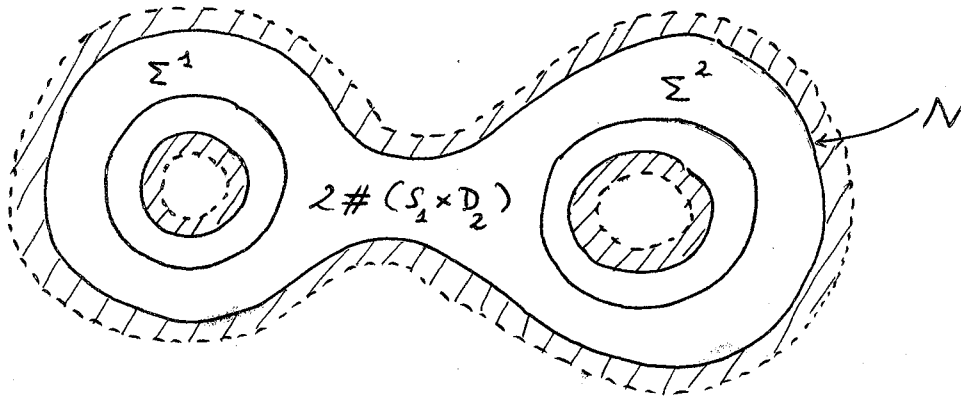


Figure 3. $\Sigma^1 \cup \Sigma^2 \subset 2\#(S_1 \times D_2) \subset 2\#(S_1 \times S_2)$ est fortement non-noué.

On a des implications évidentes:

fortement non-noué \Rightarrow moyennement non-noué \Rightarrow faiblement non-noué.

Je rappelle maintenant que, si M_3 est une variété C^∞ , de dimension 3, orientable, connexe et fermée, un diagramme de Heegard (de longueur p), de M_3 , est une paire de variétés $C^\infty : (M_3, T_3^p)$, telle qu'il y ait des difféomorphismes:

$$T_3^p = p \#(S_1 \times D_2) = M_3 - \text{int } T_3^p .$$

Le sens de notre "théorème de structure" deviendra plus clair si l'on commence par énoncer le résultat relativement facile, qui suit:

THEOREME A : "Soit X_3 une variété C^∞ , de dimension 3, orientable, connexe et fermée, qui admet un diagramme de Heegard de longueur $2p + q : (X_3, T_3^{2p+q})$, avec les propriétés suivantes:

Ils existent $(2p+q)$ cercles différentiables de $\partial T_3^{2p+q} : S_1^1, \dots, S_1^{2p+q}$, tels que:

1° S_1^i est homotope à 0 dans X_3 -int T_3^{2p+q} .

2° Si $i \leq p$: $S_1^{2i-1} \cap S_1^{2i}$ consiste exactement de deux points d'intersection transversale. Il n'y a pas d'autres intersection $S_1^j \cap S_1^l$ ($j \neq l$).

3° On considère la paire canonique:

$$(2T_3^{2p+q}, T_3^{2p+q}) = ((2p+q) \# (S_1 \times S_2), (2p+q) \# (S_1 \times D_2)).$$

Ils existent $2p+q$ plongements différentiables:

$$F_i : S_1 \times I \longrightarrow T_3^{2p+q} \xrightarrow{\text{incl. canonique}} 2 T_3^{2p+q},$$

tels que: 3°-1) $F_i^{-1}(\partial T_3^{2p+q}) = S_1 \times 0 = F_i^{-1}(S_1^i)$.

3°-2) $F_i(S_1 \times I)$ coupe ∂T_3^{2p+q} transversalement.

3°-3) $F_i(S_1 \times I)$ et $F_j(S_1 \times I)$ se coupent transversalement et:

$$\pi_0(S_1^i \cap S_1^j) \xrightarrow{\approx} \pi_0(F_i(S_1 \times I) \cap F_j(S_1 \times I))$$

est une bijection (où $\pi_0 =$ l'ensemble des composantes connexes par arcs).

3°-4) Le triple:

$$(2 T_3^{2p+q}; T_3^{2p+q}, \bigcup_{i=1}^{2p+q} F_i(S_1 \times I))$$

est FORTEMENT NON-NOUE.

Alors $X_3 = S_3$ (difféomorphisme)." \square

THEOREME B (Le théorème de structure):

"Soit Σ_3 une sphère d'homotopie lisse de dimension 3. Ils existent des nombres $p, q \geq 0$ (dépendant de Σ_3) et un diagramme de Heegard de longueur $2p+q$, de Σ_3 : (Σ_3, T_3^{2p+q}) , avec les propriétés suivantes:

Ils existent $(2p+q)$ cercles différentiables de

$\partial T_3^{2p+q} : S_1^1, \dots, S_1^{2p+q}$, tels que:

1° S_1^i est homotope à 0 dans $\Sigma_3 - \text{int } T_3^{2p+q}$.

2° Si $i \leq p$: $S_1^{2i-1} \cap S_1^{2i}$ consiste exactement de deux points d'intersection transversale. Il n'y a pas d'autres intersections $S_1^j \cap S_1^l$ ($j \neq l$).

3° On considère la paire canonique:

$$(2 T_3^{2p+q}, T_3^{2p+q}) = ((2p+q) \# (S_1 \times S_2), (2p+q) \# (S_1 \times D_2))$$

Il existe un $r \leq q$ et $(2p+q)$ plongements différentiables:

$$\begin{array}{ccc} F_i : S_1 \times I \longrightarrow T_3^{2p+q} & \xrightarrow{\text{incl. canonique}} & 2 T_3^{2p+q} \\ F_{2p+r+j} : S_1 \times I \longrightarrow 2T_3^{2p+q} - \text{int } T_3^{2p+q} & \xrightarrow{\text{incl. canonique}} & 2 T_3^{2p+q} \end{array}$$

($i=1, \dots, 2p+r$, $j=1, \dots, q-r$), tels que:

3°-1) $F_i^{-1}(\partial T_3^{2p+q}) = S_1 \times 0 = F_i^{-1}(S_1^i)$.

3°-2) $F_i(S_1 \times I)$ coupe ∂T_3^{2p+q} transversalement.

3°-3) $F_i(S_1 \times I)$ et $F_j(S_1 \times I)$ se coupent transversalement, et:

$$\pi_0(S_1^i \cap S_1^j) \xrightarrow{\approx} \pi_0(F_i(S_1 \times I) \cap F_j(S_1 \times I))$$

est une bijection.

3°-4) Le triple:

$$(2 T_3^{2p+q}, T_3^{2p+q}, \bigcup_{i=1}^{2p+q} F_i(S_1 \times I))$$

est MOYENNEMENT NON-NOUE.

4° Soient x_1^i, x_2^i les deux points de $S_1^{2i-1} \cap S_1^{2i}$ ($i \leq p$), et supposons que $\partial T_3^{2p+q}, S_1^{2i-1}, S_1^{2i}$ soient orientées. Alors:

$$\text{int}_{x_1}^i(S_1^{2i-1}, S_1^{2i}) \cdot \text{int}_{x_2}^i(S_1^{2i-1}, S_1^{2i}) = -1 \quad \square$$

Remarques: I. En utilisant le lemme de Dehn-Papakyriakopoulos [11], on voit très facilement que la propriété 1° (théorèmes A, B) est équivalente à: 1°-bis. Ils existent $2p+q$ plongements C^∞ :

$$G_i : D_2 \longrightarrow \Sigma_3 - \text{int } T_3^{2p+q}, \text{ tels que:}$$

$$1^\circ\text{-bis-1) } G_i(\partial D_2) = S_1^i$$

$$1^\circ\text{-bis-2) } G_i^{-1}(\partial T_3^{2p+q}) = \partial D_2.$$

$$1^\circ\text{-bis-3) } G_i(D_2) \text{ coupe } \partial T_3^{2p+q} \text{ transversalement.}$$

1°-bis-4) Si $i \leq p$: $G_{2i-1}(D_2)$ et $G_{2i}(D_2)$ se coupent transversalement, suivant un arc d'extrémités x_1^i, x_2^i . Il n'y a pas d'autres intersections $G_j(D_2), G_\ell(D_2)$ ($j \neq \ell$).

En fait quand on démontre le théorème B on trouve directement 1°-bis, sans passer par 1°.

II. La propriété 4° (théorème B) est équivalente à: 4°-bis. Si $i \leq p$, les voisinages réguliers, C^∞ , de $S_1^{2i-1} \cup S_p^{2i}$ dans ∂T_3^{2p+q} , peuvent se plonger différemment dans R_2 .

Pour la commodité de l'exposé on énonce aussi un corollaire trivial du théorème B:

COROLLAIRE B' : "L'énoncé du théorème B reste vrai si l'on remplace le terme:

MOYENNEMENT NON-NOUE

par le terme:

FAIBLEMENT NON-NOUE." □

Ce corollaire pourrait se démontrer directement en utilisant les techniques de la Thèse de l'auteur [12]. Ces techniques sont d'ailleurs largement utilisées dans ce mémoire

Le corollaire B', (plus une petite construction supplémentaire, voire [15bis] et la seconde partie de ce mémoire) suffit déjà, pour tuer les anses

d'indice 1 de $\Sigma_3 \times I$ ([15], [15bis], [22]) (corollaire C ci-dessous). Le corollaire B' se place au niveau de la figure 1, tandis que le théorème A nous dit que "les conditions de la figure 3" permettent de tuer les anses d'indice 1 de X_3 . Notre théorème de structure se place au niveau de la figure 2, et le progrès réalisé par cette figure, par rapport à la figure 1, est, en quelque sorte, la motivation de ce travail. Il existe un certain espoir que le théorème de structure contient une description suffisamment explicite de Σ_3 , pour nous permettre d'aller plus loin.

On énonce, pour finir, deux autres corollaires du théorème B, sur lesquels on va revenir dans une seconde partie de ce travail (voir aussi [15], [15bis], [22]).

COROLLAIRE C : "Soit Σ_3 une sphère d'homotopie lisse de dimension 3, et $D_3 \subset \Sigma_3$ un 3-disque plongé différemment. On peut réaliser $(\Sigma_3 - \text{int } D_3) \times I$, en ajoutant des anses d'indice 2 et 3 à D_4 :

$$(\Sigma_3 - \text{int } D_3) \times I = D_4 + (\varphi_2^1)_+ \dots + (\varphi_2^p)_+ + (\varphi_3^1)_+ \dots + (\varphi_3^p)_+ .$$

Donc :

$$\Sigma_3 \times I = D_4 + (\varphi_2^1)_+ \dots + (\varphi_2^p)_+ + (\varphi_3^1)_+ \dots + (\varphi_3^{p+1})_+ \quad " \quad \square$$

Ce résultat a été obtenu, aussi, indépendamment par C.T.C. Wall [22].

Je rappelle aussi le résultat "standard" suivant (voir, par exemple [15bis]) :

"Soit X_3 une variété C^∞ , orientable, connexe et fermée. Soit, aussi,

(X_3, T_3^r) un diagramme de Heegard quelconque de X_3 , où :

$$T_3^r = (S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^r \times D_2^r) .$$

Soit $O_i =$ le centre de D_2^i .

X_3 est une sphère d'homotopie si et seulement si, ils existent des applications continues

$$\ell_i : S_1 \longrightarrow \partial T_2^r \quad (i = 1, \dots, r) ,$$

telles que:

- (i) ℓ_i est homotope (dans T_2^r) à l'application: $S_1 = S_1^i \times O_i$.
- (ii) ℓ_i est homotope à 0, dans X_3 -int T_2^r . " \square

Le corollaire D est une variante isotopique de la proposition homotopique donnée ci-dessus.

COROLLAIRE D : "Soit Σ_3 une sphère d'homotopie lisse. Il existe un $r=r(\Sigma_3)$ et un plongement C^∞ :

$$h : (S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^r \times D_2^r) \longrightarrow \Sigma_3$$

tel que $(\Sigma_3, \text{Image } h)$ soit un diagramme de Heegard, et des plongements C^∞ :

$$L_i : S_1 \longrightarrow \partial((S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^r \times D_2^r))$$

ayant les propriétés suivantes:

- (i) L_i est isotope (dans $(S_1^1 \times D_2^1) \# \dots \# (S_1^r \times D_2^r)$), au plongement $C^\infty : S_1 = S_1^i \times O_i$
- (ii) hL_i est isotope à 0, (c'est-à-dire $hL_i(S_1)$ est bord d'un disque plongé différemmentiellement) dans Σ_3 -int (Image h). " \square

Pendant l'élaboration de ce travail l'auteur a été subventionné ou hébergé par plusieurs institutions auxquelles il tient à remercier ici: Harvard University, Northeastern University, National Science Foundation (NSF Grant G.P. 6299), l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, et la Faculté des Sciences d'Orsay.

x

x

x

Le plan du mémoire: On a commencé par un chapitre 0, de caractère en grande partie expositoire, contenant les préliminaires de topologie différentielle nécessaires pour la suite. On y trouvera, entre autres, une version "sans variétés de dimension infinie" du théorème de transversalité de Thom-Abraham.

Le chapitre I introduit une topologie "à la Zariski" pour les immersions génériques et contient l'énoncé du LEMME FONDAMENTAL .

Le chapitre II montre comment ce lemme implique le théorème de structure (théorème B ci-dessus).

Les chapitres III-IV, qui sont la partie essentielle du travail sont consacrés à la démonstration du LEMME FONDAMENTAL . On y développe trois techniques plus ou moins indépendantes: un foncteur d'épaississement (thickening), un procédé d'élimination des points triples, par "l'inversion" d'un certain type de projection d'espace-quotient, et une technique d'invariance par rapport à la chirurgie (surgery), en dimension 3. C'est la confluence de ces trois choses qui nous permet de prouver le lemme fondamental.

Le chapitre V démontre le théorème A.

LISTE DE SYMBOLES ET TERMES EMPLOYES (avec l'endroit où ils apparaissent pour la première fois).

$\mathcal{C}l(\dots)$ va désigner l'adhérence ("closure") de l'ensemble (\dots)

$\pi_0(X)$ va désigner l'ensemble des composantes connexes (par arcs) de l'ensemble X . $\# E$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E

$X_1 \oplus_Y X_2$ paragraphe 0.1.

anse négative par.0.2.

$M^i(f), M_i(f)$ par.0.4.

générique-au-bord par.0.4.

$E^i = i$ -ème puissance cartésienne de E .

$S^i E = i$ -ème puissance symétrique de E .

$\text{diag}_i E \subset \text{Diag}_i E \subset E^i$ } par.0.4.

$\delta_E^i \subset \Delta_E^i \subset S^i E$ }

variété faible par.0.4.

*-équivalence déf.1.1.

3-disque à trous déf.1.2.

$\Phi(f)$ déf.1.3.

Ψ , relation d'équivalence f-admissible déf.1.4.

$f(\Psi) : X/\Psi \longrightarrow Y$ déf.1.4.

La Z-topologie (de $\Phi(f)$) déf.1.5.

$\hat{\mathcal{C}l}_Z(P)$ lemme 1.6.

formation (X, f, Y, W) déf.1.7.

$h(X, f, Y, W) : H(X, f, Y, W) \longrightarrow Y$ déf.1.8.

$(K_3, s(K_3)), j(K_3), \bar{K}_3, \delta \bar{K}_3$ déf.3.1.

variété singulière X_3 déf.3.2.

$s(X_3), \partial X_3$ lemme 3.1.

j , immersion (générique) d'une variété singulière déf.3.3.

Z-topologie de $\Phi(j)$ déf.3.4.

$\Psi(j)$ déf.3.5.

$K_2 = (K_2)_2 + (K_1)_1 + K_0$ déf.3.5.1

$(k_2, p), j(k_2), \bar{k}_2, \delta \bar{k}_2, \partial_0 \bar{k}_2$ déf.3.6.

2-polyèdre singulier (K_2, f, M_3) }
 $s(K_2) =$ ensemble singulier, ∂K_2 } déf. 3.7.

$M_2(f) \hookrightarrow \hat{M}_2(f)$
 $\downarrow \pi \quad \quad \downarrow \hat{\pi}$
 $M^2(f) \hookrightarrow \hat{M}^2(f)$ déf.3.7.1

$\Theta_3(K_3), \Theta_3(f)$ lemme 3.2.

difféomorphisme (de 2-polyèdres singuliers) déf.3.9.

complètement collapsible déf.3.10.

$K_2 = K_2^i \# \bar{k}_2^1 \# \dots \# \bar{k}_2^r$ déf.3.10.

spécifier une branche (pour une résolution des singularités de \bar{K}_3) .. déf.3.12.

résolution des singularités: $\pi : V_3 \longrightarrow X_3$
 (pour (K_2, f, M_3) , $\hat{K}_2 \xrightarrow{\hat{\pi}} K_2$) déf.3.13.

foncteur d'épaississement:
 $\theta : (V_3 \xrightarrow{\pi} X_3) = (\Theta_4(X_3), \theta(\pi), V_3)$ lemme 3.5.

opérations élémentaires $O(1), O(2), O(3)$, projection d'espace-quotient
 du type $O(i)$, cohérence déf.3.15.

opération $O(0)$ (dégénérée) déf.3.16.

séquence principale de longueur q déf.3.17.

relation d'équivalence acyclique lemme 3.7.

k -anneau singulier $(S_1 \times I)_k$ déf. 3.17.0

opérations A_1, A_2 déf.3.18, 3.18.1

branches spécifiées (non-spécifiées) $M_{\pm}^{\pm}(p), M_{\pm}^2(p)$...(remarque après le lemme 3.9)

$p^{\#} : s(K_2^i) \longrightarrow s(K_2)$ lemme 3.15.

- $\sigma(p)$, \hat{M}_x^2 , M_x^2 déf. 3.19
- $P_\#$ lemme 3.16.
- glissement élémentaire: $(L_2, g, M_3) \Rightarrow (L_2, \hat{g}, M_3)$,
- disques actifs, disques associés déf. 3.20
- chemin de J.H.C. Whitehead déf. 3.21
- $b(h)$ = le nombre de bouts de $\Psi(h)$
- $P_2 \xrightarrow{p(h)} P_2^m \xrightarrow{q(h)} P_2^{m+b(h)} \xrightarrow{r(h)} P_2/\Psi(h)$ } déf. 3.22
- $P_2 \xrightarrow{p(h)} P_2/h \xrightarrow{q(h)} P_2/\Psi(h)$
- $p(h)^\# : s(P_2/h) \longrightarrow s(P_2)$ déf. 3.22.1
- inclusion canonique: $i : s(L_2/g) \longrightarrow s(L_2/\hat{g})$ déf. 3.23.
- $2(M_n \text{ rel } N_{n-1})$ déf. 3.24.
- bonne présentation des singularités: $P_2 = P_2^1 \# D_2^1 \#$ déf. 3.25.
- successeur, succession $\Sigma = \{(p, \chi(p)), \dots\}$ déf. 3.26.
- bourgeon, bourgeonnement $(\beta P_2, \beta h, M_3)$ } déf. 3.26.1
- $s(p) \in \sigma(\beta P_2/\beta h) \subset s(\beta P_2/\beta h)$
- η = inverse de $p(h)^\#$ compatible avec la succession Σ } déf. 3.27.
- $[\Sigma \longrightarrow p_i] = \chi(p_i)$
- succession Σ_1 , bourgeon $A(p)$, projection $P(p)$ lemme 3.21.
- isotopie à la source, au but, de seconde espèce déf. 3.27.1
- succession vide , bourgeonnement total déf. 3.28.
- application excellente déf. 3.29.
- $([\beta K_2], [\beta f], M_3)$ déf. 3.30.
- conditions T et $E(f)$ déf. 3.31.
- bourgeonnement $\bar{\beta}$, projection P_i , succession Σ_2 lemme 3.21.2
- $\mu_\pm(g, x)$, $\hat{\mu}_\pm(g, x)$ lemme 3.22.
- la relation d'ordre $\omega(\Gamma, x)$ sur le graphe $\Gamma \ni x$ déf. 3.32.

fibré singulier $\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma$, fibres du type $A(A^*)$,

∂E déf. 3.33.

fibré dual: $\xi^* : \Gamma \longrightarrow E^* \longrightarrow \Gamma$ déf. 3.34.

$\rho(\Gamma) \subset \Gamma$ points de ramification, Γ_i , γ_i , ϵ_i lemme 3.25.

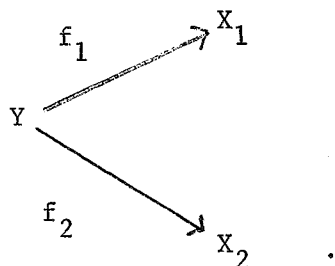
sous-ensemble "bon" lemme 3.26.

(triple) défini comme à la fin du lemme 3.26 lemme 3.26.

(définition "magique").

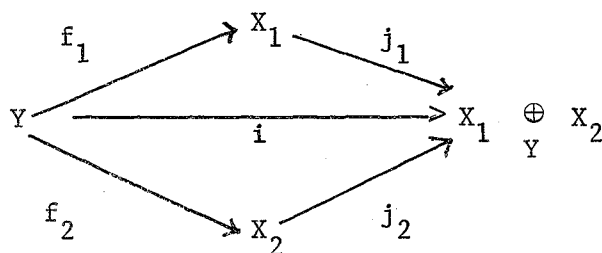
CHAPITRE 0 : PRELIMINAIRES.

0.1) Somme ("amalgamée") d'espaces topologiques: On va considérer des espaces topologiques Y, X_1, X_2 et des applications continues f_1, f_2 comme ci-dessous:



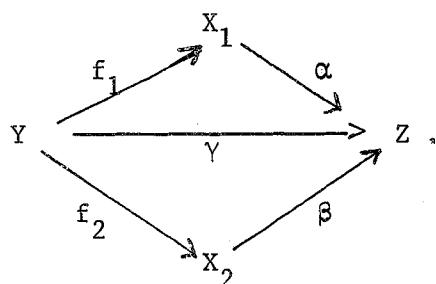
La somme (amalgamée) de X_1 et X_2 suivant (Y, f_1, f_2) qu'on désigne par $X_1 \underbrace{\oplus}_{(Y, f_1, f_2)} X_2$, ou souvent, (par abus de notation): $X_1 \oplus_Y X_2$, est un espace

topologique muni d'applications continues, formant un diagramme commutatif comme ci-dessous:



et qui résout le "problème universel" suivant:

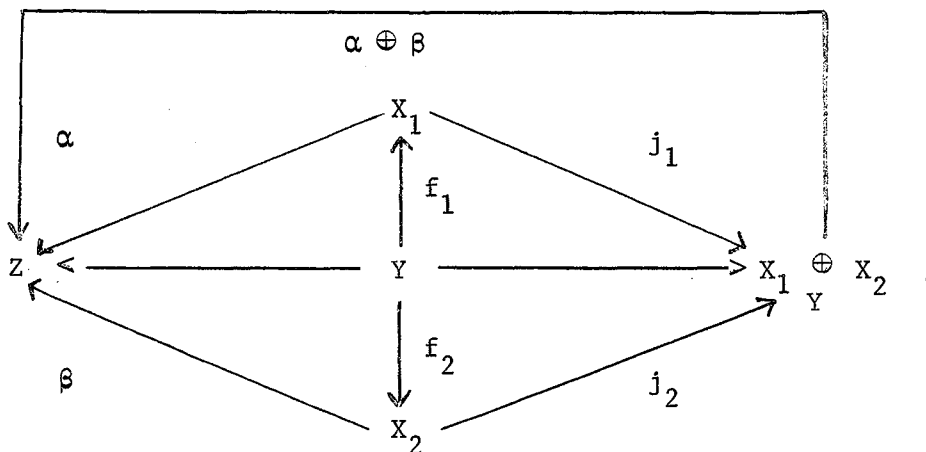
Considérons un diagramme commutatif:



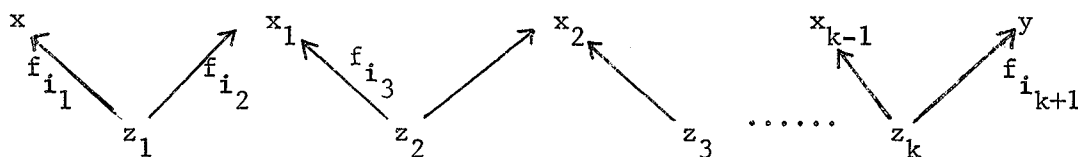
Il existe alors une application continue, unique:

$$X_1 \oplus_Y X_2 \xrightarrow{\alpha \oplus \beta} Z$$

qui rend commutatif le diagramme suivant:



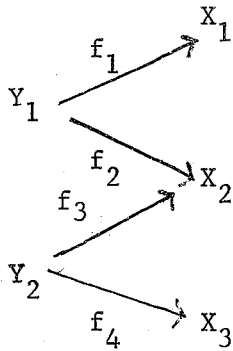
$X_1 \oplus_Y X_2$ est l'espace quotient de la réunion disjointe $X_1 + X_2$, divisée par la relation d'équivalence définie comme suit: $x, y \in X_1 + X_2$ sont équivalents, si et seulement s'il existe des z_1, \dots, z_k (en nombre fini), dans Y tels que:



où $x_i \in X_1 + X_2$ et $i_j \in \{1, 2\}$.

Si $X_1, X_2, Y, f_1, f_2, Z, \alpha, \beta$ appartiennent à la catégorie C^∞ on dit que $\alpha \oplus \beta$ est faiblement différentiable.

On peut considérer aussi:



et définir: $X_1 \oplus_{Y_1} X_2 \oplus_{Y_2} X_3$. On a des propriétés d'associativité évidentes.

Dans le cas particulier où X_1, X_2 sont des variétés C^∞ à bord, avec $\dim X_1 = \dim X_2$, Y une variété C^∞ à bord de dimension $\dim X_1 - 1$ et $f_i \in Pl^\infty(Y, \partial X_i)$ = espace des plongements $C^\infty : Y \longrightarrow \partial X_i$, l'espace $X_1 \oplus_Y X_2$ se trouve muni d'une structure de variété C^∞ , canonique (par abus de notation $X_1 \oplus_Y X_2$ va désigner, dans ce cas-là cette variété C^∞). Les applications $C^\infty : X_1 \oplus_Y X_2 \longrightarrow \dots$ sont automatiquement "faiblement différentiables", mais pas réciproquement. On appelle $X_1 \oplus_Y X_2$ la "somme des variétés différentiables X_1 et X_2 (suivant Y)". Un cas particulier est la somme connexe # (des variétés à bord). Un autre cas particulier est "l'adjonction d'une anse (d'indice λ)" qu'on va rappeler dans le paragraphe suivant.

0.2) Espaces fonctionnels et anses: Si X et Y sont deux variétés C^∞ , on va désigner par $C^\infty(X, Y)$ l'ensemble des applications $C^\infty : X \longrightarrow Y$. Si Z est une troisième variété, une application $Z \longrightarrow C^\infty(X, Y)$ est différentiable, par définition, si l'application correspondante $Z \times X \longrightarrow Y$ est C^∞ .

On fait donc l'identification:

$$C^\infty(Z, C^\infty(X, Y)) = C^\infty(Z \times X, Y) .$$

$f \in C^\infty(X, Y)$ sera appelée une immersion si, pour chaque $x \in X$, la suite:

$$0 \longrightarrow T_x X \xrightarrow{T_x f} T_{f(x)} Y$$

est exacte. Une immersion qui est aussi injective est appelée un plongement .

On a ainsi trois espaces emboîtés: $Pl^\infty(X, Y) \subset Imm(X, Y) \subset C^\infty(X, Y)$.

$Diff^\infty(X, Y) \subset C^\infty(X, Y)$ va désigner les difféomorphismes $X \longrightarrow Y$ et

$Diff^\infty(X) = Diff^\infty(X, X)$.

Les éléments de

$$C^\infty(I, Imm(X, Y)) = Imm_I(X \times I, Y \times I) ,$$

(où $f \in Imm_I(X \times I, Y \times I) \subset Imm(X \times I, Y \times I)$ si et seulement si le diagramme

suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{f} & Y \times I \\ & \searrow & \swarrow \\ & I & \end{array}$$

sont appelés homotopies régulières . Les éléments de

$$C^\infty(I, Pl^\infty(X, Y)) = Pl_I^\infty(X \times I, Y \times I)$$

sont appelés isotopies (différentiables).

On va considérer maintenant une variété C^∞ à bord M_n et

$D_n = D_\lambda \times D_{n-\lambda}$ de bord

$$\partial D_n = S_{n-1} = S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda} + D_\lambda \times S_{n-\lambda-1} .$$

Si l'on part de:

$$\begin{array}{ccc} & & \partial D_n \\ & \nearrow i & \\ S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda} & & \\ & \searrow \varphi_\lambda & \\ & & \partial M_n \end{array}$$

où i est l'inclusion canonique, et $\varphi_\lambda \in Pl^\infty(S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda}, \partial M_n)$ on définit (la variété C^∞):

$$M_n + (\varphi_\lambda) = M_n \overbrace{\oplus}^{S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda}} (D_\lambda \times D_{n-\lambda}) .$$

C'est, par définition, M_n à laquelle on a ajouté l'anse d'indice λ , φ_λ .
 A difféomorphisme près, $M_n + (\varphi_\lambda)$ est déterminée par la classe d'isotopie de $\varphi_\lambda|_{S_{\lambda-1} \times O_{n-\lambda}} \in Pl^\infty(S_{\lambda-1}, \partial M_n)$ (où $O_{n-\lambda}$ = le centre de $D_{n-\lambda}$) et par la trivialisation du fibré normal de $\varphi_\lambda(S_{\lambda-1} \times O_{n-\lambda})$ dans ∂M_n , induite par φ_λ .

Ceci est le cas "absolu". On sera intéressé aussi dans le cas plongé, où M_n est sousvariété de N_p ($j : M_n \subset N_p$ étant l'inclusion canonique), et où l'on se donne un $\bar{\varphi}_\lambda \in Pl^\infty(D_\lambda \times D_{n-\lambda}, N_p)$ tel que

$$\bar{\varphi}_\lambda(D_\lambda \times D_{n-\lambda}) \cap M_n = \bar{\varphi}_\lambda(D_\lambda \times D_{n-\lambda}) \cap \partial M_n = \bar{\varphi}_\lambda(S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda}).$$

On définit le plongement $\varphi_\lambda \in Pl^\infty(S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda}, \partial M_n)$ par:
 $\varphi_\lambda = j^{-1} \circ \bar{\varphi}_\lambda|_{S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda}}$ et $M_n + (\varphi_\lambda)$ se trouve canoniquement plongé dans N_p . (On va désigner par $M_n + (\varphi_\lambda)$ la sousvariété correspondante et par abus de notation on écrira souvent $M_n + (\bar{\varphi}_\lambda)$ au lieu de $M_n + (\varphi_\lambda)$).

Tout ceci concerne les anses positives. On aura besoin aussi d'anses négatives.

On part d'un $\varphi_\lambda \in Pl^\infty(D_\lambda, M_n)$ tel que:

$$(\varphi_\lambda)^{-1}(\partial M_n) = \partial D_\lambda = S_{\lambda-1}$$

et qui rencontre ∂M_n transversalement. Il y a un $\bar{\varphi}_\lambda \in Pl^\infty(D_\lambda \times D_{n-\lambda}, M_n)$ déterminé univoquement (à isotopie près) par les conditions:

- a) $\bar{\varphi}_\lambda|_{D_\lambda \times O_{n-\lambda}} = \varphi_\lambda$
- b) $(\bar{\varphi}_\lambda)^{-1}(\partial M_n) = S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda}$
- c) $\bar{\varphi}_\lambda(D_\lambda \times S_{n-\lambda})$ rencontre ∂M_n transversalement.

Par définition:

$$M_n - (\varphi_\lambda) = M_n - \bar{\varphi}_\lambda(D_\lambda \times \text{int } D_{n-\lambda}).$$

Le passage $M_n \Rightarrow M_n - (\varphi_\lambda)$ est "l'adjonction" d'une anse d'indice λ , négative.

Les anses négatives sont automatiquement "plongées".

On va considérer maintenant deux $(m+1)$ -tuples:

$$(M_n; X_1, \dots, X_m) \text{ où: } (X_i \subset M_n) \text{ et:}$$

$$(M'_n; X'_1, \dots, X'_m) \text{ où: } (X'_i \subset M'_n) .$$

Un difféomorphisme entre ces deux $(m+1)$ -tuples, est un $f \in \text{Diff}^\infty(M_n, M'_n)$, tel que $f(X_i) = X'_i$.

On donne sans démonstration le lemme suivant qui est "standard"

[18]:

LEMME 0.1: "On considère un triple $(N_p; M_n, F)$ où $M_n \subset N_p - \partial N_p = \text{int } N_p$ est une sous-variété C^∞ et $F \subset N_p$ un fermé. On considère aussi $\Phi_\lambda \in \text{Pl}^\infty(D_\lambda \times D_{n-\lambda}, \text{int } N_p)$, $\Phi_{\lambda+1} \in \text{Pl}^\infty(D_{\lambda+1} \times D_{n-\lambda-1}, \text{int } N_p)$ tels que Φ_λ représente une anse d'indice λ ajoutée à M_n et $\Phi_{\lambda+1}$ une anse d'indice $\lambda+1$ ajoutée à $M_n + (\Phi_\lambda)$. On suppose que:

- (i) Image $\Phi_\lambda \cap F = \text{Image } \Phi_{\lambda+1} \cap F = \emptyset$.
- (ii) $\Phi_\lambda(O_\lambda \times S_{n-\lambda-1})$ et $\Phi_{\lambda+1}(S_\lambda \times O_{n-\lambda-1})$ ont exactement un point d'intersection transversale dans $\partial(M_n + (\Phi_\lambda))$.

On a un difféomorphisme:

$$(N_p; M_n, F) = (N_p; M_n + (\Phi_\lambda) + (\Phi_{\lambda+1}), F) . \square$$

COROLLAIRE 0.1.1: "On considère un triple $(N_p; M_n, F)$ comme avant, $\psi^{n-\lambda} \in \text{Pl}^\infty((D_{n-\lambda}, S_{n-\lambda-1}), (M_n, \partial M_n))$, et deux anses d'indice $\lambda+1$, plongées, pas nécessairement disjointes:

$$\Phi_{\lambda+1}^i \in \text{Pl}^\infty(D_{\lambda+1} \times D_{n-\lambda-1}, \text{int } N_p) \quad (i=1,2) .$$

On suppose que:

- (i) Image $\psi^{n-\lambda} \cap F = \text{Image } \Phi_{\lambda+1}^i \cap F = \emptyset$.
- (ii) $\psi^{n-\lambda}(S_{n-\lambda-1})$ et $\Phi_{\lambda+1}^i(S_\lambda \times O_{n-\lambda-1})$ ont exactement un point d'intersection transversale dans ∂M_n .

On a:

$$(N_p; M_n + (\Phi_{\lambda+1}^1), F) = (N_p; M_n + (\Phi_{\lambda+1}^2), F) .'' \quad \square$$

COROLLAIRE 0.1.2: "On considère un triple $(N_p; M_n, F)$ comme avant,

$\psi_i^{n-\lambda} \in \text{Pl}^\infty((D_{n-\lambda}, S_{n-\lambda-1}), (M_n, \partial M_n))$ ($i=1,2$) et $\Phi_{\lambda+1} \in \text{Pl}^\infty(D_{\lambda+1} \times D_{n-\lambda-1}, \text{int } N_p)$

une anse d'indice $\lambda+1$ ajoutée à M_n . On suppose que:

- (i) Image $\Phi_{\lambda+1} \cap F = \text{Image } \psi_i^{n-\lambda} \cap F = \emptyset$.
- (ii) $\Phi_{\lambda+1}(S_\lambda \times O_{n-\lambda-1})$ et $\psi_i^{n-\lambda}(S_{n-\lambda-1})$ ont exactement un point d'intersection transversale dans ∂M_n .

On a:

$$(N_p; M_n - (\psi_1^{n-\lambda}), F) = (N_p; M_n - (\psi_2^{n-\lambda}), F) .'' \quad \square$$

Pour fixer les notations, on rappelle aussi les définitions de la chirurgie de Morse (surgery) dont on aura besoin: On part d'un:

$$\psi_\lambda \in \text{Pl}^\infty(S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda+1}, \text{int } M_n)$$

On considère les identifications canoniques:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \partial(S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda+1}) \xrightarrow{\psi_\lambda} M_n - \psi_\lambda(S_{\lambda-1} \times \text{int } D_{n-\lambda+1}) \\
 & \nearrow \approx & \\
 S_{\lambda-1} \times S_{n-\lambda} & & \\
 & \searrow \approx & \\
 & & \partial(D_\lambda \times S_{n-\lambda})
 \end{array}$$

et l'on définit:

$$\mu(M_n; \psi_\lambda) = (M_n - \psi_\lambda(S_{\lambda-1} \times \text{int } D_{n-\lambda+1})) \oplus \underbrace{D_\lambda \times S_{n-\lambda}}_{S_{\lambda-1} \times S_{n-\lambda}}$$

C'est, par définition, le résultat de l'application d'une (opération de) chirurgie (de Morse) d'indice λ , à M_n . Il y a une relation évidente entre les anses (positives ou négatives) et la chirurgie (le bord de la variété qui résulte par adjonction d'anses est le bord initial auquel on applique une

chirurgie ...).

0.3) Rappels sur la théorie des immersions de Smale-Hirsch: (voir [17], [19], [8], [13], [7], [16], [5], [14]).

Les démonstrations de tous les théorèmes de ce paragraphe sont contenues (comme cas très particulier) dans [14].

THEOREME 0.2: "Soient $X' \subset X$ des sous-variétés emboîtées de X_1 , telles que:

- a) $\dim X = \dim X_1 \leq \dim Y = n$.
- b) $X_1 = X + (\text{des anses d'indices } \leq n)$.

On se donne $f \in \text{Imm}(X', Y)$ et on considère $\text{Imm}_f(X_1, Y) \subset \text{Imm}(X_1, Y)$, l'espace des immersions $X_1 \rightarrow Y$ qui étendent f , muni de la topologie C^∞ (et compacte - ouverte).

L'application de restriction:

$$\text{Imm}_f(X_1, Y) \longrightarrow \text{Imm}_f(X, Y)$$

est une fibration de Serre." \square

THEOREME 0.3: "Soit $X' \subset X$ telle que $X = (\text{le voisinage tubulaire de } X' \text{ dans } X) + (\text{des anses d'indice } < \dim Y)$.

On se donne $f \in \text{Imm}(X', Y)$ ($\dim Y \geq \dim X$) et on considère $R(TX, TY) = \text{l'espace des applications fibrées } TX \rightarrow TY$, injectives sur chaque $T_x X$, muni de la topologie $C-0$.

$R_{Tf}(TX, TY) \subset R(TX, TY)$ est l'espace des applications qui étendent Tf .

Dans ces conditions:

$$\text{Imm}_f(X, Y) \xrightarrow{T} R_{Tf}(TX, TY)$$

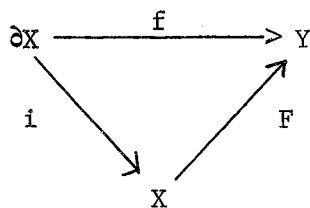
est une équivalence d'homotopie faible." \square

On remarque, enfin, que (par un théorème d'approximation facile),

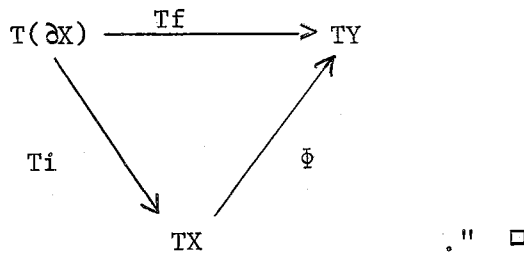
chaque fois que $f, g \in \text{Imm}(X, Y)$ se trouvent dans la même composante connexe de $\text{Imm}(X, Y)$ (donc sont reliées par un arc continu) elles sont régulièrement homotopes (donc, sont reliées par un arc C^∞).

On donne plusieurs applications plus ou moins immédiates:

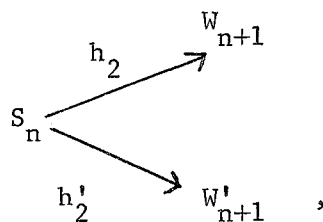
COROLLAIRE 0.4: "Soit X une variété à bord, de bord ∂X , et Y , telle que $\dim Y > \dim X$. On se donne $f \in \text{Imm}(\partial X, Y)$ et on désigne par $i: \partial X \subset X$ l'inclusion canonique. Il existe un $F \in \text{Imm}(X, Y)$ qui rend le diagramme suivant commutatif:



si et seulement s'il existe un $\Phi \in R(TX, TY)$ qui rend commutatif, à homotopie fibré près, le diagramme suivant:



COROLLAIRE 0.5: "Soit W_{n+1} un h-cobordisme entre deux exemplaires de S_n . Soient $h_i \in \text{Pl}^\infty(S_n, \partial W_{n+1})$ ($i = 1, 2$) les difféomorphismes entre S_n et les deux composantes de ∂W_{n+1} . On considère encore un exemplaire de W_{n+1} , qu'on va désigner par W'_{n+1} . A partir de:



on définit un nouvel h-cobordisme: $W_{n+1} \oplus_{S_n} W'_{n+1} = V_{n+1}$.

$h_1, h'_1 \in \mathcal{P}l^\infty(S_n, V_{n+1}) \subset \text{Imm}(S_n, V_{n+1})$ sont régulièrement homotopes." \square

COROLLAIRE 0.6: "Soit V_3 une 3-variété orientable. L'homomorphisme naturel:

$$\pi_0(\text{Imm}_0(S_2, V_3)) \longrightarrow \pi_2(V_3) ,$$

(où Imm_0 représente l'espace des immersions qui respectent les points-bases), est une bijection. En particulier, si $\pi_2(V_3) = 0$, deux immersions $f, g \in \text{Imm}(S_2, V_3)$ sont toujours régulièrement homotopes." \square (Pour la relation entre Imm_0 et Imm , voir [4].)

0.4) Rappels sur la transversalité; homotopies régulières génériques:

Dans ce paragraphe, on va supposer, sauf mention explicite du contraire, que X est compacte et que $\dim X \leq \dim Y$.

On va utiliser la définition suivante: si E est un espace vectoriel de dimension finie, (sur \mathbb{R}) et $F_1, \dots, F_k \subset E$ des sous-espaces vectoriels, on dira que F_1, \dots, F_k ont une intersection régulière si l'une des deux conditions équivalentes, énoncées ci-dessous, est satisfaite:

(i) $\text{cod}(F_1 \cap \dots \cap F_k) = \text{cod } F_1 + \dots + \text{cod } F_k$.

(ii) l'application:

$$E \longrightarrow E/F_1 \oplus \dots \oplus E/F_k$$

est surjective.

Pour $k=2$ cette condition est équivalente au fait que F_1, F_2 se coupent transversalement. Si k est quelconque, elle veut dire que: F_1 et F_2 se coupent transversalement, F_3 coupe $F_1 \cap F_2$ transversalement, F_4 coupe $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ transversalement, e.a.d.s.

Si $\partial X = \emptyset$, $f \in \text{Imm}(X, Y)$ est dite générique si $f|_{\text{int } X} \in \text{Imm}(\text{int } X, Y) \subset \text{Imm}(X, Y)$, et chaque fois que:

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in X, (x_i \neq x_j), f(x_i) = f(x_j),$$

les sous-espaces vectoriels:

$$T_{x_1} f(T_{x_1} X), \dots, T_{x_k} f(T_{x_k} X) \subset T_{f(x_1)} Y,$$

ont une intersection régulière.

Si $\partial X \neq \emptyset$, f sera dite générique si en plus de cette condition, $f|_{\partial X} \in \text{Imm}(\partial X, Y)$ est aussi générique. Dans le cas où $\dim X = \dim Y$, f est générique si et seulement si $f|_{\partial X}$ est générique.

Si $\partial X = \emptyset$, $f \in \text{Imm}(X, Y)$ est générique et $x_1, \dots, x_k \in X$ sont comme ci-dessus, on montre facilement qu'ils existent des voisinages V_i de x_i , U de $f(x_1) = \dots = f(x_k)$, et des difféomorphismes:

$$h_i : (V_i, x_i) \longrightarrow (T_{x_i} X, o), \quad h : (U, f(x_1)) \longrightarrow (T_{f(x_1)} Y, o),$$

tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} U \\ \downarrow \\ U \end{array} \begin{array}{c} V_i \\ \downarrow \\ T_{x_i} X \end{array} & \xrightarrow{f|_{U \cup V_i}} & U \\
 \downarrow U h_i & & \downarrow h \\
 \begin{array}{c} U \\ \downarrow \\ U \end{array} \begin{array}{c} T_{x_i} X \\ \xrightarrow{U T_{x_i} f} \\ T_{f(x_1)} Y \end{array} & & T_{f(x_1)} Y
 \end{array}$$

Si $\partial Y \neq \emptyset$ on va considérer aussi l'espace $\text{Imm}_{\partial}(X, Y) \subset \text{Imm}(X, Y)$ formé par les immersions $f : X \longrightarrow Y$ telles que $f^{-1}(\partial Y) = \partial X$.

$f \in \text{Imm}_{\partial}(X, Y)$ sera appelée générique-au-bord si:

- (i) $f|_{\text{int } X}$ est générique.
- (ii) Si $x_1, \dots, x_k \in \partial X$, $(x_j \neq x_i)$ et $f(x_j) = f(x_i)$, les sous-espaces:

$$T_{f(x_1)} \partial Y, T_{x_1} f(T_{x_1} X), \dots, T_{x_k} f(T_{x_k} X) \subseteq T_{f(x_1)} Y.$$

ont une intersection régulière (en particulier, cela implique que $f|_{\partial X} \in \text{Imm}(\partial X, \partial Y)$ est générique).

Comme tout-à-l'heure, on peut montrer sans peine que la situation locale est isomorphe à la situation infinitésimale.

Maintenant, si X et Y sont des espaces topologiques quelconques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue, on va désigner par $M^i(f) \subset X$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que: $\# f^{-1} f(x) \geq i$ (où $\# E =$ le nombre d'éléments de l'ensemble E). On a:

$$X = M^1(f) \supset M^2(f) \supset M^3(f) \supset \dots$$

Dorénavant, X et Y seront des variétés différentiables.

Pour la simplicité de l'exposé on va supposer maintenant que f est dans l'une des trois situations mutuellement exclusives, suivantes

- I. $\partial X = \emptyset, \partial Y = \emptyset$ et $f \in \text{Imm}(X, Y)$ est générique.
- II. $\partial X \neq \emptyset, \partial Y = \emptyset, \dim X = \dim Y$ et $f \in \text{Imm}(X, Y)$ est générique.
- III. $\partial X \neq \emptyset, \partial Y \neq \emptyset, f \in \text{Imm}_{\partial}(X, Y)$ est générique-au-bord.

Dans la situation II, $M^i(f)$ est toujours une variété-à-bord (anguleux) de la même dimension que X et Y . Au points du bord (de $M^i(f)$), $M^i(f)$ admet une description (à difféomorphisme près), comme suit: Dans un espace vectoriel de dimension $n = \dim X$ on choisit $p \leq i$ sous-variétés linéaires F_1, \dots, F_p , de dimension $n-1$, ayant une intersection régulière. Pour chacune de ces variétés on considère un des demi-espaces de dimension n (fermés) qu'elle détermine, et on le désigne par F_1^+, \dots, F_p^+ . Localement $M^i(f)$ sera comme $F_1^+ \cap F_2^+ \cap \dots \cap F_p^+$.

Dans le cas I, $M^i(f)$ est localement comme une (sous)-variété C^∞ de X , de dimension égale à: $\dim X - (i-1)(\dim Y - \dim X)$, sauf aux points

de $M^{i+1}(f) \subset M^i(f)$. Dans les points $M^{i+1}(f) \subset M^i(f)$, $M^i(f)$ possède des "singularités" faciles à décrire: elles sont comme des réunions de sous-variétés linéaires (de R^N), en position générale.

Dans le cas III, $M^i(f)$ est, localement comme une sous-variété C^∞ , à bord, propre de X , sauf aux points de $M^{i+1}(f) \subset M^i(f)$ (Une sous-variété $A \subset B$ est dite propre si $\partial A = A \cap \partial B \dots$).

On va définir le bord $\partial M^i(f) \subset M^i(f)$ comme suit: Dans le cas I: $\partial M^i(f) = \emptyset$, dans le cas II, $\partial M^i(f)$ est le bord de la variété-à-bord (anguleux) $M^i(f)$, dans le cas III, $\partial M^i(f) = M^i(f) \cap \partial X$.

Par définition, une application $\varphi : P \longrightarrow M^i(f)$, où P est une variété différentiable, est dite différentiable si la composition: $P \xrightarrow{\varphi} M^i(f) \subset X$ est C^∞ .

Une composante irréductible de $M^i(f)$ est, par définition, une paire (V, φ) , où V est une variété différentiable compacte, connexe, avec $\dim V = \dim M^i(f)$ et $\varphi : V \longrightarrow M^i(f)$ est une application différentiable ayant les propriétés suivantes:

- a) $V \xrightarrow{\varphi} M^i(f) \subset X$ est une immersion.
- b) $\varphi^{-1}(\partial M^i(f)) = \partial V$ (donc (V, φ) est en quelque sorte "maximale").
- c) Si $y \in M^i(f) - M^{i+1}(f)$ alors:

$$\# \varphi^{-1}(y) \leq 1 .$$

Dans ce qui suit, on va utiliser les notations suivantes: Si E est un ensemble quelconques on va désigner par E^i le produit cartésien:

$$E^i = E \times E \times \dots \times E \quad (i \text{ fois}) .$$

Si $S(i)$ est le groupe symétrique à i lettres, on a une action canonique $S(i) \times E^i \longrightarrow E^i$ et $E^i/S(i) = S^i E$ est la i -ème puissance symétrique.

On va désigner par π_i la projection canonique: $\pi_i : E^i \longrightarrow S^i E$. On va désigner par $\text{Diag}_i E \subset E^i$ l'ensemble des points $(x_1, \dots, x_i) \in E^i$ où au moins deux coordonnées sont égales. On va désigner par $\text{diag}_i E \subset \text{Diag}_i E$ l'ensemble des points (x_1, \dots, x_i) avec $x_1 = x_2 = \dots = x_i$. Enfin, on utilisera les notations:

$$\pi_i(\text{diag}_i E) = \delta_E^i \quad \text{et} \quad \pi_i(\text{Diag}_i E) = \Delta_E^i.$$

On peut caractériser les composantes irréductibles de $M^i(f)$ comme suit: On commence par considérer

$$X^i = \underbrace{X \times \dots \times X}_{i \text{ fois}} \xrightarrow{f \times \dots \times f = f^i} Y^i \supset \text{diag}_i Y.$$

On définit:

$$M_i(f) = (f^i)^{-1}(\text{diag}_i Y) - \text{Diag}_i X \subset X^i - \text{Diag}_i X.$$

C'est une sous-variété différentiable de X^i , et

$$\dim M_i(f) = \dim X - (i-1)(\dim Y - \dim X) = \dim M^i(f).$$

Si $\pi : X^i \longrightarrow X$ est la projection sur le premier facteur, on a une application, C^∞ , surjective, qui est une submersion:

$$\pi : M_i(f) \longrightarrow M^i(f).$$

On peut prouver sans peine le:

LEMME 0.7: (La résolution des singularités pour les immersions génériques):

"La variété $M_i(f)$ et l'application π sont complètement caractérisées, à difféomorphisme près, par les propriétés suivantes:

- 0) π est une submersion C^∞ .
- 1) $\dim M_i(f) = \dim M^i(f)$
- 2) $\pi^{-1}(\partial X) = \partial M_i(f)$
- 3) π est surjective et si $x \in M^i(f) - M^{i+1}(f)$ alors: $\# \pi^{-1}(x) = 1$

Si V_1, \dots, V_N sont les composantes connexes de $M_i(f)$, alors $(V_1, \pi|_{V_1}), \dots, (V_N, \pi|_{V_N})$ sont (toutes) les composantes irréductibles de $M_i^1(f)$. " \square

L'action naturelle

$$S(i) \times X^i \longrightarrow X^i$$

induit une action différentiable sans points fixes:

$$S(i) \times M_i(f) \longrightarrow M_i(f) .$$

On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 M_i(f) & \xrightarrow{\pi} & M_i^1(f) & \xrightarrow{f} & Y . \\
 \downarrow & & & \nearrow \hat{f} & \\
 M_i(f)/S(i) & & & &
 \end{array}$$

La flèche verticale est un revêtement, pas nécessairement connexe.

Supposons maintenant que $\partial X = \emptyset$ et que

$$\begin{array}{ccc}
 X \times I & \xrightarrow{\hat{f}} & Y \times I \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & I &
 \end{array}$$

soit une homotopie régulière. On dira que f est générique si:

1°. $f \in \text{Imm}_0(X \times I, (\text{int } Y) \times I) \subset \text{Imm}(X \times I, Y \times I)$ et f est générique-au-bord.

2° La fonction C^∞

$$\begin{array}{ccccc}
 M_i(f) & \xrightarrow{\pi} & M_i^1(f) \subset X \times I & \longrightarrow & I \\
 \downarrow & & & & \uparrow \\
 & & \psi_i(f) & &
 \end{array}$$

ne possède que des points critiques nondégénérés, qui sont tous contenus dans $M_i(f) - \partial M_i(f) - \pi^{-1}(M^{i+1}(f))$.

3°. Aucun $t_0 \in I$ n'est valeur critique de $\psi_i(f)$ et $\psi_j(f)$ ($i \neq j$) à la fois.

4°. Si $p, q \in M_i(f)$ sont des points critiques de $\psi_i(f)$, tels que $\psi_i(f)(p) = \psi_i(f)(q)$, alors:

$$(f \circ \pi)(p) = (f \circ \pi)(q) \quad (\text{dans } Y \times I)$$

Un $t_0 \in I$ qui est valeur singulière de l'une des fonctions $\psi_i(f)$ sera appelé niveau singulier de f. Il n'y a qu'un nombre fini de niveaux singuliers, les autres points de I seront appelés niveaux réguliers.

Avant d'aller plus loin on va donner une version très générale de la THEORIE DE LA TRANSVERSALITE (de Thom [20] et Abraham [1]), utile pour ce mémoire, comme pour ses développements ultérieurs. On va toujours supposer que la source, X , est compacte, mais comme d'habitude on peut modifier, convenablement, les énoncés et les démonstrations, pour le cas localement compact.

Si P est une partie arbitraire de $C^\infty(X, Y) : P \subset C^\infty(X, Y)$, une application $\varphi : P \longrightarrow C^\infty(X_1, Y_1)$ est dite différentiable, si pour toute variété $C^\infty : Z$, et toute application différentiable $f : Z \longrightarrow P$, l'application composée: $Z \xrightarrow{f} P \xrightarrow{\varphi} C^\infty(X_1, Y_1)$ est différentiable. En particulier, si $P \subset C^\infty(X, Y)$ et $P' \subset C^\infty(X', Y')$, une application biunivoque: $P \xrightarrow{\alpha} P'$ est dite un difféomorphisme si α et α^{-1} sont C^∞ . Dans ce qui suit, les espaces d'applications C^∞ , seront munis de la topologie C^∞ .

Une variété faible sera une partie $M \subset C^\infty(X, Y)$ satisfaisant aux axiomes suivants:

SV-0 : Si $\varphi \in C^\infty([0, \infty), M)$ il existe un $\Phi \in C^\infty((-\infty, \infty), M)$ tel que $\Phi|_{[0, \infty)} \equiv \varphi$.

SV-1 : Soit $f \in M$; $c_f^1 \in C^\infty(I, C^\infty(X, Y))$ est, par définition, le chemin constant $I \longrightarrow f$. Pour chaque voisinage U de c_f^1 dans $C^\infty(I \times X, Y)$, il existe un voisinage V de f dans M , tel que si $g \in M$ il existe un chemin dans

$$U \cap C^\infty(I, M) , \text{ qui relie } f \text{ et } g .$$

SV-2 : Soit $f \in M$. Si un voisinage V de f dans M et un entier $k > 0$ sont donnés, on peut trouver un voisinage U_k de $c_f^k \in C^\infty(I^k, C^\infty(X, Y))$ (où, par définition c_f^k est application constante $I^k \longrightarrow f$), tel que la condition suivante soit satisfaite:

Désignons par $u_k = (t_1, \dots, t_k) \in I^k$, le point courant de I^k , et par $0 : 0 = (0, \dots, 0) \in I^k$; soit $t \in I$ et considérons un $\Psi \in U_k \cap C^\infty(I^k, M)$, tel que $\Psi(0) = f$. Pour tout voisinage W_k de Ψ dans $U_k \cap C^\infty(I^k, M)$, il existe un voisinage W_1 de c_f^1 dans $C^\infty(I, M)$, tel que, si $\psi \in W_1$ et $\psi(0) = f$, il existe un $\Phi \in C^\infty(I^{k+1}, V)$ (où $I^{k+1} = I^k \times I$) avec les propriétés suivantes:

- a) $\Phi(0, t) = \psi(t)$
- b) $\Phi(u, 0) = \Psi(u)$
- c) Si $t' \in I$, alors $\Phi(u, t') \in C^\infty(I^k, M) \cap W_k$.

SV-3 : Soit $f \in M$ et V un voisinage de f dans M . Il existe un voisinage W de c_f^1 dans $C^\infty(I, M)$ tel que si $\psi_i \in W$ ($i=1, \dots, k$) , $\psi_i(0) = f$, alors il existe un $\Phi \in C^\infty(I^k, V)$ tel que:

- a) $\Phi(0) = f$
- b) $\Phi(0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0) = \psi_i(t_i)$. \square

On a le lemme suivant:

LEMME 0.8: "1) Soient X, Y, X', Y' quatre variétés différentiables, et P, P' deux parties: $P \subset C^\infty(X, Y)$, $P' \subset C^\infty(X', Y')$. Si $h : P \longrightarrow P'$ est un

difféomorphisme et P est une variété faible, alors P' est une variété faible.

2) Tout ouvert d'une variété faible est une variété faible.

3) Si $\partial Y = \emptyset$, $C^\infty(X, Y)$ est une sous-variété faible. (de $C^\infty(X, Y)$!)

4) Si $\partial Y \neq \emptyset$, on définit $C_\partial^\infty(X, Y) \subset C^\infty(X, Y)$ par:

$$f \in C_\partial^\infty(X, Y) \Leftrightarrow f^{-1}(\partial Y) = \partial X.$$

Alors, $C_\partial^\infty(X, Y)$ est une sous-variété faible de $C^\infty(X, Y)$. \square

Démonstration: 1) et 2) sont évidentes. On peut vérifier les SV-i pour $C^\infty(X, Y)$. Par exemple pour SV-2 on considère $X \times Y \times I^k \times I$ et sa sous-variété:

$$S = \{(x, \psi(x, t), 0, t)\} \text{ où } (x, t) \text{ parcourt } X \times I.$$

On considère le champ de vecteurs tangents à S : $\xi = \{(0, \frac{\partial \psi}{\partial t}, 0, 1)\}$.

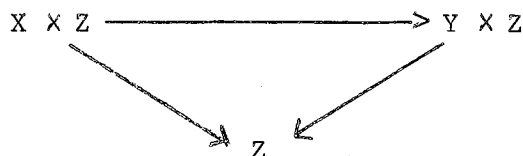
Par hypothèse $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ est "petit". On l'étend à un champ de vecteurs tangents à $X \times Y \times I^k \times I$, $\eta = (0, \theta, 0, 1)$, où θ est "petit".

Soit $R(x, y, u, t) \in X \times Y \times I^k \times I$, la courbe intégrale de η , pour la valeur initiale: $(x, y, u, 0)$ (correspondant à la valeur t du paramètre temps). Clairement $R(x, y, u, t) = (\dots, \dots, \dots, t)$ et

$R(x, \psi(x, 0), 0, t) = (x, \psi(x, t), 0, t)$. Par définition, $\Phi(x, u, t)$ sera la projection de $R(x, \psi(x, u), u, t)$ sur le facteur Y . Le reste de la démonstration se fait par des procédés analogues. \square

D'après 2), $\text{Imm}(X, Y) \subset C^\infty(X, Y)$ est une sous-variété faible.

D'autre part, soit Z une troisième variété et $C_I^\infty(X \times Z, Y \times Z) \subset C^\infty(X \times Z, Y \times Z)$ l'ensemble des applications qui rendent le diagramme suivant commutatif:



On définit: $\text{Imm}_I(X \times Z, Y \times Z) = \text{Imm}(X \times Z, Y \times Z) \cap C_I^\infty(X \times Z, Y \times Z)$, ce qui est clairement la même chose que l'ensemble des homotopies régulières, défini avant (si $Z = I$). Le difféomorphisme canonique évident $C_I^\infty(X \times Z, Y \times Z) \approx C^\infty(X \times Z, Y)$, et le lemme 0.8 impliquent que $C_I^\infty(X \times Z, Y \times Z)$ et $\text{Imm}_I(X \times Z, Y \times Z)$ sont des sous-variétés faibles.

Soient $M \subset C^\infty(X, Y)$ une sous-variété faible, et $f \in M$. On désigne par $\Gamma^\infty(f^*TY)$ l'espace vectoriel (réel) des sections C^∞ du fibré $f^*TY \rightarrow X$. Si $\psi \in C^\infty(I, M)$, $\psi(0) = f$, on définit:

$$T_0 \psi \in \Gamma^\infty(f^*TY),$$

par: $T_0 \psi = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0}$. L'ensemble de tous ces $T_0 \psi$ forme un sous-ensemble:

$$T_f M \subset \Gamma^\infty(f^*TY).$$

En utilisant les axiomes SV-i on voit facilement que $T_f M$ est un sous-espace vectoriel. D'autre part, si X est compacte: $\Gamma^\infty(f^*TY) = T_f C^\infty(X, Y)$

En principe, X sera, dorénavant compact.

Si $x \in X$ on a une application linéaire, dite d'évaluation :
(qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter):

$$\text{ev}_{f,x} : T_f C^\infty(X, Y) \longrightarrow T_{f(x)} Y$$

On va dire qu'une sous-variété $Z \subset Y$ est propre, si Z est un fermé, $\partial Z = \partial Y \cap Z$ et Z rencontre ∂Y transversalement.

On va considérer, maintenant, une sous-variété $Z \subset Y$. Z n'est pas supposée, nécessairement propre. Mais on va supposer qu'il existe une sous-variété $Z_1 \subset \partial Z - \partial \partial Z$, fermée (à bord non nécessairement vide), telle que: $Z_1 = Z \cap \partial Y$ et que $\partial Z - Z_1$ et Z , rencontrent ∂Y transversalement.

Une sous-variété faible $M \subset C^\infty(X, Y)$ est dite transversale à Z ,

si, pour chaque $x \in X$, $f \in M$ tels que $f(x) \in Z$ on ait:

$$1) \quad T_{f(x)}Z + T_x f(T_x X) + \text{ev}_{f,x}(T_f M) = T_{f(x)}Y, \text{ si } x \in \overset{\circ}{X} = X - \partial X \text{ et:}$$

$$2) \quad T_{f(x)}Z + T_x f(T_x \partial X) + \text{ev}_{f,x}(T_f M) = T_{f(x)}Y, \text{ si } x \in \partial X.$$

On rappelle que $g \in C^\infty(X, Y)$ est dite transversale à Z (dans le sens de Thom), au point $x \in X$ si l'une des trois situations suivantes arrive:

$$(i) \quad g(x) \notin Z;$$

$$(ii) \quad g(x) \in Z, x \in \overset{\circ}{X} \text{ et:}$$

$$3) \quad T_{g(x)}Z + T_x g(T_x X) = T_{g(x)}Y;$$

$$(iii) \quad g(x) \in Z, x \in \partial X, \text{ et:}$$

$$4) \quad T_{g(x)}Z + T_x g(T_x \partial X) = T_{g(x)}Y.$$

On rappelle aussi, qu'un fermé $S \subset Y$ sera appelé (sous)-variété stratifiée s'il est muni d'une filtration par des fermés:

$$S = S_k \supset S_{k-1} \supset \dots \supset S_0 \supset S_{-1} = \emptyset,$$

telle que $S_{i+1} - S_i$ soit une sous-variété (pas nécessairement fermée) de dimension $(i+1)$, rencontrant ∂Y transversalement, et ayant la propriété:

$$\partial(S_{i+1} - S_i) = (S_{i+1} - S_i) \cap \partial Y.$$

Une composante connexe de $S_{i+1} - S_i$ est appelée strate [21]. Par définition $M \subset C^\infty(X, Y)$ (respectivement $g \in C^\infty(X, Y)$) est transversale à S , si elle est transversale à chaque strate.

On va introduire, maintenant, la notion de transversalité-au-bord. Si $M \subset C^\infty(X, Y)$, M sera transversale-au-bord à Z si M est transversale à Z , et en plus, chaque fois que $f \in M$, $f(x) \in \partial Z$, la condition de transversalité est renforcée par la condition ci-dessous:

$$(1') \quad T_{f(x)} \partial Z + T_x f(T_x X) + \text{ev}_{f,x} T_f M = T_{f(x)} Y$$

Si $g \in C_0^\infty(X, Y)$, g est transversale-au-bord à Z , si g est transversale (à Z) et, en plus chaque fois que $g(x) \in \partial Z$, la condition de transversalité est remplacée par l'une des deux conditions (équivalentes), plus fortes, ci-dessous:

$$(i) \quad T_x g(T_x X) + T_{g(x)}(\partial Z) = T_{g(x)} Y.$$

$$(ii) \quad T_{g(x)} \partial Y, T_{g(x)} Z \text{ et } T_x g(T_x X)$$

ont une intersection régulière.

Théorème 0.9: ("Théorème de TRANSVERSALITE de Thom-Abraham").

"Soient X, Y deux variétés et $Z \subset Y$ une sous-variété (∂X peut être $\neq \emptyset$).

On va considérer une variété faible $M \subset C^\infty(X, \text{int } Y)$ respectivement $M \subset C_0^\infty(X, Y)$.

On suppose que M est transversale (respectivement transversale-au-bord) à Z .

$\text{Trans}_Z M \subset M$ va désigner l'ensemble des $g \in M$ qui sont transverses (respectivement transverses-au-bord à Z).

Sous ces conditions:

- a) Si X est compacte, et Z est un fermé, $\text{Trans}_Z M$ est un ouvert partout dense (de M).
- b) Si M possède la propriété de Baire, $\text{Trans}_Z M$ est partout dense dans M .
- c) Si M possède la propriété de Baire et Z est une (sous)-variété stratifiée (au lieu d'être une sous-variété, tout court), $\text{Trans}_Z M$ est partout dense dans M ". \square

Démonstration: Considérons pour le moment $M \subset C^\infty(X, \text{int } Y)$ et le cas a).

On va supposer, aussi, pour le moment, que $\partial X = \emptyset$.

$\text{Trans}_Z M$ est, clairement, un ouvert, puisque $\text{Trans}_Z C^\infty(X, Y)$ l'est. Alors, il suffit de prouver la proposition qui suit:

P : "Si $f \in M$ et $x \in X$, ils existent des voisinages $f \in V_f \subset M$ et $x \in V_x \subset X$, tels que, l'ensemble des $g \in V_f$ avec la propriété que $g|_{V_x}$ est transverse à Z , est dense (dans V_f)." ."

Puisque M est transverse à Z , l'axiome SV-3 implique qu'il existe un $k \geq 0$, et un:

$$\Psi \in C^\infty(I^k, M) \subset C^\infty(I^k \times X, Y)$$

avec les propriétés suivantes:

(i) $\Psi(0) = f$.

(ii) $\Psi : I^k \times X \longrightarrow Y$ est transverse à Z , au point $(0, x)$.

En choisissant un I^k , "plus petit", on peut supposer, sans perte de généralité, qu'il existe un voisinage $x \in V_x \subset X$, tel que $\Psi|_{I^k \times \bar{V}_x}$ soit transverse à Z . Toujours sans perdre la généralité, on peut supposer qu'ils existent des voisinages:

$$f \in V \subset M \text{ et}$$

$$c_f^k \in U_k \subset C^\infty(I^k, C^\infty(X, Y)),$$

comme dans l'axiome SV-2, tels que: $\Psi \in U_k$. Il existe un voisinage W_k de Ψ , contenu dans $U_k \cap C^\infty(I^k, M)$ tel que, si $\Psi' \in W_k$, alors $\Psi'|_{I^k \times V_x}$ est transverse à Z . Soit W_1 le voisinage de c_f^1 dans $C^\infty(I, M)$ qui nous est fourni par SV-2. D'après SV-1, il existe un voisinage: $V_f \subset V$, de f dans M , tel que, si $g \in V_f$, g et f peuvent être réunis par un chemin ψ de W_1 .

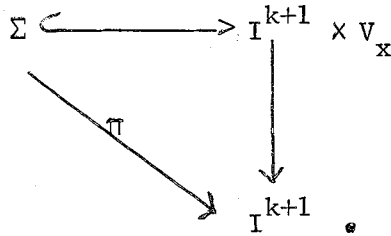
Soit alors $\hat{\phi} \in C^\infty(I^{k+1}, V_f)$ le $k+1$ -cube qui nous est fourni par SV-2.

$\tilde{\Phi}|_{I^{k+1} \times V_x}$ est encore transverse à Z . On va montrer que l'ensemble $E \subset I^{k+1}$ défini par: $u \in E$ si et seulement si $\tilde{\Phi}(u)|_{V_x}$ est transverse à Z , est dense (dans I^{k+1}). (Ceci suffit pour démontrer (P)).

On considère la sous-variété: $\Sigma \subset I^{k+1} \times V_x$, définie par:

$$\Sigma = (\tilde{\Phi}|_{I^{k+1} \times V_x})^{-1}(Z),$$

et la projection:



Je dis que si $u \in I^{k+1}$ est une valeur régulière de π , alors $u \in E$.

Soit $(u, y) \in \Sigma$ ($y \in V_x$) tel que u soit valeur régulière de π . Si l'on considère la décomposition directe:

$$T_{(u, y)}(I^{k+1} \times V_x) = T_u I^{k+1} \oplus T_y V_x,$$

on a (vu que u est valeur régulière de π):

$$T_u I^{k+1} \subset T_{(u, y)} \Sigma + T_y V_x.$$

D'autre part, on a:

$$T_{\tilde{\Phi}}(T_{(u, y)} \Sigma) \subset T_{\tilde{\Phi}(u, y)} Z \text{ et :}$$

$$T_{(u, y)}(I^{k+1} \times V_x) \xrightarrow{T\tilde{\Phi}} T_{\tilde{\Phi}(u, y)} Y \longrightarrow T_{\tilde{\Phi}(u, y)} Y / T_{\tilde{\Phi}(u, y)} Z$$

est surjective.

Il en résulte que:

$$\begin{array}{c}
 T_{\Phi(u)} \\
 \begin{array}{ccc}
 T_y V_x & \xrightarrow{\quad} & T_{\Phi(u)(y)} Y \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 & & T_{\Phi(u)(y)} Y / T_{\Phi(u)(y)} Z
 \end{array}
 \end{array}$$

est surjective, aussi. La proposition (P) résulte, maintenant, du théorème de Sard.

Si $\partial X \neq \emptyset$ et $M \subset C^\infty(X, \text{int } Y)$, la proposition (P) reste valable, pour $x \in \partial X$. En effet, en raisonnant comme ci-dessus, et en utilisant (2) au lieu de (1), on trouve un $k \geq 0$ et un $\Psi \in C^\infty(I^k, M)$ tel que $\Phi(0) = f$ et que

$$\Psi|_{I^k} \times \partial X : I^k \times \partial X \longrightarrow Y$$

soit transverse à Z au point $(0, x)$. Le reste de la démonstration suit le même plan que ci-dessus.

Enfin, si $M \subset C^\infty_\partial(X, Y)$ la proposition (P) reste valable si l'on remplace le mot "transversal" par "transversal-au-bord". Pour cela on raisonne comme tout-à-l'heure, mais séparément pour Z et ∂Z .

Ceci finit le cas a) (où X est compact). Pour le cas b) on considère

$$Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i, \quad X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \quad (Z_i \subset Z_{i+1}, X_i \subset X_{i+1})$$

où chaque $Z_i(X_i)$ est compacte. Le théorème est vrai pour (X_i, Z_i) (point a) ci-dessus). Ensuite on applique le raisonnement classique de Baire.

La même chose vaut pour c). \square

On va considérer maintenant deux variétés X, Y , où X est supposée compacte. Pour le théorème qui suit, comparer aussi avec [6]:

Théorème 0.10: "I. Considérons:

$$G(X, Y) \subset \text{Imm}(X, \text{int } Y)$$

(respectivement $G_\partial(X, Y) \subset \text{Imm}_\partial(X, Y)$, l'ensemble des immersions génériques (respectivement des immersions génériques-au-bord)).

$G(X, Y)$ (respectivement $G_{\partial}(X, Y)$) est un ouvert partout dense de $\text{Imm}(X, \text{int } Y)$ (respectivement de $\text{Imm}_{\partial}(X, Y)$).

II. Supposons que $\partial X = \partial Y = \emptyset$, et soient $\varphi(0), \varphi(1) \in \text{Imm}(X, Y)$ deux éléments génériques. $\text{Imm}_{I, \varphi(0), \varphi(1)}(X \times I, Y \times I) \subset \text{Imm}(X \times I, Y \times I) = C^{\infty}(I, \text{Imm}(X, Y))$ est l'ensemble des homotopies régulières: $\Phi \in C^{\infty}(I, \text{Imm}(X, Y))$, telles que $\Phi(0) = \varphi(0)$, $\Phi(1) = \varphi(1)$. Dans $\text{Imm}_{I, \varphi(0), \varphi(1)}(X \times I, Y \times I)$, les éléments génériques forment un ouvert partout dense." \square

Démonstration: I) Dans le cas $G(X, Y)$ on peut supposer que $\partial Y = \emptyset$. La projection $X \times Y \longrightarrow X$ induit une fibration (C^{∞} , localement triviale):

$$P_i : S^i(X \times Y) - \Delta_{(X \times Y)}^i \longrightarrow S^i X - \Delta_X^i .$$

La fibre de P_i est Y^i . En considérant dans chaque fibre: $\text{diag}_i Y \subset Y^i$, on obtient une sous-variété: $\Sigma_i \subset S^i(X \times Y) - \Delta_{X \times Y}^i$.

On a une application naturelle:

$$C^{\infty}(X, Y) \xrightarrow{S^i} \Gamma^{\infty}(P_i) .$$

On peut vérifier sans peine qu'il existe un entier $\nu = \nu(\dim X, \dim Y)$, tel que: $f \in \text{Imm}(X, Y)$ est générique si et seulement si: $S^i f: X \rightarrow S^i(X \times Y) - \Delta_{(X \times Y)}^i$ est transversale à Σ_i , pour chaque $i \leq \nu$.

(En effet, il faut montrer la proposition suivante:

Proposition: "Soient $V_1, \dots, V_k \subset E =$ espace vectoriel, des sous-espaces linéaires. V_1, \dots, V_k ont une intersection régulière si et seulement si $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k$ et $\text{diag}_k E$ se coupent transversalement dans E^k ."

Ceci résulte d'un calcul immédiat, à partir de la remarque:

$$(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k) \cap \text{diag}_k E = \text{diag}_k (V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k) .$$

Le nombre ν est donné par:

$$\nu(\dim Y - \dim X) + \dim Y < \nu \dim Y, \text{ e.a.d.s.})$$

S^i est un difféomorphisme entre $\text{Imm}(X, Y)$ et une sous-variété-faible de $\Gamma^\infty(P_i)$ qu'on désignera toujours par $\text{Imm}(X, Y)$ et d'après ce qu'on vient de dire: $G(X, Y) = \bigcap_{i=1}^{\nu} \text{Trans}_{\Sigma_i} G(X, Y)$.

Le fait que Δ_X^i est exclu de $S^i X$ fait que $\text{Imm}(X, Y) \subset C^\infty(S^i X - \Delta_X^i, S^i(X \times Y) - \Delta_{(X \times Y)}^i)$ est transversale à Σ_i .

Le théorème 0.9 implique alors l'énoncé I, pour $G(X, Y)$. Dans le cas $G_\partial(X, Y)$ on raisonne, plus ou moins, comme avant. Dans la variété (à bord!) Y^i , $\text{diag}_i Y$ est une sous-variété de bord:

$$\partial \text{diag}_i Y = \text{diag}_i \partial Y.$$

La réunion de tous ces bords pour chaque fibre de P_i , est le bord de la sous-variété Σ_i . Je dis que $f \in \text{Imm}(X, Y)$ est générique-au-bord, si et seulement si $S^i f$ est transversale-au-bord à Σ_i , pour chaque $i \leq \nu$. (C'est-à-dire, si, pour chaque $i \leq \nu$, $S^i f$ est transverse à Σ_i et à $\partial \Sigma_i$).

(En effet, pour cela il suffit de montrer une proposition d'algèbre linéaire qui généralise celle utilisée avant:

Proposition: "Soient $V_1, \dots, V_k \subset E$ comme dans la proposition ci-dessus, et $F \subset E$ un autre sous-espace linéaire. V_1, \dots, V_k, F ont une intersection régulière si et seulement si $V_1 \times \dots \times V_k$ et $\text{diag}_k F$ se coupent transversalement dans E^k ."

Démonstration (de la proposition): On a

$$(V_1 \times \dots \times V_k) \cap \text{diag}_k F = \text{diag}_k (V_1 \cap \dots \cap V_k \cap F).$$

$V_1 \times \dots \times V_k$ coupe $\text{diag}_k F$ transversalement, veut dire que:

$$\begin{aligned} \text{cod}((V_1 \times \dots \times V_k) \cap \text{diag}_k F) &= \text{cod}(V_1 \times \dots \times V_k) + \text{cod } \text{diag}_k F \\ \Leftrightarrow k \dim E - \dim(V_1 \cap \dots \cap V_k \cap F) &= \sum_{i=1}^k \text{cod } V_i + (k-1) \dim E + \text{cod } F \\ \Leftrightarrow \text{cod}(V_1 \cap \dots \cap V_k \cap F) &= \text{cod } F + \sum_{i=1}^k \text{cod } V_i . \end{aligned}$$

Mais la dernière ligne, exprime que V_1, \dots, V_k, F ont une intersection régulière.

Le reste de la démonstration se fait comme dans le cas sans bord.)

II. Considérons les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° qui définissent les homotopies régulières génériques. Dans $\text{Imm}_{I, \varphi(0), \varphi(1)}(X \times I, Y \times I)$, l'ensemble des éléments satisfaisant à 1°, (appelons-le A_1) est un ouvert partout dense. Ceci se démontre de la même façon que le point I ci-dessus.

Soit $A_2 \subset A_1$ l'ensemble des éléments de A_1 qui satisfont à 2°. On va montrer que c'est encore un ouvert partout dense.

Considérons $\Sigma_i \subset S^i(X \times Y) - \Delta_X^i \times Y$ comme avant, et la fibration C^∞ :

$$\bar{P}_i = P_i \times I : I \times (S^i(X \times Y) - \Delta_X^i \times Y) \longrightarrow I \times (S^i X - \Delta_X^i) .$$

On a une application:

$$\text{Imm}_{I, \varphi(0), \varphi(1)}(X \times I, Y \times I) \xrightarrow{S^i} \Gamma^\infty(\bar{P}_i)$$

et Image S^i est une variété faible.

Soit $\mathcal{J}(i) = \mathcal{J}_I^2(I \times S^i X, I \times S^i(X \times Y))$ où \mathcal{J}_I^2 = les jets d'ordre 2 qui respectent la projection sur I . Soit $\mathcal{J}_i \subset \mathcal{J}(i)$ la sous-variété constituée par les jets qui aboutissent dans $I \times \Sigma_i$ et qui ont la propriété suivante:

$$\text{Image } T_x(I \times S^i X) \cap T_y(I \times \Sigma_i) \subset T_{y''} \Sigma_i$$

(où $T_y(I \times \Sigma_i) = T_{y'} I + T_{y''} \Sigma_i$, $y = (y', y'')$).

On a: $A_1 \xrightarrow{j^2} C^\infty(I \times (S^1 X - \Delta_X^i), \mathcal{J}_I)$ et les $A_2 \subset A_1$ sont les $\psi \in A_1$, tels que $j^2 \psi$ soit transversal à \mathcal{J}_i pour $i \leq$ (un certain nombre). On laisse au lecteur le soin de continuer la démonstration. \square

0.5) Forme canonique des singularités d'une homotopie régulière générique, en codimension 1 :

Soient X, Y deux variétés C^∞ , telles que $\partial X = \partial Y = \emptyset$, et que X soit compacte. Soit aussi $\Phi \in \text{Imm}_I(X \times I, Y \times I)$ une homotopie régulière générique. On va considérer l'ensemble $\sigma(\Phi) \subset I$ des niveaux singuliers de Φ , défini comme suit:

$t \in \sigma(\Phi) \Leftrightarrow$ il existe un i , tel que la fonction $\psi_i(\Phi): M_i(\Phi) \rightarrow I$ admette t comme niveau singulier.

C'est clair que $\sigma(\Phi)$ est un ensemble fini, contenu dans $(0, 1) \subset [0, 1] = I$. Les points de $I - \sigma(\Phi)$, sont, par définition, les niveaux réguliers de Φ . $\Phi(t) \in \text{Imm}(X, Y)$ est générique, si et seulement si t est régulier.

Théorème 0.11: (Le "lemme de Morse" pour les homotopies régulières (génériques, en codimension 1)). "Supposons que $\dim X = n$, $\dim Y = n+1$. Si $\epsilon > 0$ et $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset I - \sigma(\Phi)$, $\Phi(t_0)$ est une immersion générique, et ils existent des applications C^∞ :

$$\begin{aligned} \varphi &: ([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], t_0) \longrightarrow (\text{Diff}^\infty X, \text{id}(X)) \\ \psi &: ([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], t_0) \longrightarrow (\text{Diff}^\infty Y, \text{id}(Y)) \end{aligned}$$

telles que, pour chaque $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, on ait:

$$\Phi(t) = \psi(t) \circ \Phi(t_0) \circ \varphi(t)^{-1}.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset I$ tel que :

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \cap \sigma(\Phi) = \{t_0\} ,$$

alors, ils existent un voisinage de coordonnées $V_0 \subset Y$ "où la singularité est localisée" (dans le sens qui est décrit ci-dessous) et deux nombres $\lambda = \lambda(t_0)$, $p = p(t_0)$, appelés respectivement indice et multiplicité , (qui décrivent la singularité, complètement, à isotopie près), tels que:

1) Si ϵ est assez petit, ils existent $p \leq n + 2$, ($p \geq 2$) , voisinages de coordonnées, 2-à-2 disjoints:

$V_1, \dots, V_p \subset X$, tels que, pour tout $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, on ait:
 $\Phi(t)^{-1}(V_0) = V_1 + V_2 + \dots + V_p$.

2) Soient $D_n^i \subset V_i$ des disques de dimension n , différenciablement plongés, et $X' = X - \bigcup_i D_n^i$. On peut choisir les D_n^i tels que $\Phi(t_0)|_{X'}$ soit une immersion générique et qu'ils existent des isotopies à la source et au but (comme ci-dessus) telles que, pour chaque $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$

$$\Phi(t)|_{X'} = \psi(t) \circ \Phi(t_0)|_{X'} \circ \varphi(t)^{-1} .$$

3) $\Phi(t)|(V_1 + \dots + V_p)$, $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ est décrit, à isotopie près, par les formules qui suivent:

On commence par introduire des coordonnées:

$$V_0 = \{x_1, \dots, x_{n+1}\} , V_i = \{x_1^i, \dots, x_n^i\} .$$

Si $i \leq p - 1$, $\Phi(t)|_{V_i}$ est:

$$\begin{aligned} X_j &= x_j^i && \text{pour } j < i \\ X_i &= 0 \\ X_k &= x_{k-1}^i && \text{pour } k > i . \end{aligned}$$

$\Phi(t)|V_p$ est:

$$X_j = x_j^p \quad \text{pour } j < p-1$$

$$X_{p-1} = (t-t_0) - x_1^p - \dots - x_{p-2}^p + (x_{p-1}^p)^2 + \dots$$

$$\dots + (x_{p+\lambda}^p)^2 - (x_{p+\lambda+1}^p)^2 - \dots - (x_m^p)^2 .$$

$$X_k = x_{k-1}^p \quad \text{pour } k \geq p .'' \quad \square$$

On ne va pas donner la démonstration ici. Le lecteur pourra la trouver dans les notes miméographiées [13], ou, sous une forme améliorée, dans un travail à paraître.

Le cas qui intéresse ici, est celui où $n = 2$. Dans ce cas, le théorème 0.11 nous donne six formes possibles de singularités (locales) qu'on écrit, pour la commodité du lecteur, ci-dessous:

Cas 1°. $p = 2, \lambda = 0$:

$$X = 0, Y = x_1, Z = y_1 \quad \text{et:}$$

$$X = (t-t_0) - x_2^2 - y_2^2, Y = x_2, Z = y_2 .$$

Cas 2°. $p = 2, \lambda = 1$:

$$X = 0, Y = x_1, Z = y_1 \quad \text{et:}$$

$$X = (t-t_0) + x_2^2 - y_2^2, Y = x_2, Z = y_2 .$$

Cas 3°. $p = 2, \lambda = 2$:

$$X = 0, Y = x_1, Z = y_1 \quad \text{et:}$$

$$X = (t-t_0) + x_2^2 + y_2^2, Y = x_2, Z = y_2 .$$

Cas 4°. $p = 3, \lambda = 0$:

$$X = 0, Y = x_1, Z = y_1 ,$$

$$X = x_2, Y = 0, Z = y_2 , \text{ et:}$$

$$X = x_3, Y = (t-t_0) - x_3 + y_3^2, Z = y_3 .$$

Cas 5°. $p = 3, \lambda = 1$:

$$X = 0, Y = x_1, Z = y_1,$$

$$X = x_2, Y = 0, Z = y_2, \text{ et:}$$

$$X = x_3, Y = (t-t_0) - x_3 - y_3^2, Z = y_3.$$

Cas 6°. $p = 4, \lambda = 0$:

$$X = 0, Y = x_1, Z = y_1,$$

$$X = x_2, Y = 0, Z = y_2,$$

$$X = x_3, Y = y_3, Z = 0, \text{ et:}$$

$$X = x_4, Y = y_4, Z = (t-t_0) - x_4 - y_4. \quad \square$$

CHAPITRE I : LA Z-TOPOLOGIE ASSOCIEE A UNE IMMERSION GENERIQUE.

1.1) L'*-équivalence : On va considérer des variétés (à bord), connexes, compactes, C^∞ , de dimension 3.

Définition 1.1 : M_3 et N_3 sont dites *-équivalentes s'ils existent des anses négatives d'indice 3 : $-(\varphi_3^1), \dots, -(\varphi_3^a), -(\psi_3^1), \dots, -(\psi_3^\alpha)$ et des anses positives d'indices 2 et 3 : $(\varphi_2^1), \dots, (\varphi_2^b), (\psi_2^1), \dots, (\psi_2^\beta), (\varphi_3^1), \dots, (\varphi_3^c), (\psi_3^1), \dots, (\psi_3^\gamma)$, telles qu'on ait des difféomorphismes :

$$M_3 = N_3 - (\varphi_3^1) - \dots - (\varphi_3^a) + (\varphi_2^1) + \dots + (\varphi_2^b) + (\varphi_3^1) + \dots + (\varphi_3^c)$$

$$N_3 = M_3 - (\psi_3^1) - \dots - (\psi_3^\alpha) + (\psi_2^1) + \dots + (\psi_2^\beta) + (\psi_3^1) + \dots + (\psi_3^\gamma). \quad \square$$

(Si $\partial M_3 \neq \emptyset \neq \partial N_3$, on n'a plus besoin d'anses négatives).

Lemme 1.1 : "Soient M_3, N_3 avec $\partial M_3 \neq \emptyset \neq \partial N_3$, telles que $\pi_1 M_3 = 0$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) M_3 et N_3 sont *-équivalentes.
- ii) $N_3 = M_3 +$ (des anses d'indices 2 et 3).
- iii) Il existe un 3-disque d'homotopie V_3 tel que

$$M_3 = V_3 \# (p \# (S_2 \times I)),$$

$$N_3 = V_3 \# (q \# (S_2 \times I)). \quad \square$$

(Un 3-disque d'homotopie est une variété compacte, contractible, de dimension 3).

La démonstration est laissée au lecteur.

Définition 1.2 : Un 3-disque à trous est une variété à bord $\neq \emptyset$, de dimension 3, satisfaisant l'une des conditions équivalentes suivantes :

- a) M_3 est *-équivalente à D_3 .
- b) $M_3 = D_3 +$ (des anses d'indices 2 et 3).
- c) $M_3 = D_3 +$ (des anses d'indice 2).
- d) $M_3 = D_3 \# (p \# (S_2 \times I)). \quad \square$

1.2) La Z-topologie associée à une immersion générique : Presque tous les lemmes (et définitions) du paragraphe qui suit s'appliquent aux immersions quelconques, d'un espace topologique dans un autre. C'est parce qu'on insiste que la Z-topologie (définie ci-dessous) soit noethérienne, et que les différents espace-quotient qu'on va considérer soient des variétés C^∞ , qu'on se restreint aux immersions C^∞ , génériques, de variétés C^∞ , compactes.

On commence par rappeler quelques sorites sur les relations d'équivalence. Si X est un ensemble quelconque, on désigne par $S^k X$ la k-ème puissance symétrique de X et par $\Delta_X^k \subset S^k X$ la grande diagonale.

Par définition, une partie $P \subset S^2 X$ est une relation d'équivalence (sur X) si :

$$a) P \cap \Delta_X^2 = \emptyset. \quad b) \text{ Si } (x,y), (y,z) \in P \text{ et } x \neq z, \text{ alors : } (x,z) \in P.$$

Ceci est un léger abus de langage, car ce qu'on appelle d'habitude "relation d'équivalence" est le sous-ensemble $\Delta_X^2 \cup P \subset S^2 X$. Par un second abus de langage, si P est une relation d'équivalence, et $x, y \in X$ on écrira $x \equiv y \pmod{P}$ si $(x,y) \in \Delta_X^2 \cup P$. X/P désignera le quotient de X par $P(\Delta_X^2 \cup P)$. On va désigner par $P_1 + P_2 \subset S^2 X$ la plus petite relation d'équivalence engendrée par P_1, P_2 . $P_1 \cap P_2$ est une relation d'équivalence.

Définition 1.3 : Soit $f : X \rightarrow Y$ une application quelconque. On lui attache la relation d'équivalence $\Phi(f) \subset S^2 X$, définie comme suit :

$$x \equiv y \pmod{\Phi(f)} \iff f(x) = f(y) . \quad \square$$

Donc :

$$\Phi(f) = X \times_X X - \Delta_X^2 ,$$

où $X \times_X X$ désigne le produit fibré (symétrique).
Y

On va désigner par $A \times_{Z_2} B \subset S^2 X$ l'ensemble des paires (a,b) où $a \in A$, $b \in B$. Par définition :

$$A \times_{Z_2} B = (A \times B) \cap (X \times X),$$

Dorénavant, X et Y seront des variétés C^∞ , de la même dimension, avec $\partial Y = \emptyset$. $f \in \text{Imm}(X, Y)$ sera une immersion propre et générique.

On a une application naturelle :

$$f \times f : \Phi(f) \longrightarrow Y$$

définie par : $(f \times f)(x, y) = f(x) = f(y)$. Considérons $\Phi(f)$ avec la topologie induite (par celle de $S^2 X$). En considérant $(x, y) \in \Phi(f)$ et les trois possibilités $(x, y) \in (\partial X, \partial X)$, $(x, y) \in (\overset{\circ}{X}, \partial X)$, $(x, y) \in (\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y})$, on voit facilement (à partir du fait que f est une immersion générique), que $\Phi(f)$ est une variété C^∞ à bord anguleux (dans le sens de Cerf [2] et Douady [3]). De plus $f \times f$ est une immersion C^∞ et $\dim \Phi(f) = \dim X = \dim Y$.

Dans le cas $\dim X = \dim Y = 3$, qui nous intéresse dans ce travail, il n'y a aucune difficulté à rendre $\Phi(f)$ différentiable (tout court). Même dans le cas général, on peut appliquer le procédé de Douady [3] ou la théorie de Hirsch-Mazur [9]. (En effet, si M est une variété à bord anguleux, de bord ∂M , on remarque que le microfibré $PL : T(\partial M) \oplus 1$ peut s'identifier à $TM|_{\partial M}$, et possède donc une structure de fibré vectoriel...)

Définition 1.4 : Soient $(X, Y, f \in \text{Imm}(X, Y), \Phi(f) \subset S^2 X)$ comme ci-dessus. Une relation d'équivalence $\Psi \subset S^2 X$ est dite f-admissible si :

- 1°. $\Psi \subset \Phi(f)$.
- 2°. Ψ est en même temps ouvert et fermé dans $\Phi(f)$.

On va désigner par

$$f(\Psi) : X/\Psi \longrightarrow Y$$

l'application induite par f . \square

Lemme 1.2 : "Une relation d'équivalence $\Psi \subset \Phi(f)$ est f -admissible, si et seulement si :

(i) X/Ψ est une variété C^∞ (à bord anguleux...)

(ii) $f(\Psi)$ et la projection canonique $X \longrightarrow X/\Psi$ sont des immersions C^∞ ." \square

Démonstration : Soit $\Psi \subset \Phi(f)$, une relation d'équivalence f -admissible.

On remarque qu'il existe une famille \mathfrak{F} de voisinages ouverts de Y , $V \subset Y$ ($V \in \mathfrak{F}$, $\bigcup_{V \in \mathfrak{F}} V = Y$), telle que, chaque V soit difféomorphe à R_n ($n = \dim X = \dim Y$) et que

$$f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \longrightarrow V$$

puisse être décrit, à difféomorphisme près, comme suit : $f^{-1}(R_n)$ est une réunion disjointe de $p + q$ composantes : $R_1^+, \dots, R_p^+, Q_1, \dots, Q_q$ telles que :

a) La restriction de f à chacune des composantes, est un plongement C^∞ ; la restriction de f à Q_i est un difféomorphisme $Q_i \xrightarrow{\approx} V$. ($q \leq \infty$).

b) Il existe un système de coordonnées C^∞ sur $V = (x_1, \dots, x_n)$, tel que $f(R_i^+) = (x_i \geq 0)$. (Donc $p \leq n$).

Considérons maintenant une partition de l'ensemble $(1, \dots, p)$ en sous-ensembles disjoints :

$$(1, \dots, p) = A_1 \cup \dots \cup A_r.$$

On pose : $Z_i = \bigcup_{j \in A_i} (x_j \geq 0) \subset R_n$. Je dis qu'il existe un homéomorphisme

(linéaire par morceaux) : $\varphi : R_n \longrightarrow R_n$, qui transforme Z_i en $(x_i \geq 0)$.

En effet, par induction il suffit de considérer le cas

$$A_1 = (1,2), \quad A_2 = (3), \dots, A_i = (i+1), \dots, A_{p-1} = (p).$$

On peut trouver un homéomorphisme linéaire par morceaux

$$\psi : \mathbb{R}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_2 \quad \text{tel que} \quad \psi((x_1 \geq 0) \cup (x_2 \geq 0)) = (x_1 \geq 0).$$

Si ψ , exprimé en coordonnées, est : $\psi(x_1, x_2) = (\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2))$, on peut définir :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2), x_3, \dots, x_n) \quad .$$

En partant de cette remarque, on voit facilement que les conditions i), ii) sont vérifiées.

La réciproque est triviale.

Comme corollaire de la démonstration du lemme 1.2 on a le :

Lemme 1.2.1 : "Soient X, Y, f comme dans le lemme 1.2 et

$\Psi \subset \Phi(f) \subset S^2 X$ une relation d'équivalence f -admissible. L'immersion

$$f(\Psi) : X/\Psi \longrightarrow Y$$

est générique.

De même, l'immersion

$$X \xrightarrow{\pi} X/\Psi \subset (X/\Psi) \cup (\partial(X/\Psi) \times I)$$

(où $\partial(X/\Psi) = \partial(X/\Psi) \times 0 = (X/\Psi) \cap (\partial(X/\Psi) \times I)$) est générique." \square

On remarque tout de suite que l'ensemble des relations d'équivalence f -admissibles est fermé par rapport à l'intersection. Ceci nous permet de définir une nouvelle topologie sur $\Phi(f)$:

Définition 1.5 : La Z -topologie de $\Phi(f)$ est, par définition, la topologie pour laquelle les sous-ensembles fermés sont les réunions finies de relations d'équivalence f -admissibles. \square

On a le :

Lemme 1.3 : " Si X est compacte, $\Phi(f)$ ne possède qu'un nombre fini d'ensembles Z -fermés ($\Phi(f)$, muni de la Z -topologie, est donc un espace noethérien, c'est-à-dire tel que toute suite strictement décroissante de fermés est finie)". \square

Démonstration : On peut recouvrir $f(X)$ par une famille finie \mathfrak{F} , de voisinages ouverts $V \subset Y$ tels que, (pour chaque $V \in \mathfrak{F}$) ;

$$f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \longrightarrow V$$

ait la "forme canonique" décrite au début de la démonstration du lemme 1.2.

On remarque que cette description locale implique que :

a) $f^{-1}(V)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes : $V_1, \dots, V_{k(V)}$ et chaque $f|_{V_i}$ est un plongement.

b) $f(V_i) \cap f(V_j)$ est connexe.

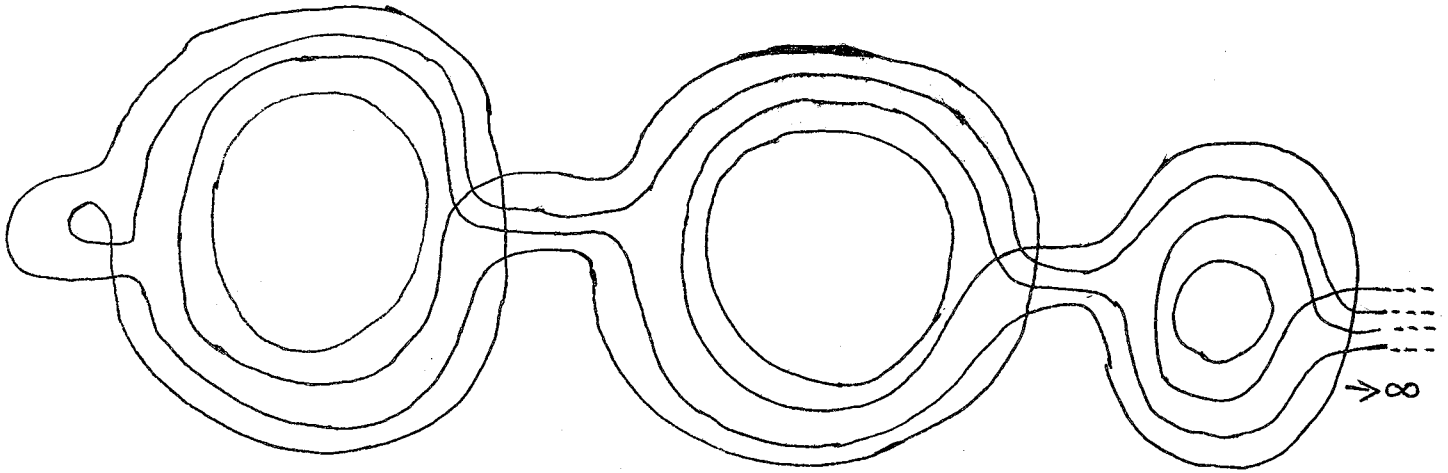
Il en résulte que si $\Psi \subset \Phi(f)$ est un Z -fermé, alors :

$$(\Psi \cap (V_i \times_Y V_j) \neq \emptyset) \implies \Psi \supset (V_i \times_Y V_j) .$$

Comme l'ensemble de tous les $V_i \times_Y V_j$ est fini, il n'y a qu'un nombre fini de $\Psi \subset \Phi(f)$ qui sont possibles. Ceci fini la démonstration. \square

Si X n'est pas compact, $\Phi(f)$, muni de la Z -topologie n'est plus nécessairement noethérien. La figure 1.3 montre un exemple où f est propre ($f \in \text{Imm}(S_2 \times I - x \times 0) \# (S_2 \times I) \# (S_2 \times I) \# \dots, R_2$)), $\# f^{-1}(y)$ est borné ($\# f^{-1}(y) \leq 3$), mais néanmoins Φ (n'est pas noethérien).

Fig. 1.3 (un $\Phi(f)$ qui n'est pas noethérien)



Si $B \subset \Phi(f)$ on va désigner par $Cl_Z B$ la fermeture de B , dans $\Phi(f)$, par rapport à la Z -topologie. Un fermé $F \subset \Phi(f)$ est dit irréductible s'il ne possède pas de décomposition $F = F_1 \cup F_2$ avec F_i fermés et $F_i \neq F$.

Dorénavant, X sera compact.

Lemme 1.4 : "Les fermés irréductibles de $\Phi(f)$ sont exactement les sous-ensembles $Cl_Z(x,y)$ où $(x,y) \in \Phi(f)$ (c'est-à-dire que $x, y \in X$, $x \neq y$, $f(x) = f(y)$). $Cl_Z(x,y) \subset \Phi(f)$ est une relation d'équivalence f -admissible. Si $(z,t) \in Cl_Z(x,y)$ on dira que $(x,y) \in \Phi(f)$ est une généralisation de $(z,t) \in \Phi(f)$ et que (z,t) est une spécialisation de (x,y) ". \square

Démonstration. Soit $Cl_Z(x,y) = F_1 \cup F_2$ avec F_i fermé. Il existe un $i \in \{1,2\}$ tel que $(x,y) \in F_i$, donc $F_i \supset Cl_Z(x,y)$, donc $Cl_Z(x,y)$ est irréductible. Réciproquement, si F est un fermé quelconque, on a :

$$F = \bigcup_{(x,y) \in F} Cl_Z(x,y) .$$

Puisque $\Phi(f)$ n'a qu'un nombre fini de fermés :

$$(1) \quad F = \bigcup_{i=1}^k \text{Cl}_Z(x_i, y_i)$$

($k < \infty$). Si F est irréductible, il existe un $i \in \{1, \dots, k\}$, tel que $F = \text{Cl}_Z(x_i, y_i)$.

$\text{Cl}_Z(x, y) \subset \Phi(f)$, étant un fermé, s'écrit comme réunion finie de relations d'équivalence f -admissibles ; comme ces dernières sont encore fermées, $\text{Cl}_Z(x, y)$ (qui est irréductible) doit être égal à l'une d'entre elles.

Lemme 1.5 "Soit $F \subset \Phi(f)$ un fermé de $\Phi(f)$ (dans la topologie Z).

Il existe une décomposition unique :

$$F = F_1 \cup \dots \cup F_k$$

où F_i est un fermé irréductible, et $F_i \not\subset F_j$, ($i \neq j$).

Les F_i s'appellent les "composantes irréductibles" de F ." \square

Démonstration. La formule (1) de la démonstration du lemme 1.4 donne

l'existence. (On peut supposer, sans perdre la généralité que

$(x_i, y_i) \notin \text{Cl}_Z(x_j, y_j)$), (Si $i \neq j$). Soient deux décompositions :

$$F = \bigcup_{i=1}^k \text{Cl}_Z(x_i, y_i) = \bigcup_{j=1}^l \text{Cl}_Z(z_j, t_j) \quad .$$

Ils existent deux applications :

$$\{1, \dots, k\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} \{1, \dots, l\}$$

telles que : $\text{Cl}_Z(x_{\beta(j)}, y_{\beta(j)}) \ni (z_j, t_j)$ et $\text{Cl}_Z(z_{\alpha(i)}, t_{\alpha(i)}) \ni (x_i, y_i)$.

Il s'ensuit que $(x_i, y_i) \in \text{Cl}_Z(x_{\beta\alpha(i)}, y_{\beta\alpha(i)})$ et

$(z_j, t_j) \in \text{Cl}_Z(z_{\alpha\beta(j)}, t_{\alpha\beta(j)})$, donc α et β sont des bijections, l'une

étant l'inverse de l'autre. On a : $k = l$, et après un changement de

notation : $\text{Cl}_Z(x_i, y_i) = \text{Cl}_Z(z_i, t_i)$.

On remarque que même si $P \subset \Phi(f)$ est une relation d'équivalence, $\text{Cl}_Z P$ n'en est pas nécessairement une, comme on peut le voir en regardant la figure 1.5,

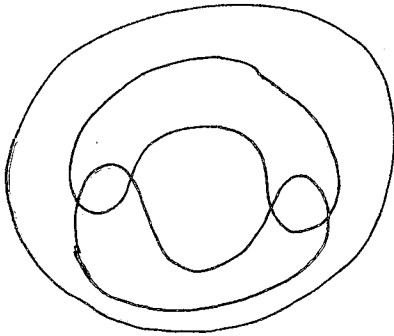
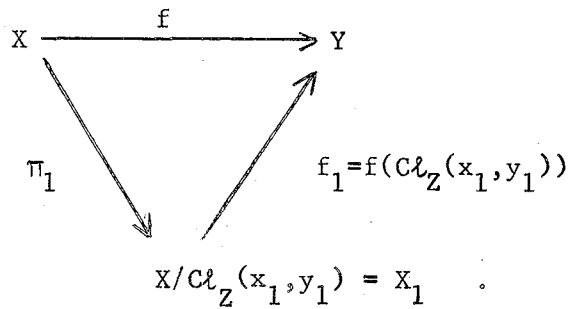


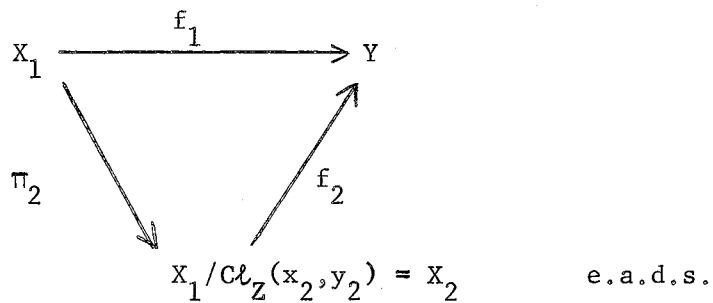
Figure 1.5.

Cet inconvénient est en quelque sorte remédié par le :

Lemme 1.6. "Soit : $P \subset \Phi(f)$ une partie quelconque. On considère la construction suivante : on choisit $(x_1, y_1) \in P$ ce qui nous donne le diagramme commutatif :



Si $P \subset \text{Cl}_Z(x_1, y_1)$, on s'arrête ; sinon on choisit un $(x_2, y_2) \in P - \text{Cl}_Z(x_1, y_1)$ et l'on considère : $\text{Cl}_Z(x_2, y_2) \subset S^2 X_1$, ce qui nous permet de continuer :



Ce processus s'arrête nécessairement après un nombre fini de pas et on obtient une relation d'équivalence $\hat{\mathcal{C}}_Z(P) \subset \Phi(f)$, définissant un espace quotient : $X \longrightarrow X_k = X/\hat{\mathcal{C}}_Z(P)$.

$\hat{\mathcal{C}}_Z(P)$ qui est un Z -fermé est f -admissible et ne dépend pas des choix successifs de $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$. C'est la plus petite relation d'équivalence f -admissible, contenant P . \square

La démonstration est laissée au lecteur.

3.) L'énoncé du lemme fondamental :

Définition 1.6. On se donne, une fois pour toutes une immersion générique, propre $\nu : R \longrightarrow R_2$ avec un point double et un seul.

(On remarque que ceci définit ν "univoquement" dans le sens suivant : si $\nu' : R \longrightarrow R_2$ satisfait aux mêmes conditions, ils existent $h \in \text{Diff}(R)$, $g \in \text{Diff}(R_2)$, tels que $\nu = g \circ \nu' \circ h$).

On va supposer que l'unique point double de ν est :

$$\nu(0) = \nu(1).$$

On considère aussi le demiplan supérieur $R_2^+ = (x, y \geq 0)$ avec $\partial R_2^+ = R$ et une immersion propre $\mu : R_2^+ \longrightarrow R_2$ telle que $\mu|_R = \nu$. μ est générique et "univoquement" déterminé (à conjugaison avec des difféomorphismes, près). La figure 1.6 représente μ . \square

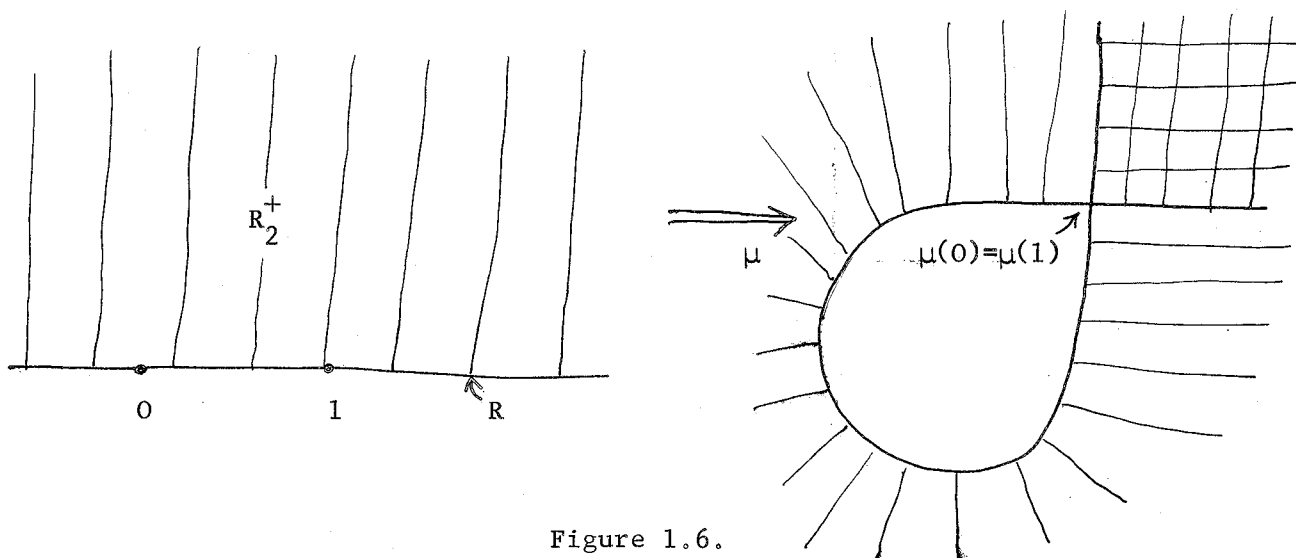


Figure 1.6.

On considère maintenant un X compact, avec $\dim X = \dim Y$ et un élément générique $f \in \text{Imm}(X, Y)$.

Définition 1.7. Une formation est, par définition un quadruple : $\eta = (X, f, Y, W)$ où X, f, Y sont comme ci-dessus et $W \subset Y$ est un voisinage de coordonnées dans Y , muni de coordonnées (X_1, \dots, X_n) et tel que : $f^{-1}(W)$ a exactement $p + 1$ composantes connexes : U, U_1, \dots, U_p satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1°. U est difféomorphe à R_n^+ (et muni de coordonnées $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \geq 0)$), U_i est difféomorphe à R_n .
- 2°. $f|_{U_i}$ est un difféomorphisme $U_i \longrightarrow W$.
- 3°. $f|_U : U \longrightarrow W$ est donné par :

$$X_i = x_i \quad (i \leq n - 2) \quad ; \quad (X_{n-1}, X_n) = \mu(x_{n-1}, x_n) \quad . \quad \square$$

On considère une formation $\eta = (X, f, Y, W)$ comme ci-dessus et une paire de points $(x, y) \in S^2(\partial U) \cap \Phi(f)$. Sans perdre la généralité, on peut supposer que :

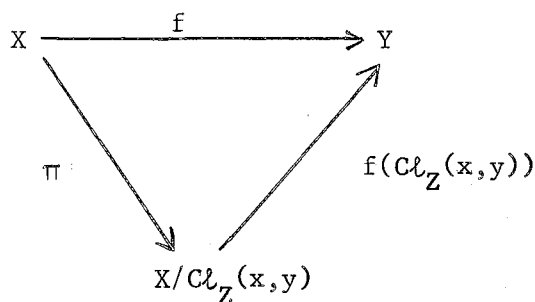
$$x = (a_1, \dots, a_{n-2}, 0, 0)$$

$$y = (a_1, \dots, a_{n-2}, 1, 0) \quad .$$

Définition 1.8. On va construire une nouvelle variété n -dimensionnelle, à bord, compacte $H(X, f, Y, W)$ et une immersion générique :

$$h(X, f, Y, W) : H(X, f, Y, W) \longrightarrow Y$$

comme suit : On commence par considérer la relation d'équivalence f -admissible $\mathcal{C}l_Z(x, y) \subset \Phi(f)$ et le diagramme commutatif :



On sait que $f(\mathcal{C}l_Z(x,y))$ est une immersion générique. Il y a deux cas possibles :

1°. Il existe un point $(z,t) \in S^2X$, spécialisation de (x,y) , tel que $z \in U$, $t \in U_i$ ($1 \leq i \leq p$). Dans ce cas, par définition :

$$H(X,f,Y,W) = X/\mathcal{C}l_Z(x,y)$$

$$h(X,f,Y,W) = f(\mathcal{C}l_Z(x,y)) .$$

2°. Il n'existe pas de point $(z,t) \in S^2X$, spécialisation de (x,y) , tel que $z \in U$, $t \in U_i$.

Dans ce cas, on considère $f(U) \subset W$ et on remarque que $f(\mathcal{C}l_Z(x,y))^{-1}(f(U))$ est ouvert dans $X/\mathcal{C}l_Z(x,y)$ et que

$$f(\mathcal{C}l_Z(x,y)) \mid f(\mathcal{C}l_Z(x,y))^{-1}(f(U)) : f(\mathcal{C}l_Z(x,y))^{-1}(f(U)) \longrightarrow f(U)$$

est un difféomorphisme. On a $\pi_1(f(U)) = Z$ et il existe une anse d'indice 2, plongée, unique (à difféotopie près) qu'on peut ajouter dans W à $f(U)$ pour tuer $\pi_1(f(U))$. Cette anse est un plongement $g : D_2 \times D_{n-2} \longrightarrow W$ tel que

$$\begin{aligned} g(D_2 \times D_{n-2}) \cap f(U) &= g(D_2 \times D_{n-2}) \cap \partial(f(U)) = \\ &= g(S_1 \times D_{n-2}) . \end{aligned}$$

Si $i : \partial(f(U)) \longrightarrow W$ est le plongement naturel, on peut considérer

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= i^{-1} \circ g \in \text{Pl}^\infty(S_2 \times D_2, \partial f(U)) \subset \\ &\text{Pl}^\infty(S_1 \times D_2, \partial(X/\mathcal{C}l_Z(x,y))) . \end{aligned}$$

Dans ce cas, on pose par définition :

$$H(X,f,Y,W) = (X/\mathcal{C}l_Z(x,y)) + (\varphi_2),$$

$$h(X,f,Y,W) \mid (X/\mathcal{C}l_Z(x,y)) = f(\mathcal{C}l_Z(x,y)) ,$$

$$h(X,f,Y,W) \mid (D_2 \times D_{n-2}) = g .$$

Dans tous les cas, on a une "inclusion canonique"

$$\pi : X \longrightarrow H(X, f, Y, W)$$

définie par :

$$X \xrightarrow{\pi} X/Cl_Z(x, y) \subset H(X, f, Y, W). \quad \square$$

On remarque que :

$$H(X, f, Y, W) = H(X, \pi, H(X, f, Y, W), W_1)$$

(difféomorphisme), pour un W_1 convenablement choisi. Puisque $\Phi(\pi) = Cl_Z(x, y)$ on peut toujours supposer (pour les problèmes qui nous intéressent dans ce travail) que

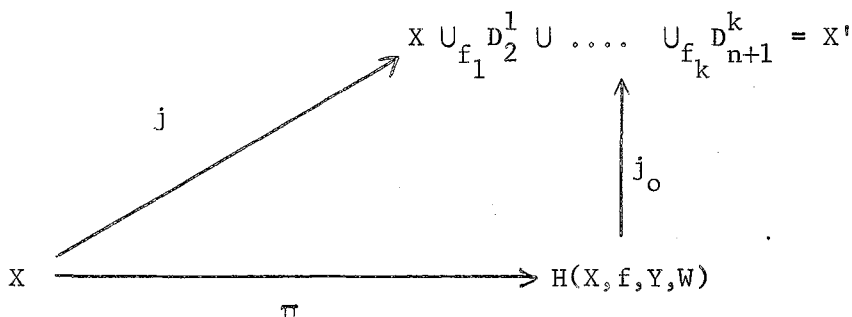
$$\Phi(f) = Cl_Z(x, y)$$

Du point de vue homotopique le passage de X à $H(X, f, Y, W)$ est (complètement) décrit par le lemme suivant :

Lemme 1.7. " $H(X, f, Y, W)$ a le type d'homotopie d'un C.W. complexe obtenu en ajoutant à X un nombre fini de cellules de dimensions $\lambda_i : 2 \leq \lambda_i \leq n+1$. En particulier, pour "l'inclusion canonique"

$$\pi : X \longrightarrow H(X, f, Y, W)$$

il existe une factorisation (à homotopie près) :



où : X' est un C.W. complexe (relatif) obtenu en ajoutant à X les cellules D_2^1, \dots, D_{n+1}^k (de dimension $2, \dots, n+1$), j est l'inclusion naturelle et j_0 une équivalence d'homotopie.

On a donc une suite exacte :

$$\pi_1(X) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(H(X, f, Y, W)) \longrightarrow 0 .'' \quad \square$$

Démonstration. La démonstration est une conséquence immédiate de la remarque suivante : Soit K un polyédre, K_1 un polyédre connexe, fini, et $h_1, h_2 : K_1 \longrightarrow K$ deux inclusions polyédrales, telles que l'ensemble des $x \in K_1$ satisfaisant à : $h_1(x) = h_2(x)$, soit un sous-polyédre $L \subset K_1$, $L \neq \emptyset$. On va supposer que K_1 est connexe. On considère aussi l'espace quotient $K_1 \times I/S$ obtenu en tuant, séparément, chaque $x \times I$, où $x \in L$.

Soit $K' = K \cup (K_1 \times I/S)$ où il est entendu que chaque $y \times 0$ est identifié à $h_1(y)$ et chaque $y \times 1$ à $h_2(y)$ ($y \in K_1$). A homotopie près, l'inclusion $K \hookrightarrow K'$ est une opération qui consiste à ajouter à K des cellules de dimensions λ où :

$$2 \leq \lambda \leq \dim K_1 + 1. \quad \square$$

Dorénavant on prend $n = 3$, et $X = X_3$ sera un 3-disque à trous. On va supposer que pour $Y = Y_3 : \partial Y_3 = \emptyset$. Le lemme précédent décrit $H(X_3, f, Y_3, W)$ homotopiquement. Le lemme qui suit est un premier pas vers la description difféotopique de $H(X_3, f, Y_3, W)$:

Lemme 1.8. (LE LEMME FONDAMENTAL). "On considère une suite de formations (X_3^i, f^i, Y_3^i, W^i) (avec $i = 1, \dots, k$) et un sous-ensemble $S \subset (1, \dots, k)$ tels que :

- a) X_3^1 est un 3-disque à trous et $\partial Y_3^1 = \emptyset$.
- b) $X_3^{i+1} = H(X_3^i, f^i, Y_3^i, W^i)$, si $i \in S$.
- c) $X_3^{i+1} = X_3^i + (\text{des anses d'indices 2 et 3})$, si $i \notin S$.

A $*$ -équivalence près, la variété $X_3^{k+1} = H(X_3^k, f^k, Y_3^k, W^k)$ peut être décrite comme suit : il existe un tore solide :

$T_3^{2p+q} = (2p+q) \# (S_1 \times D_2)$ avec p, q dépendant de X_3^{k+1} , et des cercles différentiables $S_1^1, \dots, S_1^{2p+q} \subset \partial T_3^{2p+q}$, tels que :

1°. Si $i \leq p$, $S_1^{2i-1} \cap S_1^{2i}$ consiste exactement de deux points d'intersection transversale, x_1^i, x_2^i .

2°. Il n'y a pas d'autres intersections $S_1^j \cap S_1^l$ ($j \neq l$) que celles décrites au point 1°.

3°. Si l'on choisit des orientations pour ∂T_3^{2p+q} , S_1^i , on a : $\text{int}_{x_1^i}(S_1^{2i-1}, S_1^{2i}) \cdot \text{int}_{x_2^i}(S_1^{2i-1}, S_1^{2i}) = -1$. (où $i \leq p$).

4°. On considère la paire canonique : $(2 T_3^{2p+q}, T_3^{2p+q})$. Il existe un $r \leq q$, et $(2p+q)$ plongements différentiables :

$$\begin{array}{ccc}
 F_i : S_1 \times I & \longrightarrow & T_3^{2p+q} \\
 & & \searrow \text{incl. canonique} \\
 & & 2T_3^{2p+q} \\
 & & \nearrow \text{incl. canonique} \\
 F_{2p+r+j} : S_1 \times I & \longrightarrow & 2T_3^{2p+q} - \overset{\circ}{T}_3^{2p+q}
 \end{array}$$

(où $i \leq 2p+r$, $j \leq q - r$, tels que :

4 - a) $F_i^{-1}(\partial T_3^{2p+q}) = S_1 \times 0 = F_i^{-1}(S_1^i)$

4 - b) $F_i(S_1 \times I)$ coupe ∂T_3^{2p+q} transversalement.

4 - c) $F_i(S_1 \times I)$ coupe $F_j(S_1 \times I)$ transversalement, et

l'inclusion naturelle :

$$\pi_0(S_1^i \cap S_1^j) \xrightarrow{\approx} \pi_0(F_i(S_1 \times I) \cap F_j(S_1 \times I))$$

est une bijection.

4 - d) Le triple :

$$(2 T_3^{2p+q}, T_3^{2p+q}, \bigcup_{i=1}^{2p+q} F_i(S_1 \times I))$$

est MOYENNEMENT NON-NOUÉ.

5°. On considère des disques de dimension 2 :

D_2^i ($i = 1, \dots, 2p+q$) tels que : $\partial D_2^i = S_1^i$ et pour chaque paire D_2^{2i-1}, D_2^{2i} ($i = 1, \dots, p$), deux plongements : $g_{2i-1} : I \longrightarrow D_2^{2i-1}$, $g_{2i} : I \longrightarrow D_2^{2i}$ tels que : a) $g_j^{-1}(\partial D_2^j) = \partial I$, b) $g_j(I)$ coupe ∂D_2^j transversalement, c) $g_{2i-1}(0) = g_{2i}(0) = x_1^i$, et $g_{2i-1}(1) = g_{2i}(1) = x_2^i$.

On considère :

$$K = T_3^{2p+q} \oplus D_2^1 \oplus D_2^2 \oplus \dots \oplus D_2^{2p+q} \oplus S_1^1 \oplus S_1^2 \oplus \dots \oplus S_1^{2p+q}.$$

Sur K on considère la relation d'équivalence Φ , qui consiste à identifier : $g_{2i-1}(x) \equiv g_{2i}(x)$, pour tout les $x \in I$, $i \leq p$. Alors X_3^{k+1} est (*-équivalent à) un voisinage régulier C^∞ du quotient : K/Φ . □

La démonstration de ce lemme occupera les chapitres III, IV de ce mémoire.

Lemme 3.18.1. "Pour un 3-disque D_3 il existe toujours une description comme dans le lemme 3.18". □

C'est trivial.

Le cas où $M^3(f) = \emptyset$ est beaucoup plus facile :

Lemme 1.9. "Soit (X_3, f, Y_3, W) une formation, telle que : X_3 est un 3-disque à trous, $\partial Y_3 = \emptyset$ et $M^3(f) = \emptyset$.

Alors, $H(X_3, f, Y_3, W)$ est un 3-disque à trous." □

La démonstration est donnée au paragraphe suivant.

4) Démonstration du lemme 1.9.

Lemme 1.9.1. "Soit V_2 une variété orientable, fermée et $j : V_2 \longrightarrow M_3$ une immersion générique. On suppose que M_3 est orientable.

Le revêtement :

$$M_2(j) \longrightarrow M_2(j)/S(2)$$

est trivial". (Ici $M_2(j) \subset V_2 \times V_2$ est l'ensemble des points doubles).

Démonstration. L'élément non trivial de $S(2) = Z_2$ induit une involution sans points fixes :

$$T : M_2(j) \longrightarrow M_2(j) .$$

Il faut montrer qu'il n'existe pas de composante connexe (disons S_1) de $M_2(j)$, invariante par T . En considérant les voisinages tubulaires des immersions $\pi : S_1 \longrightarrow V_2$ et $j \circ \pi : S_1 \longrightarrow M_3$ on obtient une immersion générique

$$J : S_1 \times I \longrightarrow R_3$$

telle que $M^2(J) = S_2 \times \frac{1}{2}$, $M^3(J) = \emptyset$. Je dis qu'une telle immersion n'existe pas. Il suffit de regarder la paire de sous-espaces de $R_3 = \{(x,y,z)\}$:

$$((x^2+y^2 \leq 1) \cap (-1 \leq z \leq 1)) ; \underbrace{(x = 0, -1 \leq y, z \leq 1) \cup (y = 0, -1 \leq x, z \leq 1))}_{X_2} .$$

On considère des difféomorphismes

$$h : (x^2 + y^2 \leq 1, z = -1) \longrightarrow (x^2 + y^2 \leq 1, z = +1)$$

tels que : a) $((x^2 + y^2 \leq 1) \cap (-1 \leq z \leq 1))/h$ soit orientables (donc difféomorphe à $S_1 \times D_2$).

b) $h(X_2 \cap (z=-1)) = X_2 \cap (z=1)$. Donc X_2/h sera l'image d'une immersion générique. On peut facilement analyser toutes les situations qui peuvent se présenter, (voir la figure 1.7) et voir quelles sont les surfaces immergées dont l'image peut-être X_2/h . En regardant la figure 1.7 on voit que

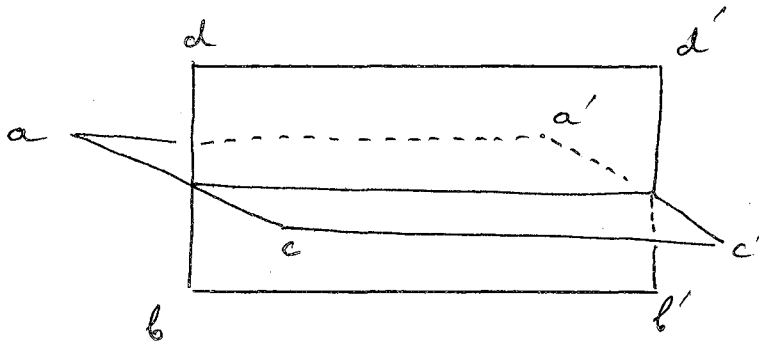


Figure 1.7

les identifications possibles sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a', c = c', b = b', d = d' \quad (\text{deux exemplaires de } S_2 \times I) \\ a = b', c = d', b = c', d = a' \quad (\text{ruban de Möbius}) \\ a = c', c = a', b = d', d = b' \quad (\text{deux rubans de Möbius}) \\ a = d', c = b', b = a', d = c' \quad (\text{ruban de Möbius}). \end{array} \right.$$

Dans aucun des quatre cas on ne trouve un exemplaire de $S_2 \times I$ (et un seul). \square

On considère maintenant une immersion générique $f : X_3 \longrightarrow Y_3$ où X_3 est un 3-disque à trous. On considère une formation (X_3, f, Y_3, W) et une paire de points :

$$(x, y) \in S^2 (\partial X_3 \cap f^{-1}(W)) \cap \Phi(f)$$

comme dans la définition 1.7.

Sans perdre la généralité, on peut supposer que Y_3 est orientable et que $\mathcal{C}l_z(x, y) = \Phi(f)$. (Il suffit en effet, de remplacer Y_3 par $H(X_3, f, Y_3, W) \dots$). Si l'on suppose que $M^3(f) = \emptyset$, on voit que, pour calculer $H(X_3, f, Y_3, W)$ on est dans le cas 2° de la définition 1.8, donc :

$$H(X_3, f, Y_3, W) = (X_3 / \mathcal{C}l_Z(x, y)) + (\varphi_2)$$

où φ_2 est une anse d'indice 2 :

$$\varphi_2 \in \text{Pl}^\infty(S_1 \times I, \partial(X_3 / \mathcal{C}l_Z(x, y))) .$$

On peut supposer que l'image de x est telle que :

$$\pi(x) = \pi(y) \in \varphi_2(S_1 \times \frac{1}{2}) .$$

On va considérer sur ∂X_3 l'ensemble

$$\Sigma_2(f) = \Sigma_2 = (M^2(f) \cap \partial X_3) \cup \pi^{-1}(\varphi_2(S_2 \times I)) .$$

C'est une sous-variété à bord de ∂X_3 , de dimension 2. Une composante connexe, S_1 , de $\partial \Sigma_2$ sera appelée minimale s'il existe un 2-disque D_2 de ∂X_3 , de bord S_1 , tel que

$$D_2 \cap \partial \Sigma_2 = S_1 = \partial D_2, \text{ et } S_1 \cap \pi^{-1}(\varphi_2(S_1 \times I)) = \emptyset .$$

$f|_{D_2}$ sera un plongement. (Ceci résulte du lemme 1.9.1). On peut choisir un voisinage (de coordonnées)

$R_3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ de $f(D_2) = ((x_3 = 0) \cap (x_1^2 + x_2^2 \leq 1))$ dans Y_3 , tel que $(f|_{f^{-1}(R_3)}, f^{-1}(R_3))$ soit dans l'un des deux cas suivants :

I. $f^{-1}(R_3)$ a deux composantes connexes :

$$(X_1, X_2, X_3 \leq 0) \subset R_3^1 \text{ et } (Y_1^2 + Y_2^2 \geq 1) \subset R_3^2$$

(où R_3^1, R_3^2 sont deux exemplaires de R_3).

f est donné par :

$$x_i = X_i, \quad x_i = Y_i \quad (i = 1, 2, 3) .$$

II. $f^{-1}(R_3)$ a deux composantes connexes

$$(X_1, X_2, X_3 \leq 0) \subset R_3^1 \text{ et } (Y_1^2 + Y_3^2 \leq 1) \subset R_3^2 .$$

f est donné par :

$$x_i = X_i, \quad x_i = Y_i \quad (i = 1, 2, 3) .$$

On va décrire une opération élémentaire, attachée à (D_2, S_1) qui va nous faire passer de la formation (X_3, f, Y_3, W) à une formation (X'_3, f', Y_3, W) .

Dans le cas I

$$X'_3 = X_3 + (\psi_2)$$

où ψ_2 est l'anse d'indice 2 correspondant à $(Y_1^2 + Y_2^2 \leq 1, -1 \leq Y_3 \leq 1)$ et f' est l'extension naturelle de f .

Dans le cas II, on remarque que le disque $(Y_1^2 + Y_2^2 \leq 1, Y_3 = -1)$ sépare X_3 en deux composantes connexes.

X'_3 sera celle qui contient x, y . f' sera la restriction de f .

Dans les deux cas X'_3 est un 3-disque à trous. On remarque facilement que

- a) Si $H(X'_3, f', Y_3, W)$ est un 3-disque à trous, alors $H(X_3, f, Y_3, W)$ est aussi un 3-disque à trous.
- b) $\# \pi_0(\partial \Sigma_2(f')) < \# \pi_0(\partial \Sigma_2(f))$.
- c) Si le revêtement $M_2(f') \rightarrow M_2(f')/S(2)$ (et, dans le cas II le revêtement $M_2(f|X_3 - X'_3) \rightarrow M_2(f|X_3 - X'_3)/S(2)$) est trivial, le revêtement $M_2(f) \rightarrow M_2(f)/S(2)$ l'est aussi.

Par induction, on ramène la démonstration du lemme 1.9 au cas où (X_3, f, Y_3, W) ne possède pas de cercle minimal. En utilisant le lemme 1.9.1 et le fait que x, y sont dans la même composante connexe de $\partial X_3 - \text{int}(M^2(f) \cap \partial X_3)$, on voit que l'ensemble des composantes connexes à bord $\neq \emptyset$, de $M^2(f) \cap \partial X_3$ va consister exactement de deux disques disjoints : D_2^1, D_2^2 , contenus dans la même composante connexe de ∂X_3 , tels que : $x \in \partial D_2^1$ et $y \in \partial D_2^2$.

Si $S_2 \subset \partial X_3$ est une composante connexe qui ne contient pas (x,y) , $f|_{S_2}$ est un plongement. A S_2 on va attacher une opération élémentaire qui nous fait passer de (X_3, f, Y_3, W) à une nouvelle formation. (X_3'', f'', Y_3'', W'') , définie comme suit :
 Si $S_2 \cap M^2(f) = \emptyset$ on définit $X_3'' = X_3 +$ (une anse d'indice 3 qui tue S_2). Y_3'' est obtenue à partir de Y_3 par chirurgie de Morse, de telle façon qu'on puisse définir f'' avec :

$$f''|_{X_3} = f \dots e.a.d.s.$$

Si $S_2 \cap M^2(f) \neq \emptyset$, on a : $S_2 \subset M^2(f)$ et il existe une sphère unique : $S_2^1 \subset \overset{\circ}{X}_3$, telle que $f(S_2^1) = f(S_2)$. S_2^1 divise X_3 en deux parties. Soit X_3^1 celle qui contient (x,y) et X_3^2 l'autre. Je dis que $X_3^2 \cap M^2(f) = \emptyset$.

En effet, si $x', y' \in \overset{\circ}{X}_3$, $x' \neq y'$, $f(x') = f(y')$, ils existent des arcs $c_1, c_2 : I \longrightarrow X_3$ tels que : $c_1(0) = x'$, $c_1(1) = x$, $c_2(0) = y'$, $c_2(1) = y$, et, pour tout $t \in I$:
 $f(c_1(t)) = f(c_2(t)) \in Y_3$. Ces arcs ne traversent pas $S_2 \subset \partial X_3$, donc ils ne traversent pas S_2^1 non plus ; donc ils ne pénètrent jamais dans X_3^2 .

On a : $\partial X_3^1 \supset S_2 + S_2^1 + \dots$ (réunion disjointe). On définit : $X_3'' = X_3^1 +$ (deux anses d'indice 3, qui tuent S_2 et S_2^1). On modifie Y_3 par chirurgie de telle façon qu'on puisse définir l'immersion $f'' : X_3'' \longrightarrow Y_3''$ avec $f''|_{X_3^1} = f|_{X_3^1}$.

Dans les deux cas les remarques a, b, c faites plus haut pour X_3^1 , restent vraies pour X_3'' .

On peut donc toujours se ramener au cas où $X_3 = D_3$.

Considérons les deux disques de X_3 : Δ_2^1, Δ_2^2 , tels que

$$\Delta_2^i \cap \partial X_3 = \partial \Delta_2^i, \quad f(\Delta_2^i) = D_2^i. \quad \text{Les sphères } \Delta_2^i \cup D_2^i \hookrightarrow X_3$$

($i = 1, 2$) sont disjointes. Elles divisent X_3 en trois disques

A_3, B_3, C_3 de bords, respectivement :

$$\Delta_2^1 \cup D_2^1, \Delta_2^2 \cup D_2^2, (\partial X_3 - D_3^1 - D_2^2 + \Delta_2^1 + \Delta_2^2).$$

On voit que la relation d'équivalence $\bar{\varphi}(f) = \mathcal{Cl}_Z(x,y)$ identifie A_3 avec B_3 . En plus, le revêtement : $M_2(f) \longrightarrow M_2(f)/S(2)$ est trivial. D'autre part, on a un difféomorphisme

$$\begin{aligned} (X_3/\bar{\varphi}(f), \pi(\partial D_2^1)) &= \pi(\partial D_2^2) = \\ &= (S_1 \times D_2, p \times \partial D_2) \text{ (où } p \in S_2) \end{aligned}$$

$\varphi_2(S_2 \times \frac{1}{2})$ coupe $\pi(\partial D_2^1)$ transversalement en un point. Le lemme 0.1 implique alors ce qu'on veut. \square

Remarque. La démonstration donnée ci-dessus, donne, aussi, le résultat suivant : "Soit X_3 un 3-disque à trous, Y_3 une variété orientable, $f : X_3 \longrightarrow Y_3$ une immersion générique, telle que $M^3(f) = \emptyset$. Alors, le revêtement : $M_2(f) \longrightarrow M_2(f)/S(2)$ est trivial". \square

CHAPITRE II: COMMENT LE THEOREME DE STRUCTURE (THEOREME B) EST IMPLIQUE
PAR LE LEMME FONDAMENTAL.

2.1) Plan de la démonstration: On commence par la définition suivante:

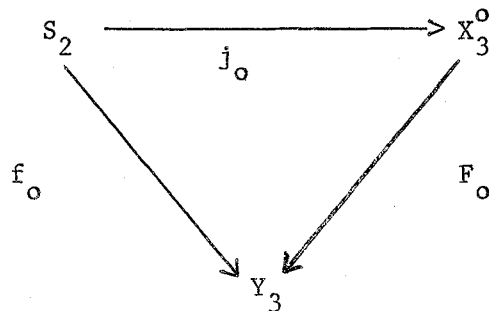
Définition 2.1: Soit (X_3^i, f^i, Y_3^i, W^i) ($i = 1, 2, \dots, k$) une suite de formations, satisfaisant aux conditions a), b), c) du lemme 1.8.

$X_3^{k+1} = H(X_3^k, f^k, Y_3^k, W^k)$ est appelée une Z-variété . \square

Lemme 2.1: "Soit Y_3 une variété C^∞ de dimension 3, telle que $\partial Y_3 = \emptyset$ et $f_0, f_1 \in \text{Imm}(S_2, Y_3)$ telles que:

a) f_0 et f_1 sont génériques, et régulièrement homotopes.

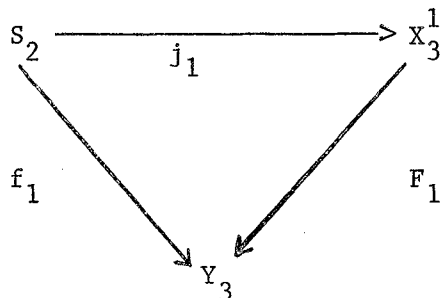
b) Il existe une Z-variété X_3^0 , et un diagramme commutatif:



où: b-1) j_0, F_0 sont des immersions C^∞ .

b-2) j_0 est homotope à l'application constante.

Il existe, alors une Z-variété X_3^1 , et un diagramme commutatif:



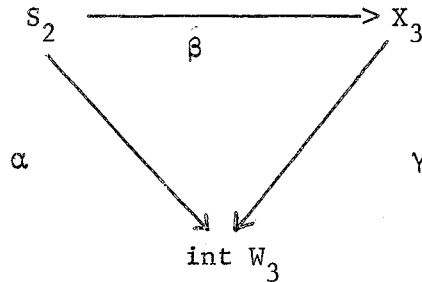
tel que: c-1) j_1, F_1 sont des immersions C^∞ .

c-2) j_1 est homotope à l'application constante". \square

La démonstration sera donnée au paragraphe 2.2.

Lemme 2.2: "Soit W_3 une variété C^∞ à bord, avec $\partial W_3 = S_2$ et $S_2 \times I \hookrightarrow W_3$ un voisinage tubulaire du bord (on suppose que $S_2 \times 0 \cong S_2 \cong \partial W_3$). Désignons par $\alpha \in \text{Pl}^\infty(S_2, W_3)$ le plongement: $S_2 \cong S_2 \times 1 \hookrightarrow W_3$.

Supposons qu'il existe une Z -variété X_3 et un diagramme commutatif:



où β, γ sont des immersions, et β est homotope à une application constante.

Alors W_3 est une Z -variété". \square

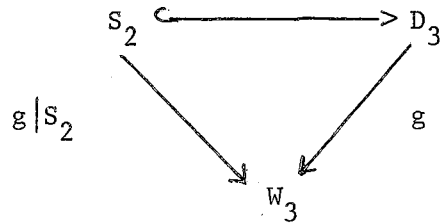
La démonstration sera donnée au paragraphe 2.3.

On va démontrer maintenant le théorème de structure, à partir des deux lemmes précédents.

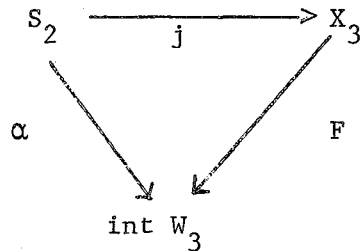
Lemme 2.3: "Soit Σ_3 une sphère d'homotopie lisse de dimension 3, et $D_3 \hookrightarrow \Sigma_3$ un plongement C^∞ . Le disque d'homotopie, lisse, de dimension 3 : $W_3 = \Sigma_3 - \text{int } D_3$ est une Z -variété". \square

Démonstration: On considère un voisinage tubulaire de $S_2 = \partial W_3$: $S_2 \times I \hookrightarrow W_3$ où $S_2 \times 0 \cong \partial W_3$. On désigne par $\alpha \in \text{Pl}^\infty(S_2, W_3)$ le plongement C^∞ : $S_2 \cong S_2 \times 1 \hookrightarrow W_3$.

Soit $g \in \text{Pl}^\infty(D_3, \text{int } W_3)$ un plongement différentiable quelconque.
 D'après le corollaire 0.6, les immersions $g|_{S_2}$, $\alpha \in \text{Imm}(S_2, \text{int } W_3)$ sont
 régulièrement homotopes. Le diagramme commutatif:



et le lemme 2.1, impliquent l'existence d'une Z-variété X_3 et d'un diagramme
 commutatif:



où j, F sont des immersions, et j est homotope à 0. Le lemme 2.2 nous
 dit alors que W_3 est une Z-variété. \square

Soit maintenant K/\mathbb{Q} un espace construit comme dans le lemme
 fondamental 1.8, et $\mathcal{O}_3(K/\mathbb{Q})$ un voisinage régulier (C^∞) de K/\mathbb{Q} . Le lemme
 2.3 implique tout de suite qu'il existe un $p > 0$, tel que, si $D_3^i \hookrightarrow \Sigma_3$
 ($i = 1, \dots, p$) sont p plongements C^∞ , 2-à-2 disjoints, on ait:

$$\Sigma_3 - \bigcup_{i=1}^p \text{int } D_3^i = \mathcal{O}_3(K/\mathbb{Q})$$

(difféomorphisme). Le théorème de structure est une conséquence immédiate de
 ce difféomorphisme.

2.2) Démonstration du lemme 2.1:

Soit $\Phi \in \text{Imm}_I(S_2 \times I, Y_3 \times I)$ une homotopie régulière générique, telle que $\Phi(0) = f_0$, $\Phi(1) = f_1$. On peut faire, pour Φ , les considérations du paragraphe 0.5; en particulier, on peut considérer l'ensemble des niveaux singuliers : $\sigma(\Phi) \subset I$. C'est clair qu'il suffit de donner la démonstration du lemme 2.1 dans le cas où $\# \sigma(\Phi) = 1$.

Soit donc $t_0 \in I$ l'unique singularité de Φ . On considère $p = p(t_0)$ (la multiplicité) et $\lambda = \lambda(t_0)$ (l'index) de t_0 . On a six cas à étudier (voir la fin du chapitre 0).

On va esquisser l'étude du cas $(p = 2, \lambda = 1)$. Les autres se font de la même manière.

On considère "le support" de Φ , qui est le 2-disque:

$$Y_3 \supset \Delta_2 = \{Z = 0, 0 \geq X \geq -t_0 + Y^2, Y^2 \leq t_0\}.$$

(On passe de f_0 à f_1 en poussant $X = -t_0 + Y^2 - Z^2$ de l'autre côté de $X = 0$, suivant Δ_2).

$\partial \Delta_2$ est formé de la réunion de deux intervalles fermés I_1 , $I_2 \xrightarrow{\hookrightarrow} f_0(S_2)$.

Soit I_1 l'un de ces intervalles. Soit $\delta_2 \subset f_0(S_2)$ un 2-disque contenant I_1 dans son intérieur, et $\varphi : D_3 \xrightarrow{\hookrightarrow} Y_3$ un plongement, tel que:

- a) $\delta_2 \subset \varphi(\partial D_3)$
- b) $\Delta_2 \subset \varphi(D_3)$
- c) $\varphi(\partial D_3)$ coupe $F_0(\partial X_3^0)$ transversalement.

Considérons l'espace singulier $X_3^0 \oplus_{\delta_2} D_3$ et "l'immersion"

$$F_0 \oplus \varphi : X_3^0 \oplus_{\delta_2} D_3 \longrightarrow Y_3.$$

On peut appliquer à $\Phi(F_0 \oplus \varphi) \subset S^2(X_3^0 \oplus D_3)$ le yoga des Z-topologies du

chapitre I. En particulier, on va considérer $\mathcal{C}\mathcal{L}_Z(\delta_2) \subset \Phi(F_0 \oplus \varphi)$ qui est la relation d'équivalence (compatible avec $F_0 \oplus \varphi$), la plus petite, tuant les singularités de $X_3^0 \oplus_{\delta_2} D_3$. On aura donc un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 S_2 & \xrightarrow{j_0} & X_3^0 \oplus_{\delta_2} D_3 \xrightarrow{F_0 \oplus \varphi} Y_3 \\
 & \searrow j_1 & \downarrow & \nearrow F_1 \\
 & & X_3^0 \oplus_{\delta_2} D_3 / \mathcal{C}\mathcal{L}_Z(\delta_2) &
 \end{array}$$

où $X_3^0 \oplus_{\delta_2} D_3 / \mathcal{C}\mathcal{L}_Z(\delta_2)$ est une (vraie variété) et F_1 une immersion. j_1 est homotope à σ (puisque j_0 l'est). Il s'agit de montrer maintenant que $X_3^1 = X_3^0 \oplus_{\delta_2} D_3 / \mathcal{C}\mathcal{L}_Z(\delta_2)$ est une Z -variété. Soit $D_3^t \xrightarrow{\quad} D_3$ ($t \in [0, 1]$)

une famille de 3-disque dépendant différemment de t , telle que:

- o) $\partial D_3^t \supset \delta_2$.
- i) $D_3^1 = D_3$.
- ii) $D_3^t \subset D_3^{t'}$ si $t \leq t'$.
- iii) D_3^0 est "dégénéré" et: $D_3^0 \cong \delta_2$.
- iv) $\varphi_t = \varphi(\partial D_3^t - \delta_2)$ est générique par rapport à $F_0(\partial X_3^0)$.

(Ce qui fait que, localement les singularités sont comme celles d'une homotopie régulière générique.)

φ_t aura un ensemble fini de singularités, désigné par $\sigma(\varphi_t) \subset I$

Le lecteur pourra montrer sans peine que:

I. Si $[t, t'] \cap \sigma(\varphi_t) = \emptyset$, alors:

$$X_3^0 \oplus_{\delta_2} D_3^t / \mathcal{C}\mathcal{L}_Z(\delta_2) = X_3^0 \oplus_{\delta_2} D_3^{t'} / \mathcal{C}\mathcal{L}_Z(\delta_2)$$

(difféomorphisme).

II. Si $t_0 \in \sigma(\varphi_t)$ et si $X_3^0 \oplus_{\delta_2}^{t_0^{-\epsilon}} D_3 / \mathcal{C}\mathcal{L}_Z(\delta_2)$ est une Z -variété, alors $X_3^0 \oplus_{\delta_2}^{t_0^{+\epsilon}} D_3 / \mathcal{C}\mathcal{L}_Z(\delta_2)$ l'est aussi. (On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement, suivant les différents cas (p, λ) , comment la seconde variété s'obtient à partir de la première.

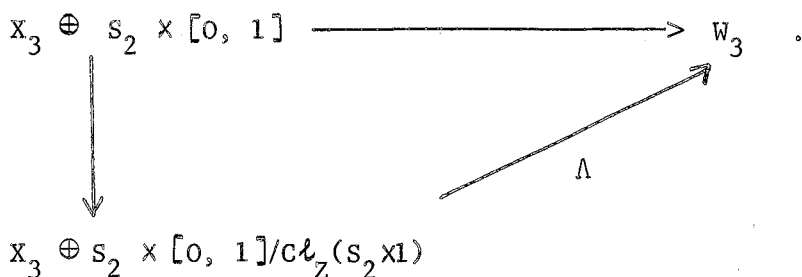
2.3) Démonstration du lemme 2.2:

Le fait que β soit homotope à 0, implique qu'il existe un disque d'homotopie $W_3^1 \longrightarrow X_3$, tel que $\partial W_3^1 = \beta S_2$. On peut vérifier sans peine que $\gamma|_{W_3^1}$ est un difféomorphisme $W_3^1 \xrightarrow{\approx} W_3 - S_2 \times [0, 1)$.

Considérons l'espace singulier: $X_3 \oplus_{S_2 \times 1} S_2 \times [0, 1]$ où $S_2 \times 1 \longrightarrow X_3$ est $\beta : S_2 \longrightarrow X_3$. On considère aussi "l'immersion" :

$$\gamma \oplus \text{id} : X_3 \oplus_{S_2 \times 1} S_2 \times [0, 1] \longrightarrow W_3$$

Comme dans le paragraphe précédent, on a un diagramme commutatif:



$A_3 = X_3 \oplus S_2 \times [0, 1] / \mathcal{C}\mathcal{L}_Z(S_2 \times 1)$ est une (vraie) variété et Λ une immersion. Pour les mêmes raisons qu'au paragraphe précédent, A_3 est une Z -variété.

Tout est fini si l'on montre que Λ est un plongement (en fait un

difféomorphisme). De toute façon Λ est surjectif (puisque

$W_3 - S_2 \times [0, 1) \subset \text{image } X_3$!) On laisse au lecteur le soin de montrer

l'injectivité. \square

CHAPITRE III: LES GRANDES LIGNES DE LA DEMONSTRATION DU LEMME FONDAMENTAL.

3.1) Variétés singulières: On va introduire une classe spéciale d'espaces de dimension 3, les variétés singulières (de dimension 3). Tous les espaces et les morphismes considérés ci-dessous seront linéaires-par-morceaux (ou plutôt différentiables-par-morceaux), et C^∞ , partout où cela a un sens. En particulier, nos espaces seront construits (localement) par le procédé de la somme amalgamée (paragraphe 0.1), dans la catégorie C^∞ , et nos morphismes seront "faiblement différentiables". On pourrait utiliser aussi, le point de vue des espaces stratifiés [21] ...

On commence par la description d'un modèle local. On utilisera les notations du paragraphe 0.1:

Définition 3.1: On va construire une paire d'espaces $(K_3, s(K_3))$ et une application:

$$j(K_3) : K_3 \longrightarrow R_3 ,$$

comme suit: dans R_3 , muni de coordonnées (x, y, z) , on considère les sous-ensembles:

$$A = (z \leq 0)$$

$$B = (z \geq 0) \cap (-1 \leq x \leq +1)$$

$$C = (z \geq 0) \cap (-1 \leq y \leq +1) .$$

On va désigner par $i(A)$, $i(B)$, $i(C)$, les inclusions canoniques de ces ensembles, dans R_3 . (On va souvent identifier A, B, C avec leurs images ...)

Par définition:

$$K_3 = \underbrace{B \oplus A}_{(z=0) \cap (|x| \leq 1)} \oplus \underbrace{C}_{(z=0) \cap (|y| \leq 1)} , \text{ et :}$$

$$j = j(K_3) = i(B) \oplus i(A) \oplus i(C) .$$

Par définition, la partie singulière de $K_3 : s(K_3) \subset K_3$ est l'image canonique de:

$$(z=0) \cap (-1 \leq x \leq +1) \cap (-1 \leq y \leq +1) \subset A .$$

On va introduire, aussi, les sous-espaces suivants de K_3 :

$$\bar{K}_3 = j^{-1}(x^2 + y^2 + z^2 \leq 2) \text{ et}$$

$$\bar{K}_3 \supset \delta \bar{K}_3 = j^{-1}(x^2 + y^2 + z^2 = 2) . \quad \square$$

On a un difféomorphisme évident:

$$\delta \bar{K}_3 = S_1 \times S_1 - \text{int } D_2$$

(où $D_2 \hookrightarrow S_1 \times S_1$ est un plongement C^∞ quelconque). On remarque aussi que $K_3 - s(K_3) =$ la partie régulière de K_3 est une variété de dimension 3, à bord $\neq \emptyset$.

On va désigner par $A_{s(K_3)} = A_s, B_s, C_s$, les germes de A, B, C autour de $s(K_3) \subset K_3$. (Je rappelle que si (X, Y) est une paire d'espaces topologiques, avec $Y \subset X$ fermé, deux sous-espaces $U, V \subset X$ ont le même germe autour de Y , s'il existe un ouvert $O \supset Y$, tel que : $O \cap U = O \cap V$.

$U_Y = V_Y$ va désigner le germe de U (de V) autour de Y).

Tout difféomorphisme:

$$f : K_3 \xrightarrow[\approx]{} K_3$$

laisse $s(K_3)$ invariant.

Si $F \subset s(K_3)$ est un fermé, on a donc une bijection:

$$f_* : \{A_F, B_F, C_F\} \xrightarrow[\approx]{} \{A_{f(F)}, B_{f(F)}, C_{f(F)}\} .$$

C'est clair qu'il existe des f pour lesquels:

$f_*(B_F) = C_{f(F)}$, $f_*(C_F) = B_{f(F)}$; mais je dis qu'on a toujours:

$$f_*(A_F) = A_{f(F)} .$$

[Démonstration: Je rappelle que, si K est un complexe simplicial et $\sigma \subset K$ un simplexe de K , on définit:

$\text{star}(\sigma, K)$ = le sous-complexe (de K) formé par les simplexes incidents avec σ .

$\mathcal{L}k(\sigma, K)$ = le sous-complexe de $\text{star}(\sigma, K)$ formé par les simplexes (de $\text{star}(\sigma, K)$) qui ne sont pas incidents avec σ .
(voir [24]) .

Triangulons K de telle manière que le carré $s(K_3) = (-1 \leq x \leq +1, -1 \leq y \leq +1, z=0)$ et ses côtés, soient des sous-complexes. On voit facilement que, suivant que $p \in \text{int } s(K_3)$, $p \in \text{int}$ (d'un côté de $s(K_3)$) ou p = un sommet du carré $s(K_3)$, $\mathcal{L}k(p, K_3)$ est topologiquement différent. Donc, tout f doit permuter les sommets de $s(K_3)$. D'autre part, soient p, q deux tels sommets, $F_1 \subset \mathcal{L}k(p, K_3) \cap s(K_3)$ un fermé, et $\varphi : \mathcal{L}k(p, K_3) \xrightarrow{\approx} \mathcal{L}k(q, K_3)$ un homéomorphisme quelconque. On a toujours $\varphi(F_1) \subset s(K_3)$ et:

$$\varphi_*((A \cap \mathcal{L}k(p, K_3))_{F_1}) = (A \cap \mathcal{L}k(q, K_3))_{\varphi(F_1)} .]$$

Définition 3.2: Une variété singulière (de dimension 3, compacte) est, par définition, un espace topologique compact X_3 , tel que pour tout $p \in X_3$ il existe un voisinage V de p dans X_3 tel que V est ou bien une variété de dimension 3 (usuelle) à bord non nécessairement vide ou bien isomorphe au K_3 de la définition 3.1. \square

Le lemme suivant est trivial:

Lemme 3.1: "Soit X_3 une variété singulière. Il existe une décomposition de X_3 (unique, à difféomorphisme près) définie comme suit:

On considère p exemplaires de \bar{K}_3 (voir définition 3.1):

$\bar{K}_3^1, \dots, \bar{K}_3^p$, une variété de dimension 3 compacte, à bord, M_3 et p plongements différentiables, 2-à-2 disjoints: $\varphi_i = \delta \bar{K}_3^i \longrightarrow \partial M_3$.

$$X_3 = M_3 \cup_{\varphi_1} \bar{K}_3^1 \cup_{\varphi_2} \bar{K}_3^2 \cup \dots \cup_{\varphi_p} \bar{K}_3^p = M_3 \oplus_{\delta \bar{K}_3^1} \bar{K}_3^1 \oplus_{\delta \bar{K}_3^2} \bar{K}_3^2 \oplus \dots \oplus_{\delta \bar{K}_3^p} \bar{K}_3^p.$$

(où chaque $x \in \delta \bar{K}_3^i$ est identifié avec $\varphi_i(x)$).

Par définition $s(X_3) = s(K_3^1) \cup \dots \cup s(K_3^p)$, (où $s(K_3^i) \subset \bar{K}_3^i$ est la partie singulière de \bar{K}_3^i) est la partie singulière de X_3 et $X_3 - s(X_3)$ la partie régulière. Les \bar{K}_3^i ($\bar{K}_3^i - \delta \bar{K}_3^i$) sont appelés les voisinsages singuliers de X_3 .

Le bord de X_3 , est, par définition:

$$\partial X_3 = \partial(X_3 - s(X_3)). \quad \square$$

Les variétés singulières X_3 vont presque toujours apparaître en même temps que des applications $(C^\infty) X_3 \rightarrow N_3$ ($N_3 =$ variété ordinaire), d'un type spécial, qu'on va appeler, par abus de langage, immersions.

Définition 3.3: Soient X_3 une variété singulière et N_3 une variété ordinaire. Une application C^∞ , $j : X_3 \rightarrow N_3$ est appelée immersion s'il existe une décomposition de X_3 comme dans le lemme 3.1 telle que $j|_{M_3} \in \text{Imm}(M_3, N_3)$ et que $j|_{\bar{K}_3^i}$ soit difféomorphe à $j(K_3^i)|_{\bar{K}_3^i}$ (voir la définition 3.1.). L'immersion j sera dite générique si, en plus:

$$1^\circ. f|_{\partial X_3} \in \text{Imm}(\partial X_3, N_3) \text{ est générique}$$

$$2^\circ. f(\text{int } M_3) \cap f(\bar{K}_3^i) = f(\bar{K}_3^i) \cap f(\bar{K}_3^j) = \emptyset$$

(si $i \neq j$) . \square

Par "homotopie régulière", toute immersion $X_3 \rightarrow N_3$ peut être rendue générique. Nous laissons au lecteur le soin d'explicitier (et de prouver) cette assertion.

Les Z-topologies du chapitre I, peuvent être introduites pour les immersions génériques $j : X_3 \rightarrow N_3$. On procède comme suit. On commence par considérer $S^2(X_3 - s(X_3)) \supset \Phi(j|_{X_3 - s(X_3)})$. La Z-topologie est définie sur $\Phi(j|_{X_3 - s(X_3)})$ comme au chapitre I. On considère la diagonale:

$$\Delta_{s(X_3)}^2 \subset \Delta_{X_3}^2 \subset S^2 X_3$$

et la complétion de $\Phi(j|_{X_3 - s(X_3)})$:

$$\hat{\Phi}(j) = \Phi(j|_{X_3 - s(X_3)}) \cup \Delta_{s(X_3)}^2 \subset S^2 X_3 .$$

Définition 3.4: Soit $j : X_3 \rightarrow N_3$ une immersion générique, comme ci-dessus. On définit la Z-topologie de $\hat{\Phi}(j) \subset S^2 X_3$ comme suit: Si T est la topologie ordinaire de $\hat{\Phi}(j)$ (induite par $S^2 X_3$), un sous-ensemble $F \subset \hat{\Phi}(j)$ sera Z-fermé si et seulement si, il existe un $F' \subset \Phi(j|_{X_3 - s(X_3)})$ tel que:

- 1) F' est Z-fermé dans $\Phi(j|_{X_3 - s(X_3)})$.
- 2) $F = \text{Cl}_T F'$ dans $\hat{\Phi}(j)$. \square

On remarque facilement que ceci définit bien une topologie, et que $F' = F - \Delta_{s(X_3)}^2$. Si $s(X_3) = \emptyset$ c'est la même définition qu'au chapitre I. De toute façon, toutes les considérations du chapitre I, restent valables dans ce nouveau contexte. Si l'on considère la décomposition:

$$s(X_3) = s(K_3^1) + \dots + s(K_3^p) ,$$

les fermés $\text{Cl}_Z(s(K_3^i)) \subset \hat{\Phi}(j)$ sont irréductibles et constituent des relations d'équivalence j -admissibles.

Définition 3.5: Soit $j : X_3 \rightarrow N_3$ une immersion générique. Définissons,

comme dans le lemme 1.6 la relation d'équivalence j -admissible:

$$\Psi = \Psi(j) = \hat{C}\mathcal{L}_Z(\Delta_s^2(X_3)) \subset \Phi(j) \quad . \quad \square$$

On démontre sans peine que $\Psi(j)$ est la plus petite relation d'équivalence j -admissible telle que X_3/Ψ soit une vraie variété et $j(\Psi) : X_3/\Psi \longrightarrow N_3$ une vraie immersion (C^∞). En plus la projection canonique $X_3 \longrightarrow X_3/\Psi$ induit une suite exacte:

$$\pi_1(X_3) \longrightarrow \pi_1(X_3/\Psi) \longrightarrow 0$$

(voir le lemme 1.7).

En principe les variétés singulières considérées dans ce mémoire pourront toujours se collapser (dans le sens de J.H.C. Whitehead [23]) sur des sous-polyèdres de dimensions 2 d'un certain type qu'on va décrire maintenant. On commence par rappeler quelques notions de topologie linéaire-par-morceaux (voir [24]). On prend comme point de départ la notion de polyèdre euclidien (= complexe simplicial fini, plongé linéairement dans R_n), de sous-division (linéaire) et de morphisme linéaire par morceaux (entre deux polyèdres euclidiens). Par définition, un polyèdre est un espace topologique X (localement) compact muni d'un atlas polyédral défini comme suit: On se donne des applications continues: $f_i : K_i \longrightarrow X$ telles que:

a) K_i est un polyèdre euclidien et $f_i : K_i \longrightarrow f_i(K_i)$ est un homéomorphisme.

b) $\bigcup f_i(K_i) = X$ et $U \subset X$ est fermé (ouvert) si et seulement si chaque $f_i(K_i) \cap U$ est fermé (ouvert).

c) les applications $f_j^{-1} \circ f_i : f_i^{-1}(K_i \cap K_j) \longrightarrow f_j^{-1}(K_i \cap K_j)$ sont linéaires-par-morceaux.

Tout polyèdre euclidien admet une structure polyédrale canonique et

deux polyèdres euclidiens ont la même structure polyédrale si et seulement s'ils admettent des sous-divisions (linéaires) isomorphes. Chaque polyèdre peut être triangulé d'une manière compatible avec sa structure polyédrale et deux telles triangulations admettent des sous-divisions communes. Les notions de morphisme linéaire-par-morceaux de déformation élémentaire, c'est-à-dire de contraction élémentaire ou de dilatation élémentaire sont définies pour les polyèdres. Une composition finie de contractions élémentaires, est un collapsing.

Définition 3.5.1: Soit $K = K_i$ un polyèdre de dimension i . $(K)_i = (K_i)_i \subset K$ va désigner le sous-ensemble (ouvert) des points où K est une variété (à bord) de dimension i . Je veux dire que chaque point $x \in (K)_i = (K_i)_i$ possède un voisinage (ouvert) qui est homéomorphe (par un homéomorphisme linéaire par morceaux), avec $R_i = 1^{\circ}$ espace euclidien de dimension i , ou avec $R_i^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i \geq 0)\}$. On définit $K_{i-1} = K - (K)_i = K_i - (K_i)_i$. On peut considérer, alors: $(K_{i-1})_{i-1} \subset K_{i-1}$ et $K_{i-2} = K_{i-1} - (K_{i-1})_{i-1}$. Inductivement, on définit K_j , $(K_j)_j$ et $K_{j-1} = K_j - (K_j)_j$. Pour un polyèdre de dimension 2, K_2 , on a une décomposition disjointe (stratification):

$$K_2 = (K_2)_2 + (K_1)_1 + K_0 \quad . \quad \square$$

On va donner maintenant la version 2 - dimensionnelle de la définition 3.1.

Définition 3.6: On va définir une paire d'espaces, (k_2, p) et une application $j(k_2) : k_2 \longrightarrow R_3$, comme suit: On considère R_3 muni de coordonnées (x, y, z) et:

$$A' = \{x = 0\} \subset R_3 \supset \{y = 0\} = B' \quad .$$

Soient $i(A')$, $i(B')$ les inclusions canoniques. On définit:

$$k_2 = \underbrace{A' \oplus B'}_{(x=y=0, z \leq 0)} \quad , \quad j(k_2) = i(A') \oplus i(B') \quad ,$$

$p =$ le point $(0, 0, 0) \in k_2$.

C'est le point singulier de k_2 . On définit aussi:

$$\bar{k}_2 = j(k_2)^{-1} (x^2 + y^2 + z^2 \leq 2)$$

$$\delta \bar{k}_2 = (j(k_2))^{-1} (x^2 + y^2 + z^2 = 2)$$

et:

$$\delta \bar{k}_2 \supset \partial_0 \bar{k}_2 = \delta \bar{k}_2 \cap (j(k_2))^{-1} (z \leq 0) \quad . \quad \square$$

Définition 3.7: Un 2-polyèdre singulier est par définition un triple (K_2, f, M_3) où K_2 est un 2-polyèdre compact, M_3 une variété C^∞ , sans bord et $f : K_2 \rightarrow M_3$ une application C^∞ (par morceaux), qu'on va appeler, par abus de langage, immersion . On suppose les conditions suivantes, satisfaites:

a) Il existe un ensemble fini $s(K_2) \subset K_2$, appelé l'ensemble singulier de (K_2, f, M_3) (où, tout simplement de K_2), tel que $f|_{K_2 - s(K_2)}$ soit une vraie immersion. Si $q \in s(K_2)$, il existe un voisinage V de $f(q) \in M_3$ et un diagramme commutatif où les flèches verticales sont des difféomorphismes:

$$\begin{array}{ccc} q \in f^{-1}(V) & \xrightarrow{f|_{f^{-1}(V)}} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ p \in k_2 & \xrightarrow{j(k_2)} & R_3 \end{array} .$$

b) f est générique, dans le sens suivant: On part de la décomposition considérée dans la définition 3.5.1:

$$K_2 = (K_2)_2 + (K_1)_1 + K_0$$

où l'on remarque que $s(K_2) \subset K_0$. On demande que:

b-1) si $x \in K_0 : f^{-1}(f(x)) = x$.

b-2) $f|(K_1)_1$ est un plongement $(K_1)_1 \rightarrow M_3$.

b-3) $f|_{(K_2)_2} \in \text{Imm}((K_2)_2, M_3)$ est une immersion C^∞ , générique et $f((K_2)_2)$ coupe $f((K_1)_1)$ transversalement.

Soit $p \in K_2$. On dira que p appartient au bord de $K_2: \partial K_2 \subset K_2$ si l'homologie locale de K_2 au point p est nulle:
 $H_*(K_2 \text{ mod } (K_2 - p)) = 0$ ∂K_2 est un sous-polyèdre de dimension 1 de K_2 et on a une décomposition comme tout-à-l'heure:

$$\partial K_2 = (\partial K_2)_1 + (\partial K_2)_0 .$$

$(\partial K_2)_0$ est un ensemble fini et $(\partial K_2)_1 \subset (K_2)_2$ est le sous-ensemble des points qui possèdent des voisinages ouverts difféomorphes à R_2^+ . (C'est le "vrai bord" de K_2).

(On voit donc que $\partial \bar{k}_2 \equiv \delta \bar{k}_2$.) \square

Définition 3.7.1: Je rappelle que si $\varphi : X \rightarrow Y$ est une immersion topologique,

on désigne par $M^i(\varphi) \subset X$ le sous-ensemble des points $x \in X$, tels que

$(\# \varphi^{-1}(\varphi(x))) \geq i$. Si (K_2, f, M_3) est un 2-polyèdre singulier, on définit

les sous-ensembles $M^2(f) \subset K_2$, $\hat{M}^2(f) \subset K_2$ par:

$$M^2(f) = M^2(f|_{K_2 - s(K_2)}) \subset K_2 - s(K_2) \text{ et: } \hat{M}^2(f) = M^2(f) \cup s(K_2) = \text{Cl } M^2(f) \subset K_2 .$$

Si X_3 est une variété singulière et $\psi : X_3 \rightarrow M_3$ une immersion générique, on définit de la même manière: $M^2(\psi) = M^2(\psi|_{X_3 - s(X_3)})$, $\hat{M}^2(\psi) = M^2(\psi) \cup s(X_3)$.

En imitant le paragraphe 0.4 (chapitre 0), on va introduire aussi les notations suivantes:

On partira d'un 2-polyèdre singulier (K_2, f, M_3) et de

$K_2 \times K_2 \supset \text{Diag } (K_2)$. On a:

$$K_2 \times K_2 \xrightarrow{f \times f} M_3 \times M_3 ,$$

et par définition:

$$M_2(f) = (f \times f)^{-1} (\text{Diag } M_3) - \text{Diag } K_2 \subset K_2 \times K_2 - \text{Diag } K_2$$

$$\hat{M}_2(f) = M_2(f) \cup \text{Diag } s(K_2) = \mathcal{C}\mathcal{L} M_2(f) .$$

La projection de $K_2 \times K_2$ sur le premier facteur, induit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} M_2(f) & \subset & \hat{M}_2(f) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \hat{\pi} \\ M^2(f) & \subset & \hat{M}^2(f) . \quad \square \end{array}$$

Le lemme suivant est trivial:

Lemme 3.2: "Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier. Il existe un couple $(\mathbb{O}_3(K_2, f, M_3), \mathbb{O}_3(f))$ (où par abus de notation, $\mathbb{O}_3(K_2, f, M_3)$ sera désigné, par $\mathbb{O}_3(K_2)$), tel que:

1) $\mathbb{O}_3(K_2)$ est une variété singulière et $\mathbb{O}_3(f) : \mathbb{O}_3(K_2) \rightarrow M_3$ une immersion générique.

2) Il existe un plongement $K_2 \subset \mathbb{O}_3(K_2)$, tel que $\mathbb{O}_3(f)|_{K_2} = f$ (on identifie K_2 avec son image dans $\mathbb{O}_3(K_2)$) et que $\mathbb{O}_3(K_2)$ collapse sur K_2 .

3) L'inclusion $K_2 \subset \mathbb{O}_3(K_2)$ induit une inclusion $s(K_2) \subset s(\mathbb{O}_3(K_2))$ qui est une équivalence d'homotopie (c'est-à-dire une bijection sur les composantes connexes, puisqu'elles sont toutes contractiles).

4) Pour tous les $i \geq 2$ on a:

$M^i(f) \subset M^i(\mathbb{O}_3(f))$ et $M^i(\mathbb{O}_3(f))$ collapse sur $M^i(f)$. (En particulier $M^4(\mathbb{O}_3(f)) = \emptyset$.)

5) On va désigner par $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X .

Il existe une bijection:

$$\xi = \pi_0(K_2 - s(K_2) - M^2(f)) \xrightarrow{\approx} \pi_0(\Theta_3(K_2) - s(\Theta_3(K_2)) - M^2(\Theta_3(f))) = \eta$$

telle que si $x \in \xi$, $X \in \eta$, on ait: $\psi(x) = X$ si et seulement si $x \cap X \neq \emptyset$ et que, dans ce cas X collapse sur $X \cap x$. $(\Theta_3(K_2), \Theta_3(f))$ est unique, à difféotopie près." \square

On remarque que l'on a une inclusion naturelle $S^2 K_2 \subset S^2 \Theta_3(K_2)$, en particulier, si $\Psi \subset \Phi(\Theta_3(f))$ est une relation d'équivalence $\Theta_3(f)$ -admissible:

$$\Psi \cap S^2 K_2 \subset S^2 K_2,$$

est une relation d'équivalence f -admissible.

On définit, en particulier, la relation d'équivalence:

$$\Phi = \Phi(f) = \Phi(\Theta_3(f)) \cap S^2 K_2 \subset S^2 K_2.$$

On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} K_2 & \xrightarrow{f} & M_3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & & K_2/\Phi(f) \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ f(\Phi) \end{array}$$

où $f(\Phi)$ est une vraie immersion.

C'est clair que $x \equiv y \pmod{\Phi(f)}$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. Si

$\psi \subset S^2 K_2$ est une relation d'équivalence (f -admissible) de la forme

$\psi = \Psi \cap S^2 K_2$, on définit $f(\psi) : K_2 \longrightarrow M_3$ par: $f(\psi) = \Theta(f)(\Psi)$, ce qui

nous donne le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} K_2 & \xrightarrow{f} & M_3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & & K_2/\psi \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ f(\psi) \end{array}$$

Par intersection avec S^2K_2 , la Z-topologie de $\Phi(\Theta(f))$ se transporte sur $\Phi(f)$. Enfin, on définit

$$\Psi(f) = \Psi(\Theta(f)) \cap S^2K_2.$$

C'est la plus petite relation d'équivalence f-admissible qui tue toutes les singularités de K_2 .

Définition 3.9: Soient (K_2, f, M_3) et (L_2, g, N_3) deux 2-polyèdres singuliers. On dira qu'ils sont difféomorphes s'il existe un homéomorphisme linéaire par morceaux $h : K_2 \rightarrow L_2$ tel que, si $x \in K_2$, ils existent des voisinages ouverts: $U, V_1, V_2 : x \in U \subset K_2, f(x) \in V_1 \subset M_3, g h(x) \in V_2 \subset N_3$, avec les propriétés suivantes:

1°. $f(U) \subset V_1, f h(U) \subset V_2$.

2°. Il existe un difféomorphisme $d : V_1 \rightarrow V_2$ qui rend commutatif

le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|U} & V_1 \\ h \downarrow & & \downarrow d \\ h(U) & \xrightarrow{g|h(U)} & V_2 \end{array} \quad . \quad \square$$

Si (K_2, f, M_3) et (L_2, g, N_3) sont difféomorphes, il existe un difféomorphisme $\Theta_3(K_2) \rightarrow \Theta_3(L_2)$ qui prolonge h .

Définition 3.10: Le 2-polyèdre singulier (K_2, f, M_3) est dit collapsible si K_2 est collapsible. Il est dit complètement collapsible s'il existe un 2-polyèdre singulier (K_2^i, f^i, M_3^i) (avec $s(K_2^i) = \emptyset$, K_2^i collapsible, f^i un plongement), r exemplaires disjoints du modèle local $(k_2, j(k_2), R_3)$ (déf. 3.6) $(k_2^i, j(k_2^i), M_3^i)$ et des plongements: $\partial_0 \bar{k}_2^i \longrightarrow \partial K_2^i$, tels que les 2-polyèdres singuliers (K_2, f, M_3) et:

$$(K_2'', f'', M_3'') = (K_2^i \oplus \underset{\partial_0 \bar{k}_2^1}{\bar{k}_2^1} \oplus \underset{\partial_0 \bar{k}_2^2}{\bar{k}_2^2} \oplus \dots \oplus \underset{\partial_0 \bar{k}_2^r}{\bar{k}_2^r}, f' \oplus j(\bar{k}_2^1) \oplus \dots \oplus j(\bar{k}_2^r), M_3^i)$$

soient difféomorphes. Pour la commodité on écrira:

$$K_2 = K_2^i \# \bar{k}_2^1 \# \dots \# \bar{k}_2^r \quad (\text{somme connexe}) \quad . \quad \square$$

Définition 3.11: On va considérer l'espace euclidien $R_3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$ et les plans $R_2^i = \{(x_1, x_i)\} \subset R_3$ ($i = 2, 3$). Pour chaque R_2^i on va considérer la projection $\pi : R_2^i \longrightarrow R$, donnée par $\pi(x_1, x_i) = x_1$, de même que les projections canoniques $\pi_i : R_3 \longrightarrow R_2^i$. Dans chaque R_2^i on se donne un polyèdre euclidien, compact, connexe, contractible: $\gamma_i \hookrightarrow R_2^i$, et un bout $S^i \in \gamma_i$. On va supposer que $S^i = (0, 0) \in R_2^i$, et que les conditions suivantes sont satisfaites.

1°. $\gamma_i \subset [0 \leq x_1 \leq 1] \cap R_2^i$.

2°. Tous les bouts de γ_i (à l'exception de S^i , se trouvent sur $(x_1 = 1)$.

3°. Si $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \gamma_i$ est un plongement, tel que $\varphi(0) = S^i$, alors: $\pi \circ \varphi : [0, 1] \longrightarrow R$ est un plongement.

4°. Soit $\gamma_i^0 \subset \gamma_i$ le 0-squelette. Alors:

$$\pi(\gamma_2^0) \cap \pi(\gamma_3^0) = (0) \in R$$

Considérons, maintenant, les sous-ensembles:

$$R_3 \supset \Gamma^i = \{((x_i = 0) \cap (x_1 \leq 0)) \cup \pi_{j(i)}^{-1}(\gamma_i)\}$$

où $j : (2, 3) \xrightarrow{\approx} (3, 2)$.

Soit $\beta(i) : \Gamma^i \subset R_3$ l'inclusion naturelle. On va considérer le 2-polyèdre singulier:

$$\underbrace{(\Gamma^2 \oplus \Gamma^3)}_{(x_2=x_3=0) \cap (x_1 \leq 0)}, \beta(2) \oplus \beta(3), R_3$$

et:

$$\Gamma^2 \oplus \Gamma^3 \supset \bar{\Gamma} = (\beta(2) \oplus \beta(3))^{-1} (|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1) ,$$

$$\beta = \beta(2) \oplus \beta(3) | \bar{\Gamma} , \text{ et:}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} \supset \partial_0 \bar{\Gamma} = & (\beta(3))^{-1} (((x_1 = -1) \cap (|x_2| \leq 1)) \cup ((|x_1| \leq 1) \cap (|x_2| = 1))) \\ & \oplus (\beta(2))^{-1} (((x_1 = -1) \cap (|x_3| \leq 1)) \cup ((|x_1| \leq 1) \cap (|x_3| = 1))) . \end{aligned}$$

Par définition, $(\bar{\Gamma}, \beta, R_3)$ est un 2-polyèdre singulier du type Γ . \square

Lemme 3.3: "Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier collapsible . Il existe, alors un 2-polyèdre singulier (K_2', f', M_3') et des 2-polyèdres singuliers du type Γ : $(\bar{\Gamma}_i, \beta_i, R_3)$ ($i=1, \dots, r = \# s(K_2')$) , tels que:

1°) K_2' est collapsible et sans singularités ($s(K_2') = \emptyset$) .

2°) Ils existent des plongements 2-à-2 disjoints:

$$\partial_0 \bar{\Gamma}_i \subset \partial K_2'$$

3°) K_2 est difféomorphe à:

$$\begin{array}{ccccccc} K_2' & \oplus & \bar{\Gamma}_1 & \oplus & \bar{\Gamma}_2 & \oplus & \dots \oplus \bar{\Gamma}_r \\ \partial_0 \bar{\Gamma}_1 & & \partial_0 \bar{\Gamma}_2 & & \partial_0 \bar{\Gamma}_r & & \end{array} .$$

On va écrire (symboliquement):

$$K_2 = K_2' \# \bar{\Gamma}_1 \# \dots \# \bar{\Gamma}_r . \quad (\# = \text{"somme connexe"}) \quad \square$$

(Cette décomposition, qui généralise celle de la définition 3.10, n'est pas unique.) La démonstration sera donnée au chapitre suivant.

Remarque: On déduit tout de suite, à partir du lemme précédent que $\Theta_3(K_2)$ (où (K_2, f, M_3) est un 2-polyèdre singulier, collapsible), possède une description particulièrement agréable, qu'on donne ci-dessous:

On part de r exemplaires de $I \times I$, désignés par:

$(I \times I)_i$ ($i=1, \dots, r$) et de r plongements 2-à-2 disjoints: $h_i: (I \times I)_i \rightarrow D_3$ tels que

a) $h_i((I \times I)_i) \cap \text{int } D_3 = h_i(I \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$

b) la paire $(D_3, \cup_i h_i(I \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]))$ est non-nouée dans le sens suivant: si $D_3 = (x^2 + y^2 + z^2 \leq 1)$:

$$\cup_i h_i(I \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) \subset D_3 \cap (z = 0) .$$

On considère, enfin, r autres exemplaires de D_3 : D_3^i et des plongements: $g_i: (I \times I)_i \rightarrow \partial D_3^i$. Alors:

$$\mathbb{Q}_3(K_2) = D_3 \oplus_{(IXI)_1} D_3^1 \oplus_{(IXI)_2} D_3^2 \oplus \dots \oplus D_3^r .$$

On remarque que même sans la condition b) (qui résulte de la collapsibilité complète de K_2), $D_3 \oplus D_3^1 \oplus \dots \oplus D_3^r$ serait encore collapsible.

On va finir ce paragraphe par deux lemmes un peu techniques, dont la démonstration sera donnée au chapitre IV.

Lemme 3.4: (Le premier principe de "position générale"): "Soient (X_3^i, f^i, Y_3^i, W^i) , ($i=1, \dots, k$) une suite de formations, et $S \subset (1, \dots, k)$ un sous-ensemble, tels que:

- 1) X_3^1 est un 3-disque à trous, et $\partial Y_3^1 = \emptyset$.
- 2) Si $i \in S$: $X_3^{i+1} = H(X_3^i, f^i, Y_3^i, W^i)$.
- 3) Si $i \notin S$: $X_3^{i+1} = X_3^i + (\text{des anses d'indices 2 et 3})$.

Il existe alors, un 2-polyèdre singulier complètement collapsible, (K_2, f, M_3) , tel que:

- 4) $\Phi(f) = \Psi(f)$ (déf. 3.5)
- 5) $\mathbb{Q}_3(K_2/\Psi(f))$ et $X_3^{k+1} = H(X_3^k, f^k, Y_3^k, W^k)$ sont *-équivalentes." \square

La démonstration sera donnée au chapitre IV.

Remarque: Avec une démonstration plus raffinée que celle qu'on va donner, on peut avoir, en plus:

6) Si l'application naturelle:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_3^1 & \longrightarrow & X_3^2 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_3^{k+1} \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & \longmapsto & & & & &
 \end{array}$$

n'a pas de points triples, alors: $M^3(f) = \emptyset$. On ne va pas utiliser cette propriété.

Lemme 3.4.1: (Le second principe de "position générale")

"Soit X_3 une variété singulière collapsible et $f : X_3 \longrightarrow N_3$ une immersion générique. Il existe une suite de formations: (X_3^i, f^i, N_3, W^i) , $(i=1, \dots, k)$, et un ensemble $S \subset \{1, \dots, k\}$, tels que:

1°. X_3^1 est un 3-disque à trous.

2°. Si $i \in S$, on a:

$$X_3^{i+1} = H(X_3^i, f^i, N_3, W^i), \text{ et } h(X_3^i, f^i, N_3, W^i) \text{ est régulièr}$$

lièrement homotope à f^{i+1} .

3°. Si $i \notin S$: $X_3^{i+1} = X_3^i + (\text{des anses d'indices } 2 \text{ et } 3)$ et $f^{i+1}|_{X_3^i}$ est régulièrement homotope à f^i .

4°. $X_3^{k+1} = H(X_3^k, f^k, N_3, W^k)$, est régulièrement homotope à $X_3/\Psi(f)$.

5°. Si $M^3(f) = \emptyset$, chaque $M^3(f^j) = \emptyset$. " \square

Ces deux lemmes montrent que, dans un certain sens, les formations et les variétés singulières "sont la même chose".

Voici enfin une REMARQUE IMPORTANTE: "Soit X_3 une variété singulière et $f : X_3 \longrightarrow N_3$ une immersion générique. Il existe une variété N_3

et une immersion générique $g : X_3 \longrightarrow N_3$, telle que: $\Psi(g) = \Phi(g) = \Psi(f)$.

Donc: $X_3/\Psi(f) = X_3/\Phi(g) = X_3/\Psi(g)$ (difféomorphisme)." En effet, il suffit de

considérer: $N_3 = (X_3/\Psi(f)) \cup (\partial(X_3/\Psi(f)) \times I)$, et

$$g : X_3 \longrightarrow X_3/\Psi(f) \hookrightarrow N_3 .$$

Ceci nous permet de supposer dorénavant, sans perte de généralité, que toutes

les immersions génériques $f : X_3 \longrightarrow M_3$ qu'on va considérer, ont toujours

la propriété:

$\Psi(f) \equiv \Phi(f)$

La même chose est valable pour les 2-polyèdres singuliers.

3.2) Le "foncteur d'épaississement"

Pour la commodité de l'exposé, on va introduire la notion de pseudo-catégorie.

Définition 3.11.1: Une pseudo-catégorie est une classe d'objets \mathcal{C} , telle que:

1) Pour tout couple d'objets $A, B \in \mathcal{C}$ on définit un ensemble $\text{Hom}(A, B)$.

2) Si $A, B, C \in \mathcal{C}$, il existe une partie $H(A, B, C) \subset \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C)$ et une application (loi de composition non partout définie):

$$H(A, B, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, C) .$$

3) Quand elle est définie, la loi de composition est associative (partout où cela a un sens).

4) Il existe un $1_A \in \text{Hom}(A, A)$ tel que $1_A \times \text{Hom}(A, B) \subset H(A, A, B)$ et $\text{Hom}(B, A) \times 1_A \subset \text{Hom}(B, A, A)$ qui fonctionnent comme élément unité.

Exemple. Considérons les variétés C^∞ (à bord anguleux) compactes de dimension n , et pour deux telles variétés A, B , définissons $\text{Hom}(A, B)$ comme étant l'ensemble des applications $C^\infty f : A \rightarrow B$, qui sont des plongements (" C^∞ ") tels que $\mathcal{C}\mathcal{L}(B - f(A))$ soit une variété C^∞ (à bord anguleux), compacte, de dimension n .

Dans tout le reste du travail c'est seulement ces applications-là qui seront appelées plongements. Enfin, pour les pseudo-catégories on a la notion de foncteur. Par abus de langage une pseudo-catégorie sera appelée catégorie. \square

On commence maintenant par considérer la catégorie \mathcal{C} définie comme suit: Un objet de \mathcal{C} est un triple (M_4, j, M_3) où M_4 est une variété C^∞ compacte, à bord (non vide) de dimension 4, M_3 une variété C^∞ de dimension 3, compacte et $j \in \text{PL}^\infty(M_3, \partial M_4)$. Un morphisme de \mathcal{C} est un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} M_4 \supset \partial M_4 & \xleftarrow{j} & M_3 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ M'_4 \supset \partial M'_4 & \xleftarrow{j'} & M'_3 \end{array}$$

où α, β sont des plongements C^∞ (on ne suppose pas que $\alpha(\partial M_4) \subset \partial M'_4, \dots$).

Définition 3.12: On considère notre modèle local:

$$j(K_3) | \bar{K}_3 : \bar{K}_3 \longrightarrow R_3$$

(définition 3.1). Une résolution des singularités de \bar{K}_3 , est une application C^∞ , surjective:

$$\pi : V_3 \longrightarrow \bar{K}_3$$

telle que: V_3 est une variété C^∞ , connexe, à bord, telle que: si $x \in \bar{K}_3 - s(\bar{K}_3)$ alors: $\pi^{-1}(x)$ contient un seul point, et que $\pi^{-1}(x)$ ne

contient jamais plus de deux points.

On remarque facilement qu'il y a exactement deux résolutions des singularités de \bar{K}_3 , qu'on va désigner par:

$$\pi(B) : V_3(B) \longrightarrow \bar{K}_3 \text{ et}$$

$$\pi(C) : V_3(C) \longrightarrow \bar{K}_3 .$$

Je vais décrire $\pi(B) : V_3(B) \rightarrow \bar{K}_3$. L'autre possibilité se décrit de la même manière, en renversant les rôles de B et C. Pour définir $V_3(B)$, on fait "éclater" (blow up) les points de $s(K_3)$ de telle manière qu'on sépare $A \cup C$ et B, suivant $s(K_3)$. Plus exactement on considère les inclusions canoniques de $D_0 = (z=0) \cap (-1 \leq x \leq +1) \cap (|y| \geq 1)$ dans B et A.

$$V_3(B) = B \underset{D_0}{\oplus} A \underset{E}{\oplus} C, \text{ où } E = (z=0) \cap (|y| \leq 1) .$$

On remarque que \bar{K}_3 est un espace-quotient de $V_3(B)$, et, par définition, $\pi(B)$ est la projection canonique. Enfin, on va utiliser la terminologie suivante: la résolution des singularités

$$\pi(B) : V_3(B) \rightarrow \bar{K}_3$$

spécifie la "branche" B de \bar{K}_3 , tandis que $\pi(C) : V_3(C) \rightarrow \bar{K}_3$, spécifie la branche C. \square

Remarque: On pourrait essayer aussi d'éclater $s(K_3)$ de telle façon à séparer $B \cup C$ de A. Mais on obtiendrait un espace qui possède des voisinages isomorphes à des cônes sur des variétés (de dimension 2) non-orientables, donc pas une 3-variété.

Soit maintenant X_3 une variété singulière et:

$$X_3 = M_3 \cup \bar{K}_3^1 \cup \dots \cup \bar{K}_3^p$$

une décomposition canonique.

Définition 3.13: Soit X_3 une variété singulière connexe. Une résolution des singularités de X_3 est une application:

$$\pi : V_3 \longrightarrow X_3$$

telle que: i) π est surjective et V_3 est une (vraie) variété C^∞ , à bord, connexe.

ii) Si $x \notin s(X_3)$, $\pi^{-1}(x)$ contient exactement un point.

iii) $\pi|_{\pi^{-1}(\bar{K}_3^i)} : \pi^{-1}(\bar{K}_3^i) \longrightarrow \bar{K}_3^i$

est une résolution des singularités de \bar{K}_3^i .

Il y a exactement 2^p résolutions des singularités de X_3 . \bar{K}_3^i sera toujours identifié (d'une manière bien précisée, une fois pour toutes) avec \bar{K}_3 . On a donc des parties $A^i, B^i, C^i \subseteq \bar{K}_3^i$ correspondant aux A, B, C (ou plutôt aux $A \cap \bar{K}_3, B \cap \bar{K}_3, C \cap \bar{K}_3$). Si $\pi|_{\pi^{-1}(\bar{K}_3^i)} : \pi^{-1}(\bar{K}_3^i) \rightarrow \bar{K}_3^i$ s'identifie à

$$\pi(B) | [\pi(B)]^{-1}(\bar{K}_3) : (\pi(B))^{-1}(\bar{K}_3) \rightarrow \bar{K}_3$$

on dit que la résolution $\pi : V_3 \rightarrow X_3$ spécifie la "branche" $B^i \subseteq \bar{K}_3^i$ (autrement elle spécifie C^i). Si (K_2, f, M_3) est un 2-polyèdre singulier, une résolution des singularités de (K_2, f, M_3) est, par définition, une résolution des singularités de la 3-variété singulière

$\mathbb{O}_3(K_2, f, M_3) = \mathbb{O}_3(K_2) : \pi : V_3 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$. En fait on aura besoin d'être plus explicite que cela. On va commencer par éclater (blow-up) les singularités de K_2 , de la manière suivante: Considérons un voisinage singulier de K_2 : (voir la définition 3.6)

$$k_2 = \underbrace{(x=0) \oplus (y=0)}_{(x=0) \cap (y=0) \cap (z \leq 0)}$$

Il y a deux manières d'éclater $(0,0,0) = s(k_2)$, l'une qui "spécifie" la branche $(x=0)$, l'autre la branche $(y=0)$. En spécifiant la branche $(x=0)$ je considère:

$$\hat{k}_2 = ((x=0) \cap (y^2+(z-1)^2 \geq 1)) \oplus \underbrace{(y=0)}_{(x=0) \cap (y=0) \cap (z \leq 0)} \xrightarrow{\pi} k_2$$

où $\pi|_{(y=0)} = \text{id}_{(y=0)}$

$\pi((x=0) \cap (y^2+(z-1)^2 \geq 1)) = (x=0)$ et en plus:

Si $p \in (x=0)$, $\pi^{-1}(p)$ contient exactement un point, sauf pour le cas $p = (0, 0, 0)$ quand $\pi^{-1}((0,0,0) = ((x=0) \cap (y^2+(z-1)^2 = 1)))$. Le point singulier éclate donc, en devenant un cercle.

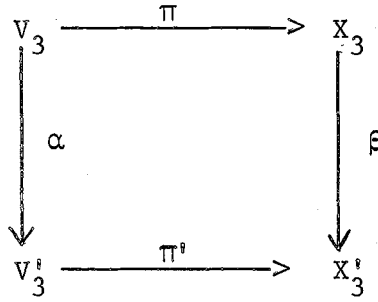
On suppose aussi que, en dehors d'un compact, π (c'est-à-dire $\pi|_{((x=0) \cap (y^2+(z-1)^2 \geq 1))}$ coïncide avec $\text{id}_{(x=0)}$.

Alors, à la résolution des singularités $\pi = V_3 \rightarrow \Theta_3(K_2)$ on attache un espace \hat{K}_2 et une projection d'espace quotient $\hat{\pi} : \hat{K}_2 \rightarrow K_2$ où \hat{K}_2 est obtenu en éclatant les points de $s(K_2)$, de telle façon que si $\pi : V_3 \rightarrow \Theta_3(K_2)$, spécifie la branche $(x=0)$ de k_2 , on remplace k_2 par \hat{k}_2 . On voit que V_3 est un voisinage régulier \mathbb{C}^∞ de \hat{K}_2 et qu'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}_2 & \subset & V_3 \\ \downarrow \hat{\pi} & & \downarrow \\ K_2 & \subset & \Theta_3(K_2) \end{array}$$

Donner une résolution des singularités de (K_2, f, M_3) , veut dire, en fait, donner un diagramme commutatif comme ci-dessus. \square

On définit maintenant une catégorie \mathcal{R} . Un objet de \mathcal{R} sera une résolution des singularités $\pi : V_3 \longrightarrow X_3$, avec X_3 une variété singulière (quelconque). Un morphisme sera un diagramme commutatif:



où les flèches sont des plongements "différentiables" et pour des décompositions de X_3 , X'_3 (bien choisies), en parties régulières et singulières:

$$X_3 = M_3 \cup K_3^1 \cup \dots \cup K_3^p,$$

$$X'_3 = M'_3 \cup (K_3^1)' \cup \dots \cup (K_3^p)',$$

$$\beta(K_3^i) = (K_3^j)' \text{ pour un } j \text{ dépendant de } i.$$

On va définir maintenant un "foncteur d'épaississement" :

$$\theta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C},$$

qui est un raffinement de la notion de voisinage régulier (\mathcal{C}^∞) de J.H.C. Whitehead, et qui sera l'une des techniques fondamentales pour ce mémoire. On commence par un "modèle local" .

Définition 3.14: On part d'une résolution des singularités de \bar{K}_3 , pour fixer les idées de:

$$\pi(B) : \bar{V}_3(B) \longrightarrow \bar{K}_3$$

$$(\text{où } \bar{V}_3(B) = \pi(B)^{-1}(\bar{K}_3) \subset V_3(B))$$

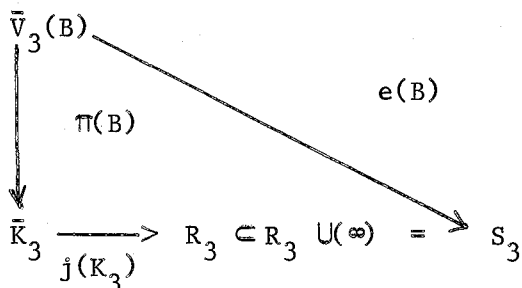
On remarque que l'éclatement (= "blowing-up") de $s(\bar{K}_3) = I \times I$ est un exemplaire de $S_1 \times I$:

$$\pi(B)^{-1}(s(\bar{K}_3)) = S_1 \times I.$$

On considère un plongement: $e(B) \in \text{Pl}^\infty(\bar{V}_3(B), S_3 = R_3 \cup (\infty))$ qui est défini (univoquement, à difféotopie près) par les conditions suivantes:

1) $e(B) (\pi(B)^{-1}(s(\bar{K}_2)))$ est contenu dans une "section hyperplane"
 $S_2 \hookrightarrow R_3$. (Donc l'image de $S_1 \times I$ est "non nouée" et "non-tordue" .)

2) Le diagramme (qui n'est pas commutatif):



est commutatif pour les orientations .

On définit $e(C) \in Pl^\infty(\bar{V}_3(C), S_3)$, d'une manière analogue. \square

Lemme 3.5: "Il existe un foncteur:

$$\theta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{C}$$

qui associe à chaque $(V_3 \xrightarrow{\pi} X_3) \in \mathcal{R}$ un élément:

$$\theta(V_3 \xrightarrow{\pi} X_3) = (\Theta_4(X_3), \theta(\pi), V_3) \in \mathcal{C}$$

(où $\Theta_4(X_3) = \Theta_4(V_3 \xrightarrow{\pi} X_3)$, dépend de toute la résolution, mais est noté, par abus de langage, tout simplement: $\Theta_4(X_3)$), tel que:

1) Si l'on considère la résolution des singularités triviale
 $id(V_3) : V_3 \longrightarrow V_3$ pour la variété non-singulière V_3 , on a:

$$\theta(V_3 \xrightarrow{id(V_3)} V_3) = (V_3 \times I, \theta(id(V_3), V_3)$$

où: $\theta(id(V_3))$ est:

$$V_3 = V_3 \times 0 \subset V_3 \times 0 + V_3 \times 1 + (\partial V_3) \times I = \partial(V_3 \times I) .$$

$$2) \theta(\bar{v}_3(B) \xrightarrow{\pi(B)} \bar{k}_3) = (D_4, e(B), \bar{v}_3(B))$$

(où $\partial D_4 = S_3, \dots$)

$$\theta(\bar{v}_3(C) \xrightarrow{\pi(C)} \bar{k}_3) = (D_4, e(C), \bar{v}_3(C)) .$$

3) θ est compatible avec l'opération somme de variétés différentiables (en particulier avec $\#$). Plus précisément considérons deux résolutions:

$$\pi_i : V_3^i \longrightarrow X_3^i \quad (i = 1, 2)$$

une variété C^∞ , à bord, de dimension 2, M_2 et $g_i \in PL^\infty(M_2, \partial X_2^i)$. On peut définir aussi $\pi_i^{-1} \circ g_i \in PL^\infty(M_2, \partial V_3^i)$ et la résolution des singularités:

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : \underset{M_2}{V_3^1} \oplus \underset{M_2}{V_3^2} \longrightarrow \underset{M_2}{X_3^1} \oplus \underset{M_2}{X_3^2} .$$

On peut considérer les $\theta(V_3^i, \pi_i^i, M_3^i)$ et les plongements C^∞ :

$$M_2 \xrightarrow{\pi_i^{-1} \circ g_i} V_3^i \xrightarrow{\theta(\pi_i)} \partial \underset{M_2}{\oplus_4}(X_3^i) .$$

On a des $\psi_i \in PL^\infty(M_2 \times I, \partial \underset{M_2}{\oplus_4}(X_3^i))$, déterminés à difféotopie près par les conditions:

$$\begin{aligned} \psi_i|_{M_2 \times 0} &= \theta(\pi_i) \circ \pi_i^{-1} \circ g_i \\ \psi_i(M_2 \times I) \cap \theta(\pi_i^i)(V_3^i) &= \psi_i(M_2 \times 0) . \end{aligned}$$

La condition 3) qu'on peut enfin énoncer, est:

$$\begin{aligned} \theta(\underset{M_2}{V_3^1} \oplus \underset{M_2}{V_3^2}) &\xrightarrow{\pi_1 \oplus \pi_2} \underset{M_2}{X_3^1} \oplus \underset{M_2}{X_3^2} = \\ &= (\underset{M_2 \times I}{\oplus_4}(X_3^1) \oplus \underset{M_2 \times I}{\oplus_4}(X_3^2)) , \theta(\pi_1) \oplus \theta(\pi_2) , \underset{M_2}{V_3^1} \oplus \underset{M_2}{V_3^2} \end{aligned}$$

(où l'égalité signifie difféomorphisme). θ a donc des "bonnes propriétés de recollement."

θ est unique à isomorphisme près, dans le sens que les conditions ci-dessus déterminent $\theta_4(X_3)$ à difféomorphisme près et $\theta(\pi) \in \text{PL}^\infty(V_3, \partial \theta_4(X_3))$ à difféotopie près.

$\theta_4(X_3)$ est un voisinage régulier C^∞ de X_3 ." \square

(Cette dernière propriété n'est pas utilisée dans la suite du mémoire.)

La démonstration de ce lemme sera donnée au chapitre IV (voir aussi [12]; $\theta_4(X_3)$ est essentiellement le produit cartésien régularisé, par I , considéré plutôt implicitement dans [12]).

Tout à fait comme les voisinages réguliers de J.H.C. Whitehead, le foncteur d'épaississement θ a des propriétés d'invariance par rapport à des opérations élémentaires, qu'on va définir maintenant. Une opération élémentaire sera toujours définie "localement", c'est-à-dire qu'on va partir de deux résolutions des singularités:

$$\pi : V_3 \longrightarrow X_3, \quad \pi(i) : V(i) \longrightarrow Y(i) \quad (\text{avec } i=1, 2, 3)$$

et on leur appliquera un procédé du type suivant: On aura une variété à bord de dimension 2, $M_2(i)$ et deux plongements:

$$\begin{array}{ccc} & & \partial X_3 \\ & \nearrow & \\ M_2(i) & & \\ & \searrow & \\ & & \partial Y(i) \end{array}$$

à partir desquels on fabrique une nouvelle résolution des singularités:

$$(S_i) : \pi \oplus \pi(i) : \begin{array}{c} V_3 \\ \oplus \\ M_2(i) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} X_3 \\ \oplus \\ M_2(i) \end{array} \oplus Y(i) .$$

On aura trois opérations élémentaires $O(i)$ ($i=1, 2, 3$). $O(i)$ va transformer (S_i) en une autre résolution des singularités, par un procédé général du type suivant:

$O(i)$ va changer $\pi(i) : V(i) \longrightarrow Y(i)$ en $\pi'(i) : V'(i) \longrightarrow Y'(i)$,
 et nous fournira, en même temps, un plongement:

$$M_2(i) \longrightarrow \partial Y'(i) .$$

Alors $O(i)$ nous fait passer de (S_i) à:

$$(O(i)(S_i)) : \pi \oplus \pi'(i) : \underset{M_2(i)}{V_3 \oplus V'(i)} \longrightarrow \underset{M_2(i)}{X_3 \oplus Y'(i)} .$$

En fait, dans la définition qui va suivre on aura plus de structures que cela:

$\underset{M_2(i)}{X_3 \oplus Y(i)}$ sera toujours munie d'une immersion générique:

$$F : \underset{M_2(i)}{X_3 \oplus Y(i)} \longrightarrow N_3 ,$$

qui enverra $Y(i)$ dans un voisinage de coordonnées: $Y(i) \xrightarrow{F} R_3$.

$Y'(i)$ sera automatiquement muni d'une immersion générique

$F' : Y'(i) \longrightarrow R_3$, telle que: F, F' coïncident dans un voisinage de

$M_2(i)$. On pourra prolonger alors F' par $F|_{X_3}$, en une immersion générique:

$$F' : \underset{M_2(i)}{X_3 \oplus Y'(i)} \longrightarrow N_3 .$$

En fait, on aura une projection d'espace-quotient: $Y(i) \xrightarrow{P(i)} Y'(i)$, telle

que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Y(i) & \xrightarrow{F} & N_3 \\ & \searrow P(i) & \nearrow F' \\ & & Y'(i) \end{array} .$$

Donc $\underset{M_2(i)}{X_3 \oplus Y'(i)}$ sera un espace-quotient de $\underset{M_2(i)}{X_3 \oplus Y(i)}$.

Définition 3.15: Pour la simplicité de la présentation, au lieu des $Y(i)$ ($Y^i(i)$), comme ci-dessus, on donnera des modèles locaux qui sont des 2-polyèdres singuliers $(K_2(i), f_i, R_3)$, $(K_2^i(i), f_i^i, R_3)$ ($i=1,2,3$) tels que $K_2(i)$, $K_2^i(i)$ soient non-compacts, et f_i soient propres, et des projections d'espace-quotient π_i , qui rendent commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 K_2(i) & \xrightarrow{f_i} & R_3 \\
 \searrow \pi_i & & \nearrow f_i^i \\
 & & K_2^i(i)
 \end{array}$$

Si N est suffisamment grand, la sphère $S_N \subset R_3$

$$S_N = (x^2 + y^2 + z^2 = N^2)$$

coupera transversalement $K_2(i)$, $K_2^i(i)$ et en dehors de cette sphère, on aura:

$$(K_2(i), f_i) |_{(x^2 + y^2 + z^2 \geq N^2)} \cong (K_2^i(i), f_i^i) |_{(x^2 + y^2 + z^2 \geq N^2)}, \\
 f_i^i, f_i |_{(x^2 + y^2 + z^2 \geq N^2)} = \text{une immersion, et } \pi_i |_{(x^2 + y^2 + z^2 \geq N^2)} = \text{l'identité.}$$

Pour passer à $Y(i)$ on prendra simplement:

$$(Y(i), F, R_3) \cong (\mathbb{O}_3(K_2(i) \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq N^2)), \mathbb{O}_3(f_i), R_3)$$

(et de même pour $Y^i(i)$), et:

$$M_2(i) = \text{un voisinage régulier de } K_2(i) \cap (x^2 + y^2 + z^2 = N^2) \text{ dans} \\
 \partial \mathbb{O}_3(K_2(i) \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq N^2))$$

Chaque fois qu'on se donnera une résolution des singularités de $(K_2(i), f_i, R_3)$, l'opération $O(i)$ ($i=1,2,3$) nous produira une résolution des singularités de $(K_2^i(i), f_i^i, R_3)$.

Si l'on oublie ces résolutions de singularités, π_i , sera appelée UNE PROJECTION D'ESPACE-QUOTIENT DU TYPE $O(i)$.

L'opération 0(1) : On va considérer une suite de $n \geq 2$ nombres réels:

$$\theta_n > \theta_{n-1} > \dots > \theta_1 .$$

On considère les sous-espaces de R_3 :

$$k(x; n) = ((x=0) \cap (z \leq 0)) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (x=\theta_i) \cap (z \geq 0) \right) \xrightarrow{\alpha} R_3$$

$$k(y) = (y=0) \xrightarrow{\beta} R_3 ,$$

et le 2-polyèdre singulier:

$$(k(1; n) = \underbrace{k(x; n)}_{(x=y=0) \cap (z \leq -1)} \oplus \underbrace{k(y)}_{(x=y=0) \cap (y \leq -1)} , f(1; n) = \alpha \oplus \beta , R_3) .$$

C'est, par définition $(K_2(1), f_1, R_3)$.

Dans le même esprit $(K_2^1(1), f_1^1, R_3)$ sera:

$$\left(\underbrace{k(x; n)}_{k(x; n) \cap k(y) \cap (z \leq 1)} \oplus \underbrace{k(y)}_{(z \leq 1)} , \alpha \oplus \beta , R_3 \right) .$$

π_1 est la projection canoniquement induite par (identité $(k(x; n))$) et $\text{id}(k(y))$. Si σ_1 est une résolution des singularités de $(K_2(1), f_1, R_3)$ qui spécifie la branche $k(x; n)$ (respectivement $k(y)$), $0(1)\sigma_1 = \sigma_1^1$, sera la résolution des singularités de $(K_2^1(1), f_1^1, R_3)$ qui spécifie les branches provenant de $k(x; n)$ (respectivement de $k(y)$).

L'opération 0(2): On va considérer les inclusions naturelles:

$$(x=0) \xrightarrow{\alpha} R_3 , \quad (y=0) \cap (z \leq 1) \xrightarrow{\beta} R_3 .$$

On aura:

$$(K_2(2), f_2, R_3) = \left((x=0) \oplus \underbrace{((y=0) \cap (z \leq 1))}_{(x=y=0) \cap (z \leq 0)} , \alpha \oplus \beta , R_3 \right)$$

et: $(K_2^!(2), f_2^!, R_3) = ((x=0) \cup ((y=0) \cap (z \leq 1)), \alpha \cup \beta, R_3)$.

π_2 sera induite par (identite $(x=0)$) et (identite $(y=0)$) et $0(2)$ nous fera passer de n'importe quelle résolution des singularités de $K_2(2)$ à l'unique résolution des singularités (triviale):

$$\text{id}(K_2^!(2)) : K_2^!(2) \longrightarrow K_2^!(2) .$$

L'opération $0(3)$: On va considérer les inclusions naturelles:

$$(x=0) \xleftarrow{\alpha} R_3 , \quad (y=0) \xleftarrow{\beta} R_3 .$$

On aura:

$$(K_2(3), f_3, R_3) = \left(\underbrace{((x=0) \oplus (y=0))}_{(x=y=0) \cap (|z| \geq 1)}, \alpha \oplus \beta, R_3 \right)$$

et:

$$(K_2^!(3), f_3^!, R_3) = ((x=0) \cup (y=0), \alpha \cup \beta, R_3) .$$

π_3 sera défini comme avant.

On remarque que $s(K_2(3)) = \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$. On dira qu'une résolution des singularités de $K_2(3)$ est cohérente si elle spécifie la même branche $(x=0)$ (ou $(y=0)$) pour $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$, en même temps.

L'opération $0(3)$ nous fait passer d'une résolution des singularités cohérente de $K_2(3)$ à l'unique résolution des singularités de $K_2^!(3)$:

$$\text{id}(K_2^!(3)) : K_2^!(3) \longrightarrow K_2^!(3) . \quad \square$$

Le lemme suivant décrit le passage de

$$\begin{aligned} \theta \left(\begin{array}{c} V_3 \oplus V(i) \\ M_2(i) \end{array} \right) & \xrightarrow{\pi \oplus \pi(i)} \begin{array}{c} X_3 \oplus Y(i) \\ M_2(i) \end{array} = \\ & = \left(\begin{array}{c} \oplus_4 (X_3 \oplus Y(i)) \\ M_2(i) \end{array} \right), \theta(\pi \oplus \pi(i)), \begin{array}{c} V_3 \oplus V(i) \\ M_2(i) \end{array} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{à } \theta(V_3 \oplus V'(i)) &\xrightarrow{\pi \oplus \pi'(i)} X_3 \oplus Y'(i) = \\ &M_2(i) \qquad \qquad \qquad M_2(i) \\ \\ = (\oplus_4(X_3 \oplus Y'(i))) &, \theta(\pi \oplus \pi'(i)), V_3 \oplus V'(i) \qquad (i = 1, 2, 3) \\ &M_2(i) \qquad \qquad \qquad M_2(i) \end{aligned}$$

Vu les bonnes propriétés de recollement du foncteur θ (c'est-à-dire sa compatibilité avec l'opération " \oplus " -lemme 3.5), il nous suffit de décrire le passage:

$$\begin{aligned} &(\oplus_4(Y(i)), \theta(\pi(i)), (V(i), M_2(i))) \\ \Rightarrow &(\oplus_4(Y'(i)), \theta(\pi'(i)), (V'(i), M_2(i))) \quad (\text{où: } (i=1, 2, 3)) \end{aligned}$$

Comme on l'a dit avant, si

$$\bar{K}_2(i) = K_2(i) \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq N^2) \quad , \text{ on a:}$$

$$\oplus_3(\bar{K}_2(i)) = Y(i), \quad \oplus_3(\bar{K}'_2(i)) = Y'(i) \quad ,$$

et $V(i) \xrightarrow{\pi(i)} Y(i)$, donne lieu à un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \hat{K}_2(i) & \hookrightarrow & V(i) \\ \downarrow \hat{\pi}(i) & & \downarrow \pi(i) \\ \bar{K}_2(i) & \hookrightarrow & Y(i) \end{array}$$

(et de même pour $Y'(i)$) , comme dans la définition 3.13. Dans le lemme qui suit on va décrire directement les polyèdres plongés:

$$\begin{aligned} \theta(\pi(i))(\hat{K}_2(i)) &\subset \partial \oplus_4(Y(i)) \quad , \\ \theta(\pi'(i))(\hat{K}'_2(i)) &\subset \partial \oplus_4(Y'(i)) \quad , \end{aligned}$$

et des sous-polyèdres:

$L(i) \subset \partial \theta(\pi(i)) (\hat{K}_2(i))$ et:

$L'(i) \subset \partial \theta(\pi'(i)) (\hat{K}'_2(i))$, tels que:

$\theta(\pi(i)) (M_2(i))$ (respectivement $\theta(\pi'(i)) (M'_2(i))$), soit un voisinage régulier C^∞ de

$$L(i) \subset \theta(\pi(i)) \partial V(i) = \partial \mathbb{O}_3(\theta(\pi(i)) \hat{K}_2(i))$$

(dans $\theta(\pi(i)) \partial V(i)$), et de même pour $M'_2(i) \equiv M_2(i) \subset \partial V'(i)$.

Avec toutes ces conventions, on peut énoncer le:

Lemme 3.6 (Lemme d'invariance du foncteur θ par rapport aux opérations élémentaires $O(1), O(2), O(3)$):

"Si $i = 1, 2$ on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_4(Y(i)) &= \mathbb{O}_4(Y'(i)) = D_4 \text{ , donc} \\ \partial \mathbb{O}_4(Y(i)) &= \partial \mathbb{O}_4(Y'(i)) = S_3 = \partial D_4 \text{ .} \end{aligned}$$

Si $i = 3$, on a:

$$\mathbb{O}_4(Y(3)) = S_1 \times D_3 \text{ , } \mathbb{O}_4(Y'(3)) = D_4 \text{ ,}$$

donc:

$$\partial \mathbb{O}_4(Y(3)) = S_1 \times S_2 \text{ , } \partial \mathbb{O}_4(Y'(3)) = S_3 \text{ .}$$

Pour décrire les cas $i=1, 2$ on va identifier S_3 à $R_3 \cup (\infty) = \{(x,y,z)\} \cup \infty$.

1°. Cas $O(1)$; $V(1)$ spécifie $k(x;n)$: On a:

$$\begin{aligned} \theta(\pi(1)) (\hat{K}_2(1)) &= [k(x; n) \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq 25) - \\ &- (x=0) \cap (y^2 + (z+3)^2 < 1)] \cup [(y=0) \cap (x^2 + (z+4)^2 \leq 1)] \text{ .} \end{aligned}$$

$L(1) \subset \partial \theta(\pi(1)) (\hat{K}_2(1))$ est:

$$L(1) = \partial \theta(\pi(1)) (\hat{K}_2(1)) - \partial((x=0) \cap (y^2 + (z+3)^2 \leq 1)) \text{ .}$$

Après avoir appliquée l'opération $O(1)$, on a:

$$\theta(\pi^0(1)) (\hat{K}_2^0(1)) = \{[(x=0) \cap (z \leq 0)] \cup \bigcup_{i=1}^n ((x=\theta_i z) \cap (z \geq 0) - \Delta_i^0)\}$$

$$\cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq 25) \} \cup [(y=0) \cap (x^2 + (z+2)^2 \leq 9)]$$

où Δ_i est un petit disque fermé, de rayon très petit:

$\Delta_i \subset \text{int} ((x = \theta_i z) \cap (z \geq 0) \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq 25))$ et de centre

$$(x = \theta_i z) \cap (z \geq 0) \cap \partial ((y=0) \cap (x^2 + (z+2)^2 \leq 9)) .$$

$L^0(1) \subset \partial \theta(\pi^0(1)) (\hat{K}_2^0(1))$ est:

$$L^0(1) = \partial \theta(\pi^0(1)) (\hat{K}_2^0(1)) - \bigcup_{i=1}^n \partial \Delta_i .$$

Le passage de $\theta(\pi(1)) V(1)$ à $\theta(\pi^0(1)) V^0(1)$ se fait donc par $(n-1)$ anses négatives d'indice 1, qui ne touchent pas à $M_2(1)$.

2°. Cas $O(1)$; $V(1)$ spécifie $k(y)$: On a:

$$\theta(\pi(1)) (\hat{K}_2(1)) = [k(x; n) \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq 4)] \cup$$

$$[(y = 0) \cap (9 \leq (x^2 + (z-2)^2) \leq 16)]$$

et $L(1) \subset \partial \theta(\pi(1)) (\hat{K}_2(1))$ est:

$$L(1) = \partial \theta(\pi(1)) (\hat{K}_2(1)) - ((x^2 + (z-2)^2 = 9) \cap (y=0)) .$$

Après avoir appliqué l'opération $O(1)$, on a:

$$\theta(\pi^0(1)) (\hat{K}_2^0(1)) = [k(x; n) \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq 4)] \cup$$

$$\cup [(y = 0) \cap ((x^2 + (z-2)^2) \leq 16) - \bigcup_{i=1}^n \Delta_i^0] ,$$

où Δ_i est un petit disque de rayon très petit et de centre

$$(x = \theta_i z) \cap (z \geq 0) \cap (x^2 + y^2 + z^2 = 4) \cap (y = 0) \in$$

$$(y = 0) \cap ((x^2 + (y-2)^2) < 16) .$$

$L^0(1) \subset \partial \theta(\pi^0(1)) (\hat{K}_2^0(1))$ est: $L^0(1) = \partial \theta(\pi^0(1)) (\hat{K}_2^0(1)) - \bigcup_{i=1}^n \partial \Delta_i .$

Le passage de $\theta(\pi(1)) V(1)$ à $\theta(\pi^0(1)) V^0(1)$, se fait donc, par $(n-1)$ anses d'indice 1 positives (plongées), ne touchant pas à $M_2(1)$.

3°. Cas $O(2)$; $V(2)$ spécifie $(x = 0)$: On a:

$$\begin{aligned} \theta(\pi(2)) (\hat{K}_2(2)) &= [(x = 0) \cap (9 \leq (y^2 + (z-2)^2 \leq 16)] \\ &\cup [(y = 0) \cap (x^2 + z^2 \leq 4)] \text{ et} \\ L(2) \subset \partial \theta(\pi(2)) (\hat{K}_2(2)) \text{ est:} \end{aligned}$$

$$L(2) = [(x=0) \cap ((y^2 + (z-2)^2) = 16)] \cup [(y=0) \cap (x^2 + z^2 = 4) \cap (z \leq 0)] .$$

Après avoir appliqué l'opération $O(2)$, on a:

$$\begin{aligned} \theta(\pi^1(2)) (\hat{K}_2^1(2)) &= [(x=0) \cap (y^2 + (z-2)^2 \leq 16)] \cup \\ &\cup [(y=0) \cap (x^2 + z^2 \leq 4)] \text{ et } L^1(2) \subset \partial \theta(\pi^1(2)) (\hat{K}_2^1(2)) \text{ est:} \end{aligned}$$

$$L^1(2) = [(x=0) \cap ((y^2 + (z-2)^2) = 16)] \cup [(y=0) \cap (x^2 + z^2 = 4) \cap (z \leq 0)] .$$

Le passage se fait donc par une anse positive d'indice 2, plongée, ne touchant pas à $M_2(2)$.

4°. Cas $O(2)$; $V(2)$ spécifie $(y = 0)$: On a:

$$\begin{aligned} \theta(\pi(2)) (\hat{K}_2(2)) &= [(x=0) \cap (y^2 + z^2 \leq 4)] \cup \\ &[(y=0) \cap (9 \leq (x^2 + (z-2)^2) \leq 16)] \text{ et } L(2) \subset \partial \theta(\pi(2)) (\hat{K}_2(2)) \text{ est:} \\ L(2) &= [(x=0) \cap (y^2 + z^2 = 4)] \cup [(y=0) \cap (x^2 + (z-2)^2 = 16) \cap (z \leq 0)] . \end{aligned}$$

Après avoir appliqué l'opération $O(2)$, on trouve:

$$\begin{aligned} \theta(\pi^1(2)) (\hat{K}_2^1(2)) &= [(x=0) \cap (y^2 + z^2 \leq 4)] \cup [(y=0) \cap (x^2 + (z-2)^2 \leq 16)] \\ \text{et } L^1(2) \subset \partial \theta(\pi^1(2)) (\hat{K}_2^1(2)) \text{ est:} \end{aligned}$$

$$L^1(2) = [(x=0) \cap (y^2 + z^2 = 4)] \cup [(y=0) \cap (x^2 + (z-2)^2 = 16) \cap (z \leq 0)] .$$

Le passage se fait donc par une anse d'indice 2 négative , qui ne touche pas à $M_2(2)$.

5°. Cas $O(3)$: (Ici il y a symétrie entre les sous-cas où $V(3)$ spécifie $(x = 0)$ ou $(y = 0)$).

On considère:

$$D_4 \supset \partial D_4 = S_3 = R_3 \cup (\infty) \supset [(x=0) \cap (y^2 + z^2 \leq 4)] \cup \\ \cup [(y=0) \cap (9 \leq x^2 + (z-2)^2 \leq 16)] = A, \text{ et}$$

encore un exemplaire de la même chose, où tout sera affecté d'un signe: ' .

On considère 2 petits intervalles fermés:

$$(0, 0, 2) \in I_1 \subset (x=0) \cap (y^2 + z^2 = 4) \text{ et:}$$

$$(0, 0, 6) \in I_2 \subset (y=0) \cap (x^2 + (z-2)^2 = 16) .$$

On considère aussi les arcs correspondants I_1^0, I_2^0 . Disons que les extrémités de $I_i(I_i^0)$ sont $a_i, b_i (a_i^0, b_i^0)$. Considérons aussi deux exemplaires du disque terrestre D_3^1, D_3^2 , de bords S_2^1, S_2^2 , avec les pôles Nord et Sud: N^1, N^2, S^1, S^2 et les méridiens 0 qui les unissent: μ^1, μ^2 .

On va donner quatre plongements:

$$D_3^i \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi_i} \\ \xrightarrow{\psi_i^0} \end{array} \begin{array}{c} S_3 \\ S_3^0 \end{array} \quad (i = 1, 2)$$

tels que:

1) ces plongements sont disjoints.

2) $\psi_i(D_3^i) \cap A = \psi_i(S_2^i) \cap \partial A = \psi_i(\mu^i) = I_i$ et de même pour

ψ_i^0, S_3^0, A^0 .

3) $\psi_i(S_2^i)$ est transversal à A (et de même pour ψ_i^0).

4) $\psi_1(N^1) = a_1, \psi_1(S^1) = b_1, \psi_2(N^1) = a_2, \psi_2(S^2) = b_2$.

5) $\psi_1^0(N^1) = a_1^0, \psi_1^0(S^1) = b_1^0, \psi_2^0(N^1) = b_2^0, \psi_2^0(S^2) = a_2^0$.

6) Si $S_3(S_3^0)$ est muni de l'orientation $(x, y, z) ((x^0, y^0, z^0))$,

les deux applications:

$$\psi_i(D_3^i) \xrightarrow{\psi_i^{-1}} D_3^i \xrightarrow{\psi_i^0} \psi_i^0(D_3^0) \quad (i = 1, 2)$$

renversent les orientations.

Désignons par $\delta A \subset \partial A$ le sous-ensemble:

$$\delta A = [(x = 0) \cap (y^2 + z^2 = 4) - \overset{\circ}{I}_1] \cup [(y = 0) \cap (x^2 + (z-2)^2 = 16) - \overset{\circ}{I}_2] .$$

On considérera l'ensemble analogue:

$\delta A' \subset \partial A'$. Avec toutes ses notations, on a un difféomorphisme:

$$\begin{aligned} & (\Theta_4(Y(3)) , \theta(\pi(3)) (\hat{K}_2(3)) , L(3) \subset \partial \theta(\pi(3)) (\hat{K}_2(3))) \\ = & (D_4 \oplus D_4' , A \oplus A' , \delta A \oplus \delta A') : \\ & \underbrace{D_3^1 + D_3^2} \quad \underbrace{\mu^1 + \mu^2} \end{aligned}$$

Après avoir appliqué l'opération $O(3)$, on a:

$$\begin{aligned} & (\Theta_4(Y'(3)) , \theta(\pi'(3)) (\hat{K}_2'(3)) , L'(3) \subset \partial \theta(\pi'(3)) (\hat{K}_2'(3))) \\ = & (D_4 , ((x = 0) \cap (y^2 + z^2 \leq 1)) \cup ((y = 0) \cap (x^2 + z^2 \leq 1)) \subset \\ & \{(x, y, z)\} = R_3 \subset R_3 \cup(\infty) = S_3 = \partial D_4 , ((x = 0) \cap (y^2 + z^2 = 1)) \cup ((y = 0) \cap (x^2 + z^2 = 1))), \end{aligned}$$

(de plus, l'identification

$$\delta A \oplus \delta A' \xrightarrow{\approx} ((x = 0) \cap (y^2 + z^2 = 1)) \cup ((y = 0) \cap (x^2 + z^2 = 1))$$

conserve $(x, x' = 0)$ et $(y, y' = 0)$) .

Le passage se fait donc en appliquant une anse d'indice 2 à

$\Theta_4(Y(3))$ et une anse négative d'indice 2, plus deux anses positives d'indice 2 à $\theta(\pi(3)) V(3)$ (sans toucher à $M_2(3)$) . " \square

La démonstration est un exercice géométrique (qui utilise le lemme 3.5) et qu'on laisse au lecteur. (Comparer aussi avec [12].)

3.3) Premières applications du foncteur d'épaississement:

On va commencer par agrandir la liste des opérations élémentaires $O(i)$ par une opération $O(o)$ qui "ne change (presque) rien" .

Définition 3.16 (Opération $O(o)$) : On part d'un polyèdre singulier (K_2, f, M_3) (et d'une résolution des singularités $\pi : V_3 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$).

Dans K_2 on considère un voisinage singulier $k_2 = \underbrace{(x=0) \oplus (y=0)}_{(x=0) \cap (y=0) \cap (z \leq 0)}$

(comme dans la définition 3.6) tel que $(k_2, f|_{k_2}) = (k_2, j(k_2))$.

On rappelle que $M^2(f) \subset K_2$ représente l'ensemble des points doubles de K_2 . On va supposer que:

$$(*) \quad M^2(f) \cap k_2 = M^2(f|_{k_2}) \cup j(k_2)^{-1}(z=1) .$$

L'opération $O(o)$ consiste à passer de (K_2, f, M_3) à (K'_2, f', M'_3) où K'_2 est l'espace-quotient de K_2 obtenu par:

$$\underbrace{(x=0) \oplus (y=0)}_{(x=0) \cap (y=0) \cap (z \leq 0)} \longrightarrow \underbrace{(x=0) \oplus (y=0)}_{(x=0) \cap (y=0) \cap (z \leq 2)}$$

f' est canoniquement induit par f . On remarque qu'on a un isomorphisme:

$$K_2 \xrightarrow{\approx} K'_2 ; \text{ en fait:}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{O}_3(K_2) & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{O}_3(K'_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ K_2 & \xrightarrow{\approx} & K'_2 \end{array} .$$

(ce qui nous définit une résolution des singularités $\pi' : V'_3 \rightarrow \mathbb{O}_3(K'_2)$,

isomorphe à $\pi : V_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$. Le théorème d'invariance est donc trivial pour l'opération $O(o)$).

L'opération $O(o)$ change tout de même quelque chose puisque l'isomorphisme $S^2 K_2 \xrightarrow{\approx} S^2 K_2^0$ ne transporte pas $\Psi(f)$ dans $\Psi(f')$.
(En général $\Psi(f)$ et $\Psi(f')$ ne sont d'ailleurs pas isomorphes.)

On dira que le passage au quotient $K_2 \longrightarrow K_2^0$ (qui n'est pas la même chose que l'isomorphisme $K_2 \xrightarrow{\approx} K_2^0$) est du type $O(o)$. Il sera commode de parler aussi d'opérations $O(o)$ dégénérées , définies comme tout-à-l'heure, mais avec l'égalité (\ast) remplacée par

$$M^2(f) \cap k_2 = M^2(f|k)$$

Ces opérations ne changent vraiment rien du tout .

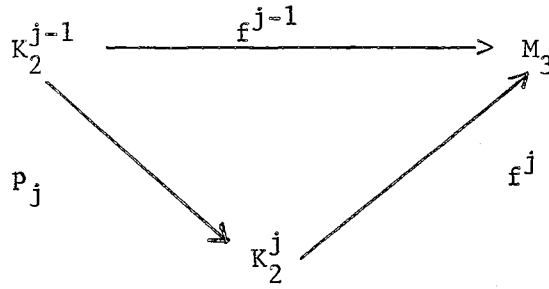
Tout à fait comme pour les opérations $O(i)$ du paragraphe précédent, on définit les projections d'espace-quotient de type $O(o)$ (en oubliant les résolutions des singularités). \square

Définition 3.17: Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier. Une séquence principale attachée à (K_2, f, M_3) , est, par définition, une suite de polyèdres singuliers de dimension 2:

$$(K_2, f, M_3) = (K_2^0, f^0, M_3), (K_2^1, f^1, M_3), \dots \\ \dots, (K_2^{n+q}, f^{n+q}, M_3) = (K_2/\Psi(f), f(\Psi(f)), M_3) ,$$

(où l'on rappelle que $\Psi(f)$ est la (plus petite) relation d'équivalence admissible qui tue toutes les singularités de K_2 et:

$f(\Psi(f)) : K_2/\Psi(f) \hookrightarrow M_3$ le plongement canonique induit par f), telle que:
a) Pour chaque $j \leq n + q$ il existe une projection d'espace quotient p_j , qui rend commutatif le diagramme suivant:



b) Pour $j \leq n$, p_j est de type $O(0)$, $O(1)$ ou $O(2)$ ($O(2)$ pouvant être dégénéré), et pour $j > n$, p_j est de type $O(3)$.

c) Si $K_2^{j-1} \xrightarrow{p_j} K_2^j$ ($j \leq n + q$) est une projection d'espace-quotient de type différent de $O(0)$, alors:

$$K_2^{j-1} \supset M^2(p_j) \cap M^3(f^{j-1}) = \emptyset .$$

(Remarque: C'est à cause de cette condition qu'on a un besoin d'introduire les opérations élémentaires $O(0)$).

q est appelé la longueur de la séquence principale. \square

On a le:

Lemme 3.7: "Tout 2-polyèdre singulier (K_2, f, M_3) admet une séquence principale (qui n'est, bien entendu, pas unique). La longueur q est un invariant de (K_2, f, M_3) .

En fait, si l'on considère les points multiples de f :

$$K_2 = M^1(f) \supset M^2(f) \supset M^3(f) \supset M^4(f) = \emptyset ,$$

q dépend seulement de la restriction de $\Psi(f)$ à $S^2 M^2(f) \subset S^2 K_2$.

Si $q = 0$, on dira que la relation d'équivalence $\Psi(f) \subset S^2 K_2$ est acyclique ." \square

Le fait que le nombre q soit un invariant résulte de ce que, homotopiquement parlant, on passe de K_2 à $K_2/\Psi(f)$ en ajoutant q cellules de dimension 2. Donc, si l'on désigne toujours par f , la projection

canonique: $f : K_2 \longrightarrow K_2/\Psi(f)$, et par $M(f)$ son "mapping-cylinder" ,
on a:

$$\dim_{\mathbb{Z}} H_2(f) \underbrace{=} \dim_{\mathbb{Z}} H_2(M(f) \text{ mod } K_2) = q \quad .$$

(définition)

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant:

Lemme 3.8: "Soit (K_2^i, f, M_3) un 2-polyèdre singulier, tel que:

i) la relation d'équivalence $\Psi(f)$ est acyclique .

ii) On a une décomposition en somme connexe , dans le sens du

lemme 3.3:

$$K_2^i = K_2 \# \bar{\Gamma}_1 \# \dots \# \bar{\Gamma}_r$$

telle que $(K_2, f|_{K_2}, M_3)$ n'ait plus de singularités, et que:

$$\mathcal{Q}_3(K_2) = (p \# (S_1 \times D_2))$$

(difféomorphisme).

On suppose M_3 orientable.

Sous ces conditions, on a un difféomorphisme:

$$\mathcal{Q}_3(K_2^i / \Psi(f)) = (p \# (S_1 \times D_2)) \quad . \quad \square$$

[Remarque: On pourrait considérer, aussi, le cas:

$$\mathcal{Q}_3(K_2) = (p \# (S_1 \times D_2)) \# (n \# (S_2 \times I)) \dots \quad]$$

La démonstration est assez simple, et nous croyons utile de la donner tout de suite.

On donne, pour la commodité du lecteur, le lemme suivant, conséquence immédiate du "loop theorem" et du "lemme de Dehn" , démontrés par Papakyriakopoulos [10], [11] .

Lemme 3.8.1: "Soit P_3 une variété de dimension 3, pas nécessairement compacte, avec $\partial P_3 \neq \emptyset$. ∂P_3 n'est pas nécessairement compacte non plus, et $\partial\partial P_3$, $\partial\partial\partial P_3$ peuvent être $\neq \emptyset$. Si

$$\text{Ker} (\pi_1(\partial P_3) \longrightarrow \pi_1(P_3)) \neq \{1\},$$

il existe un $\varphi \in \text{PL}^\infty(D_2, P_3)$, tel que $\varphi^{-1}(\partial P_3) = \partial D_2 = S_1$, qui coupe ∂P_3 transversalement, et tel que

$$[\varphi(S_1)] \neq 1 \in \pi_1(\partial P_3). \quad \square$$

Lemme 3.8.2: "Soit M_3 une variété de dimension 3, connexe, compacte, à bord, telle que:

a) $\pi_1(M_3) = F_p =$ le groupe libre à p générateurs.

b) M_3 peut être plongée dans une variété de dimension 3, N_3 qui a la propriété que son revêtement universel \tilde{N}_3 puisse être, lui-même, plongé dans S_3 . M_3 est orientable.

c) Ils existent des entiers $j \geq 1$, $z_1, \dots, z_j \geq 1$ tels que:

$$\sum_j z_j = q \geq p \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \partial M_3 = & (z_1 \# (S_1 \times S_1)) + (z_2 \# (S_1 \times S_1)) + \dots + (z_j \# (S_1 \times S_1)) \\ & + (n \text{ exemplaires de } S_2) \text{ (réunion disjointe)}. \end{aligned}$$

Sous ces conditions: $q = p$ et on a un difféomorphisme:

$$M_3 = X_3^1 \# \dots \# X_3^{n+p'} + [(p-p') \text{ anses d'indice 1 }],$$

où les X_3^i sont des variétés de dimension 3, dont $p' \leq p$ difféomorphes à $(S_1 \times D_2)$ et n difféomorphes à $(S_2 \times I)$.

Si $n = 0$, M_3 est difféomorphe à:

$$M_3 = (p \# (S_1 \times D_2)) \quad \square$$

Démonstration: Supposons d'abord que $p = 0$. Dans ce cas, on doit avoir aussi $q = 0$. (En effet, par des simples arguments de transversalité, il résulte que, si X_{p+q+1} est une variété C^∞ de dimension $(p+q)$ telle que $\pi_i(X_{p+q+1}) = 0$ pour $i \leq \max(p, q)$, ils ne peuvent pas exister des applications C^∞ : $f : S_p \longrightarrow \partial X$, $g : S_q \longrightarrow \partial X$ qui se coupent transversalement en un point, exactement) D'autre part, vu que $\pi_1(M_3) = 0$ (puisque $p = 0$), on peut relever le plongement $M_3 \subset N_3$ en un plongement $M_3 \subset \tilde{N}_3 \subset S_3$. Mais d'après un théorème classique d'Alexander toute sous-variété de S_3 , compacte, à bord, de dimension 3, dont chaque composante connexe du bord est simplement connexe, est difféomorphe à:

$$n \# (S_2 \times I) .$$

On va montrer maintenant que $q = p$. Supposons donc, par absurde que M_3 est comme dans l'énoncé du lemme 3.8.2 mais $q > p$.

Si $p \geq 1$, $\text{Ker}(\pi_1(\partial M_3) \longrightarrow \pi_1(M_3)) \neq \{1\}$, puisque aucun des $\pi_1(z_1 \# (S_1 \times S_1))$ n'est pas libre. Il existe donc un plongement $\varphi \in \text{Pl}^\infty(D_2, M_3)$ comme dans le lemme 3.8.1. Il y a deux cas à considérer:

1) $\varphi(D_2)$ ne sépare pas M_3 en deux. Alors, en coupant M_3 suivant $\varphi(D_2)$, on trouve une variété de dimension 3, M_3^1 telle que:

$$\pi_1(M_3^1) * Z = F_p$$

($*$ = produit libre). D'après le théorème de Groushko [25], on a que: $\pi_1(M_3^1) = F_{p-1}$ (Pour la commodité du lecteur, je rappelle l'énoncé du théorème de Groushko:

"Soit F un groupe libre, et φ un épimorphisme :

$\varphi : F \longrightarrow G_1 * \dots * G_k$. Il existe une décomposition en produit libre: $F = F_1 * \dots * F_k$, telle que $\varphi(F_i) \subset G_i$. " \square)

Pour M_3^1 , la propriété a) est donc satisfaite, avec $(p-1)$ au lieu de p . b) est satisfaite trivialement et le lecteur n'aura aucune difficulté à vérifier c), avec q remplacé par $q-1 > p-1$ (ou par $q > p-1$).

2) $\varphi(D_2)$ sépare M_3 en deux morceaux:

$$M_3 = M_3^1 \# M_3^2 .$$

Toujours d'après Groushko, on a: $\pi_1(M_3^1) = F_a$, $\pi_1(M_3^2) = F_b$ où:

$$a \neq 0 \neq b \text{ et } a + b = p .$$

On a, aussi:

$\partial M_3^1 = (\bar{z}_1 \# (S_1 \times S_1)) + \dots + (\bar{z}_j \# (S_1 \times S_1)) + (n_1 \text{ exemplaires de } S_2)$, et:

$\partial M_3^2 = (\bar{z}_1 \# S_1 \times S_1) + \dots + (\bar{z}_j \# (S_1 \times S_1)) + (n_2 \text{ exemplaires de } S_2)$, où:

$n_1 + n_2 = n$, $\bar{z}_i, \bar{z}_i \geq 0$, $\sum_i \bar{z}_i = \bar{q}$, $\sum_i \bar{z}_i = \bar{q}$ et $\bar{q} + \bar{q} = q$. L'une au moins des inégalités suivantes est vérifiée: $\bar{q} > a$, $\bar{q} > b$.

Les points 1) et 2) nous permettent donc de descendre jusqu'à une situation où les hypothèses du lemme sont vérifiées, mais avec $p = 0$, $q > 0$. On a vu déjà que cela est impossible.

Si $q = p$, le même raisonnement que tout-à-l'heure, permet de prouver le lemme 3.8.2 par induction (puisqu'on sera obligés d'avoir $a = \bar{q}$, $b = \bar{q}$, e.a.d.s.) . \square

On revient maintenant à la démonstration du lemme 3.8. On remarque tout de suite que, pour n'importe quelle résolution des singularités:

$$\pi : V_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2^1) ,$$

le foncteur d'épaississement:

$$\theta(V_3, \pi, \mathbb{O}_3(K_2^1)) = (\mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2^1)), \theta(\pi), V_3)$$

possède toujours la propriété que:

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2^i)) &= \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2)) = \\ &= (p \# (S_1 \times D_3)) \end{aligned}$$

Puisque $\Psi(f)$ est acyclique, on passe de K_2^i à $K_2^i/\Psi(f)$ en employant un nombre fini d'opérations $O(0)$, $O(1)$ et $O(2)$. D'après le lemme d'invariance 3.6, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f))) &= \mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f)) \times I = \\ &= \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2)) = (p \# (S_1 \times D_3)) \end{aligned}$$

En particulier:

$$\partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f))) = p \# (S_1 \times S_2)$$

On a donc:

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f)) &= \mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f)) \times 0 \subset (\mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f)) \times 0) + \\ + (\partial \mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f)) \times I) &+ (\mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f)) \times 1) = p \# (S_1 \times S_2) \end{aligned}$$

On remarque que le revêtement universel de $p \# (S_1 \times S_2)$ est:

S_3 si $p = 0$,

$S_1 \times \mathbb{R}$ si $p = 1$ et:

S_3 -(un ensemble de Cantor) si $p > 1$

La condition b) du lemme 3.8.2 est donc satisfaite pour

$\mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f))$. La condition a) aussi, puisque le foncteur d'épaississement $\mathbb{O}_4(\dots)$ et les opérations $O(1)$, $O(2)$ ne changent pas le type d'homotopie. Pour pouvoir appliquer le lemme 3.8.2 à $\mathbb{O}_3(K_2^i/\Psi(f))$ (et en déduire le lemme 3.8) il faudrait donc vérifier la condition c).

On commence par remarquer que $\# s(K_2^i) = r$ et que:

$$\partial V_3 = (p + r) \# (S_1 \times S_1)$$

Le lemme 3.6 nous indique que, quand on passe d'un $\pi^1: V_3^1 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2^1)$ à une

autre résolution $\pi^2 : V_3^2 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_3^2)$, par une opération élémentaire $O(1)$, ils arrivent les choses suivantes:

1) Il existe un entier $m > 1$, tel que les singularités de $s(K_2^2)$ sont:

$s(K_2^2) = (s(K_2^1) - \text{la singularité } x \in s(K_2^1) \text{ utilisée dans l'opération } O(1)) + (m \text{ singularités résultées de l'éclatement de } x)$.

2) Ils existent $(m-1)$ plongements C^∞ , 2-à-2 disjoints:

$$\psi_1^i : S_0 \times D_2 \longrightarrow \partial V_3^1 \quad (i=1, \dots, m-1)$$

tels que:

$\partial V_3^2 = \mu(\partial V_3^1 ; \psi_1^1, \dots, \psi_1^{m-1}) = \partial V_3^1$ à laquelle on a appliqué $(m-1)$ opérations de chirurgie de Morse d'indice 1, représentées par les ψ_1^i (voir le paragraphe 0.2).

De même, quand on passe de $\pi^1 : V_3^1 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2^1)$ à $\pi^2 : V_3^2 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2^2)$ par une opération du type $O(2)$ on a:

3) $\# s(K_2^2) = \# s(K_2^1) - 1$, donc une singularité disparaît.

4) On a un plongement C^∞ :

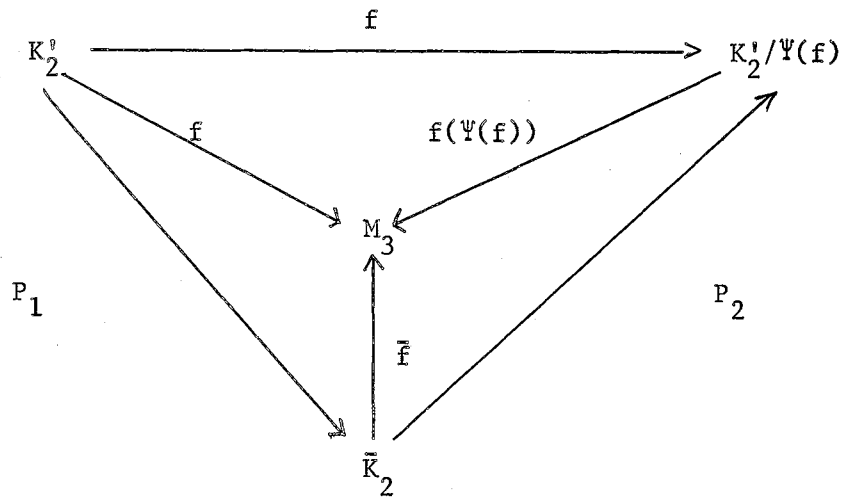
$$\psi_2 : S_1 \times I \longrightarrow \partial V_3^1$$

tel que

$$\partial V_3^2 = \mu(\partial V_3^1 ; \psi_2)$$

Revenons maintenant à la situation qui nous intéresse.

Sans perdre la généralité, on peut, considérer un 2-polyèdre singulier, intermédiaire entre (K_2^1, f, M_3) et $(K_2^1/\Psi(f), f(\Psi(f)), M_3) : (\bar{K}_2, \bar{f}, M_3)$, et un diagramme commutatif de projection d'espaces quotient et "d'immersions" :



tel que, P_1 se compose seulement de projection du type $0(0)$ et $0(1)$,
 tandis que, P_2 se compose seulement de projections du type $0(2)$.

On va considérer la résolution des singularités $\bar{\pi} : \bar{V}_3 \rightarrow \Theta_3(\bar{K}_2)$, canoniquement induite par $\pi : V_3 \rightarrow \Theta_3(K_2^0)$.

$$\text{Soit } R = \# s(\bar{K}_2) - \# s(K_2^0)$$

On a:

$$\partial \bar{V}_3 = (p + r + R) \# (S_1 \times S_1)$$

En passant de \bar{K}_2 à $K_2^0/\Psi(f)$ on tue les $\# s(\bar{K}_2) = (\# s(K_2^0) + R) = (r + R)$ singularités de \bar{K}_2 .

Ils existent alors une décomposition:

$$r + R = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 \quad (\bar{r}_i \geq 0)$$

et des nombres $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{1+\bar{r}_2}$ tels que:

$$\sum_i \bar{z}_i = p + r + R - \bar{r}_1$$

et:

$$\begin{aligned} \partial(\Theta_3(K_2^0/\Psi(f))) &= (S_2 \# (\bar{z}_1 \# (S_1 \times S_1))) + \dots \\ \dots + (S_2 \# (\bar{z}_1 + \bar{r}_2 \# (S_1 \times S_1))) &. \end{aligned}$$

(réunion disjointe).

La condition c) est bien satisfaite, puisque:

$$\sum \bar{z}_i = p + r + R - \bar{r}_1 = p + \bar{r}_2 \geq p \quad . \quad \square$$

Remarque: En fait $\bar{r}_2 = 0$.

Ceci résulte du fait que $1 + \bar{r}_2 = \dim H_2(\partial \Theta_3(K_2^0/\Psi(f)))$ et de la suite exacte d'homologie:

$$\begin{aligned} H_3(\Theta_3(K_2^0/\Psi(f))) &\longrightarrow H_3(\Theta_3(\dots) \text{ mod } \partial \Theta_3(\dots)) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_2(\partial \Theta_3(K_2^0/\Psi(f))) &\longrightarrow H_2(\Theta_3(\dots)) = 0 \end{aligned}$$

3.4) Une première idée de la démonstration du lemme fondamental:

La définition qui suit, ainsi que les définitions 3.18, 3.18.1 ne sont pas explicitement utilisées dans ce paragraphe, mais seulement plus tard. On les donne tout de même ici (parce qu'elles sont dans "l'esprit" de ce paragraphe).

Définition 3.17.0: Un k-anneau singulier sera, par définition, l'espace-quotient de $S_1 \times I$, obtenu en considérant k points distincts:

$x_1, \dots, x_k \in S_1$, et en tuant séparément chaque $x_i \times I$. On le désigne par ${}_k(S_1 \times I)$, et l'image canonique de $(S_1 \times t)$ (où $t \in I$), sera toujours désignée par $(S_1 \times t)$.

Si X est une variété différentiable, une application continue $\varphi : {}_k(S_1 \times I) \longrightarrow X$ est dite différentiable, si l'application composée:

$$S_1 \times I \xrightarrow{\pi} {}_k(S_1 \times I) \xrightarrow{\varphi} X,$$

est C^∞ . Si, en plus, φ a les propriétés ci-dessous, elle est appelée immersion:

a) L'application tangente:

$$T(\varphi \circ \pi) : T(S_1 \times I) \longrightarrow T X$$

tuée seulement les espaces verticaux $T(x_i \times I)$.

b) Pour chaque x_i , ils existent des coordonnées locales:

x sur S_1 ($x(x_i) = 0$), et y_1, \dots, y_n sur X ($y_i(\varphi \circ \pi(x_i \times I)) = 0$), telles que $\varphi \circ \pi$, puisse s'écrire dans un voisinage de $x_i \times I$, sous la forme suivante:

$$y_1 = x t, y_2 = x, y_3 = \dots = y_n = 0 \dots (t \in I).$$

Une immersion ${}_k(S_1 \times I) \longrightarrow X$, injective, sera appelée un plongement (C^∞) . \square

Après tous les détours qu'on vient de faire, on va s'occuper maintenant du lemme fondamental (lemme 1.8). Dans le langage de l'introduction, ce qu'on va obtenir dans ce paragraphe, est quelque chose d'analogue au lemme fondamental, mais avec le terme MOYENNEMENT NON-NOUE, remplacé par: FAIBLEMENT NON-NOUE. Soit X_3^{k+1} la variété du lemme fondamental.

D'après le premier principe de position générale, il existe un 2-polyèdre

complètement collapsible (K_2, f, M_3) tel que $\mathbb{O}_3(K_2/\Psi(f))$ soit $*$ -équivalent à X_3^{k+1} . Si $M^3(f) = \emptyset$ ou si $\Phi(f) = \Psi(f)$ est acyclique, les lemmes 1.9 (respectivement 3.8) nous disent déjà que X_3^{k+1} est un 3-disque à trous, et on a fini (lemme 3.18).

En général, on va considérer pour (K_2, f, M_3) une séquence principale: (définition 3.17):

$$(K_2, f, M_3) = (K_2^0, f^0, M_3) , (K_2^1, f^1, M_3) , \dots ,$$

$$(K_2^{n+q}, f^{n+q}, M_3) = (K_2/\Psi(f), f(\Psi(f)), M_3) ,$$

de longueur exactement q . Correspondant aux q opérations de type $O(3)$ (ou plutôt aux projections d'espace-quotient de type $O(3)$, puisque pour le moment on n'a pas des résolutions des singularités) qui font le passage de K_2^n à K_2^{n+q} , ils existent dans K_2^n , q voisinages, 2-à-2 disjoints qui sont comme le $K_2(3)$ de la définition de l'opération $O(3)$ (définition 3.15). Désignons-les par $K_2^1(3), \dots, K_2^q(3)$. Il est entendu qu'ils existent q voisinages de coordonnées, disjoints, dans $M_3 : R_3^1, \dots, R_3^q$, tels que $f^n(K_2^i(3)) \subset R_3^i$ et que $(K_2^i(3), f^n|_{K_2^i(3)}, R_3^i)$ soit isomorphe à $(K_2(3), f_3, R_3)$ de la définition de l'opération $O(3)$.

Supposons maintenant qu'on se donne une résolution des singularités, arbitraire, au début de la séquence principale: $\pi : V_3 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$. Les projections de type $O(1)$ et $O(2)$: $p^j : K_2^{j-1} \rightarrow K_2^j$ ($j \leq n$), induisent alors, d'une manière canonique des résolutions de singularités: $\pi^j : V_3^j \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2^j)$ ($j \leq n$). La résolution $\pi^n : V_3^n \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2^n)$ induit des résolutions des singularités des $K_2^i(3)$. Ces résolutions ne sont pas nécessairement toutes cohérentes (voir la définition de l'opération $O(3)$), quel que soit le choix du $\pi : V_3 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$ initial.

Un exemple peut être obtenu comme suit:

On commence par considérer le ruban de Möbius μ_2 , et une immersion générique $g : \mu_2 \longrightarrow R_3$, telle que $M^3(g) = \emptyset$ et que $M^2(g) \subset \mu_2$ soit constituée d'une seule composante connexe, $S_1 =$ section 0 de la fibration de fibre $I : \mu_2 \xrightarrow{\pi} S_1$. Soit $(S_1, \Psi(g)|_{S_1})$ l'ensemble $M^2(g)$ avec la restriction $\Psi(g)|_{M^2(g)}$, et $x, y \in S_1$, $x \neq y$, $x \equiv y \pmod{\Psi(g)}$. On peut considérer I_x, I_y deux intervalles fermés tels que $\partial I_x = x - 0$, $\partial I_y = y - 0$, $I_x \cap I_y = (0)$, et un difféomorphisme $h : I_x \rightarrow I_y$, $h(0) = 0$.

Sur $S_1 \oplus_x I_x \oplus_y I_y$ on considère la relation d'équivalence induite par $\Psi(g)$ et par $p \equiv h(p)$ ($p \in I_x$). On peut s'arranger pour que ceci soit un morceau de $(M^2(\varphi), \Psi(\varphi)|_{M^2(\varphi)})$ où $(\bar{K}_2, \varphi, R_3)$ est un 2-polyèdre singulier, collapsible e.a.d.s.

Dorénavant $\pi : V_3 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$ sera fixée, une fois pour toutes. On introduit dans R_3^i des coordonnées locales (x_1^i, x_2^i, x_3^i) , ce qui nous permet d'écrire (en suivant les notations de la définition de $O(3)$):

$$K_2^n \supset K_2^i(3) = \underbrace{(x_1^i = 0) \oplus (x_2^i = 0)}_{(x_1^i=0) \cap (x_2^i=0) \cap (|x_3^i| \geq 1)}$$

Pour chaque $i = 1, \dots, q$ on se donne $(\alpha(i), \beta(i)) \in (1, 2)$ tels que la résolution des singularités $\pi^n : V_3^n \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2^n)$ spécifie la branche $(x_{\alpha(i)}^i = 0)$, de $K_2^i(3)$ autour de $(0, 0, -1) \in s(K_2^i(3))$ et la branche $(x_{\beta(i)}^i = 0)$ autour de $(0, 0, +1) \in s(K_2^i(3))$. Donc la résolution des singularités, induite, pour $K_2^i(3)$ sera cohérente, si et seulement si $\alpha(i) = \beta(i)$.

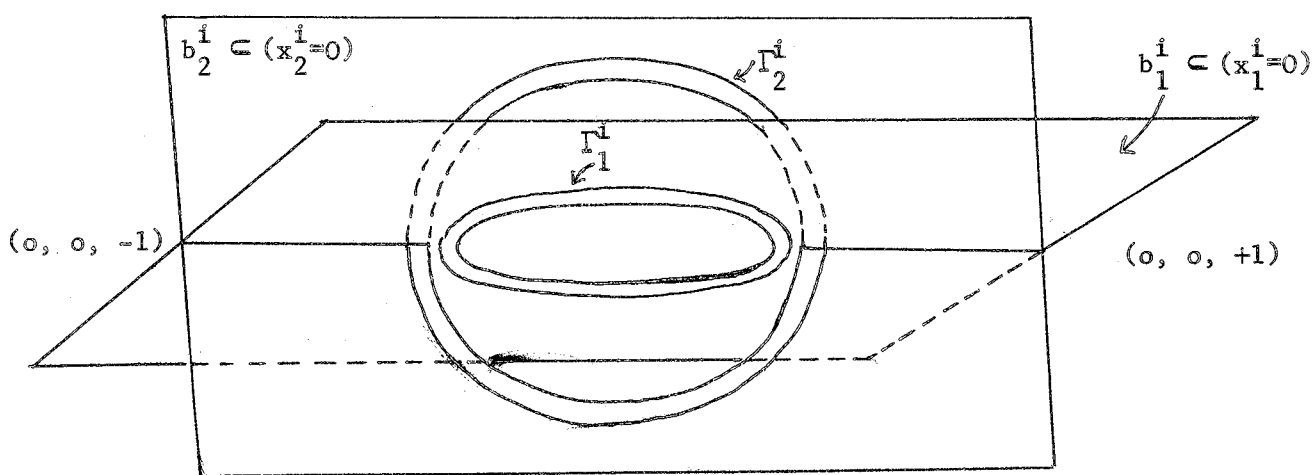
Définition 3.17.1: On définit maintenant $G_2^n \subset K_2^n$, comme suit:

$$G_2^n = K_2^n - \bigcup_{i=1}^q (K_2^i(3) - ((x_1^i)^2 + (x_2^i)^2 + (x_3^i)^2 < \frac{1}{8}))$$

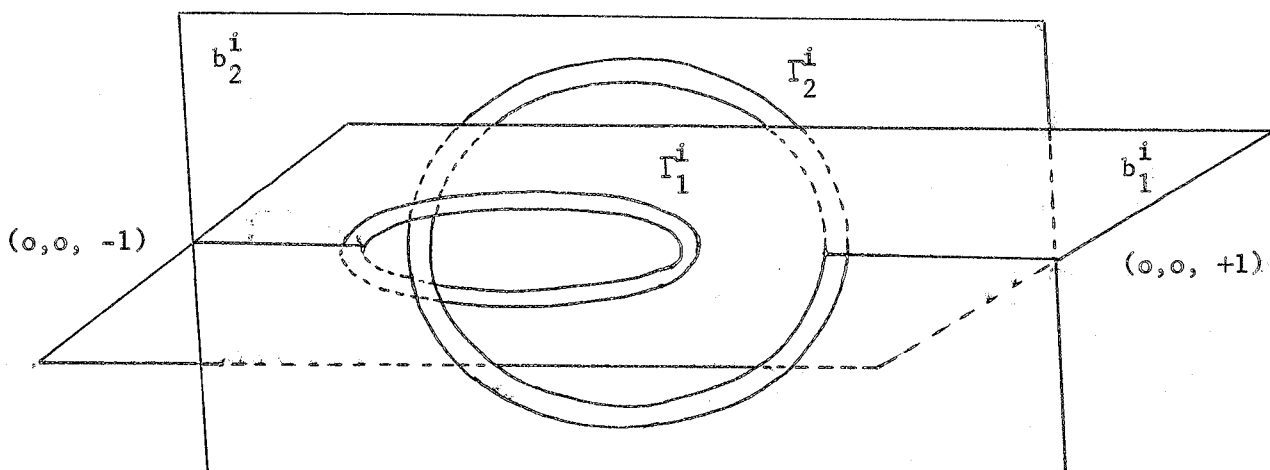
$$+ \bigcup_{i=1}^q ((x_{\alpha(i)}^i = 0) \cap (x_3^i \leq -\frac{1}{4})) + \bigcup_{i=1}^q ((x_{\beta(i)}^i = 0) \cap (x_3^i \geq \frac{1}{4})) .$$

(voir figure 3.17.1 qui représente $K_2^i(3) \cap G_2^n$)

La figure 3.17.1. L'ensemble $K_2^i(3) \cap G_2^n$



le cas $\alpha(i) = \beta(i) = 1$



le cas $\alpha(i) = 2, \beta(i) = 1$

On va considérer les "branches" :

$$b_1^i = (G_2^n \cap (x_1^i = 0)) \quad \text{et} \quad b_2^i = (G_2^n \cap (x_2^i = 0))$$

(de $G_2^n \cap K_2^i(3)$) qui sont isomorphes respectivement à $(x^2 + y^2 \geq 1) \subset \mathbb{R}_2$.

Dans $\text{int } b_j^i$ ($j = 1, 2$) on considère un cercle $C^\infty : \Gamma_j^i$, parallèle au ∂b_j^i et à distance très petite de ce bord (voir figure 3.17.1).

Soit $g^n = f^n |_{G_2^n}$, ce qui nous permet de définir le 2-polyèdre singulier (G_2^n, g^n, M_3) . On définit (G_2^j, g^j, M_3) , pour $j \leq n-1$ comme suit:

$$G_2^j = p_{j+1}^{-1} \circ p_{j+2}^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1} (G_2^n) \subset K_2^j$$

$$g^j = f^j |_{G_2^j}$$

$$q_j = p_j |_{G_2^{j-1}} : G_2^{j-1} \longrightarrow G_2^j$$

q_j est une projection d'espace-quotient, du même type que p_j . On peut compléter ceci à une séquence principale de (G_2^0, g^0, M_3) :

$$(G_2^0, g^0, M_3), \dots, (G_2^n, g^n, M_3), (G_2^{n+1}, g^{n+1}, M_3), \dots$$

$$\dots \dots (G_2^{n+2q}, g^{n+2q}, M_3) = (G_2^0 / \Psi(g^0), \dots)$$

où l'on passe de (G_2^i, g^i, M_3) à $(G_2^{i+1}, g^{i+1}, M_3)$ ($i \geq n$) par une projection d'espace-quotient $q_{i+1} : G_2^i \longrightarrow G_2^{i+1}$ qui est toujours de type $O(2)$. Pour préciser les idées on va supposer que

$q_{n+2i-1} : G_2^{n+2i-2} \longrightarrow G_2^{n+2i-1}$ correspond à l'identification des deux exemplaires de $(x_1^i = x_2^i = 0) \cap (-1 \leq x_3^i \leq -\frac{1}{2})$ contenus dans $K_2^i(3)$ et

q_{n+2i} à l'identification des deux exemplaires de $(x_1^i = x_2^i = 0) \cap (\frac{1}{2} \leq x_3^i \leq 1)$

On remarque que la relation d'équivalence $\Phi(g^0)$ est acyclique.

Enfin, $\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2)$ induit des résolutions des singularités:

$$\pi^i : U_3^i \longrightarrow \Theta_3(G_2^i) \quad (0 \leq i \leq n + 2q) \quad . \quad \square$$

Définition 3.18: On va considérer un 2-polyèdre singulier (K_2, f, M_3) , sans singularités ($s(K_2) = \emptyset$) et tel que f soit un plongement.

On se donne aussi un plongement: $a : S_1 \times I \rightarrow K_2$ tel que $a(S_1 \times 1) \subset \partial K_2$ où ∂K_2 est comme dans la définition 3.7. On considère le voisinage régulier $C^\infty : K_2 \subset \Theta_3(K_2) \subset M_3$ et on suppose qu'il est choisi tel que $a(S_1 \times 1) \subset \partial \Theta_3(K_2)$ (et que $a(S_1 \times 1) = a(S_1 \times I) \cap \partial \Theta_3(K_2)$).

On considère un autre plongement C^∞ :

$$b : S_1 \times I \longrightarrow M_3 - \text{int } \Theta_3(K_2) \quad , \quad \text{tel que } b^{-1}(\partial \Theta_3(K_2)) = b(S_1 \times 1) = a(S_1 \times 1) \text{ et que } b(S_1 \times I) \text{ rencontre } \partial \Theta_3(K_2) \text{ transversalement.}$$

Par définition, l'opération A_2 appliquée à (K_2, f, M_3) et $a(S_1 \times I)$ a comme résultat le triple: $(M_3; \Theta_3(K_2), b(S_1 \times 0))$. Elle pousse donc, en définitive, $a(S_1 \times 0)$ en dehors de $\Theta_3(K_2)$ le long de $a(S_1 \times I)$. C'est clair que, à difféomorphisme près, le résultat est indépendant de b .

On aura aussi une opération A_1 , définie comme suit: On se donne (K_2, f, M_3) et $a : S_1 \times I \rightarrow K_2$ comme tout-à-l'heure, et en plus, un ensemble de points: $x_1, \dots, x_k \in S_1$, tels que dans chaque point de $\bigcup_i a(x_i \times I)$, K_2 soit une variété de dimension 2 (à bord). On considère un plongement C^∞ :

$$c : \underset{2k}{(S_1 \times I)} \longrightarrow M_3 \quad (\text{où } \underset{2k}{(S_1 \times I)} \text{ est un anneau singulier)}$$

tel que: 1) $c^{-1}(\partial \Theta_3(K_2)) = c(S_1 \times 1) = a(S_1 \times 1)$

2) c et $c(S_1 \times 0)$ rencontrent $\partial \Theta_3(K_2)$ transversalement et: $a(x_1 \times 1) \notin c(S_1 \times 0)$.

3) On remarque que des $2k$ composantes connexes de $c(\text{int } \underset{2k}{(S_1 \times I)})$, la moitié est dans $\Theta_3(K_2)$, l'autre moitié dans

$M_3 - \Theta_3(K_2)$. On demande que:

$$a(x_i \times I) \in \mathcal{C}\mathcal{L} (c(\text{int}_{2k}(S_1 \times I)) \cap (M_3 - \Theta_3(K_2))) ,$$

et que cette relation induise une bijection de composantes connexes:

$$\pi_0(\{x_i \times I\}) \xrightarrow{\approx} \pi_0(c(\text{int}_{2k}(S_1 \times I)) \cap (M_3 - \Theta_3(K_2))) .$$

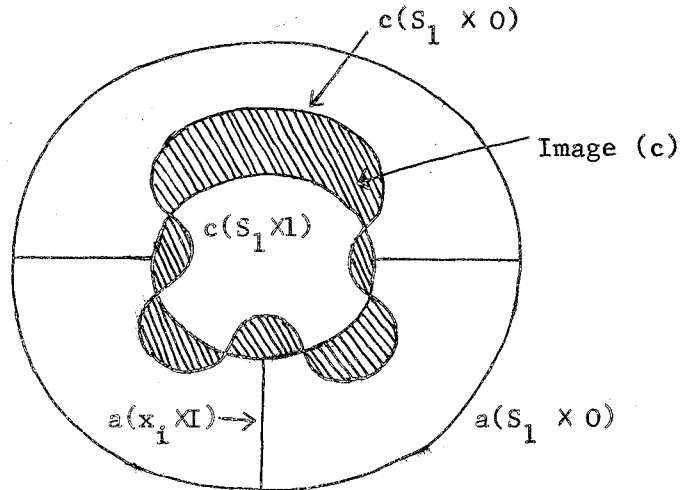
Par définition, l'opération A_1 appliquée à $\{(K_2, f, M_3), a, \bigcup_i a(x_i \times I)\}$

a comme résultat: $(M_3; \Theta_3(K_2), c(S_1 \times 0))$ (voir figure 3.18)

Figure 3.18. L'opération A_1 .

(Le plan de la figure est celui de $a(S_1 \times I) \subset M_3$) .

On a: $c(S_1 \times 1) = a(S_1 \times 1)$.



On pousse donc $a(S_1 \times 0)$ (partiellement) en dehors de $\Theta_3(K_2)$ le long des segments $a(x_i \times I)$. $\bigcup_i a(x_i \times I)$ s'appelle le support de l'opération A_1 , qu'on vient de décrire.

Enfin, puisque ces définitions sont de caractère "local", elles s'appliquent, aussi bien, tant qu'on ne touche pas aux singularités, à (K_2, f, M_3) , $s(K_2) \neq \emptyset$ et $K_2 \subset \mathbb{O}_3(K_2)$. \square

Définition 3.18.1: On va considérer aussi l'opération A_1 appliquée, tout à fait comme ci-dessus, dans le contexte suivant: On part d'une paire de variétés C^∞ de dimension 3: (W_3, V_3) où $V_3 \subset W_3$ est une sous-variété à bord $\neq \emptyset$ et $\partial W_3 = \emptyset$. On considère aussi un anneau singulier plongé différemmentiellement: $F: {}_{2k}(S_1 \times I) \hookrightarrow W_3$ tel que:

- a) $F^{-1}(\partial V_3) = S_1 \times 1$.
- b) F rencontre ∂V_3 transversalement.

On peut considérer un ensemble fini $E = \{y_1, \dots, y_p\} \subset S_1$ tel que la relation d'équivalence

$$S_1 \times I \xrightarrow{2k} (S_1 \times I)$$

opère trivialement (c'est-à-dire ne tue rien) sur $E \times I$. On peut considérer alors une opération A_1 de support $E \times I$ appliquée à $(W_3, V_3; F)$.

Elle va nous produire un nouveau anneau singulier plongé:

$$G: {}_{2k+2p}(S_1 \times I) \hookrightarrow W_3$$

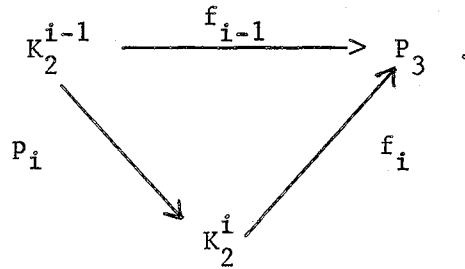
avec les propriétés a), b) ci-dessus, tel que

$$G(S_1 \times 1) = F(S_1 \times 1) \quad \square$$

On donne aussi un lemme qui complète en quelque sorte le théorème d'invariance (lemme 3.6).

Lemme 3.9: "Soit (K_2^0, f_0, P_3) , $(K_2^1, f_1, P_3), \dots, (K_2^n, f_n, P_3)$ une suite de 2-polyèdres singuliers et $p_i: K_2^{i-1} \rightarrow K_2^i$ des projections d'espace-

quotient de type $0(0)$, $0(1)$ et $0(2)$, tels que les diagrammes suivants soient commutatifs:

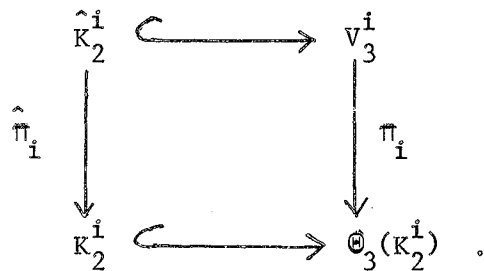


On se donne une résolution des singularités $\pi_0 : V_3^0 \longrightarrow \mathbb{Q}_3(K_2^0)$ qui va induire, d'une manière canonique, des résolutions des singularités:

$\pi_i : V_3^i \longrightarrow \mathbb{Q}_3(K_2^i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Dans K_2^n on considère $F \subset K_2^n$, défini comme suit: $x \in F$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est remplie:

- (i) $p_1^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(x) \in s(K_2^0)$ (et dans ce cas-là, $p_1^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(x)$ contient un seul point).
- (ii) $\# \{p_1^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(x)\} > 1$.

On considère le diagramme commutatif de la définition 3.13:



Si $T \subset K_2^n$ est un petit voisinage ("régulier") de F dans K_2^n et $T^{-1} = p_1^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(T) \subset K_2^0$, on a des plongements naturels

$$K_2^n - T \subset \hat{K}_2^n, \quad K_2^0 - T^{-1} \subset \hat{K}_2^0.$$

On a aussi un isomorphisme naturel:

$$p = p_n \circ \dots \circ p_1 \mid K_2^0 - T^{-1} : K_2^0 - T^{-1} \xrightarrow{\approx} K_2^n - T .$$

D'autre part, on considère:

$$\theta(v_3^i, \pi_i, \otimes_3(K_2^i)) = (\otimes_4(\otimes_3(K_2^i)), \theta(\pi_i), v_3^i) ,$$

et le théorème d'invariance (lemme 3.6) nous donne un difféomorphisme canonique:

$$j : \otimes_4(\otimes_3(K_2^0)) \xrightarrow{\approx} \otimes_4(\otimes_3(K_2^n)) .$$

La première partie de notre lemme 3.9, affirme que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} K_2^0 - T^{-1} \subset \hat{K}_2^0 \subset v_3^0 & \xrightarrow{\theta(\pi_0)} & \partial \otimes_4(\otimes_3(K_2^0)) \\ \downarrow p & & \downarrow j \\ K_2^n - T \subset \hat{K}_2^n \subset v_3^n & \xrightarrow{\theta(\pi_n)} & \partial \otimes_4(\otimes_3(K_2^n)) \end{array} .$$

La seconde partie du lemme va un peu plus loin, dans la même direction.

On commence par décomposer F en trois parties disjointes:

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 , \text{ de la manière suivante:}$$

- 1) $x \in F_1$ si et seulement s'il existe un j tel que:
 $p_j^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(x) \cap s(K_2^{j-1}) \neq \emptyset .$
- 2) $x \in F_2$ si et seulement si $x \notin F_1$ et:
 $\# \{p_1^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(x)\} = 2$
- 3) $x \in F_3$ si et seulement si:
 $\# \{p_1^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(x)\} = 3 .$

On va s'occuper de F_2 : si $x \in F_2$ il existe un j_0 unique tel que pour $\ell > j_0$: $p_\ell^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(x)$ est un point unique et pour

$\mathcal{L} \leq j_0 : p_{\mathcal{L}}^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(x)$ contient exactement deux points:

Soit $\{y, z\} = p_{j_0}^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(x) \subset K_2^{j_0-1}$. On définit:

$$F^{-1} = p_1^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(F)$$

$$F_i^{-1} = p_1^{-1} \circ \dots \circ p_n^{-1}(F_i)$$

Les images inverses de y, z dans K_2^0 seront désignées: $y^{-1}, z^{-1} \in K_2^0$.

On décompose F_2^{-1} en $F_+^{-1} \cup F_-^{-1}$ comme suit: Si y appartient à la branche

spécifiée par $\pi_{j_0-1}^{j_0-1} : V_3^{j_0-1} \rightarrow \mathbb{Q}_3(K_2^{j_0-1})$ (quand on passe de $K_2^{j_0-1}$ à $K_2^{j_0}$)

on dira que $y^{-1} \in F_+^{-1}$ (et forcément, $z^{-1} \in F_-^{-1}$). On a donc:

$$F^{-1} = F_1^{-1} + F_+^{-1} + F_-^{-1} + F_3^{-1}$$

On considère une famille de cercles "différentiablement" plongés, 2-à-2 disjoints:

$$\Sigma^1 + \dots + \Sigma^k \subset K_2^0 - s(K_2^0),$$

tels que: a) $p = p_n \circ \dots \circ p_1 \mid \Sigma^1 + \dots + \Sigma^k : \Sigma^1 + \dots + \Sigma^k \longrightarrow$

$$p(\Sigma^1 + \dots + \Sigma^k)$$

est un difféomorphisme.

b) $(\Sigma^1 + \dots + \Sigma^k) \cap F^{-1} \subset F_-^{-1}$ et les intersections sont transversales (on suppose que dans les points d'intersection K_2^0 est, localement, comme R_2).

On a des relèvements évidents:

$$\Sigma^1 + \dots + \Sigma^k \subset \hat{K}_2^0 \text{ et:}$$

$$p(\Sigma^1) + \dots + p(\Sigma^k) \subset \hat{K}_2^n.$$

La seconde partie de notre lemme dit que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma^1 + \dots + \Sigma^k \subset \hat{K}_2^0 \subset V_3^0 & \xrightarrow{\theta(\pi_0)} & \partial \Theta_4(\Theta_3(K_2^0)) \\
 \downarrow p & & \downarrow j \\
 p(\Sigma^1) + \dots + p(\Sigma^k) \subset \hat{K}_2^n \subset V_3^n & \xrightarrow{\theta(\pi_n)} & \partial \Theta_4(\Theta_3(K_2^n)) \quad .'' \quad \square
 \end{array}$$

La démonstration du lemme se fait, en remarquant que les différentes opérations du lemme 3.6 ne touchent pas à $\Sigma^1 + \dots + \Sigma^k$. On laisse les détails au lecteur.

Remarque sur le lemme 3.9: L'ensemble F est clairement la même chose que $p(\hat{M}^2(p)) \subset K_2^n$, et F^{-1} est $\hat{M}^2(p) \subset K_2^0$. On va considérer: $\hat{\pi} : \hat{M}_2(p) \rightarrow \hat{M}^2(p)$ (définition 3.7.1). On peut considérer une décomposition de $M_2(p) \subset K_2^0 \times K_2^0$, (qui va dépendre de la factorisation de p :

$$p = p_n \circ p_{n-1} \circ \dots \circ p_1) : M_2(p) = M_2^+(p) + M_2^-(p),$$

définie comme suit.

Si $K_2 \times K_2 \ni (x, y) \in M_2(p)$ on considère la projection p_i qui identifie x à y . Alors $(x, y) \in M_2^+(p)$ ($\in M_2^-(p)$) si et seulement si $x(y)$ appartient à la branche spécifiée de $M_2^+(p_i)$ ($M_2^-(p_i)$). Alors:

$$F_+^{-1} = [(M_2^+(p) - M_3^+(p)) \cap \hat{\pi}(M_2^+(p))] - (\text{les singularités des } K_2^i)$$

$$\text{et: } F_-^{-1} = [(M_2^-(p) - M_3^-(p)) \cap \hat{\pi}(M_2^-(p))] - (\text{les singularités des } K_2^i).$$

$M_2^+(p)$ est appelé la branche spécifiée de $M_2(p)$ (et $M_2^-(p)$ la branche non-spécifiée).

Si $M_3^+(p) = \emptyset$, la décomposition de $M_2(p)$ induit une décomposition de $M_2^+(p)$:

$$M_2^+(p) = M_+^2(p) \cup M_-^2(p), \quad M_+^2(p) \cap M_-^2(p) = \emptyset \quad \text{où} \quad M_+^2(p) = \hat{\pi}(M_2^+(p)).$$

$M_-^2(p)$ sera appelée branche spécifiée. Si $\Psi(p)$ est acyclique, ces décompositions dépendent seulement de p et pas de la factorisation:

$$p = p_n \circ \dots \circ p_1 \quad \square$$

Lemme 3.10: "Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier, collapsible, et $D_2^i \subset K_2$, ($i = 1, \dots, k$), k 2-disques, 2-à-2 disjoints, différenciablement plongés, tels que dans chaque point de D_2^i , K_2 soit localement homéomorphe à R_2 .

Il existe alors une décomposition

$$K_2 = K_2^i \# \bar{T}_1 \# \dots \# \bar{T}_r$$

comme dans le lemme 3.3, telle que $D_2^i \cap \bar{T}_j = \emptyset$.

En plus, si $\Theta_3(K_2^i - \cup \text{int } D_2^i)$ est un voisinage régulier C^∞ , tel que $\partial D_2^i \subset \partial \Theta_3(K_2^i - \cup \text{int } D_2^i)$, on a un difféomorphisme de paires de variétés différentiables:

$$\begin{aligned} & (\Theta_3(K_2^i - \cup \text{int } D_2^i), \partial D_2^1 + \dots + \partial D_2^k) = \\ & = (S_1 \times D_2, S_1 \times a_1) \# (S_1 \times D_2, S_1 \times a_2) \# \dots \\ & \dots (S_1 \times D_2, S_1 \times a_k), \text{ où } a_i \in \partial D_2. \quad \square \end{aligned}$$

La démonstration est immédiate à partir de la proposition 3.3.1, donnée au cours de la démonstration du lemme 3.3, au chapitre IV.

Le sens du lemme 3.10 est que, en "ajoutant une anse d'indice 1, négative" à un 2-polyèdre singulier collapsible on ne peut pas tomber sur les complications (noeuds) qui se présentent quand on ajoute de telles anses à D_3 (voir la figure 3.10 ci-dessous). C'est la raison principale pour laquelle on travaille avec des 2-polyèdres singuliers (au lieu d'utiliser les variétés (singulières) de dimension 3).

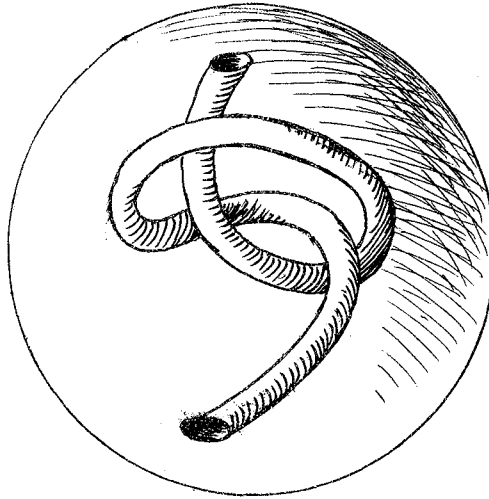


Figure 3.10

Ce lemme s'applique, en particulier, à la situation décrite au début de ce paragraphe.

Définition 3.18.1: On va reprendre les notations de la définition 3.17.1.

On considère les 2-disques $D_2^{i,j} \subset (x_j^i = 0) \subset K_2^0 = K_2$ tels que $b_j^i = (x_j^i = 0) - \text{int } D_2^{i,j}$ (je rappelle que $K_2^n \supset K_2^i(3) = (x_1^i = 0) \oplus (x_2^i = 0)$ et que $i = 1, \dots, q$ et $j = 1, 2$). On peut toujours supposer que si K_2 est décomposé comme ci-dessous: (en parties régulières et singulières)

$$K_2 = K_2^s \# k_2^1 \# \dots \# k_2^r$$

on a: $D_2^{i,j} \cap k_2^l = \emptyset$. On considère des 1-cercles différentiables de G_2^0 , parallèles aux $\partial D_2^{i,j}$: γ_j^i (γ_j^i très proche de $\partial D_2^{i,j}$), choisis de telle manière que:

$$q_n \circ q_{n-1} \circ \dots \circ q_1(\gamma_j^i) = \Gamma_j^i.$$

On considère une résolution des singularités: $U_3^0 \xrightarrow{\pi^0} \Theta_3(G_2^0)$.

Enfin si: $\theta(U_3^0, \pi^0, \Theta_3(G_2^0)) = (\Theta_4(\Theta_3(G_2^0)), \theta(\pi^0), U_3^0)$ on remarque que

$\gamma_j^i \subset G_2^0 \subset \Theta_3(G_2^0)$ se relèvent canoniquement en des plongements C^∞ :

$\hat{\gamma}_j^i \subset \hat{G}_2^0 \subset U_3^0$ (voir la définition 3.13). \square

Le lemme 3.10 implique alors le:

Lemme 3.11: "On a un difféomorphisme de triples:

$$\begin{aligned} & (\partial \oplus_4 (\oplus_3 (G_2^0)) ; U_3^0, \sum_{i,j} \hat{\gamma}_j^i) = \\ & = (S_1 \times S_2 ; S_1 \times D_2, S_1 \times x_1) \# \dots \# (S_1 \times S_2 ; S_1 \times D_2, S_1 \times x_{2q}) \\ & \quad \# (r \# (S_3 = S_1 \times D_2 + D_2 \times S_1 ; S_1 \times D_2, \emptyset) \end{aligned}$$

où $x_i \in \text{int } D_2$, $S_1 \times S_2 = 2 (S_1 \times D_2)$, $r = \# s(K_i^0) = \# (G_2^0)$." \square

Ce lemme nous décrit aussi complètement que possible la situation géométrique au début de la séquence principale

$$(G_2^0, g^0, M_3), \dots, (G_2^n, g^n, M_3), \dots, (G_2^{n+2q}, g^{n+2q}, M_3) \dots$$

Notre but est de voir ce qui se passe à la fin, (ou au moment (G_2^n, g^n, M_3)).

On commence par remarquer que la séquence principale qu'on vient d'écrire et les plongements:

$$\sum_{i,j} \gamma_j^i \subset G_2^0$$

satisfont aux conditions du lemme 3.9 (c'est-à-dire que les γ_j^i sont comme les Σ^i). Ceci résulte de la manière dont les $\Gamma_j^i \subset G_2^n$ ont été définis. En effet, en revenant aux notations du début de ce paragraphe et en regardant, par exemple, $(0, 0, -1) \in s(K_2^i(3)) \subset K_2^i(3) \cap G_2^n$, on voit qu'il y a deux branches de points multiples de $g^n : G_2^n \longrightarrow M_3$, issues de $(0, 0, -1)$: la branche contenue dans $x_{\alpha^i(i)}^i = 0$, $\alpha^i(i) \neq \alpha(i)$ (qui est comme F_-^{-1} du lemme 3.9, ou plutôt telle que son image inverse dans G_2^0 est comme F_-^{-1}), qui est un intervalle ayant comme extrémité $(0, 0, -1)$ et un point du "bord" de G_2^n , et la branche contenue dans $x_{\alpha(i)}^i = 0$ (qui est comme F_+^{-1}).

Cette dernière est un intervalle ayant comme extrémités $(0, 0, -1)$ et un point intérieur de G_2^n . On peut donc supposer, sans perdre la généralité, que Γ_j^i n'y touche pas. On peut donc supposer que γ_j^i coupe F_-^{-1} transversalement, et que: $(\gamma_1^i + \gamma_2^i) \cap F_+^{-1} = \emptyset$; $\# (\gamma_1^i + \gamma_2^i) \cap F_-^{-1} = 2$.

Considérons le difféomorphisme $Q = q_{n+2q} \circ \dots \circ q_n$:

$$\sum_{i,j} \Gamma_j^i \xrightarrow{Q} Q \left(\sum_{i,j} \Gamma_j^i \right) \subset G_2^{n+2q} = \hat{G}_2^{n+2q} \subset \mathbb{O}_3(G_2^{n+2q}) .$$

Les lemmes 3.9, 3.10 et 3.11 nous disent que:

Lemme 3.12: "Il y a un difféomorphisme:

$$\begin{aligned} (2 \mathbb{O}_3(G_2^{n+2q})) &= \partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(G_2^{n+2q})), \sum_{i,j} Q(\Gamma_j^i) \cong \\ &\cong 2q \# (S_1 \times S_2, S_1 \times x) \quad (x \in S_2) . \end{aligned}$$

On remarque que $\mathbb{O}_3(G_2^{n+2q})$ est une vraie variété, qui d'après le lemme 3.8 est difféomorphe à $2q \# (S_1 \times D_2)$. En fait, si l'on considère la résolution triviale: $\text{id}(\mathbb{O}_3(G_2^{n+2q})) : \mathbb{O}_3(G_2^{n+2q}) \longrightarrow \mathbb{O}_3(G_2^{n+2q})$ et on lui applique le foncteur ∂ , on a un difféomorphisme:

$$\begin{aligned} (\partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(G_2^{n+2q})), \mathbb{O}_3(G_2^{n+2q})) &= (2 \mathbb{O}_3(G_2^{n+2q}), \mathbb{O}_3(G_2^{n+2q})) = \\ &= (2 ((2q) \# (S_1 \times D_2)), ((2q) \# (S_1 \times D_2))) . \quad \square \end{aligned}$$

La situation géométrique de $\mathbb{O}_3(G_2^{n+2q})$ et séparément de $Q(\Gamma_j^i)$, dans $\partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(G_2^{n+2q}))$, est donc complètement déterminée. Pour pouvoir prouver le lemme fondamental on aura besoin de connaître la structure du triple:

$$(\partial \mathbb{O}_4(\mathbb{O}_3(G_2^{n+2q}); \mathbb{O}_3(G_2^{n+2q}), \sum_{i,j} Q(\Gamma_j^i)) .$$

Le lemme 3.12 nous donne déjà une variante faible du lemme fondamental 1.8:

Lemme 3.13: " $\Theta_3(K_2/\Psi(f))$ (voir le début de ce paragraphe) peut être décrit comme suit: Il existe sur $T_3^{2q} = 2q \# (S_1 \times D_2)$, $2q$ cercles différentiables: $S_1^1, \dots, S_1^{2q} \subset \partial T_3^{2q}$, tels que:

1) $S_1^{2i-1} \cap S_1^{2i}$ consiste exactement de deux points: x_1^i, x_2^i d'intersection transversale; autrement, $S_1^l \cap S_1^k = \emptyset$.

2) Ils existent des plongements C^∞ :

$$F_i : S_1 \times I \longrightarrow T_3^{2q} \subset 2T_3^{2q}$$

tels que: 2-a) $F_i^{-1}(\partial T_3^{2q}) = S_1 \times 0 = F_i^{-1}(S_1^i)$.

2-b) $F_i(S_1 \times I)$ coupe ∂T_3^{2q} transversalement.

2-c) $F_i(S_1 \times I)$ coupe $F_j(S_1 \times I)$ transversalement, suivant des intervalles fermés.

2-d) L'inclusion naturelle:

$$\pi_0(S_1^i \cap S_1^j) \xrightarrow{\cong} \pi_0(F_i(S_1 \times I) \cap F_j(S_1 \times I))$$

est une bijection.

2-e) La paire:

$$(2 T_3^{2q}, \bigcup_{i=1}^q F_i(S_1 \times I))$$

est FAIBLEMENT NON-NOUEE (voir l'introduction). (En particulier, on suppose que: $F_i(S_1 \times I) \cap F_j(S_1 \times I) = \emptyset$).

3) Si l'on choisit des orientations pour ∂T_3^{2q} , S_1^i , on a:

$$\int_{x_1} \text{int}_i(S_1^{2i-1}, S_1^{2i}) \cdot \int_{x_2} \text{int}_i(S_1^{2i-1}, S_1^{2i}) = -1.$$

4) On considère des disques de dimension 2: D_2^i ($i=1, \dots, q$)

tels que $\partial D_2^i = S_1^i$, et pour chaque paire D_2^{2i-1}, D_2^{2i} , deux plongements

C^∞ : $g_{2i-1} : I \longrightarrow D_2^{2i-1}$, $g_{2i} : I \longrightarrow D_2^{2i}$, tels que:

a) $g_j^{-1}(\partial D_2^j) = \partial I$, b) $g_j(I)$ coupe ∂D_2^j transversalement.

c) $g_{2i-1}(0) = g_{2i}(0) = x_1^i$ et: $g_{2i-1}(1) = g_{2i}(1) = x_2^i$.

On considère:

$$K = T_3^{2q} \oplus S_1^1 \oplus D_2^1 \oplus \dots \oplus S_1^{2q} \oplus D_2^{2q} ,$$

et, sur K , la relation d'équivalence Φ , qui consiste à identifier $g_{2i-1}(x) \equiv g_{2i}(x)$, pour chaque $i \leq q$, $x \in I$.

Alors: $\Theta_3(K_2/\Psi(f))$ est difféomorphe à un voisinage régulier C^∞ , du quotient K/Φ . " \square

Démonstration: Le passage $K_2^n \Rightarrow K_2^{n+q} = K_2/\Psi(f)$, revient à faire, pour chaque $K_2^i(3) \subset K_2^n$ le passage au quotient: $K_2^i(3) \longrightarrow ((x_1^i = 0) \cup (x_2^i = 0))$.

Le lemme 3.8 implique que:

$$\Theta_3(K_2^{n+q} - \bigcup_i ((x_1^i)^2 + (x_2^i)^2 + (x_3^i)^2 < \frac{1}{4})) = 2q \# (S_1 \times D_2)$$

(difféomorphisme). Dans $\partial \Theta_3(K_2^{n+q} - \bigcup_i (\dots))$, on considère les cercles différentiables:

$$S_1^{2i-1} = (x_1^i = 0) \cap ((x_2^i)^2 + (x_3^i)^2 = \frac{1}{4})$$

$$S_2^{2i} = (x_2^i = 0) \cap ((x_1^i)^2 + (x_3^i)^2 = \frac{1}{4}) .$$

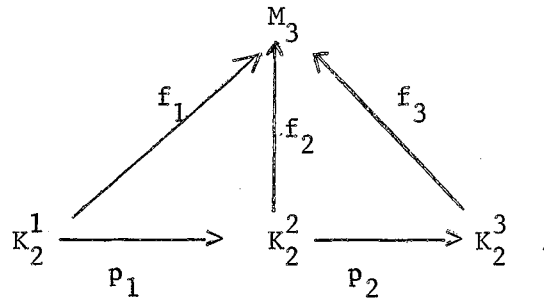
Ce sont les cercles de notre énoncés. On laisse au lecteur le soin de continuer la démonstration en utilisant les lemmes qui précèdent. ($F_{2i-1}(S_1 \times 1)$, $F_{2i}(S_1 \times 1)$, seront respectivement $Q \Gamma_1^i$, $Q \Gamma_2^i$ e.a.d.s.).

3.5) "L'inversion" d'une projection d'espace-quotient correspondant à une relation d'équivalence acyclique:

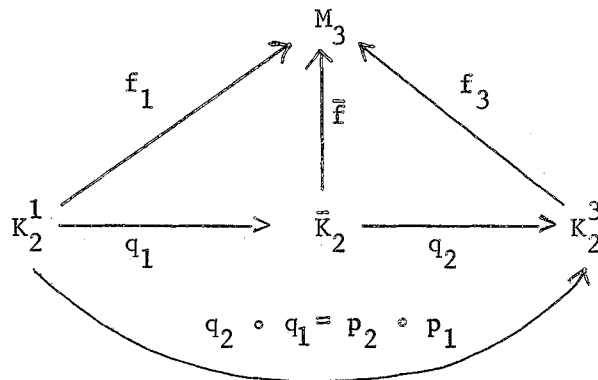
On va commencer maintenant l'exposition d'un processus qui permet en quelque sorte d'éliminer les points triples (Voir le début du paragraphe 3.4.)

On donne d'abord des règles de commutation pour les opérations élémentaires 0(i) :

Lemme 3.14: "1) Soient (K_2^1, f_1, M_3) , (K_2^2, f_2, M_3) , (K_2^3, f_3, M_3) trois 2-polyèdres singuliers et p_1, p_2 deux projections d'espace-quotient qui rendent commutatif le diagramme suivant:



On suppose que p_1 est du type 0(2) et p_2 du type 0(1). Alors il existe un 2-polyèdre singulier $(\bar{K}_2, \bar{f}, M_3)$ et des projections d'espace-quotient q_1 (de type 0(1)) et q_2 (de type 0(2)) telles qu'on ait un diagramme commutatif:



Symboliquement, on écrit:

$$0(1) \circ 0(2) \xrightarrow{\approx} 0(2) \circ 0(1)$$

Dans le même ordre d'idées, on a aussi:

- 2) $0(o) \circ 0(2) \xrightarrow{\approx} 0(2) \circ 0(o) .$
- 3) $0(1) \circ 0(3) \xrightarrow{\approx} 0(3) \circ 0(1) .$
- 4) $0(o) \circ 0(3) \xrightarrow{\approx} 0(3) \circ 0(o) .$
- 5) $0(2) \circ 0(3) \xleftrightarrow{\approx} 0(3) \circ 0(2) ."$ \square

Ceci est trivial, de même que le lemme suivant:

Lemme 3.15: "Soient (K_2, f, M_3) , (K_2^1, f^1, M_3) deux 2-polyèdres singuliers et $p : K_2 \longrightarrow K_2^1$ une projection d'espace-quotient de type $0(o)$, $0(1)$, ou $0(2)$, compatible avec f et f^1 . Il existe une application:

$$p^\# : s(K_2^1) \longrightarrow s(K_2) ,$$

qui est définie d'une façon univoque par la condition de rendre le diagramme suivant commutatif, quand on lui applique le foncteur π_0 (= composantes connexes):

$$\begin{array}{ccccc} s(K_2) \subset (s(K_2) \cup M^2(p)) \subset K_2 & & & & \\ \uparrow p^\# & & \downarrow p & & \downarrow p \\ s(K_2^1) \subset p(s(K_2) \cup M^2(p)) \subset K_2^1 & & & & \end{array} .$$

(ici M^2 désigne, comme d'habitude, les points doubles). Si p est du type $0(o)$ ou $0(1)$, $p^\#$ est surjectif. Si p est du type $0(2)$, $p^\#$ n'est jamais surjectif (on a tué une singularité, en passant de K_2 à K_2^1)." \square

Définition 3.19: Soient (K_2, f, M_3) , (K_2^1, f^1, M_3) deux 2-polyèdres singuliers et $p : K_2 \longrightarrow K_2^1$ une projection d'espace-quotient de type $0(o)$, $0(1)$ ou $0(2)$. Il existe alors une singularité unique $\sigma(p) \in s(K_2)$ qui est tuée par p . Si p est du type $0(o)$, $\sigma(p)$ est remplacée par la singularité unique

$$(p^\#)^{-1}(\sigma(p)) \in s(K_2^!) .$$

Si p est du type $0(1)$, $\sigma(p)$ éclate, dans le sens que $(p^\#)^{-1}(\sigma(p)) \subset s(K_2^!)$ contient plus d'un élément.

Si $x \in s(K_2) - \sigma(p)$ alors, " p ne touche pas à x ", dans le sens que

$$p(x) = (p^\#)^{-1}(x) \in K_2^! .$$

Dans ce cas, par abus de langage, $(p^\#)^{-1}(x)$ sera désigné par x .

Enfin, si $x \in s(K_2)$ on va désigner par $\hat{M}_x^2(f)$ le germe de l'ensemble $\hat{M}^2(f) \subset K_2$ au point x , et par $M_x^2(f)$ le germe :

$$M_x^2(f) = \hat{M}_x^2(f) - (x) . \quad \square$$

Le lemme suivant est trivial:

Lemme 3.16: "Dans les conditions du lemme 3.15, il existe, pour tout $x \in s(K_2^!)$, une bijection canonique:

$$p^\# : \pi_0(M_x^2(f^!)) \xrightarrow{\approx} \pi_0(M_y^2(f))$$

où $y = p^\#(x) \in s(K_2)$. $p^\#$ est définie par les conditions suivantes:

1) Si $x = p(y)$ (ce qui équivaut à $\hat{M}^2(p) \ni y$) alors $p \circ p^\# = \text{id}(\pi_0(M_x^2(f^!)))$.

2) Si $x \neq p(y)$ (donc si $y = \sigma(p) \in \hat{M}^2(p)$), et U est un voisinage ouvert, assez petit, de $M^2(p) \subset M^2(f)$ (dans $M^2(f)$), ayant la même connexité que $M^2(p)$, alors les inclusions naturelles:

$$M_y^2(f) \subset M^2(p) \subset U \text{ et}$$

$$M_x^2(f^!) \subset M^2(f^!) \cap p(U) \subset p(U - M^2(p)) , \text{ induisent un diagramme}$$

commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_0(U) & \xleftarrow[\approx]{\pi_0(U - M^2(p))} & \xrightarrow[\approx]{P^*} \pi_0(p(U - M^2(p))) \\
 \uparrow \approx & & \uparrow \approx \\
 \pi_0(M_y^2(f)) & \xleftarrow[\approx]{P^\#} & \pi_0(M_x^2(f')) \quad .'' \quad \square
 \end{array}$$

Avant d'aller plus loin, on aura besoin de définir des glissements (slidings) élémentaires, qui sont analogues aux opérations élémentaires $O(i)$, mais qui donnent lieu à un "théorème d'invariance" plus fort que le lemme 3.6 (voir plus loin pour plus de détails).

Définition 3.20: On va considérer un 2-polyèdre singulier (K_2, f, M_3) et une résolution des singularités: $\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2)$.

En même temps, on se donne un autre 2-polyèdre singulier:

(L_2, g, M_3) défini comme suit: on considère $2(p-1) + r$ plongements C^∞ , 2-à-2 disjoints: $f_i : D_2 \longrightarrow K_2$ où: $i=1, 2, \dots, 2(p-1) + r$, $p \geq 2$, $r \geq 0$. On va supposer que chaque $f_i(D_2) \subset K_2$ possède un voisinage ouvert (dans K_2) homéomorphe à R_2 , et que $f_i(D_2) \cap M^2(f) = \emptyset$.

Par définition:

$$(L_2, g, M_3) = (K_2 - \bigcup_i f_i(\text{int } D_2), f|_{K_2 - \bigcup_i f_i(\text{int } D_2)}, M_3)$$

Sur (L_2, g, M_3) on va considérer la résolution des singularités:

$\pi : W_3 \longrightarrow \Theta_3(L_2)$, canoniquement induite par $\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2)$. En fait, ce sera L_2 qui va nous intéresser, et pas K_2 .

On se donne aussi:

1°. Un voisinage de coordonnées $R_3 \subset M_3$ (muni de coordonnées (x, y, z)), tel que $(f^{-1} R_3 \subset K_2, f|_{f^{-1} R_3})$ puisse être décrit comme suit: $f^{-1} R_3 = A + B$ (réunion disjointe) avec A, B connexes. $f|_A, f|_B$

sont des plongements, $f^{-1}(R_3) \cap s(K_2) = \emptyset$, et $f(A), f(B) \subset R_3$ peuvent être décrits comme suit:

On se donne p nombres réels:

$$\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p .$$

On aura:

$$A = f(A) = ((x = 0) \cap (z \leq 0)) \cup ((x = \theta_1 z) \cap (z \geq 0)) \cup \dots \cup ((x = \theta_p z) \cap (z \geq 0)) , \text{ et:}$$

$B = f(B) = (z = -1)$ (plus exactement, B sera le plan (x, y) et $f|_B$ sera: $(x, y) \longrightarrow (x, y, -1)$)

Parmi les nombres $(1, 2, \dots, p)$, on va distinguer $i_0 \in (1, 2, \dots, p)$.

Par définition, $E_{i_0} \subset (1, 2, \dots, p)$ est le sous-ensemble:

$$E_{i_0} = (1, \dots, \hat{i}_0, \dots, p) = (1, \dots, p) - (i_0) .$$

On se donnera un isomorphisme:

$$(1, \dots, p-1) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\alpha^{-1}} \end{array} E_{i_0} .$$

On va désigner par A^v et B^v les parties de L_2 définies par:

$$A^v = A \cap L_2 \text{ et } B^v = B \cap L_2 .$$

2° . Une fonction $C^\infty : z = h(x, y)$ telle que:

2-1) $h(x, y) \equiv -1$, en dehors d'un compact.

2-2) La surface $z = h(x, y)$, de R_3 , coupe la droite $z = x = 0$, transversalement, en deux points: b_1 et b_2

2-3) La surface $z = h(x, y)$, coupe $(x = \theta_i z) \cap (z \geq 0)$, transversalement, suivant un intervalle fermé $\mathcal{I}_i \subset (x = \theta_i z) \cap (z \geq 0)$, d'extrémités b_1 et b_2 .

On pense à B comme étant toujours le plan (x, y) , mais $f : K_2 \rightarrow M_3$ a été modifiée, en passant de $(x, y) \rightarrow (x, y, -1)$ à $H : (x, y) \rightarrow (x, y, h(x, y))$ (sans toucher à $f|_{K_2 - B}$). Ceci nous fait passer, par définition, du 2-polyèdre singulier (K_2, f, M_3) à un nouveau 2-polyèdre singulier (K_2, f_H, M_3) .

3°. On remarque que $H^{-1}(U \mathcal{L}_i) \subset B$ consiste de p intervalles fermés λ_i ($i = 1, \dots, p$), tels que:

$$3-1) \quad \lambda_i \cap \lambda_j = \partial \lambda_i = \partial \lambda_j \quad (\text{si } i \neq j) .$$

3-2) H induit des difféomorphismes:

$$H|_{\lambda_i} : \lambda_i \xrightarrow{\approx} \mathcal{L}_i .$$

On se donnera des intervalles fermés: $\mu_i \subset \text{int } \lambda_i$ pour chaque $i \in E_{i_0}$; ceci nous définit des intervalles fermés $H(\mu_i) \subset \mathcal{L}_i$ ($i \in E_{i_0}$).

On va supposer que ces données satisfont aux conditions suivantes:

a) Si $i \in (1, \dots, p-1)$, on a:

a-1) $f_{2i-1}(D_2) \subset B$, $f_{2i-1}(D_2) \cap (U \lambda_j) = \mu_{\alpha(i)}$ et l'intersection: $f_{2i-1}(\partial D_2) \cap \lambda_{\alpha(i)} = \partial \mu_{\alpha(i)}$ est transversale.

a-2) $f_{2i}(D_2) \subset (x = \theta_{\alpha(i)} z) \cap (z > 0) \subset A$,
 $f_{2i}(D_2) \cap \mathcal{L}_{\alpha(i)} = H(\mu_{\alpha(i)})$ et l'intersection:

$f_{2i}(\partial D_2) \cap \mathcal{L}_{\alpha(i)} = H(\partial \mu_{\alpha(i)})$ est transversale.

a-3) Il n'y a pas d'autres intersections

$f_i(D_2) \cap ((U \lambda_j) \cup (U \mathcal{L}_k))$ que celles décrites ci-dessus.

b) Il existent des entiers non-négatifs: r^i, r_a, r_b tels que $r \geq r^i = r_a + r_b$ et que l'on ait:

b-1) $f_{2(p-1)+i}(D_2) \subset B \cup A$ si et seulement si $i \leq r^i$.

$$b-2) \quad f_{2(p-1)+i}(D_2) \subset B \quad \text{si } i \leq r_b .$$

b-3) On a aussi:

$$f_{2(p-1)+r_b+i}(D_2) \subset \bigcup_{\ell \in E_{i_0}} (x = \theta_\ell z) \cap (z > 0) \quad (\text{pour } i \leq r_a) .$$

(On remarque donc que:

$$((x = \theta_{i_0} z) \cap (z \geq 0)) \cap f_k(D_2) = \emptyset ,$$

ce qui est important pour la suite).

c) Si $\ell > 2(p-1)$ et $f_\ell(D_2) \subset B$ alors $f_\ell(D_2)$ est séparé du point à l'infini de B , par $\cup \lambda_i$. Si $k > 2(p-1)$ et $f_k(D_2) \subset ((x = \theta_i z) \cap (z \geq 0))$, alors λ_i sépare $f_k(D_2)$ du point à l'infini de $(x = \theta_i z) \cap (z \geq 0)$.

(Remarque: Sans perte de généralité, cette dernière condition (c) est toujours satisfaite, en prenant un modèle local plus petit).

d) On considère le "plan":

$$((x = 0) \cap (z \leq 0)) \cup ((x = \theta_{i_0} z) \cap (z \geq 0)) = P_{i_0} \subset R_3 .$$

Il sépare R_3 et $B = (z = -1)$, respectivement, en deux parties. On va supposer que λ_i et $(x = \theta_i z) \cap (z \geq 0)$ ($z \in (1, \dots, p)$) sont toujours du même côté de ce "plan". D'une manière plus précise on va supposer que les quantités θ_i sont choisies de telle manière que: $\theta_{i_0} = 0$.

$$\text{Il en résulte que: } (A \cap B) \cap (\cup \lambda_i) = \lambda_{i_0} .$$

(C'est le sens "géométrique" de la condition d).)

Dorénavant, on va supposer qu'on a pu s'arranger, avec les coordonnées locales, de telle façon que $\theta_{i_0} = 0$.

Par définition, le glissement élémentaire, (attaché au voisinage

de coordonnées $R_3 \subset M_3$) est l'opération qui nous fait passer de (L_2, g, M_3) à $(L_2, f_H|_{L_2}, M_3)$. ($g = f|_{L_2}$) .

On va désigner $f_H|_{L_2}$ par \hat{g} .

Les 2-disques $f_j(D_2)$, $j \leq 2(p-1)$ seront appelés les 2-DISQUES ACTIFS du glissement élémentaires. (Bien entendu, c'est leurs bords seulement qui existent dans L_2 , en fait dans ∂L_2 .) On dira que les 2-disques actifs $f_{2i-1}(D_2)$ et $f_{2i}(D_2)$ ($i \leq p-1$) sont ASSOCIES (pour le glissement élémentaire considéré).

Si l'on veut ne pas oublier les résolutions de singularités, le glissement élémentaire nous fait passer (en fait) de:

(L_2, g, M_3) et de $\pi : W_3 \rightarrow \mathbb{Q}_3(L_2)$ à

(L_2, \hat{g}, M_3) et à la (même) résolution: $\pi : W_3 \rightarrow \mathbb{Q}_3(L_2)$." \square

Très souvent, on ne va pas mentionner les résolutions de singularités, du tout, quand il s'agira de glissements élémentaires. On les a introduites dans la définition (où elle ne jouent d'ailleurs aucun rôle), à cause de la remarque sur la COHERENCE , qui est écrite ci-dessous, avant la définition 3.22.

Avant d'aller plus loin, on va donner encore une définition.

Définition 3.21: On commence par les conventions de notation suivantes:

le simplexe (standard) de dimension n , Δ_n , aura comme sommets

(P_0, \dots, P_n) et le point courant $P \in \Delta_n$ est $P = \sum_i t_i P_i$ avec $t_i \geq 0$,

$\sum_i t_i = 1$. La face engendrée par P_{i_1}, \dots, P_{i_k} sera désignée par $(P_{i_1}, \dots, P_{i_k})$

(donc $(P_0, \dots, P_n) = \Delta_n$) . Plus généralement, si $E \subset \Delta_n$, (E) va désigner la clôture convexe de E .

On va considérer maintenant des polyèdres (pas nécessairement compacts)

plongés d'une manière différentiable par morceaux et propre dans des variétés C^∞ .

En particulier, on aura une variété M_3 , et deux polyèdres de dimension 2, plongés dans M_3 :

$$j_0 : K^0 \subset M_3, \quad j_1 : K^1 \subset M_3.$$

Un chemin de Whitehead reliant ces deux plongements sera un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{J} & M_3 \times I \\ & \searrow \pi & \swarrow \\ & & I \end{array}$$

où $J : K \subset M_3 \times I$ est un plongement (différentiable par morceaux et propre) du polyèdre de dimension $\leq 3 : K$, tel que, la restriction du diagramme à $t \in I$:

$$\pi^{-1}(t) = K^t \xrightarrow{J_t} M_3 = M_3 \times t$$

coincide, pour $t = 0$ et 1 avec nos deux plongements donnés ($J_0 = j_0$, $J_1 = j_1$). En plus, $J : K \subset M_3 \times I$ devra satisfaire à certaines conditions qu'on va énoncer ci-dessous.

Le chemin inverse à $J : K \subset M_3 \times I$ est, par définition, la composition:

$$K \xrightarrow{J} M_3 \times I \xrightarrow{\text{id}(M_3) \times \hat{i}} M_3 \times I$$

où $\hat{i}(t) = 1-t \in I$.

Une isotopie du chemin $J : K \subset M_3 \times I$, est une composition:

$$K \xrightarrow{J} M_3 \times I \xrightarrow{H} M_3 \times I$$

où H est un homéomorphisme linéaire par morceaux de $M_3 \times I$ tel qu'il existe

un homéomorphisme linéaire par morceaux: $h : I \rightarrow I$ ($h(0) = 0$, $h(1) = 1$) qui rend le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} M_3 \times I & \xrightarrow{H} & M_3 \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \xrightarrow{h} & I \end{array},$$

et que $H|_{M_3 \times 0} = \text{id}(M_3)$.

$J : K \subset M_3 \times I$ doit être une composition finie de chemins élémentaires de Whitehead, qui seront définis (à isotopie près), maintenant:

1°. On considère un plongement $\beta : \Delta_2 \hookrightarrow M_3$ tel que:

$$K^1 = K^0 \cup \Delta_2 \text{ et}$$

$$K^0 \cap \Delta_2 = (P_0, P_1) \cup (P_1, P_2) \cup F,$$

où $F \subset \Delta_2$ est un ensemble formé d'un nombre fini d'intervalles linéaires fermés, 2-à-2 disjoints, parallèles à (P_0, P_2) : $L_1, \dots, L_f \subset \Delta_2$, tels que $\partial L_i = p_i - q_i$ où: $p_i \in \text{int } \Delta_2$, $q_i \in \text{int}(P_0, P_1)$.

On suppose, bien entendu, que: $j_1 = j_0 \cup \beta$.

$J_t : K^t \hookrightarrow M_3 = M_3 \times t$ sera:

$$j_0 \cup (\beta | (P_0, P_1, t P_2 + (1-t) P_0)) :$$

$$K^0 \cup (P_0, P_1, t P_2 + (1-t) P_0) \longrightarrow M_3.$$

Ceci sera un chemin dilatant, et, par définition, son inverse est un chemin contractant.

2°. On considère un plongement $\gamma : \Delta_3 \subset M_3$ et deux polyèdres de M_3 : K^0, K^1 tels que $\text{Cl}(K^0 - \Delta_3) = \text{Cl}(K^1 - \Delta_3) =$ un certain polyèdre k (avec $j_0|_k = j_1|_k$). En plus: $k \cap \Delta_3$ est contenu dans le 1-squelette de Δ_3 et:

$$K^0 \cap \Delta_3 = (P_0, P_1, P_2) \cup (P_0, P_1, P_3) \cup (P_0, P_2, P_3)$$

$$K^1 \cap \Delta_3 = (P_0, P_1, P_2) \cup (P_0, P_1, P_3) \cup (P_1, P_2, P_3) .$$

$J_t : K^t \hookrightarrow M_3$ sera:

$$(j_0|_k) \cup \gamma : k \cup (P_0, P_1, P_2) \cup (P_0, P_1, P_3) \cup (t P_1 + (1-t) P_0, P_2, P_3) \rightarrow M_3 .$$

Ceci sera un chemin glissant , et son inverse est, clairement, un chemin glissant aussi. Un chemin de Whitehead J doit être une composition finie de chemins dilatants, contractants et glissants. \square

Le lemme suivant est "standard" :

Lemme 3.17: "Soit $J : K \rightarrow M_3 \times I$ un chemin de Whitehead, allant de

$j_0 : K^0 \subset M_3$ à $j_1 : K^1 \subset M_3$. Soit $N \subset M_3$ un voisinage régulier C^∞ de $j_0(K^0) \subset M_3$.

Il existe un chemin $J' : K \rightarrow M_3 \times I$, isotope à J , tel que:

$J'(K) \subset N \times I$. N est un voisinage régulier C^∞ de $j'_1(K^1) = J'_1(K^1) \subset M_3$." \square

On revient maintenant à notre glissement élémentaire (définition 3.20), qu'il ne faut pas confondre avec le chemin glissant (de Whitehead). On aura besoin du lemme suivant:

Lemme 3.18: "Considérons le glissement élémentaire de la définition 3.20, et les deux polyèdres de dimension 2 :

$$p : (L_2/\Psi(g)) \cap R_3 = (A' \cup B)/\Psi(g) \longrightarrow R_3 ,$$

$$\hat{p} : (L_2/\Psi(\hat{g})) \cap R_3 = (A' \cup B)/\Psi(\hat{g}) \longrightarrow R_3 ,$$

où $A' = A \cap L_2$, $B' = B \cap L_2$ et $p(\hat{p})$ sont les plongements naturels.

Il y a un chemin de Whitehead $J : K \rightarrow R_3 \times I$ qui relie ces deux polyèdres plongés. Le chemin sera canonique (dans le sens que la démonstration

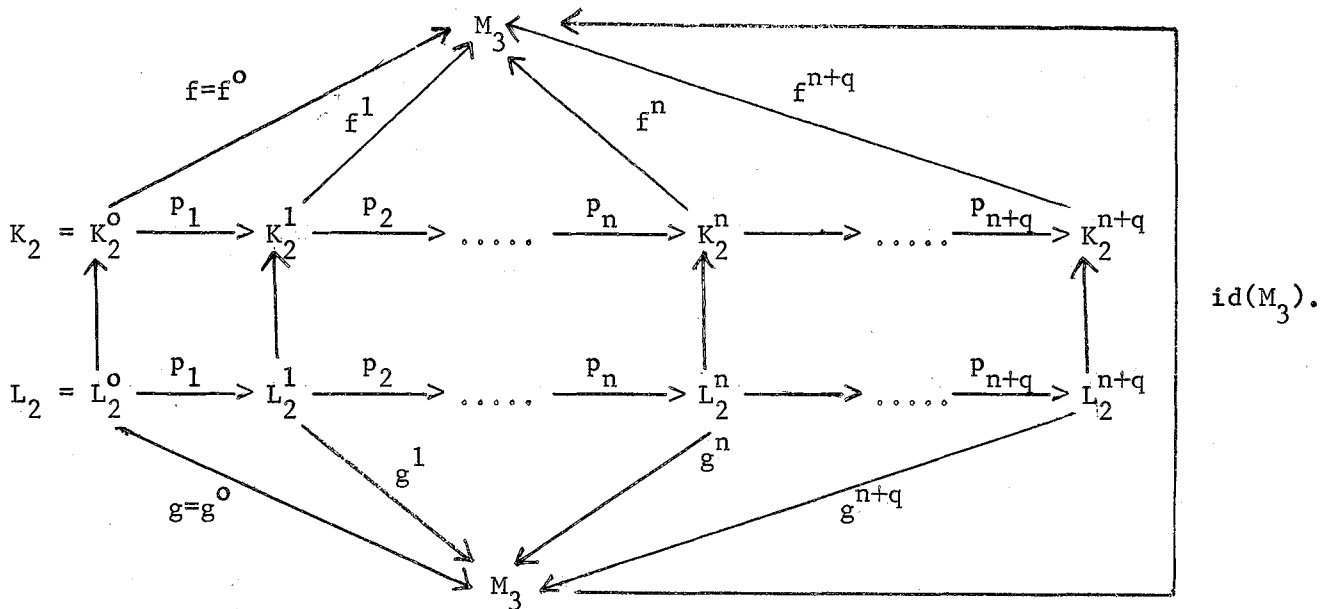
du lemme va nous fournir une description de J qui le détermine univoquement, à isotopie près) . " \square

La démonstration sera donnée au chapitre IV.

On va considérer maintenant les deux polyèdres singuliers (K_2, f, M_3) et (L_2, g, M_3) de la définition 3.20 et le sous-ensemble $f^{-1}(R_3) = A+B \subseteq K_2$. On se donnera aussi une séquence principale (K_2^i, f, M_3) , ce qui induira canoniquement une séquence principale de (L_2, g, M_3) . (On utilise ici le fait que $L_2 \subseteq K_2$ et que

$$(K_2 - L_2) \cap M^2(f) = \emptyset .)$$

On aura un diagramme commutatif, dans lequel les flèches $L_2^i \rightarrow K_2^i$ seront les inclusions naturelles:



Il est entendu que les p_i , $1 \leq i \leq n$, sont du type $0(0)$, $0(1)$ ou $0(2)$ tandis que les p_{n+i} , $1 \leq i \leq q$, sont du type $0(3)$. Sans perdre la généralité, on peut supposer qu'il existe un certain $k \leq n$, tel que chaque paire de points $\pi_1 \in A \subseteq K_2$, $\pi_2 \in B \subseteq K_2$ telle que $f(\pi_1) = f(\pi_2)$, ait

la propriété:

$$p_{k-1} \circ \dots \circ p_1(\pi_1) \neq p_{k-1} \circ \dots \circ p_1(\pi_2) \text{ et}$$

$$p_k \circ \dots \circ p_1(\pi_1) = p_k \circ \dots \circ p_1(\pi_2) .$$

On peut supposer aussi, (sans perdre la généralité,) que p_k est du type $O(0)$ ou $O(1)$, mais pas du type $O(2)$.

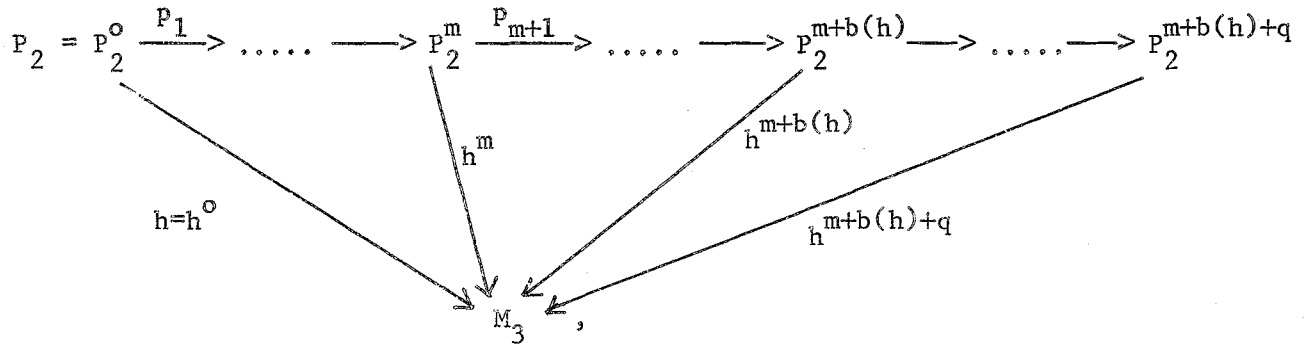
Le glissement élémentaire de la définition 3.20 nous fait passer de (L_2, g, M_3) à (L_2, \hat{g}, M_3) . La séquence principale de (L_2, g, M_3) écrite plus haut, induit une séquence principale de (L_2, \hat{g}, M_3) où tous les p_i ($i \neq k$) sont gardés mais p_k est remplacé par une combinaison finie d'opérations élémentaires du type $O(0)$, $O(1)$ et $O(2)$. La même chose est vraie pour (K_2, f, M_3) (qui est remplacé par (K_2, f_H, M_3)), seulement, p_k est remplacé par des opérations $O(0)$, $O(1)$, $O(2)$ et $p-1$ opérations du type $O(3)$ (p est défini dans 3.20).

Si $\pi : V_3 \rightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$ est une résolution des singularités arbitraire, ces $(p-1)$ opérations $O(3)$ sont toujours COHERENTES.

Définition 3.22: Soit (P_2, h, M_3) un 2-polyèdre singulier quelconque. On remarque facilement que, quelle que soit la séquence principale attachée à ce polyèdre, le nombre des opérations $O(2)$ est toujours le même (c'est en fait un invariant de la relation d'équivalence $\Psi(h)$).

Ce nombre, qu'on désignera par $b(h)$ s'appelle le nombre de bouts de $\Psi(h)$.

Une séquence principale quelconque de (P_2, h, M_3) :



où : $P_2^{m+b(h)+q} = P_2 / \Psi(h)$ (donc, d'après la définition 1.4:

$h(\Psi(h)) = h^{m+b(h)+q}$), p_i est du type $O(0)$ et $O(1)$ si $i \leq m$, du type $O(2)$ si $m < i \leq m+b(h)$ et du type $O(3)$ si $m+b(h) < i \leq m+b(h)+q$, sera

écrite symboliquement:

$$P_2 \xrightarrow{p(h)} P_2^m \xrightarrow{q(h)} P_2^{m+b(h)} \xrightarrow{r(h)} P_2 / \Psi(h) \subset M_3 .$$

"Symboliquement" veut dire que $p(h)$ n'est pas seulement une application:

$P_2 \longrightarrow P_2^m$, mais aussi la manière dont on l'a décomposée en projections p_i (de type $O(0)$ et $O(1)$)

Si $q=0$ (donc si $\Psi(h)$ est acyclique), on aura $P_2^{m+b(h)} = P_2 / \Psi(h)$ et notre séquence principale s'écrit tout simplement:

$$P_2 \xrightarrow{p(h)} P_2^m \xrightarrow{q(h)} P_2 / \Psi(h) \subset M_3 .$$

Dans ce cas (et seulement dans ce cas) on va utiliser la notation:

$$P_2^m = P_2 / h$$

(Le lecteur remarquera que, de toute façon, à difféomorphisme près, P_2^m est complètement déterminé par (P_2, h, M_3)). \square

Définition 3.22.1: Soit (P_2, h, M_3) avec $\Psi(h)$ acyclique, et une séquence principale

$$P_2 \xrightarrow{p(h)} P_2/h \xrightarrow{q(h)} P_2/\Psi(h)$$

comme dans la définition précédente. Par définition:

$$p(h)^\# : s(P_2/h) \longrightarrow s(P_2)$$

est l'application: $p(h)^\# = p_1^\# \circ p_2^\# \circ \dots \circ p_{m-1}^\#$. (voir le lemme 3.15) \square

Remarque: Si $M^3(h) \neq \emptyset$, $p(h)^\#$ dépend de la manière dont $p(h)$ est factorisé en projections p_i . (Ceci peut se voir facilement en regardant le 2-polyèdre singulier

$$(x^2+y^2+z^2 \leq 2) \cap [\underbrace{(z=0)}_{(x \geq 1)} \oplus \underbrace{(x+y=1)}_{(x \leq -1)} \oplus (-x+y=1)] \xrightarrow{j} R_3 .)$$

Définition 3.23: Soit (L_2, g, M_3) avec $\Psi(g)$ acyclique, et:

$$(x) \quad L_2 \xrightarrow{p(g)} L_2/g \xrightarrow{q(g)} L_2/\Psi(g) \subset M_3$$

une séquence principale. S'il s'agit du polyèdre de la définition 3.20 et si l'on passe par un glissement élémentaire à (L_2, \hat{g}, M_3) , (x) induit "canoniquement" une séquence principale:

$$L_2 \xrightarrow{p(\hat{g})} L_2/\hat{g} \xrightarrow{q(\hat{g})} L_2/\Psi(\hat{g}) \subset M_3 .$$

On remarque que $b(\hat{g}) = b(g) + 2(p-1)$. Plus exactement, $q(\hat{g})$ contient les $b(g)$ projections du type $O(2)$ de $q(g)$ et, en plus, $2(p-1)$ projections du type $O(2)$ nouvelles, introduites par notre glissement élémentaire.

Il y a une correspondance biunivoque naturelle entre les $b(g)$ points de l'ensemble singulier $s(L_2/g)$ et les $b(g)$ projections de type $O(2)$ de $q(g)$ qui tuent ces points singuliers, l'un après l'autre. De même pour

$s(L_2^{\hat{m}}) = s(L_2/\hat{g})$. Ceci nous donne une inclusion canonique

$$i : s(L_2/g) \longrightarrow s(L_2/\hat{g}) \quad . \quad \square$$

Définition 3.24: Soit M_n une variété C^∞ à bord, de bord ∂M_n et $N_{n-1} \subset \partial M_n$ une sous-variété à bord . On définit le double de M_n , rel N_{n-1} , par:

$$2(M_n \text{ rel } N_{n-1}) = M_n \oplus \underbrace{M_n}_{\partial M_n - \text{int } N_{n-1}} ,$$

où les deux termes M_n , du second membre, sont censés représenter deux exemplaires distincts de M_n . \square

On va donner maintenant le "lemme d'invariance pour les glissements élémentaires" . Il aura deux parties: le lemme 3.19 (la partie facile) et le lemme 3.19.1 (qui est la partie "difficile") .

Lemme 3.19: "On se place dans les conditions de la définition 3.20, en considérant le glissement élémentaire qui nous fait passer de (L_2, g, M_3) à (L_2, \hat{g}, M_3) . On va se donner une orientation de M_3 et une résolution des singularités:

$$\pi : V_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(L_2) \quad .$$

(Ceci a pour but de rendre les choses qui suivent canoniques.)

On va considérer les projections d'espace-quotient:

$$P : L_2 \longrightarrow L_2/\Psi(g) \quad \text{et} \quad \hat{P} : L_2 \longrightarrow L_2/\Psi(\hat{g}) \quad .$$

On va considérer aussi des voisinages réguliers C^∞ : $\mathbb{O}_3(L_2/\Psi(g)), \dots$:

$$M_3 \supset \Theta_3 (L_2/\Psi(g)) \supset L_2/\Psi(g) \quad \text{et}$$

$$M_3 \supset \Theta_3 (L_2/\Psi(\hat{g})) \supset L_2/\Psi(\hat{g}) \quad ,$$

qu'on considère choisis de telle manière, que, pour chaque $1 \leq i \leq 2(p-1) + r$,
on ait: (voir le début de la définition 3.20):

$$P(f_i(\partial D_2)) \subset \partial \Theta_3 (L_2/\Psi(g)) \quad \text{et}$$

$$\hat{P}(f_i(\partial D_2)) \subset \partial \Theta_3 (L_2/\Psi(\hat{g}))$$

On va supposer, aussi, que, si $R_3 \subset M_3$ est le voisinage de coordonnées de la
définition 3.20, on a:

$$\Theta_3 (L_2/\Psi(g)) \cap R_3 = \Theta_3 ((L_2/\Psi(g)) \cap R_3) \quad ,$$

et de même pour \hat{g} .

On peut trouver un compact $C \subset R_3$ tel que:

$$L_2/\Psi(g) - C \cong L_2/\Psi(\hat{g}) - C \subset M_3$$

(où le symbole \cong indique l'identité entre sous-ensembles de M_3).

On peut donc supposer que:

$$\Theta_3 (L_2/\Psi(g)) - C \cong \Theta_3 (L_2/\Psi(\hat{g})) - C$$

On va supposer que

$$\Theta_3 (L_2/\Psi(g)) \cap (M_3 - \text{int } C)$$

est une sous-variété à bord de M_3 , et de même $\Theta_3 (L_2/\Psi(g)) \cap C$. Leur
intersection sera désignée par $\delta(g, C)$. D'une manière analogue, on définit
 $\delta(\hat{g}, C) \cong \delta(g, C)$.

Notre assertion est qu'il existe un diagramme commutatif, où les flèches
verticales sont des difféomorphismes "canoniques" (déterminés à difféotopie
près, ce qu'on n'utilise pas, d'ailleurs):

$$\begin{array}{ccc}
 \Theta_3(L_2/\Psi(g)) & \equiv & \Theta_3(L_2/\Psi(g)) \cap (M_3 - \text{int } C) \oplus \Theta_3((L_2/\Psi(g)) \cap C) \\
 \downarrow D & & \downarrow \text{identité} \quad \delta(g,C) \\
 \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) & \equiv & \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) \cap (M_3 - \text{int } C) \oplus \Theta_3((L_2/\Psi(\hat{g})) \cap C) \\
 & & \delta(\hat{g},C) \quad \downarrow D
 \end{array}$$

Ceci induit un difféomorphisme (qu'on désigne par abus de notation par la même lettre D):

$$D : 2 \Theta_3(L_2/\Psi(g)) \longrightarrow \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) ,$$

compatible avec les décompositions:

$$\begin{aligned}
 2 \Theta_3(L_2/\Psi(g)) &= [2((\Theta_3(L_2/\Psi(g)) \cap (M_3 - \text{int } C)) \text{ rel } \delta(g, C))] \\
 &\oplus [2((\Theta_3(L_2/\Psi(g)) \cap C) \text{ rel } \delta(g, C))] , \\
 2 \delta(g,C) & \\
 2 \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) &= \dots \quad .'' \quad \square
 \end{aligned}$$

Pour démontrer ce lemme, on introduit

$$M_3 \supset \Theta_3(L_2/\Psi(g)) = \underbrace{\Theta_3(L_2/\Psi(g))}_{\partial \Theta_3 = \partial \Theta_3 \times 0} \oplus (\partial \Theta_3(L_2/\Psi(g)) \times I)$$

qui est un "vrai" voisinage régulier de $L_2/\Psi(g)$. D'après le lemme 3.18, $\Theta_3(L_2/\Psi(g))$ peut être près de telle manière qu'il contienne $L_2/\Psi(\hat{g})$ et qu'il collapse sur $L_2/\Psi(\hat{g})$, e.a.d.s.

Lemme 3.19.1: "On commence par considérer les cercles différentiables

$\hat{P}(f_i(\partial D_2)) \subset \partial \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g}))$ du lemme 3.19. On remarque que ces cercles sont 2-à-2 disjoints, sauf que $\hat{P}(f_{2i-1}(\partial D_2)) \cap \hat{P}(f_{2i}(\partial D_2))$ ($1 \leq i \leq p-1$)

consiste de deux points d'intersection transversale. En même temps les cercles différentiables:

$$P(f_i(\partial D_2)) \subset \partial \otimes_3(L_2/\Psi(g)) ,$$

eux, sont bien 2-à-2 disjoints.

On se donne des nombres entiers $k_i \geq 0$ ($i=1, \dots, 2(p-1) + r$) et on considère des plongements différentiables:

$$\hat{F}_i : \begin{matrix} (S_1 \times I) \\ 2k_i \end{matrix} \longrightarrow 2 \otimes_3(L_2/\Psi(\hat{g}))$$

ayant les propriétés suivantes: (voir la définition 3.17.0):

$$1) \hat{F}_i(S_1 \times 0) = \hat{F}_i \left(\begin{matrix} (S_1 \times I) \\ 2k_i \end{matrix} \right) \cap \partial \otimes_3(L_2/\Psi(\hat{g})) = \hat{P}(f_i(\partial D_2)) .$$

$$2) \hat{F}_i \text{ et } \hat{F}_i(S_1 \times 1) \text{ coupent } \partial \otimes_3(L_2/\Psi(\hat{g})) \text{ transversalement.}$$

$$3) \text{ Si } 1 \leq i \leq p-1 :$$

$$\begin{aligned} & \hat{P}(f_{2i-1}(\partial D_2)) \cap \hat{P}(f_{2i}(\partial D_2)) \cap \hat{F}_{2i-1}(S_1 \times 1) = \\ & = \hat{P}(f_{2i-1}(\partial D_2)) \cap \hat{P}(f_{2i}(\partial D_2)) \cap \hat{F}_{2i}(S_1 \times 1) = \emptyset \end{aligned}$$

4) L'inclusion $\hat{P}(f_{\ell}(\partial D_2)) \cap \hat{P}(f_k(\partial D_2)) \subset \text{Im } \hat{F}_{\ell} \cap \text{Im } \hat{F}_k$ est une équivalence d'homotopie.

5) Soient p_1^i, p_2^i les deux points de $\hat{P}(f_{2i-1}(\partial D_2)) \cap \hat{P}(f_{2i}(\partial D_2))$ et, A_{ℓ}^i, B_{ℓ}^i deux petits voisinages de p_{ℓ}^i dans $\text{Im } \hat{F}_{2i}$ et $\text{Im } \hat{F}_{2i-1}$, respectivement. On a:

5-1) A_1^i et A_2^i se trouvent du même côté de $\partial \otimes_3(L_2/\Psi(\hat{g}))$. De même pour B_1^i et B_2^i .

5-2) A_{ℓ}^i et B_{ℓ}^i ne se trouvent jamais du même côté de $\partial \otimes_3(L_2/\Psi(\hat{g}))$.

5-3) Si A_1^i et A_2^i (respectivement B_1^i et B_2^i) se trouvent en dehors de $\Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g}))$, alors $k_{2i} = 0$ (respectivement $k_{2i-1} = 0$) et Image $\hat{F}_{2i} - \hat{P}(f_{2i}(\partial D_2))$ (respectivement Image $\hat{F}_{2i-1} - \hat{P}(f_{2i-1}(\partial D_2))$) se trouve entièrement en dehors de $\Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g}))$.

5-4) A_1^i (et A_2^i) se trouve en dehors de $\Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g}))$ si et seulement si, dans la résolution des singularités (de $K_2/\Psi(\hat{g})$, induite par celle de L_2 , donnée dans le lemme 3.19) la branche qui correspond à $f_{2i}(D_2)$ est spécifiée. On va introduire $2(p-1) + r$ plongements 2-à-2 disjoints:

$$F_i : \begin{matrix} (S_1 \times I) \\ 2k_i \end{matrix} \longrightarrow 2 \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) ,$$

caractérisés, difféotopie près, par les conditions suivantes:

$$1^0) F_i(S_1 \times 0) = \text{Image } F_i \cap \partial \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) = P(f_i(\partial D_2)) .$$

$$2^0) F_i \text{ et } F_i(S_1 \times 1) \text{ coupent } \partial \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) \text{ transversalement.}$$

$$3^0) \text{Image } F_l \cap \text{Image } F_k = \emptyset \text{ (si } l \neq k)$$

4⁰) Pour chaque i , on a:

$$F_i^{-1}(F_i(S_1 \times 1) \cap \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g}))) \equiv \hat{F}_i^{-1}(\hat{F}_i(S_1 \times 1) \cap \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g}))) \subseteq S_1 \times 1 .$$

5⁰) Pour $i > 2(p-1) + r'$ (voir définition 3.20), on va supposer que $\hat{F}_i \equiv F_i$. (Ce qui a un sens, puisque

$$L_2/\Psi(\hat{g}) - R_3 \equiv L_2/\Psi(\hat{g}) - R_3 .)$$

On va considérer aussi un fermé:

$$\begin{aligned} \Phi &\subset [2((\Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) \cap (M_3 - \text{int } C)) \text{ rel } \delta(\hat{g}, C))] \equiv \\ &\equiv [2((\Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) \cap (M_3 - \text{int } C)) \text{ rel } \delta(\hat{g}, C))] , \end{aligned}$$

tel que Φ ne touche pas aux Image $F_i \equiv \text{Image } \hat{F}_i$ ($i > 2(p-1) + r'$), ni à:

$$2\delta(\hat{g}, C) = \partial [2((\Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) \cap M_3 - \text{int } C)) \text{ rel } \delta(\hat{g}, C)] .$$

L'assertion du lemme 3.19.1, est que D induit un difféomorphisme de triples :

$$(2 \Theta_3(L_2/\Psi(g)) ; \Theta_3(L_2/\Psi(g)) ; (\bigcup_{i=1}^{2(p-1)+r} F_i(S_1 \times 1) \cup \Phi)) \xrightarrow[\approx]{D} \\ (2 \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) ; \Theta_3(L_2/\Psi(\hat{g})) ; (\bigcup_{i=1}^{2(p-1)+r} \hat{F}_i(S_1 \times 1) \cup \Phi)) ,$$

où: $D(F_i(S_1 \times 1)) = \hat{F}_i(S_1 \times 1)$ et $D|_{\Phi} = \text{id}(\Phi)$." \square

La démonstration sera donnée au chapitre suivant.

Remarque: Ce lemme peut être comparé au lemme d'invariance pour les opérations élémentaires $O(i)$ (lemme 3.6 et son complément, le lemme 3.9).

Si $(K_2 = K_2^i \# k_2^1 \# \dots, f, M_3)$ est un 2-polyèdre singulier, avec $s(K_2^i) = \emptyset$, $\Psi(f)$ acyclique, le lemme 3.6 nous donne (sous certaines conditions restrictives) un difféomorphisme de paires :

$$(2 \Theta_3(K_2^i) , \Theta_3(K_2^i)) = (2 \Theta_3(K_2/\Psi(f)) , \Theta_3(K_2/\Psi(f))) .$$

Il ne nous donne pas des difféomorphismes de triples, comparables au lemme 3.19.1 (voir à ce sujet la fin du paragraphe 3.4), parce que les étapes intermédiaires (quand on utilise les $O(i)$) sont des opérations de chirurgie (tandis qu'avec les glissements élémentaires on n'a que des difféotopies ...).

Définition 3.25: Soit (P_2, h, M_3) un 2-polyèdre singulier. On dit que les singularités de P_2 sont bien présentées, si P_2 peut être représenté sous la forme:

$$P_2 = P_2^i \oplus_{I_1} D_2^1 \oplus_{I_2} D_2^2 \oplus \dots \oplus_{I_k} D_2^k ,$$

où I_i est un exemplaire de $[0, 1]$, plongé dans P_2^i et dans ∂D_2^i , de telle façon que:

- 1) $(P_2', h|P_2', M_3)$ n'a pas de singularités.
- 2) $s(P_2) \subset \cup I_i$, et cette inclusion est une équivalence d'homotopie.
- 3) Dans chaque point de $\cup I_i - s(P_2)$, P_2 est une variété (c'est-à-dire, qu'il est localement comme R_2 ou R_2^+).

La décomposition ci-dessus, qu'on va désigner symboliquement par

$$P_2 = P_2' \# D_2^1 \# \dots \# D_2^k$$

n'est pas unique. Une telle décomposition sera appelée une bonne présentation des singularités de (P_2, h, M_3) . \square

Définition 3.26: Soit (P_2, h, M_3) un 2-polyèdre singulier, tel que $\Psi(h)$ est acyclique, et:

$$P_2 \xrightarrow[p(h)]{} P_2/h \xrightarrow[q(h)]{} P_2/\Psi(h)$$

une séquence principale. La projection $p(h)$ se décompose en:

$$P_2 = P_2^0 \xrightarrow[p_1]{} P_2^1 \xrightarrow[p_2]{} \dots \xrightarrow[p_m]{} P_2^m = P_2/h$$

où chaque p_i est une projection de type $O(0)$ ou $O(1)$.

Supposons que p_i soit du type $O(1)$.

Soit $\sigma(p_i) \in s(P_2^{i-1})$ le point singulier qui est tué par p_i (définition 3.19). On dira que p_i possède un successeur, si l'on peut choisir un $\eta_0 \in (p_i \#)^{-1}(\sigma(p_i)) \subset s(P_2^i)$, ayant la propriété suivante:

Il existe un entier α :

$$i < \alpha \leq m,$$

tel que:

- a) Les projections $p_{i+1}, \dots, p_{\alpha-1}$ ne touchent pas à η_0 , ce qui nous permet d'écrire (par l'abus de notation de la définition 3.19):

$$\eta_0 \in s(P_2^{i+1}), \dots, \eta_0 \in s(P_2^{\alpha-1}) .$$

b) $\eta_0 = \sigma(p_\alpha)$;

c) p_α est du type $O(1)$

d) Soit $k(1, n) = k(y) \oplus k(x; n) \subset P_2^{i-1}$ le modèle local dans lequel p_i opère (comme dans la définition 3.15). Il existe une branche unique:

$$(x = \theta_\ell z) \cap (z \geq 0) \subset k(x; n)$$

qui contient η_0 . Elle détermine une composante connexe, A , dans $\pi_0(M_{\eta_0}^2(p_\alpha))$. On demande que, par l'isomorphisme canonique:

$$\pi_0(M^2(p_\alpha)) \xrightarrow{\approx} \pi_0(M_{\eta_0}^2(p_\alpha))$$

la composante connexe de $\pi_0(M^2(p_\alpha))$ qui contient des points où $P_2^{\alpha-1}$ n'est pas une variété, correspond à A .

Dans ces conditions, la paire formée par p_α et le germe de $(x = \theta_\ell z) \cap (z \geq 0) \subset k(x; n)$, autour de $x = y = z = 0$, s'appelle un successeur de p_i (voir la figure 3.26).

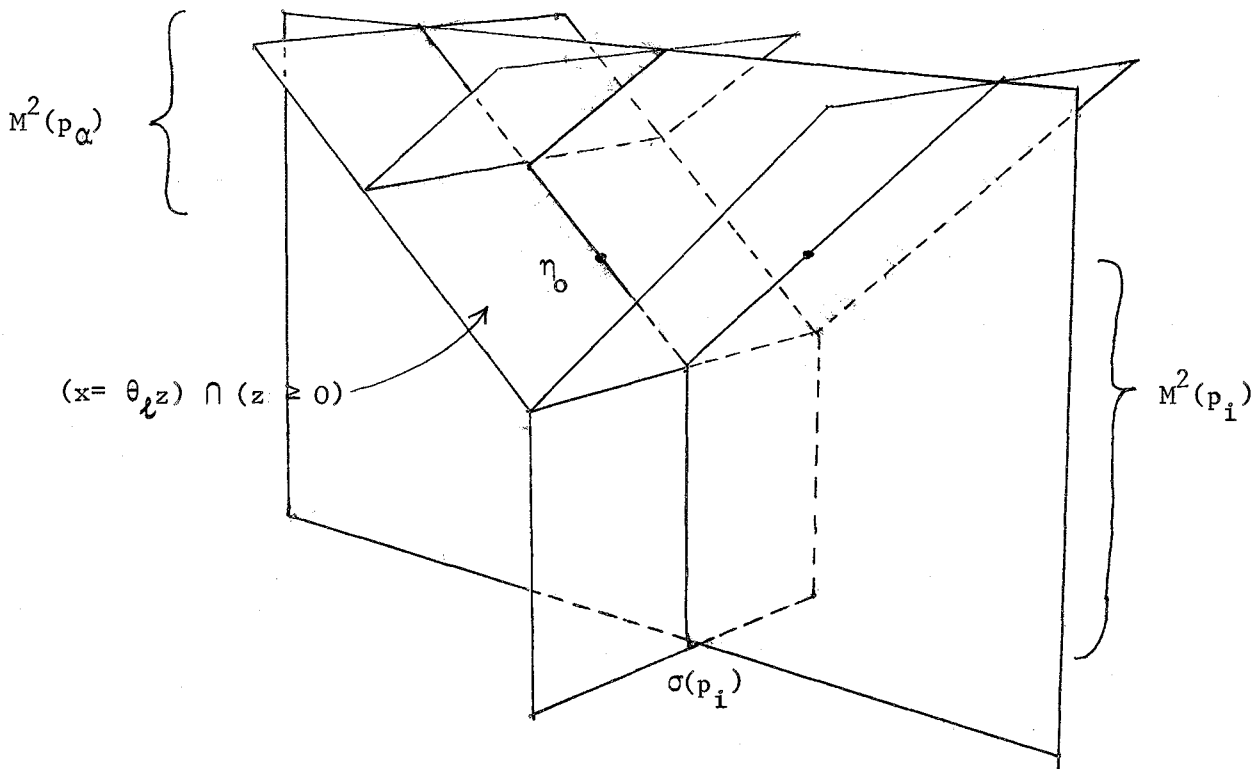


Figure 3.26 : p_i possède un successeur, $\chi(p_i) = ((x = \theta_\ell z) \cap (z \geq 0), p_\alpha)$

(On remarque que p_α est unique, une fois $(x = \theta_\ell z) \cap (z \geq 0) \ni \eta_0$ choisi, mais $(x = \theta_\ell z) \cap (z \geq 0)$ n'est pas nécessairement unique; p_i peut avoir plusieurs successeurs.)

Par définition une succession de la séquence principale considérée au début de la définition, est un ensemble (vide, peut-être)

$$\Sigma = \{(p_{i_0}, \chi(p_{i_0})), \dots, (p_{i_b}, \chi(p_{i_b}))\}$$

où les p_{i_j} sont des projections p_i , distinctes, de type $O(1)$, admettant des successeurs et $\chi(p_{i_j})$ est un successeur de p_{i_j} . Tous les p_i qui admettent des successeurs ne figurent pas nécessairement dans Σ . \square

Définition 3.26.1: On considère la séquence principale de la définition précédente, et une succession Σ de cette séquence. Soient p_{j_0}, \dots, p_{j_k} les projections p_i qui sont du type $O(1)$ et qui ne figurent pas dans la succession Σ .

Soit $j \in \{p_{j_0}, \dots, p_{j_k}\}$. Correspondant à la projection de type $O(1)$:

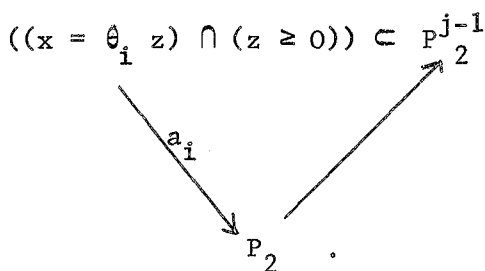
$p_j : P_2^{j-1} \longrightarrow P_2^j$, il existe dans P_2^{j-1} un ouvert $k(1; n(j))$ (comme dans la définition 3.15). En utilisant les notations de la définition 3.15, on remarque que, pour chaque:

$$((x = \theta_i z) \cap (z \geq 0)) \subset k(x; n(j)) \subset k(1; n(j)) \subset P_2^{j-1},$$

il existe un plongement unique

$$a_i : (x = \theta_i z) \cap (z \geq 0) \longrightarrow P_2, \text{ qui rend commutatif le}$$

diagramme suivant:



(On remarque que l'image inverse d'un point de $(x = z = 0) \subset k(x; n(j))$, dans P_2 , pourrait être constituée par plusieurs points distincts.)

On choisit un $i \in (1, \dots, n(j))$ et un nombre réel $\tau(j) \neq \theta_k$ tel que l'intervalle ouvert $(\theta_i, \tau(j))$ ne contienne aucun des θ_k (correspondant à $k(1; n(j)) \subset P_2^{j-1}$).

On considère alors, dans le voisinage de coordonnées R_3 qui contient $k(1; n(j))$ le sous-ensemble: $(x = \tau(j)z) \cap (z \geq 0) \cap (x^2 + y^2 + z^2 \leq \epsilon) = A_j = A(p_j)$.

On considère les plongements naturels:

$$(x = z = 0) \cap (|y| \leq \epsilon) \begin{array}{l} \nearrow A_j \xrightarrow{b_j} R_3 \subset M_3 \\ \searrow a_j \rightarrow P_2 \end{array}$$

Ceci nous permet de définir le 2-polyèdre singulier:

$$\left(\underbrace{P_2 \oplus A_j}_{(x=y=0) \cap (|y| \leq \epsilon)}, h \oplus b_j, M_3 \right)$$

La même construction peut être répétée pour tous les $j \in \{j_0, \dots, j_k\}$. Ceci nous donne un 2-polyèdre singulier:

$$(P_2 \oplus A_{j_0} \oplus \dots \oplus A_{j_k}, h \oplus b_{j_0} \oplus \dots \oplus b_{j_k}, M_3)$$

qu'on va désigner par:

$$(\beta P_2, \beta h, M_3)$$

Il est entendu que βP_2 dépend de Σ et des autres choix faits dans la construction. (En particulier du choix des i)

C'est, par définition, un bourgeonnement ("budding") de P_2 (compatible avec la succession Σ). On a une inclusion canonique $I : P_2 \subset \beta P_2$, qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{I} & \beta P_2 \\ & \searrow h & \swarrow \beta h \\ & & M_3 \end{array}$$

I induit une identification naturelle: $s(P_2) = s(\beta P_2)$. La séquence

principale de (P_2, h, M_3) donnée au début, induit canoniquement une séquence principale du bourgeonnement, où l'on retrouve les mêmes projections d'espace-quotient, et, en plus k nouvelles projections de type $O(2)$, correspondant aux bourgeons ("buds") A_j . On a donc: $b(\beta h) = b(h) + k + 1$. La nouvelle séquence principale s'écrit:

$$\beta P_2 \xrightarrow[p(\beta h)]{} \beta P_2/\beta h \xrightarrow[q(\beta h)]{} \beta P_2/\Psi(\beta h)$$

On a un plongement naturel:

$$s(P_2/h) \subset s(\beta P_2/\beta h),$$

et une bijection naturelle entre les points singulier du sous-ensemble:

$$s(\beta P_2/\beta h) - s(P_2/h) \subset s(\beta P_2/\beta h)$$

et l'ensemble des projections du type $O(1)$: $\{p_{j_0}, p_{j_1}, \dots, p_{j_k}\}$. En

tenant compte de cette bijection, ces singularités seront désignées par:

$s(p_{j_0}), s(p_{j_1}), \dots, s(p_{j_k})$, et leur ensemble par $\sigma(\beta P_2/\beta h) \subset s(\beta P_2/\beta h)$

Sur

$$s(P_2/h) \subset s(\beta P_2/\beta h),$$

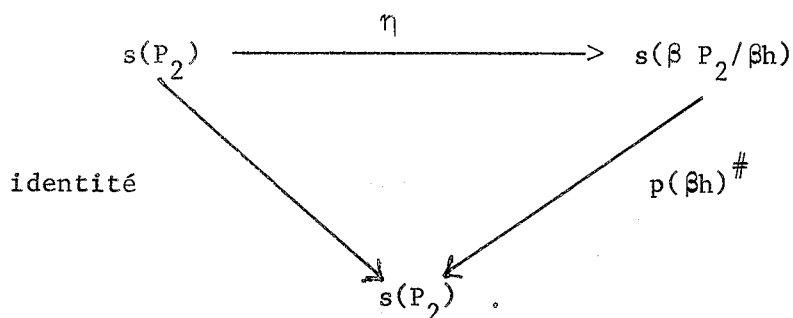
l'application $p(\beta h)^\# : s(\beta P_2/\beta h) \longrightarrow s(\beta P_2) = s(P_2)$ coïncide avec $p(h)^\#$ (voir la définition 3.22.1). \square

Définition 3.27: On se place dans les conditions des définitions 3.26 et 3.26.1.

Une inverse de $p(\beta h)^\#$, est, par définition, une application:

$$\eta : s(P_2) \longrightarrow s(\beta P_2/\beta h)$$

telle que $p(\beta h)^\# \circ \eta = (\text{identité sur } s(P_2))$, donc qui rend commutatif le diagramme suivant:



On dira que l'inverse η est compatible avec la succession Σ si elle est obtenue par la construction suivante:

Si $y \in s(P_2)$ on considère une chaîne de points:

$y = y_0, y_1, \dots, y_\nu$, avec $y_i \in s(P_2^i)$, construite inductivement, comme suit:

I. Si p_i est du type $O(0)$, ou s'il est du type $O(1)$, mais ne touche pas à y_{i-1} , alors y_i est le point unique:

$$y_i = (p_i^\#)^{-1}(y_{i-1}) .$$

II. Si p_j est du type $O(1)$, n'appartient pas à Σ et tue y_{j-1} , alors la chaîne s'arrête ($j-1 = \nu$) Dans ce cas $\eta(y) = s(p_j) = s(p_{\nu+1}) =$ le point singulier de $s(\beta P_2/\beta h)$ correspondant au bourgeon de $p_j = p_{\nu+1}$.

III. Si p_i est du type $O(1)$, appartient à Σ et tue y_{i-1} , on considère d'abord $(p_i, \chi(p_i)) \in \Sigma$. Il existe un point singulier, unique, de $s(P_2^i)$, appartenant à la branche $\chi(p_i)$. Ce point est, par définition y_i .

Si le cas II n'arrive jamais, on a clairement $\nu = m$ et:

$$y_\nu = y_m \in s(P_2^m) = s(P_2/h) \subset s(\beta P_2/\beta h) . \text{ Dans ce cas: } \eta(y) = y_\nu .$$

Si Σ est donnée, l'inverse η , compatible avec Σ existe et est unique.

Soit maintenant (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier quelconque, tel que $\Psi(f)$ soit acyclique, donné avec une séquence principale

$$K_2 \xrightarrow{p(f)} K_2/f \xrightarrow{q(f)} K_2/\Psi(f)$$

et Σ^i une fonction qui associe à chaque projection p_i de type $O(1)$ (de $p(f)$) le germe autour de $(x = z = 0)$ de l'une des branches $(x = \theta_\lambda z) \cap (z \geq 0) \subset k(x; n)$ qui lui correspondent (voir la définition 3.15). On va désigner ce germe par $[\Sigma^i \rightarrow p_i]$.

En particulier, si Σ est une succession de (K_2, f, M_3) et $(\beta K_2, \beta f, M_3)$ le bourgeonnement associé, on a la fonction $[\Sigma \rightarrow p_i]$ définie pour:

$$\beta K_2 \xrightarrow[p(\beta f)]{} \beta K_2/\beta f \xrightarrow[q(\beta f)]{} \beta K_2/\Psi(\beta f)$$

par: $[\Sigma \rightarrow p_i] \in \chi(p_i)$ (si $p_i \in \Sigma$) et

$[\Sigma \rightarrow p_i] =$ le germe du bourgeon attaché à p_i si $p_i \notin \Sigma$.

Une inverse de $p(f)^\#$, sera une application $\eta^i : s(K_2) \longrightarrow s(K_2/f)$ analogue à η ci-dessus.

Chaque fonction Σ^i détermine une inverse $\eta(\Sigma^i)$, de $p(f)^\#$, définie univoquement par la condition suivante:

Pour chaque projection du type $O(1)$, p_i , on considère la factorisation de $p(f)$:

$$K_2 \xrightarrow{a_i} K_2^{i-1} \xrightarrow{p_i} K_2^i \xrightarrow{b_i} K_2/f,$$

et le diagramme commutatif correspondant:

$$\begin{array}{ccc} s(K_2) & \xrightarrow{\eta(\Sigma^i)} & s(K_2/f) \\ \text{identité} \downarrow & & \downarrow b_i^\# \\ s(K_2) & \xleftarrow{a_i^\#} & s(K_2^{i-1}) \xleftarrow{p_i^\#} s(K_2^i) \end{array}$$

Supposons $x = \sigma(p_i)$ tel que l'identité suivante soit satisfaite:

$$x = p_i \# \circ b_i \# \circ \eta(\Sigma') \circ a_i \# (x)$$

Alors $b_i \# \circ \eta(\Sigma') \circ a_i \# (x) \in s(K_2^1)$ est sur la branche déterminée par $[\Sigma \rightarrow p_i]$. On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'une telle inverse existe et est unique.

Pour chaque inverse η' il existe un Σ' (pas unique), tel que $\eta' = \eta(\Sigma')$.

Enfin, si Σ est une succession, l'inverse η , de $p(\beta h) \#$ compatible avec Σ est:

$$\eta = \eta(\Sigma) \quad . \quad \square$$

Définition 3.27.1: Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier. Soit $\psi : I \rightarrow \text{Diff}(K_2)_2$ un chemin différentiable de difféomorphismes $(K_2)_2 \rightarrow (K_2)_2$, à support compact, tel que $\psi(0) = \text{identité}$. Le passage de (K_2, f, M_3) à $(K_2, f \circ \psi(1), M_3)$ s'appelle isotopie à la source.

Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier, $R_3 \subset M_3$ un voisinage de coordonnées tel que $(f^{-1}(R_3), f|_{f^{-1}(R_3)}, R_3)$ soit isomorphe à $(\underbrace{(x=0) + (y=0)}_{\text{réunion disjointe}}, j, R_3)$, où j est induit par les plongements canoniques.

Soit $x = \psi(y, z)$ une fonction C^∞ , à support compact. Soit $f_t : K_2 \rightarrow M_3$ défini par: $f_t|(K_2 - (x=0)) \equiv f|(K_2 - (x=0))$, $(f_t|(x=0)) = 1$ 'application $(y, z) \longmapsto (t\psi(y, z), y, z)$, $t \in [0, 1]$. Le passage de (K_2, f, M_3) à (K_2, f_1, M_3) est une isotopie au but (de première espèce).

Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier, $R_3 \subset M_3$ un voisinage de coordonnées, tel que $(f^{-1}(R_3), f|_{f^{-1}(R_3)}, R_3)$ soit isomorphe à

$([(x = 0) \cap (z \leq 1)] + [(y = 0) \cap (z \leq 2)] , j, R_3)$.

Soit $f_t : K_2 \rightarrow M_3$ ($t \in [1, 4]$) , défini par:

$f_t | (K_2 - (x = 0) \cap (z \leq 1)) \equiv f | \dots$, $(f_t | ((y = 0) \cap (z \leq 2))) = 1$ l'application:

$(x, z) \longmapsto (x, 0, \frac{1}{t} z)$. Le passage de (K_2, f, M_3) à (K_2, f_t, M_3)

$t \in [1, 4]$ (ou le passage inverse) s'appellent: isotopie au but de seconde

espèce . Quand on dira isotopie au but , tout court, il s'agira toujours

d'une isotopie de première espèce. \square

Le lemme suivant représente un tournant important de ce mémoire.

Lemme 3.20: (Le lemme de l'inversion d'une projection d'espace-quotient, acyclique.)

"Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier, tel que $\Psi(f)$ soit acyclique et:

$K_2 \xrightarrow{p(f)} K_2/f \xrightarrow{q(f)} K_2/\Psi(f) \subset M_3$ une séquence principale. Les

choses suivantes seront données:

A) On va supposer que les singularités de K_2 sont bien présentées, et on se donnera une bonne présentation: $K_2 = K_2^i \# D_2^1 \# \dots \# D_2^r$ (où $r = \# s(K_2)$).

B) On va se donner un 2-polyèdre singulier, difféomorphe à K_2 : $(K_2, h, \Theta_3(K_2^i))$, tel que:

B-1) $h|_{K_2^i}$ est le plongement naturel de K_2^i dans son voisinage régulier $C^\infty : \Theta_3(K_2^i)$.

B-2) $(K_2, h, \Theta_3(K_2^i))$ admet une séquence principale, consistant d'exactly r projections du type $O(2)$ non-dégénérées. Donc $\Psi(h)$ est acyclique et $M^3(h) = \emptyset$. La séquence principale de h est, clairement, unique (à une permutation des projections, près).

B-3) $M^3(f) \cap M^2(h) = \emptyset$ et $M^2(f)$ coupe $M^2(h)$ transversalement (dans K_2) .

B-4) Si $x, y \in M^2(f) \subset K_2$ sont distincts ($x \neq y$) alors:
 $h(x) \neq h(y)$.

C) On va se donner aussi, une succession Σ de la séquence principale donnée au début du lemme, et un bourgeonnement (de la même séquence) compatible avec Σ :

$$\beta K_2 \xrightarrow{p(\beta f)} \beta K_2 / \beta f \xrightarrow{q(\beta f)} \beta K_2 / \Psi(\beta f) \subset M_3 .$$

Les bourgeons seront choisis de telle manière qu'ils ne touchent pas à $M^2(h)$.
 Ceci nous permettra de définir (par abus de langage) un "bourgeonnement" $(\beta K_2, \beta h, \mathbb{O}_3(K'_2))$, où il est entendu que $\Psi(\beta h) = \Psi(h)$ (c'est-à-dire les deux représentent la même relation d'équivalence).

D'après ce qu'on vient de dire avant, puisque Σ est donnée, on a, en même temps, une inverse de $p(\beta f)^\#$, compatible avec Σ :
 $\eta(\Sigma) = \eta : s(K_2) \longrightarrow s(\beta K_2 / \beta f)$.

D) On se donne une résolution des singularités:
 $\pi : V_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(\beta K_2 / \beta f)$, (dont le seul rôle sera de rendre canoniques certains choix dans la démonstration du lemme).

E) On se donne N plongements 2-à-2 disjoints:

$$\iota_1 : D_2 \longrightarrow (K'_2)_2 - M^2(f) - M^2(h) \subset K_2 .$$

(Je rappelle que $(K'_2)_2 \subset K'_2$ est le sous-ensemble des points qui ont un voisinage homéomorphe à R_2 .) On va introduire les notations suivantes:

$$\bar{X}_1 = K_2 - \cup \iota_1(\text{int } D_2) = \bar{X}_1^1 \# D_2^1 \# \dots \# D_2^r .$$

Soient C_1, \dots, C_a les composantes connexes de $(K_2)_2 - M^2(h)$
 (elles sont clairement en correspondance biunivoque avec les composantes

connexes de $(K_2^1)_2 - M^2(h)$.

Ils existent des nombres: n_1, \dots, n_a , dépendant de $\Psi(f)$ et $\Psi(h)$, tels que:

Si $N \geq \sum n_i$ et les nombre des $\mathcal{L}_j(D_2)$ qui se trouvent dans chaque C_i est au moins égal à n_i , il existe un 2-polyèdre singulier $(X_2, f_1, \mathcal{O}_3(K_2^1))$, "(presque) canoniquement déterminé" (dans un sens qui sera précisé au cours de la démonstration) par les données A), B), C), D), E), F), ayant les propriétés suivantes:

1) Ils existent N plongements 2-à-2 disjoints:

$\lambda_i : D_2 \longrightarrow (K_2/f)_2 \subset \beta K_2/\beta f$ tels que:

1-1) les plongements canoniquement déterminés par λ_i , et qu'on désigne par abus de notation par la même lettre: $\lambda_i : D_2 \longrightarrow K_2$ sont isotopes (respectivement) à \mathcal{L}_i dans K_2 (donc $\mathcal{L}_i(D_2)$ et $\lambda_i(D_2)$ se trouvent dans la même composante connexe de $(K_2)_2$). Les $\lambda_i(D_2)$ sont censés ne pas toucher à $M^2(f) \cup M^2(h) \subset K_2$, ni aux bourgeons qu'on ajoute à K_2 pour obtenir βK_2 .

On introduit la notation

$$X_1 = K_2 - \cup \lambda_i(\text{int } D_2) = X_1^0 \# D_2^1 \# \dots \# D_2^r .$$

La séquence principale donnée au début du lemme induit canoniquement une séquence principale de (X_1, f, M_3) :

$$X_1 \xrightarrow[p(f)]{} X_1/f \xrightarrow[q(f)]{} X_1/\Psi(f) \subset M_3 .$$

(Il est clair qu'on a une identité entre "sous-ensembles" de M_3 :

$$X_1/f \equiv K_2/f - \cup \lambda_i(\text{int } D_2) \text{ et } X_1/\Psi(f) \equiv K_2/\Psi(f) - \cup \lambda_i(\overset{\circ}{D}_2) .$$

De même, le bourgeonnement donné au point C induit canoniquement un bourgeonnement:

$$\beta X_1 \xrightarrow{p(\beta f)} \beta X_1 / \beta f \xrightarrow{q(\beta f)} \beta X_1 / \Psi(\beta f) \subset M_3 .$$

(On a: $\beta X_1 / \beta f \equiv \beta K_2 / \beta f - U \lambda_i(\text{int } D_2)$ (identité).)

Enfin, on a des difféomorphismes évidents:

$$X_1 = \bar{X}_1, X_1^i = \bar{X}_1^i, \text{ e. a. d. s.}$$

(Remarque importante: l'isotopie entre λ_i et λ_i' n'a aucune importance au moment initial, dans βK_2 . Mais elle peut traverser $M^2(\beta f)$, donc λ_i et λ_i' ne sont pas isotopes dans $\beta K_2 - M^2(\beta f)$. Même si l'on change $\lambda_i \Rightarrow \lambda_i'$ (par isotopie dans K_2 , par exemple en prenant $\lambda_i = \lambda_i'$), les nouveaux λ_i' ne seront pas nécessairement isotopes aux λ_i' dans $\beta K_2 - M^2(\beta f)$).

1-2) Il existe un difféomorphisme "canonique" :

$$X_2 = \beta X_1 / \beta f$$

2) $\Psi(f_1)$ est acyclique.

3) $M^3(f_1) = \emptyset$, et $M^2(f_1)$ coupe $M^2(q(\beta f))$ transversalement, dans $X_2 = \beta X_1 / \beta f \subset \beta K_2 / \beta f$.

4) On considère l'immersion générique:

$$\beta X_1 \xrightarrow{p(\beta f)} \beta X_1 / \beta f = X_2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{O}_3(K_2^i),$$

qui nous fournit un 2-polyèdre singulier:

$$(\beta X_1, f_1 \circ p(\beta f), \mathbb{O}_3(K_2^i)) .$$

On peut passer de $(\beta X_1 = \beta \bar{X}_1, \beta h, \mathbb{O}_3(K_2^i))$ à $(\beta X_1, f_1 \circ p(\beta f), \mathbb{O}_3(K_2^i))$, par une suite finie de glissements élémentaires (définition 3.20), et d'isotopies (à la source et au but).

Remarque: Dans la mesure où les glissements élémentaires "ne changent rien" , on peut dire que f_1 (ou plutôt la flèche $p(f_1)$ de la séquence principale de f_1 :

$$X_2 \xrightarrow[p(f_1)]{} X_2/f_1 \xrightarrow[q(f_1)]{} X_2/\Psi(f_1) \subset \Theta_3(K_2')$$

est une inverse à droite pour $p(\beta f)$.

5) On commence par considérer la séquence principale de $(X_2, f_1, \Theta_3(K_2'))$ écrite ci-dessus. Elle induit une séquence principale de $(\beta X_1, f_1 \circ p(\beta f), \Theta_3(K_2'))$:

$$\begin{array}{ccccccc} \beta X_1 & \xrightarrow{p(\beta f)} & X_2 & \xrightarrow[p(f_1)]{} & X_2/f_1 & \xrightarrow[q(f_1 \circ p(\beta f))=q(f_1)]{} & \beta X_1/\Psi(f_1 \circ p(\beta f)) \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & & & \nearrow \\ & & & & & & f_1 \\ & \xrightarrow[p(f_1 \circ p(\beta f))]{} & & & & & \end{array}$$

Il est clair que: $\beta X_1/\Psi(f_1 \circ p(\beta f)) = X_2/\Psi(f_1)$ (égalité entre sous-ensembles de $\Theta_3(K_2')$) . On va désigner $X_2/f_1 = \beta X_1/f_1 \circ p(\beta f)$ par X_3 . Enfin, on se donne une séquence principale de $(\beta X_1, \beta h, \Theta_3(K_2'))$:

$$\beta X_1 \xrightarrow[p(\beta h)]{} \beta X_1/\beta h \xrightarrow[q(\beta h)]{} \beta X_1/\Psi(\beta h) \subset \Theta_3(K_2')$$

On remarque que $p(\beta h)$ est la même chose que:

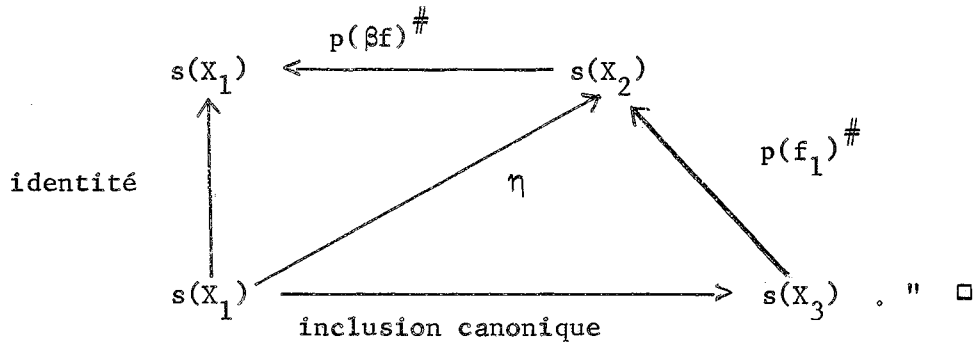
$$\beta X_1 \xrightarrow[\text{identité}]{} \beta X_1 \cong \beta X_1/\beta h .$$

On a des bijections canoniques:

$$s(\bar{X}_1) = s(X_1) = s(\beta X_1) = s(\beta X_1/\beta h) ,$$

qu'on peut composer avec l'inclusion canonique: $s(\beta X_1/\beta h) \subset s(X_3)$, fournie par la définition 3.23.

Le diagramme suivant est commutatif:



Remarque: Le point 5) nous dit que "l'inversion" construite au point 4) est compatible avec l'inverse (de $p(\beta f)^\#$), η .

La démonstration du lemme 3.20 sera donnée au chapitre suivant.

Définition 3.28: Soit (P_2, h, M_3) un 2-polyèdre singulier, comme dans la définition 3.26. On va considérer une séquence principale:

$$P_2 \xrightarrow[p(h)]{} P_2/h \xrightarrow[q(h)]{} P_2/\Psi(h)$$

et la succession vide $\Sigma = \emptyset$ de cette séquence. Le bourgeonnement

$(\beta P_2, \beta h, M_3)$ compatible avec la succession vide sera appelé bourgeonnement total. Pour le bourgeonnement total on aura l'inverse totale η :

$$s(P_2) \longrightarrow s(\beta P_2/\beta h), \text{ compatible avec la succession vide.} \quad \square$$

Le lemme suivant est un sous-produit de la démonstration du lemme 3.20:

(la démonstration se trouvera au chapitre IV).

Lemme 3.21: "Considérons le lemme 3.20 avec la succession $\Sigma = \emptyset$. Soit

$A(p_i) = A = ((x^2 + y^2 \leq 1) \cap (y \geq 0))$ l'un des bourgeons du bourgeonnement

total βK_2 , correspondant à la projection du type $0(1)$, p_i (composante

de $p(f) : K_2 \longrightarrow K_2/f$). Il est entendu que $A \cap K_2 = (-1 \leq x \leq +1, y=0) = I$.

Alors:

a) $f_1 \circ p(\beta f) | A$ est un plongement $A \subset \mathbb{O}_3(K_2')$, et les images de deux bourgeons différents sont disjointes.

b) $M^3(f_1 \circ p(\beta f)) \cap A = \emptyset$.

c) $M^2(f_1 \circ p(\beta f)) \cap A = (M^2(p(\beta f)) \cap A) \cup (M^2(f_1) \cap A)$ peut être décrit comme suit (après un éventuel reparamétrage de A): Il existent des nombres:

$$0 < \epsilon_0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_k < 1$$

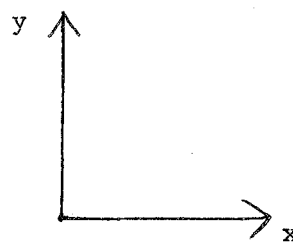
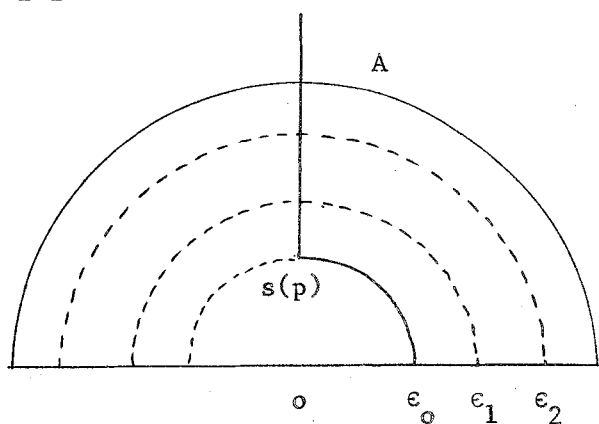
tels que:

c-1) $M^2(p(\beta f)) \cap A = (x^2 + y^2 = \epsilon_0^2, x \geq 0, y \geq 0)$,

et le point: $(x = 0, y = \sqrt{\epsilon_0}) = s(\beta K_2 / \beta f) \cap A = s(p)$ (le point singulier de $\sigma(\beta K_2 / \beta f)$ correspondant au bourgeon $A = A(p)$ attaché à la projection de type $0(1)$, p ; voir la définition 3.26.1).

c-2) $M^2(f_1) \cap A = (x^2 + y^2 = \epsilon_0^2, x < 0, y \geq 0) \cup$

$$\bigcup_{i=1}^k (x^2 + y^2 = \epsilon_i^2, y \geq 0)$$



— = $M^2(p(\beta f)) \cap A$
 ... = $M^2(f_1) \cap A$

Figure 3.21.1. $M^2(f_1 \circ p(\beta f)) \cap A$

A chaque arc de cercle $(x^2 + y^2 = \epsilon_i^2, y \geq 0)$ ($i \geq 1$) correspondent deux projections de type $O(1)$, p_i' , p_i'' de la séquence principale

$$\beta X_1/\beta f = X_2 \xrightarrow{p(f_1)} X_2/f_1 \xrightarrow{q(f_1)} X_2/\Psi(f_1) .$$

L'ordre dans lequel p_i' , p_i'' apparaissent dans le "détailement" de $p(f_1)$ n'est pas du tout arbitraire. Je vais supposer que la notation est choisie de telle façon que p_i' apparaisse avant p_i'' . Soient a_i' , a_i'' les deux bouts du segment $(x^2 + y^2 = \epsilon_i^2) \cap A$. On va supposer la notation telle que p_i' opère sur a_i' et p_i'' opère sur a_i'' .

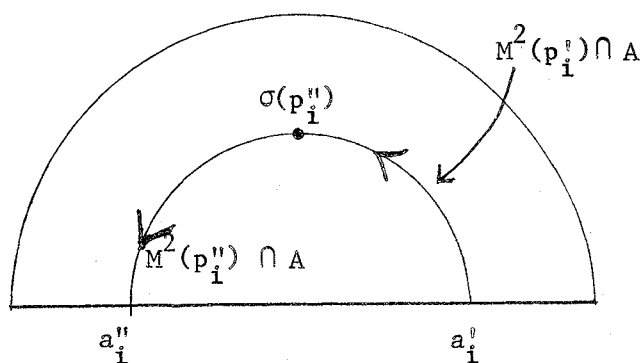


Figure 3.22.2
Les projections du type $O(1)$: p_i' , p_i'' , qui apparaissent dans le détailement de $p(f_1)$.

On peut construire une succession Σ_1 de la séquence principale de $(X_2, f_1, \Theta_3(K_2^i))$, définie comme suit: Σ_1 contient (exactement) toutes les projections p_i' (pour tous les $A(p)$ et tous les i). Pour chaque p_i' , le point $\eta_o (= \sigma(p_i')) \in ((p_i')^\#)^{-1}(\sigma(p_i'))$ (voir la définition 3.26) est:

$$\eta_o = \sigma(p_i'') .$$

Enfin, on peut supposer, sans perdre la généralité, que:

$$M^2(q(\beta f)) \cap (x^2 + y^2 = \epsilon_o) = \emptyset$$

et que $M^2(q(\beta f)) \cap (x^2 + y^2 = \epsilon_i)$, ($i \geq 1$), contient, au plus, un point, avec intersection transversale.

On introduit, pour finir, la notation suivante: pour chaque $s(p) \in A(p)$ on considère la projection du type $O(1)$, unique, de $X_2 \xrightarrow{p(f_1)} X_2/f_1$, $P(p)$ telle que $\sigma(P(p)) = s(p)$. \square

Définition 3.29: Soit (P_2, h, M_3) un 2-polyèdre singulier. On dira que l'application h est excellente, s'il existe une bonne présentation:

$$P_2 = P_2^i \# D_2^1 \# \dots \# D_2^k,$$

telle que:

- 1) $h|_{P_2^i}$ est un plongement.
- 2) chaque $h|_{D_2^i}$ est un plongement et $h(D_2^i) \cap h(D_2^j) = \emptyset$ (donc, en particulier: $M^2(h) = \emptyset$, et $\Psi(h)$ est acyclique).
- 3) $M^2(h) \cap D_2^i$ est un intervalle fermé tel que: $M^2(h) \cap \partial D_2^i = 1e$ point singulier unique $s(P_2) \cap D_2^i$.

Si h est excellente, (P_2, h, M_3) possède une séquence principale "canonique" :

$$P_2 \xrightarrow[p(h) = \text{id}(P_2)]{\quad} P_2/h \xrightarrow[q(h)]{\quad} P_2/\Psi(h),$$

où $q(h)$ contient exactement k projections du type $O(2)$ (qu'on peut permuter entre elles, comme on veut). \square

Définition 3.30: On va considérer un 2-polyèdre singulier (K_2, f, M_3) , tel que $\Psi(f)$ soit acyclique et que $q(f) : K_2/f \rightarrow M_3$ soit excellente.

On considère un bourgeonnement: $(\beta K_2, \beta f, M_3)$. Il n'y a plus aucune raison pour que $q(\beta f) : \beta K_2/\beta f \rightarrow M_3$ soit excellente (il y aura des problèmes pour les singularités $\sigma(\beta K_2/\beta f)$ correspondant aux bourgeons). On va décrire un procédé pour la "rendre excellente".

On considère un bourgeon $A = A(p)$ (comme dans le lemme 3.21), et le point singulier $s(p)$. Il existe un voisinage $R_3 \subset M_3$ de $\beta f(s(p)) \in M_3$, tel que $R_3 \cap \text{Image}(\beta f)$ puisse être décrit comme suit:

$$R_3 \cap \text{Image}(\beta f) = (x = 0, z \leq 1) \cup (y = 0)$$

où $(x = 0, z \leq 1)$ est $R_3 \cap (\beta f)(A)$, $\beta f(s(p)) = (0, 0, 0)$, $(y = 0) = \beta f(k(y)) \cap R_3$. $(k(1; n) = k(y) \oplus k(x; n))$ est le voisinage correspondant à la projection p , comme dans la définition 3.15).

On va considérer un plongement différentiable: $L(p) : D_2 \subset (y = 0)$ (donc $L(p) : D_2 \subset (K_2)_2$) tel que:

- 1) $L(p)(D_2) \subset (z > 0)$.
- 2) Ou bien: 2-1) $L(p)(D_2) \cap (x = 0, y = 0) \cap (z \leq 1) = \emptyset$
ou bien: 2-2) $L(p)(D_2) \cap (x = 0, y = 0) \cap (z \leq 1) =$ un intervalle fermé, ayant une extrémité sur $L(p)(\partial D_2)$ et tout le reste dans $L(p)(\text{int } D_2)$.

On va considérer:

$[\beta K_2] = \beta K_2 - \cup L(p)(\text{int } D_2)$. (La réunion étant faite sur tous les: $s(p) \in \sigma(\beta K_2 / \beta f)$.)

Il est entendu que $[\beta K_2]$ dépend du bourgeonnement β . Clairement si l'on passe de $(\beta K_2, \beta f, M_3)$ à $([\beta K_2], [\beta f], M_3)$, où: $[\beta f] = \beta f|_{[\beta K_2]}$, alors $q([\beta f])$ est excellente. $[\beta K_2] \subset \beta K_2$ est déterminé à isotopie près, mais pas $[\beta f]$. Pour chaque $s(p)$, séparément, il est possible qu'on soit dans la situation 2-1) (et l'on dit, dans ce cas, que $A(p)$ ne déborde pas, dans $[\beta K_2]$), soit dans la situation 2-2) (et l'on dit, dans ce cas, que $A(p)$ déborde dans $[\beta K_2]$). Cette petite marge de liberté, dans la définition de $([\beta K_2], [\beta f], M_3)$ est utile pour la suite. \square

Définition 3.31: Soit (P_2, h, M_3) un 2-polyèdre singulier, tel que h soit excellente (voir la définition 3.29). On considère aussi un 2-polyèdre singulier (P_2, f, N_3) , difféomorphe à (P_2, h, M_3) (ce qui veut dire, tout simplement, que la source de f et de h est la même).

On va supposer que f et h satisfont à la condition T, énoncée ci-dessous: $^*(T)$: Dans P_2 , $M^2(f)$ et $M^2(h)$ se coupent transversalement. (C'est la même chose que la condition B-3 du lemme 3.20.)

On dira que h satisfait à la condition E(f), si l'on a:

(E(f)) : Pour chaque 2-disque D_2^j (définition 3.29) il existe un intervalle $I^j \subset D_2^j$, tel que:

- a) $I^j \cap \partial D_2^j = \partial I^j$.
- b) I^j est transverse à ∂D_2^j .
- c) $M^2(h) \cap D_2^j \subset I^j$.
- d) $(I^j - M^2(h)) \cap M^2(f) = \emptyset$. \square

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la démonstration du lemme 3.20:

Lemme 3.21.1: "Dans les conditions du lemme 3.20, supposons, en plus, que:

- 1) $(K_2, h, \mathbb{Q}_3(K_2^!))$ est excellente.
- 2) h satisfait à la condition (E(f)).

(On remarque que, de toute façon, d'après B-3, lemme 3.20, f et h satisfont à la condition (T)).

Alors, l'application:

$$q(f_1) : X_2/f_1 \longrightarrow \mathbb{Q}_3(K_2^!)$$

est excellente." \square

Lemme 3.21.2: "Considérons le lemme 3.20 avec les données supplémentaires suivantes:

(i) $\Sigma = \emptyset$.

(ii) On se donne une résolution des singularités: $\pi_1 : W_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$.

La résolution $\pi : V_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(\beta K_2/\beta f)$ (point D , lemme 3.20) est induite par $\pi_1 : W_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$

On considère le 2-polyèdre singulier du lemme 3.20:

$$(X_2 = \beta X_1/\beta f, \quad f_1, \quad \mathbb{O}_3(K_2))$$

et la résolution des singularités que (ii) induit, pour ce polyèdre.

Soient $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$ les singularités de $s(K_2/f) = s(X_1/f) = s(\beta X_1/\beta f) - \sigma(\beta X_1/\beta f) \subset s(X_2)$.

On considère des intervalles fermés, 2-à-2 disjoints: $I(\bar{x}_i) \subset M_+^2(f_1) \subset X_2$ tels que:

1) $\partial I(\bar{x}_i) = \bar{x}_i - \bar{y}_i$, avec $\bar{y}_i \in (X_2)_2$.

2) $I(\bar{x}_i) - (\bar{x}_i) \subset (M_+^2(f_1))_1 \cap (X_2)_2$.

(3) De même, l'image de $I(\bar{x}_i) - (\bar{x}_i)$ dans $M_-^2(f_1)$ est contenue dans $(M_-^2(f_1))_1 \cap (X_2)_2$.)

4) $I(\bar{x}_i) \cap M^2(q(\beta f)) = \emptyset$.

(Ces conditions sont toujours réalisées si les $I(\bar{x}_i)$ sont très petits.)

Les conditions ci-dessus impliquent que, pour chaque \bar{y}_i il existe un voisinage de coordonnées $R_3^i : f_1(\bar{y}_i) \subset R_3^i \subset \mathbb{O}_3(K_2)$ tel que:

$R_3^i \cap R_3^j = \emptyset$, $R_3^i = \{(x_i, y_i, z_i)\}$, et $(f_1^{-1}(R_3^i), f_1|_{f_1^{-1}(R_3^i)}, R_3^i)$ est isomorphe à $((\underbrace{x_i = 0}_{\text{réunion disjointe}} + y_i = 0), j_i, R_3^i)$ où j_i est induit par les plongements naturels. On peut supposer que:

$$M_+^2(f_1) \cap f_1^{-1}(R_3^1) \subset (x_i = 0) \quad ,$$

$$M_-^2(f_1) \cap f_1^{-1}(R_3^1) \subset (y_i = 0) \quad ,$$

$$f_1(\bar{y}_i) = (0, 0, 0) \quad , \text{ et que}$$

la partie $(x_i = y_i = 0) \cap (z_i \leq 0)$ de $(x_i = 0)$ est exactement $I(\bar{x}_i) \cap f_1^{-1}(R_3^1)$.

Pour chaque \bar{x}_i on va ajouter à $(x_i = 0)$ (donc à la branche spécifiée) le bourgeon $\bar{\beta}(\bar{x}_i) = (z_i = 0) \cap (x_i^2 + y_i^2 \leq 1) \cap (x_i \geq 0)$.

Ceci nous donne, par bourgeonnement, un nouveau 2-polyèdre singulier:

$$(\bar{\beta} X_2, \bar{\beta} f_1, \Theta_3(K_2')) \quad ,$$

$$\text{où } (\bar{\beta} f_1)^{-1}(R_3^1) = ((x_i = 0) \oplus \bar{\beta}(\bar{x}_i)) + (y_i = 0) \quad .$$

Dorénavant, toutes les séquences principales considérées pour

$(\bar{\beta} X_2, \bar{\beta} f_1, \Theta_3(K_2'))$ vont commencer par r projections du type 0(1) :

P_1, \dots, P_r , telles que $\sigma(P_i) = \bar{x}_i$ et que $M^2(P_i) \supset M^2(p(\bar{\beta}f_1)) \cap \bar{\beta}(\bar{x}_i)$,

et par les projections du type 0(1) : $P(p)$ (lemme 3.21), où p parcourt les projections du type 0(1) de la séquence principale:

$$K_2 \xrightarrow[p(f)]{} K_2/f \xrightarrow[q(f)]{} K_2/\Psi(f) \quad .$$

Sous ces conditions, il existe une succession Σ_2 de

$(\bar{\beta} X_2, \bar{\beta} f_1, \Theta_3(K_2'))$ telle que $\Sigma_2 \supset \Sigma_1$ où Σ_1 est la succession du lemme 3.21 et:

$$\Sigma_2 - \Sigma_1 = \{ (P_i, \text{ le germe du bourgeon } \bar{\beta}(\bar{x}_i)) \} \quad . \quad " \quad \square$$

Ce lemme est trivial, mais les notations qu'on y utilise seront très utiles.

Maintenant, on va itérer la construction du lemme 3.20:

Lemme 3.22: (Le lemme de l'inversion de l'inverse):

"Considérons les conditions du lemme 3.20, avec les précisions supplémentaires suivantes:

A₁) La succession $\Sigma = \emptyset$; donc le bourgeonnement $(\beta K_2, \beta f, M_3)$ est total.

B₁) $q(f) : K_2/f \longrightarrow M_3$ et $q(h) : K_2 \longrightarrow \Theta_3(K_2')$ sont excellentes (définition 3.29).

C₁) h satisfait à la condition $E(f)$ (définition 3.30.1).

D₁) On se donne une résolution des singularités: $\pi : W_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2)$ qui va induire, canoniquement, toutes les autres résolutions de singularités, dont il sera question dans ce lemme.

Alors, on peut appliquer le lemme 3.20, de telle façon que:

I. On pourra choisir les $\ell_i(D_2)$ du point E) (lemme 3.20), de telle façon que parmi les $\ell_i(D_2)$ se trouvent tous les $L(p)(D_2)$ (où p parcourt l'ensemble des projections du type $0(1)$ de $p(f)$) (voir la définition 3.30). Donc: $\bar{X}_1 \subset [\beta K_2]$ et $q(\beta f) : \beta \bar{X}_1/\beta f \longrightarrow M_3$ est excellente.

II. En plus,

$$q(\beta f) : \beta X_1/\beta f \longrightarrow M_3 ,$$

est aussi excellente. Ceci, il faut le remarquer, n'est pas du tout une conséquence du point précédent. Les ℓ_i , λ_i (lemme 3.20) ne sont pas isotopes dans $K_2 - M^2(f)$, ce qui fait que les sous-espaces de $\beta K_2/\beta f$:

$$X_2 = \beta X_1/\beta f = \beta K_2/\beta f - \cup \lambda_i (\text{int } D_2) , \text{ et}$$

$$\beta \bar{X}_1/\beta f = \beta K_2/\beta f - \cup \ell_i (\text{int } D_2)$$

ne sont pas les mêmes (même à isotopie près). (Le point I est inutile pour la suite; c'est II qui est utile).

III. Dans $\beta K_2/\beta f$ on va considérer

$$\mu(q(\beta f), \sigma(\beta K_2/\beta f)) \subset M^2(q(\beta f)) ,$$

la réunion des branches correspondantes aux singularités $s(p) \in \sigma(\beta K_2/\beta f)$ (définition 3.26.1).

Alors, dans $\beta K_2/\beta f$, on a:

$$(\mu(q(\beta f), \sigma(\beta K_2/\beta f)) - p(\beta f) (Cl(\beta K_2 - K_2))) \cap M^2(f_1) = \emptyset$$

(où: $p(\beta f) (Cl(\beta K_2 - K_2)) = 1$ 'image des bourgeons, dans $\beta K_2/\beta f$).

Cette conditions, veut dire que, en dehors des bourgeons,

$\mu(q(\beta f), \sigma(\beta K_2/\beta f))$ ne touche pas à $M^2(f_1)$.

IV. On commence par établir une notation utile pour la suite:

Si (P_2, g, N_3) est un 2-polyèdre singulier; muni d'un résolution des singularités, et tel que: $M^3(g) = \emptyset$, $\Psi(g)$ est acyclique, on va désigner, pour chaque $x \in s(P_2)$, par $\mu_{\pm}(g, x) \subset M^2_{\pm}(g)$ la branche (spécifiée, ou non spécifiée), de $M^2_{\pm}(g)$ correspondant à x . De même, par définition:

$$\hat{\mu}_{\pm}(g, x) = \mu_{\pm}(g, x) \cup \{x\} .$$

Ce qui suit est important:

Il existe une suite d'isotopies au but, de seconde espèce (définition 3.27.1), de supports 2-à-2 disjoints, qui nous font passer de $(X_2, q(\beta f), M_3)$, à un 2-polyèdre singulier désigné par: $(X_2, q_1(\beta f), M_3)$ ayant les propriétés suivantes:

(a) Si $x \in s(X_2)$, on a:

$$\partial \mu_{-}(q_1(\beta f), x) \in \text{int} (X_2)_2 \text{ et:}$$

$$\partial \mu_{+}(q_1(\beta f), x) \in \partial X_2 .$$

$$(b) \mu_{-}(q_1(\beta f), x) \cap M^2(f_1) = \emptyset .$$

$$(c) M^2(q_1(\beta f)) \cap [Cl(\beta X_2 - X_2) + \bigcup_i I(\bar{x}_i)] = \emptyset$$

(voir le lemme 3.21.2) .

V. On considère maintenant $(\bar{\beta} X_2, \bar{\beta} f_1, \Theta_3(K_2^i))$. On peut appliquer de nouveau le lemme 3.20 à ce polyèdre de telle manière que les données A, B, C, D, E du lemme 3.20, deviennent A', B', C', D', E' ci-dessous: (on remarque, aussi que la construction du lemme 3.20 dépend, une fois A, B, C, D, E donnés, du choix du bourgeonnement compatible avec la succession du point C, et du choix des entiers ϵ_i de la démonstration du lemme 3.20; ces deux choix seront précisés dans la démonstration du lemme 3.20):

A') On remarque que: $s(\bar{\beta} X_2) = s(X_2)$.

On se donne une bonne présentation des singularités de $\bar{\beta} X_2$, ce qui est possible, puisque $q(\beta f) : X_2 \longrightarrow M_3$ est excellente:

$$\bar{\beta} X_2 = \bar{\beta} X_2' \# \Delta_2^1 \# \dots \# \Delta_2^s.$$

B') On remarque que: $\Theta_3(\bar{\beta} X_2') = \Theta_3(X_1/\Psi(f)) \subset M_3$.

A la place de $(K_2, h, \Theta_3(K_2^i))$, on prend:

$$(\bar{\beta} X_2, q_1(\beta f), M_3).$$

Sans perte de généralité: B-1, B-2, B-3, B-4 sont satisfaites (ou plutôt leurs analogues).

C') La succession choisie pour la séquence principale (lemme 3.21.2):

$$\bar{\beta} X_2 \xrightarrow[p(\bar{\beta} f_1)]{} \bar{\beta} X_2 / \bar{\beta} f_1 \xrightarrow[q(\bar{\beta} f_1)]{} \Theta_3(K_2^i)$$

(et qui joue le rôle de Σ), est Σ_2 du lemme 3.21.2. Ceci nous donne un bourgeonnement, qui n'est pas total: (qui sera bien précisé dans la démonstration)

$$\beta_1 \bar{\beta} X_2 \xrightarrow[p(\beta_1 \bar{\beta} f_1)]{} \beta_1 \bar{\beta} X_2 / \beta_1 \bar{\beta} f_1 \xrightarrow[q(\beta_1 \bar{\beta} f_1)]{} \Theta_3(K_2^i),$$

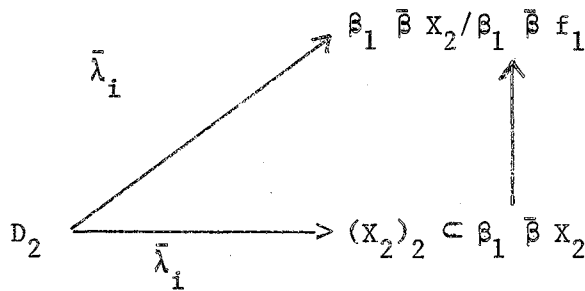
et une inverse de $p(\beta_1 \bar{\beta} f_1)^\#$, désignée par η_1 . On remarque que les bourgeons β_1 et $\bar{\beta}$ sont disjoints.

D') La résolution des singularités (point D, lemme 3.20) sera induite par $\pi : W_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2)$ (point D_1 , ci-dessus).

E') Le nouveau N sera déterminé au cours de la démonstration. On aura des plongements $\bar{\lambda}_i$, analogues aux λ_i (lemme 3.20, point E).

Ceci va nous donner des plongements différentiables:

$$\bar{\lambda}_i : D_2 \longrightarrow (X_2)_2 \subset \beta_1 \bar{\beta} X_2 \quad \text{et:}$$



tels que $\bar{\lambda}_i$ soit isotope à $\bar{\lambda}_i$ (dans $(X_2)_2$) et que les $\bar{\lambda}_i(D_2)$ (respectivement les $\bar{\lambda}_i(D_2)$) soient 2-à-2 disjoints.

On va introduire les notations:

$$\bar{Y}_1 = \beta X_2 - \cup \bar{\lambda}_i (\text{int } D_2) ,$$

$$Y_1 = \beta X_2 - \cup \bar{\lambda}_i (\text{int } D_2) .$$

La construction (c'est-à-dire l'itération du lemme 3.20) nous donnera un 2-polyèdre singulier: (Y_2, g_1, M_3) , muni d'un difféomorphisme canonique:

$$Y_2 = \beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1 .$$

Tout ceci peut être réalisé de telle manière que:

- 1) On peut passer de $(\beta X_1 - \cup \bar{\lambda}_i (\text{int } D_2), \beta h, \mathbb{O}_3(K_2))$ à $(\beta X_1 - \cup \bar{\lambda}_i (\text{int } D_2), f_1 \circ p(\beta f), \mathbb{O}_3(K_2))$, par un nombre fini de glissements élémentaires et d'isotopies (à la source et au but).

2) On peut passer de $(\beta_1 Y_1, \beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f), M_3)$ à $(\beta_1 Y_1, g_1 \circ p(\beta_1 \bar{\beta} f_1), M_3)$ par un nombre fini de glissements élémentaires et d'isotopies (à la source et au but).

3) $\Psi(g_1)$ est acyclique et $M^3(g_1) = \emptyset$.

4) $q(\beta_1 \bar{\beta} f_1) : Y_2 = \beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2')$, est excellente.

5) On peut appliquer une suite d'isotopies de seconde espèce, (au but), passant de $(Y_2, q(\beta_1 \bar{\beta} f_1), \mathbb{O}_3(K_2'))$ à un 2-polyèdre singulier: $(Y_2, q_1(\beta_1 \bar{\beta} f_1), \mathbb{O}_3(K_2'))$, tel que:

5-1) $(Y_2, q_1(\beta_1 \bar{\beta} f_1), \mathbb{O}_3(K_2'))$, possède une séquence principale consistant seulement de projections du type 0(2) dégénérées.

$$5-2) \quad \boxed{M_+^2(q_1(\beta_1 \bar{\beta} f_1)) \cap M_-^2(g_1) = \emptyset}.$$

6) Considérons l'inclusion canonique:

$$s(X_2) = s(\beta_1 Y_1) \approx s(\beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f)) \xleftarrow{i} \longrightarrow$$

$$s(\beta_1 Y_1 / g_1 \circ p(\beta_1 \bar{\beta} f_1)) = s(Y_2 / g_1),$$

fournie par le point 2), ci-dessus. Alors:

6-1) L'application:

$$\begin{array}{ccccc} s(X_2) & \xrightarrow{i} & s(Y_2/g_1) & \xrightarrow{p(g_1)\#} & s(Y_2) \\ & & & & \uparrow \\ & & & & J \end{array}$$

est injective.

6-2) Pour chaque $x \in s(X_2)$ on considère $i(x) \in s(Y_2/g_1)$, $J(x) \in s(Y_2)$, et $\alpha_{\pm}(x)$, l'unique bout de $\mu_{\pm}(q(g_1), i(x))$. On a une inclusion naturelle $j : \{\alpha_{\pm}(x)\} \hookrightarrow \partial \mu_{\pm}(g_1, J(x))$. Avec ces

notations, la condition 6-2) dit que:

6-2-a) $j \alpha_-(x) \in \text{int}(Y_2)_2$ (donc:

$j \alpha_+(x) \in \partial Y_2$.

6-2-b) Considérons la décomposition:

$$s(X_2) = s_1(X_2) + s_2(X_2)$$

($s_1(X_2) \cap s_2(X_2) = \emptyset$) , définie comme suit:

$x \in s_2(X_2)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $x \in \sigma(\beta X_1/\beta f) \subset s(\beta X_1/\beta f) = s(X_2)$.

(ii) Parmi les deux branches de X_2 autour de x , celle qui correspond au bourgeon (du bourgeonnement β , contenant x) n'est pas spécifiée.

Alors: si $x \in s_1(X_2)$, sur l'unique intervalle fermé contenu dans $\mu_+(g_1, J(x))$, d'extrémités $J(x)$ et $j \alpha_+(x)$ il existe au moins un point où Y_2 ne soit pas variété de dimension 2.

6-2-c) Si $x \in s_2(X_2)$, dans tout point de $\mu_+(g_1, J(x))$, Y_2 est une variété de dimension 2.

6-2-d) Si $x \in s_2(X_2)$:

$$\mu_{\pm}(q_1(\beta_1 \bar{\beta} f_1), J(x)) \cap M^2(g_1) = \emptyset .$$

7) On a:

$$\partial M_+^2(\beta_1 \bar{\beta} f_1) \subset \text{int}(Y_2)_2 \text{ et:}$$

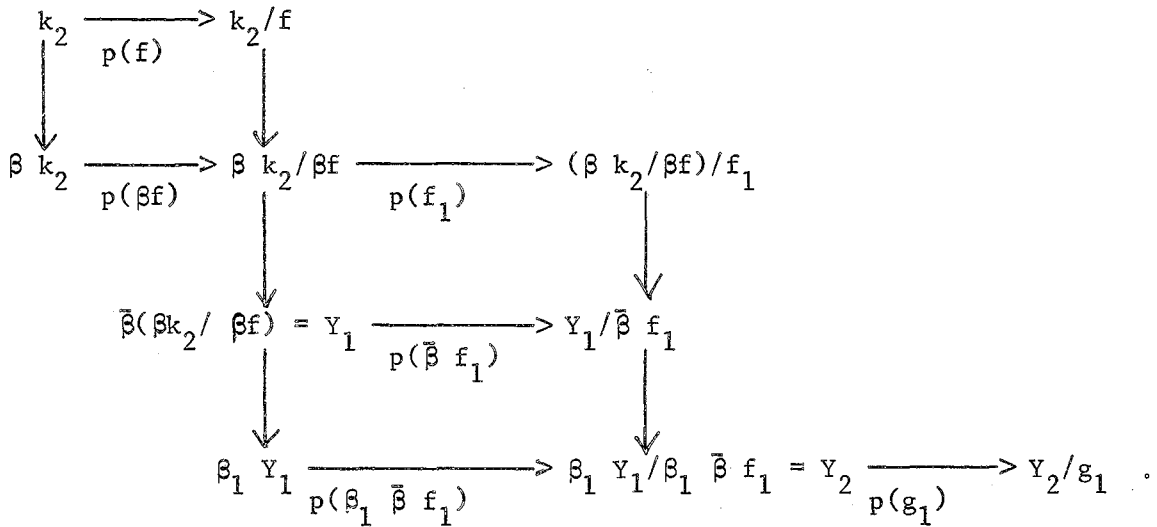
$$\partial M_-^2(\beta_1 \bar{\beta} f_1) \subset \partial Y_2 . " \square$$

Ce lemme contient un morceau important de la démonstration du lemme fondamental. Il sera prouvé au chapitre suivant.

Les deux applications successives de "l'inversion" (lemme 3.20)

nous donnent, en définitive, le diagramme commutatif suivant:

$$k_2 = K_2 - \cup \lambda_i(\text{int } D_2) - \cup \bar{\lambda}_i(\text{int } D_2) \text{ et:}$$



Toutes les flèches verticales sont des inclusions canoniques, engendrées par bourgeonnement, et ne diffèrent de l'identité que par quelques collapsings (effondrements), dans le sens de J.H.C. Whitehead. D'autre part, la composition de deux flèches horizontales consécutives est, aussi, "presque l'identité", dans le sens plus subtil du lemme d'invariance par rapport aux glissements élémentaires. Plus précisément $f_1 \circ p(\beta f)$ et $g_1 \circ p(\beta_1 \bar{\beta} f)$ sont obtenues, par glissements élémentaires à partir d'applications qui sont "presque" $\text{id}(\beta k_2)$ et $\text{id}(\beta_1 Y_1)$.

$p(f_1)$ est "l'inverse" de $p(\beta f)$ et $p(g_1)$ est "l'inverse" de $p(\beta_1 \bar{\beta} f)$ (qui est "presque" $p(f_1)$). Donc $p(g_1)$ est, du point de vue qui nous intéresse ici "presque" la même chose que $p(f)$. Mais on s'est débarrassé des points triplés!

Avant de pouvoir utiliser ce lemme on doit développer une technique d'invariance par rapport à la chirurgie.

3.6) Une technique de chirurgie ("surgery") en dimension 3:

Notre démonstration utilise trois techniques différentes: le foncteur d'épaississement (paragraphe 3.2), l'inversion d'une projection acyclique (paragraphe 3.5) et une certaine technique d'invariance par rapport à la chirurgie qu'on va exposer maintenant.

Lemme 3.23: (Premier lemme d'invariance par rapport à la chirurgie): "On considère la paire canonique:

$(2 T_3^P, T_3^P) = (p \# (S_1 \times S_2), p \# (S_1 \times D_2))$, la paire $(S_3, S_1 \times D_2)$ définie par l'inclusion: $S_1 \times D_2 \subset (S_1 \times D_2) \cup (D_2 \times S_1) = \partial(D_2 \times D_2) = \partial D_4 = S_3$, et la somme connexe de paires:

$$(2 T_3^P, T_3^P) \# (k \# (S_3, S_1 \times D_2)) = (p \# (S_1 \times S_2), [p \# (S_1 \times D_2)] \# \underbrace{(S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)}_{k \text{ fois}})$$

Par définition:

$$T_{p,k} = [p \# (S_1 \times D_2)] \# \underbrace{(S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2)}_{k \text{ fois}}$$

où la notation veut dire que les derniers k facteurs $(S_1 \times D_2)$ sont 2-à-2 disjoints dans $T_{p,k}$. On considère une famille de cercles différentiables deux-à-deux disjoints:

$$C^1 + C^2 + \dots + C^q \subset p \# (S_1 \times S_2),$$

qui coupent $\partial T_{p,k}$ transversalement, et tels qu'ils existent des anneaux singuliers plongés dans $p \# (S_1 \times S_2)$:

$$F_i : \underset{\rho_i}{(S_1 \times I)} \hookrightarrow p \# (S_1 \times S_2), \quad (i=1, \dots, q),$$

avec les propriétés suivantes:

a-1) $F_i(S_1 \times 0) = c^i$.

a-2) $F_i^{-1}(\partial T_{p,k}) = S_1 \times 1$ (donc $\rho_i \equiv 0 \pmod{2}$).

a-3) F_i est transversal à $\partial T_{p,k}$.

a-4) Les $F_i(S_1 \times 1)$ se coupent transversalement dans $\partial T_{p,k}$,

en particulier:

$$F_i(S_1 \times 1) \cap F_j(S_1 \times 1) \cap F_k(S_1 \times 1) = \emptyset \text{ , si } i \neq j \neq k \neq i \text{ .}$$

a-5) Si $i \neq j$:

$$(\text{Image } F_i) \cap (\text{Image } F_j) = F_i(S_1 \times 1) \cap F_j(S_1 \times 1) \text{ .}$$

On désigne maintenant par $S_1^j \times D_2^j$ le j -ième facteur $(S_1 \times D_2)$

parmi les derniers k facteurs de $T_{p,k}$, et par:

$$(S_3^j = S_1^j \times D_2^j \cup D_2^j \times S_1^j; S_1^j \times D_2^j) \text{ , la paire } (S_3, S_1 \times D_2) \text{ correspondante.}$$

On va supposer que S_3^j est collé à $[p \# (S_1 \times S_2)]$ par un 3-disque

$$\Delta_3 = \Delta_3^j \text{ , qui a en commun avec } S_1^j \times D_2^j \text{ exactement un 2-disque}$$

$$\Delta_2 = \partial \Delta_3 \cap \partial (S_1^j \times D_2^j) = \Delta_3 \cap (S_1^j \cap D_2^j) \text{ . Dans } S_3^j \text{ , à l'extérieur de } \Delta_3 \text{ ,}$$

on va considérer certains sous-ensembles, décrits ci-dessous: (voir la figure 3.23)

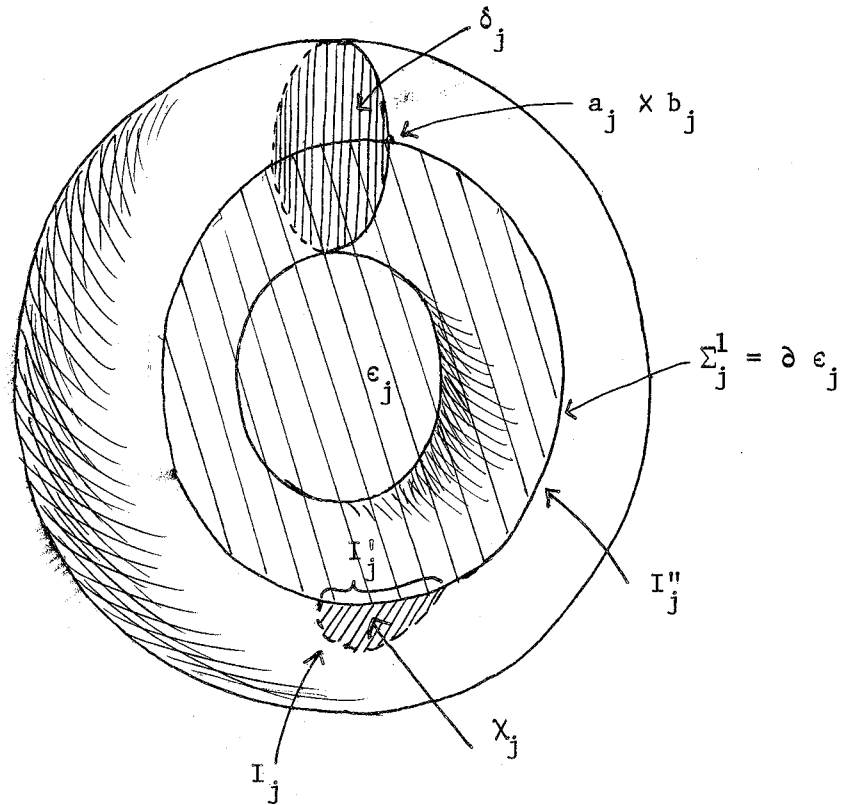


Figure 3.23 $(S_1^j \times D_2^j)$.

On prend des points:

$$a_j \in S_1^j \text{ et } b_j \in \partial D_2^j .$$

Par définition:

$$\Sigma_1^j = S_1^j \times b_j \subset \partial (S_1^j \times D_2^j) ,$$

$$\delta_j = a_j \times D_2^j \subset S_1^j \times D_2^j , \text{ et:}$$

$$\epsilon_j = D_2^j \times b_j \subset D_2^j \times S_1^j .$$

On va diviser Σ_1^j en deux arcs, d'extrémités communes:

$$\Sigma_1^j = I_j' + I_j'' , \text{ avec:}$$

$$I_j' \cap I_j'' = \partial I_j' = \partial I_j'' ,$$

tels que: $a_j \times b_j \in \text{int } I_j''$.

On se donne aussi un 2-disque:

$$\chi_j \subset S_1^j \times D_2^j ,$$

tel que:

$$\chi_j \cap \partial (S_1^j \times D_2^j) = \partial \chi_j \cap \partial (S_1^j \times D_2^j) = I_j^{\prime} ,$$

et que χ_j coupe $\partial (S_1^j \times D_2^j)$ transversalement.

Par définition: $I_j = \partial \chi_j - \text{int } I_j^{\prime}$.

Après toutes ces données de "caractère local" , on considère des disques de dimension 2 :

$$\eta_j \subset T_{p,k} , \quad (j = 1, \dots, k) ,$$

deux-à-deux disjoints, tels que:

b-1) $\eta_j \cap \partial T_{p,k} = \partial \eta_j$ et η_j coupe $\partial T_{p,k}$ transversalement.

b-2) $\eta_j \cap (\bigcup_i I_i + \bigcup_i \{a_i \times b_i\}) = \emptyset$.

b-3) $\eta_j \cap I_i'' = \emptyset$ si $j \neq i$ et $\eta_j \cap I_j''$ consiste exactement d'un seul point d'intersection transversale.

b-4) η_j coupe δ_i , χ_i transversalement, chaque composante connexe de l'intersection étant un intervalle fermé.

On va supposer aussi que:

c-1) η_j , δ_j , χ_j coupent $\text{Cl}((\text{Image } F_i) \cap (\text{int } T_{p,k}))$ transversalement, suivant des intervalles fermés du type $F_i(x \times I)$, avec $x \in S_i$, tels que la projection d'espace-quotient:

$$\pi_i : (S_1 \times I) \xrightarrow{\rho_i} (S_1 \times I)$$

opère trivialement (c'est-à-dire ne tue rien), sur $x \times I$. En dehors de cela $\eta_j \cap (\text{Image } F_i)$ (respectivement $\delta_j \cap (\text{Image } F_i)$), consiste d'un nombre fini de points d'intersection transversale avec $\text{Cl}((\text{Image } F_i) - T_{p,k})$.

$$c-2) \quad (\text{int } \epsilon_j) \cap (\text{Image } F_i) = \emptyset .$$

(Donc $\chi_j \cap (\text{C}\mathcal{L}((\text{Image } F_i) - T_{p,k})) = \emptyset$ et $\epsilon_j \cap (\text{Image } F_i) \subset \text{C}\mathcal{L}((\text{Image } F_i) \cap \overset{\circ}{T}_{p,k})$).

c-3) Si $i \neq k$:

$$\begin{aligned} & (\text{Image } F_i) \cap (\text{Image } F_k) \cap \eta_j = \\ & = (\text{Image } F_i) \cap (\text{Image } F_k) \cap \delta_j = \\ & = (\text{Image } F_i) \cap (\text{Image } F_k) \cap \chi_j = \\ & = (\text{Image } F_i) \cap (\text{Image } F_k) \cap \epsilon_j = \emptyset , \text{ et:} \\ & (\eta_i \cap \delta_k) \cap (\text{Image } F_j) = (\eta_i \cap \chi_k) \cap (\text{Image } F_j) = \\ & = (\eta_i \cap \epsilon_k) \cap (\text{Image } F_j) = \emptyset . \end{aligned}$$

Enfin, on se donne encore \bar{q} cercles différentiables 2-à-2 disjoints:

$$\bar{T}^1, \bar{T}^2, \dots, \bar{T}^{\bar{q}} \subset \overset{\circ}{T}_{p,k} , \text{ tels que:}$$

$$d-1) \quad \bar{T}^i \cap ((\text{Image } F_j) + (\delta_\ell + \epsilon_\ell + \chi_\ell + \eta_\ell)) = \emptyset .$$

d-2) On considère des anses d'indice 2 (plongées dans $2T_3^P$)

correspondant aux $\epsilon_i : \Phi_2(\epsilon_i)$. On remarque que

$(2T_3^P ; T_{p,k} + (\Phi_2(\epsilon_1)) + \dots + (\Phi_2(\epsilon_k)))$ est difféomorphe à la paire canonique $(2T_3^P, T_3^P)$, ce qui nous permet de définir l'involution canonique :

$$2(T_{p,k} + (\Phi_2(\epsilon_1)) + \dots) \xrightarrow[\approx]{J} 2T_3^P = 2(T_{p,k} + (\Phi_2(\epsilon_1)) + \dots)$$

dont l'ensemble des points fixes est: $\partial(T_{p,k} + (\Phi_2(\epsilon_1)) + \dots)$.

On va supposer que:

$$J \bar{T}^i \cap (\text{Image } F_j) = \emptyset .$$

(Comme conséquence directe de la définition, on a aussi: $J \bar{T}^i \cap \epsilon_j = \emptyset$).

Si toutes ces conditions sont satisfaites, ils existent des ensembles finis:

$$E_i \subset S_1 \quad (i = 1, \dots, q) , \text{ tels que:}$$

e-1) $\pi_i : S_1 \times I \xrightarrow{\rho_i} (S_1 \times I)$ opère trivialement sur $E_i \times I \subset S_1 \times I$.

(Ceci nous permet de considérer l'inclusion: $E_i \times I \subset (S_1 \times I)$.)

e-2) Il existe une décomposition:

$$E_i = E_i' + E_i'' , E_i' \cap E_i'' = \emptyset ,$$

telle que $F_i(E_i' \times I) \subset T_{p,k}$, $F_i(E_i'' \times I) \subset \mathcal{C}\mathcal{L}(2T_{3-p,k}^p)$.

e-3) $F_i(E_i \times I) \cap (\text{Image } F_j) = \emptyset$ si $i \neq j$.

e-4) On applique à $(p \# (S_1 \times S_2)) ; T_{p,k} ; \bigcup_i \text{Image } F_i$,

l'opération A_1 de support $\bigcup_i (E_i \times I)$ (définition 3.18.1). Ceci nous donnera des anneaux singuliers:

$$G_i : (S_1 \times I) \xleftarrow{\rho'_i} p \# (S_1 \times S_2)$$

($i = 1, \dots, q$; $\rho'_i = \rho_i + 2$ (le nombre des éléments de E_i)), tels que $G_i(S_1 \times I) = F_i(S_1 \times I)$, et pour lesquels toutes les propriétés ci-dessus restent valables, quand on remplace "F_i" par "G_i" , sauf bien entendu a-1). (Ceci est une condition imposée aux G_i). On pose:

$$\Gamma^i = G_i(S_1 \times 0) .$$

La condition e-4) est que:

$$\Gamma^i \cap \delta_j = \Gamma^i \cap \eta_j = \Gamma^i \cap \epsilon_j = \emptyset .$$

e-5) En considérant les δ_j (η_j) comme des anses négatives (d'indice 2), on a un difféomorphisme de triples, valable pour tout $q_1 \leq \bar{q}$:

$$\begin{aligned} & (p \# (S_1 \times S_2), T_{p,k}^{-(\delta_1)} - \dots - (\delta_k), \Gamma^1 + \dots + \Gamma^q + \\ & + \bar{\Gamma}^1 + \dots + \bar{\Gamma}^{q_1} + J \bar{\Gamma}^{q_1+1} + \dots + J \bar{\Gamma}^q) = \\ & (p \# (S_1 \times S_2), T_{p,k}^{-(\eta_1)} - \dots - (\eta_k), \Gamma^1 + \dots + \Gamma^q + \\ & + \bar{\Gamma}^1 + \dots + \bar{\Gamma}^{q_1} + J \bar{\Gamma}^{q_1+1} + \dots + J \bar{\Gamma}^q) , \end{aligned}$$

induisant l'identité sur

$$\bar{\Gamma}^1 + \dots + \bar{\Gamma}^1 + \dots + \sum \bar{\Gamma}^{q_i+1} .$$

e-6) Supposons que, en plus de toutes les choses qu'on s'est données, on ait:

$$e-6-1) \eta_j \cap \chi_i = \emptyset .$$

$$e-6-2) c^i \cap \eta_j = c^i \cap \delta_j = \emptyset .$$

Alors: $E_i = \emptyset$. " \square

Remarque: La supposition:

$$\sum \bar{\Gamma}^i \cap (\text{Image } F_j) = \emptyset$$

n'enlève rien à la généralité, puisque $(T_{p,k} + (\Phi_2(\epsilon_1)) + \dots) \cup (\cup_j \text{Image } F_j)$

collapse sur $T_{p,k} + (\Phi_2(\epsilon_1)) + \dots$. On l'énonce tout de même, pour la commodité de l'exposé.

La démonstration sera donnée au chapitre suivant.

Lemme 3.24: (Second lemme d'invariance par chirurgie): "On va considérer

un 2-polyèdre singulier: (K_2, f, P_3) , tel que $s(K_2) = \emptyset$, et que f soit

un plongement, et aussi, le 2-polyèdre singulier (K'_2, f', P_3) , obtenu comme

suit: On part de s exemplaires du modèle local $j(k_2) : \bar{k}_2 \rightarrow R_3$

(définition 3.6) et l'on fait la somme connexe:

$$\begin{aligned} & (K'_2 = K_2 \# \bar{k}_2^1 \# \bar{k}_2^2 \# \dots \# \bar{k}_2^s, f', P_3) = \\ & = (K_2, f, P_3) \# (\bar{k}_2^1, j(k_2^1), R_3 \subset S_3 = R_3 \cup (\infty)) \# \dots \end{aligned}$$

On considère aussi la séquence principale:

$$K'_2 = K'_2 / f' \xrightarrow{q(f')} K'_2 / \Psi(f') ,$$

qui consiste exactement de s projections du type $O(2)$ dégénérées (définition 3.16; ceci veut dire que chaque branche de $M^2(f') \subset K_2'$ est un intervalle fermé, ayant une extrémité dans $s(K_2')$, l'autre dans $\partial K_2'$).

On se donne une résolution des singularités: $\pi : V_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2')$.

On va étendre (un peu) K_2' en considérant:

$$K_2'' = K_2' \cup (\partial K_2' \times [0, 1)) \quad \text{où} \quad \partial K_2' \times 0 \equiv \partial K_2'.$$

Dans K_2'' on considère \bar{m} anneaux singuliers plongés:

$${}_{2k_i}(S_1 \times I) \hookrightarrow (K_2'')_2 \subset K_2'',$$

où: $i = 1, \dots, \bar{m}$, $k_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

On va supposer que: ${}_{2k_i}(S_1 \times I) \cap \partial K_2' = S_1 \times 0$ (qu'on va désigner par γ_i).

De même, on va désigner $(S_1 \times 1)$ par Γ_i .

On va supposer aussi, que, pour un certain $m \geq \bar{m}$, ils existent encore $m - \bar{m}$ "cercles différentiables" $\Gamma_i \hookrightarrow K_2' - s(K_2')$

($i = \bar{m} + 1, \dots, m$), disjoints les uns des autres, et disjoints des autres Γ_i ($i = 1, \dots, \bar{m}$).

On va supposer que les γ_i se coupent transversalement dans $\partial K_2'$ (en particulier que $\gamma_i \cap \gamma_j \cap \gamma_k = \emptyset$) et que:

$${}_{2k_i}(S_1 \times I) \cap {}_{2k_j}(S_1 \times I) = \gamma_i \cap \gamma_j \quad (\text{si } i \neq j).$$

Les points de $\gamma_i \cap \gamma_j$ ($i \neq j$) seront supposés disjoints des sous-ensembles de K_2' considérés plus loin, et désignés par:

$$M^2(f'), M^2(\varphi), \psi_i(x) (I).$$

On va supposer que:

$$\gamma_i \subset \partial \mathbb{O}_3(K_2') \quad \text{et que} \quad \gamma_i \subset \partial V_3.$$

Ceci nous permet de définir canoniquement le triple:

$$(\Theta_4 (\Theta_3 (K_2^i)); V_3, \sum_{i=1}^m \Gamma_i),$$

où il est entendu que $\partial \Theta_4 (\Theta_3 (K_2^i)) = 2 \Theta_3 (K_2)$ et que Γ_i coupe ∂V_3 transversalement de "la même manière" qu'il coupe ∂K_2^i

On va supposer que:

$$O^0-1) \Gamma_i \cap M_+^2 (f^i) = \emptyset .$$

$$O^0-2) \mathcal{C}L_{2k_i} (S_1 \times I) - K_2^i \cap M_-^2 (f^i) = \emptyset .$$

A cause de $O^0-1)$, $O^0-2)$ on peut définir canoniquement le triple:

$$(2 \Theta_3 (K_2); \Theta_3 (K_2), \sum_{i=1}^m \Gamma_i),$$

où il est entendu que Γ_i coupe $\partial \Theta_3 (K_3)$ de la même manière qu'il coupe $\partial \Theta_3 (K_2^i)$.

On va considérer, enfin, un 2-polyèdre singulier (K_2^i, φ, P_3^i) difféomorphe à K_2^i , ayant les propriétés suivantes:

1°) $\Psi(\varphi)$ est acyclique.

2°) $M^3(\varphi) = \emptyset$.

3°) Considérons les branches $M_{\pm}^2(f^i)$, $M_{\pm}^2(\varphi)$ définies par la résolution des singularités $V_3 \xrightarrow{\pi} \Theta_3 (K_2^i)$. On va supposer que:

$$\boxed{M_-^2(\varphi) \cap M_+^2(f^i) = \emptyset} .$$

4°) $M_+^2(\varphi) \cap (\sum_i \Gamma_i) = \emptyset$.

5°) La relation d'équivalence $\Psi(\varphi)$ opère trivialement

(c'est-à-dire ne tue rien) sur chaque: $2k_i (S_1 \times I) \cap K_2^i$. Plus explicitement,

on va supposer que:

$${}_{2k_i}(S_1 \times I) \cap M_+^2(\varphi) = \emptyset ,$$

et que ${}_{2k_i}(S_1 \times I) \cap M_-^2(\varphi) \subset K_2^i$, consiste d'un nombre fini d'intervalles fermés, ayant une extrémité sur $\gamma_i - \Gamma_i$, l'autre sur $\Gamma_i - \partial K_2^i$.

Cette dernière condition, implique, en particulier, que:

$$M_-^2(\varphi) \cap \text{cl}({}_{2k_i}(S_1 \times I) - K_2^i) = \emptyset .$$

6°) On commence par remarquer que les conditions 1°, 2° (ci-dessus), impliquent que les applications:

$\varphi|_{\hat{M}^2(\varphi)} : \hat{M}^2(\varphi) \longrightarrow \varphi(\hat{M}^2(\varphi)) \subset K_2^i/\Psi(\varphi)$, et $s(K_2^i) \subset \hat{M}^2(\varphi)$, deviennent des bijections, quand on leur applique le foncteur $\pi_0 =$ composantes connexes.

En plus, si $x \in s(K_2^i)$ et $\mathcal{L}(x) \subset \hat{M}^2(\varphi)$ est la composante connexe qui lui correspond, on peut décrire $\Psi(\varphi)|_{\mathcal{L}(x)}$ de la manière suivante: il existe un

graphe

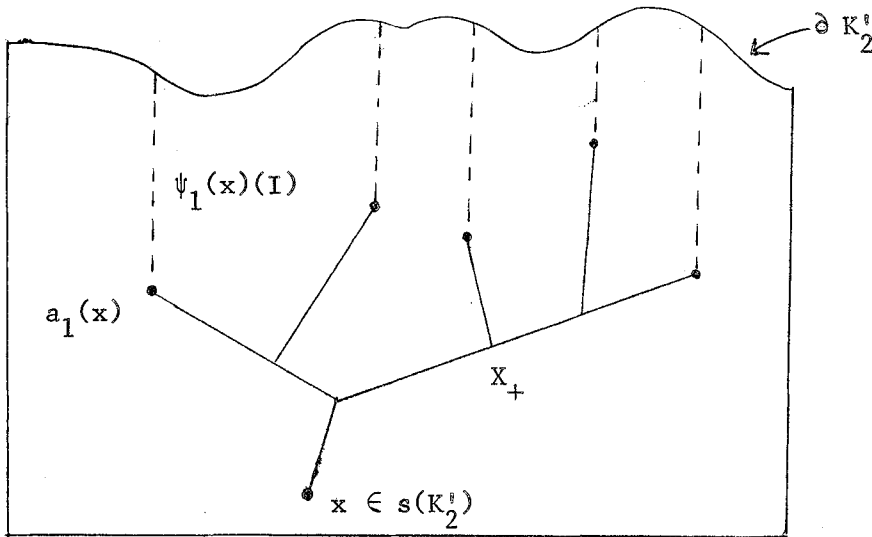


Fig. 3.24
 $X_+ \subset M_+^2(\varphi)$

fini connexe et acyclique $X = X(x) \ni x$, tel que x soit un bout de X , (par définition un point $p \in T$, où T est un graphe, est un bout si $H_1(T \text{ mod } (T - p)) = 0$). On a aussi:

i) $(X, x) \vee (X, x) = (\mathcal{L}(x), x)$ où \vee désigne le "wedge" des espaces avec point base (X, x) et (X, x) .

ii) $\varphi|_{\mathcal{L}(x)} : \mathcal{L}(x) \longrightarrow \varphi(\mathcal{L}(x))$ est isomorphe au "folding map" :

$$(X, x) \vee (X, x) \longrightarrow (X, x) .$$

Dans cette description l'un des deux facteurs (X, x) appartient à la branche spécifiée de $M^2(\varphi)$, l'autre à la branche non spécifiée. On va les désigner, respectivement, par: $X_+ = X_+(x)$ et $X_- = X_-(x)$. Enfin, on va considérer les bouts de $\varphi(\mathcal{L}(x)) \subset K'_2/\Psi(\varphi) : \varphi(x), p_1(x), \dots, p_k(x)$.

La condition 6°) sera la suivante:

Pour chaque bout $p_i(x)$ on considère les deux points de $\varphi^{-1}(p_i(x))$:

$a_i(x) \in M^2_+(\varphi)$ et $b_i(x) \in M^2_-(\varphi)$. On va demander que $a_i(x) \in (K'_2)_2$ et $b_i(x) \in \partial K'_2$.

7°) En plus, on va supposer qu'ils existent des arcs différentiables

$\psi_i(x) : I \longrightarrow K'_2$ $i = 1, \dots, k$, deux-à-deux disjoints (et disjoints pour les différents $x \in s(K'_2)$), tels que: $\psi_i(x)^{-1}(\partial K'_2) = 1$,

$\psi_i(x) [0, 1) \subset (K'_2)_2$, $\psi_i(x)(0) = a_i(x)$, $\psi_i(x)$ coupe $\partial K'_2$ transversalement, $\psi_i(x)(1) \cap M^2(\varphi) = a_i(x)$ et:

$$\boxed{\psi_i(x)(1) \cap \left(\sum_j \Gamma_j \right) = \emptyset .}$$

(voir la figure 3.24, ci-dessus).

Les conditions 4°, 5°, 6°, ci-dessus, font que les Γ_j sont définis d'une manière canonique dans $2 \mathbb{O}_3(K_2'/\Psi(\varphi))$. On supposera (ce qu'on peut faire sans perte de généralité) que Γ_j coupe $\partial \mathbb{O}_3(K_2'/\Psi(\varphi))$ transversalement, de la même manière que Γ_j coupe $\partial K_2'$. Sous ces conditions, le lemme nous dit que:

Il existe un difféomorphisme:

$$\begin{aligned} & (2 \mathbb{O}_3(K_2) ; \mathbb{O}_3(K_2), \sum_i \Gamma_i) = \\ & = (2 \mathbb{O}_3(K_2'/\Psi(\varphi)) ; \mathbb{O}_3(K_2'/\Psi(\varphi)), \sum_i \Gamma_i) .'' \quad \square \end{aligned}$$

La démonstration sera donnée au chapitre suivant. Cette démonstration va utiliser, entre autres, plusieurs définitions élémentaires, qu'on donne, pour la commodité de l'exposé, ici:

Définition 3.32:

Soit Γ un arbre c'est-à-dire un complexe simplicial de dimension 1, connexe, simplement connexe (= contractible) et compact.

Pour tout "point base" $x \in \Gamma$ il existe une relation d'ordre canonique $\omega(\Gamma, x)$, définie sur Γ comme suit: sur chaque intervalle fermé plongé $i : [0, 1] \hookrightarrow \Gamma$, tel que $i(0) = x$, $\omega(\Gamma, x) | i [0, 1]$ est l'ordre linéaire naturel. \square

On remarque facilement la chose suivante: si $g : P_2 \longrightarrow M_3$ est un 2-polyèdre singulier, tel que $\Psi(g)$ soit acyclique, $x \in s(P_2)$ et $\mathcal{L}(x) \subset \hat{M}^2(g)$ est défini comme dans le lemme ci-dessus, alors l'ordre $\omega(\mathcal{L}(x), x)$ peut être caractérisé comme suit: On considère une séquence principale:

$$P_2 \xrightarrow[g_0]{} P_2^1 \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow[g_{n-1}]{} P_2^n = P_2/\Psi(g) \subset M_3 .$$

Alors, si $a, b \in \mathcal{L}(x)$ on a :

$$a < b \quad (\text{par rapport à } \omega(\mathcal{L}(x), x))$$

si et seulement si a et b sont tous les deux dans $M_{\pm}^2(g)$, et l'une des deux choses suivantes arrive :

A) ou bien ils existent des indices $i < j$ tels que $a \in M^2(g_i)$, $b \in M^2(g_j)$.

B) ou bien il existe un k tel que : $a, b \in M^2(k)$ et a sépare b de $\sigma(p_k)$ sur $M^2(p_k)$.

La démonstration du lemme 3.24 et l'exposé qui suit, dans ce chapitre, vont utiliser, entre autres, la définition suivante :

Définition 3.33 : Soit Γ un complexe simplicial fini, de dimension 1.

Un fibré singulier de base Γ , est un complexe simplicial de dimension deux, E , muni de deux applications :

$$\Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma$$

telles que : $p \circ i = \text{identité (sur } \Gamma)$. En plus, les conditions suivantes sont imposées :

a) Si $U \subset \Gamma$ est un ouvert (de Γ) homéomorphe à $(0, 1)$ alors :

$$U \xrightarrow{i|_U} p^{-1}U \xrightarrow{p|_{p^{-1}U}} U$$

est isomorphe à :

$$(0, 1) \xrightarrow{\dots \times 0} (0, 1) \times [-1, +1] \xrightarrow{\quad} (0, 1)$$

(où la seconde flèche est la projection canonique sur le premier facteur et

le première est l'application $(0, 1) \ni t \longrightarrow t \times 0$).

La même chose est supposée vraie pour des ouverts isomorphes à $(0, 1]$ ou à $[0, 1]$.

b) Si $x \in \Gamma$ est tel qu'on ait l'inégalité:

$$\# \mathcal{L}_k(x, \Gamma) = \left[\dim_Z H_1(\Gamma \text{ mod } (\Gamma - x); Z) + 1 \right] > 2,$$

alors:

$$\text{star}(x, \Gamma) \xrightarrow{i} p^{-1}(\text{star}(x, \Gamma)) \xrightarrow{p} \text{star}(x, \Gamma)$$

est isomorphe à l'un des deux modèles suivants:

Le modèle A :

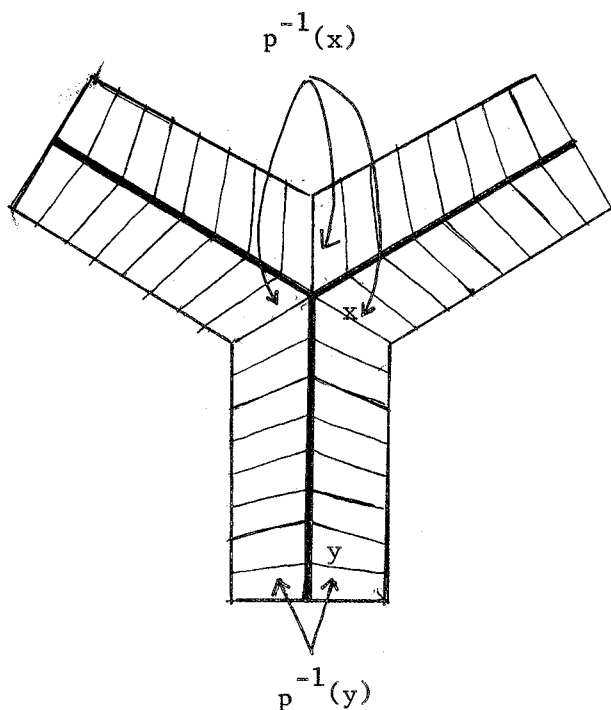
$$\text{star}(x, \Gamma) \xrightarrow{x \times 0} \text{star}(x, \Gamma) \times [-1, x 1] \longrightarrow \text{star}(x, \Gamma),$$

et, dans ce cas, on dira que x est du type A.

Le modèle A* :

$p^{-1}(\text{star}(x, \Gamma))$ est un "voisinage régulier" $N = N(\text{star}(x, \Gamma), R_2)$, tel que $\text{star}(x, \Gamma) \cap \partial N = \mathcal{L}_k(x, \Gamma)$, correspondant à un plongement linéaire $\text{star}(x, \Gamma) \subset R_2$; (i est l'inclusion canonique, p la retraction "canonique") (voir figure 3.33)

Figure 3.33
Le modèle A^* .



Dans ce cas on dira que x est du type A^* . Il n'y a donc qu'un nombre fini de fibres exceptionnelles ($\neq [-1, +1]$), juste au-dessus des sommets de Γ , au voisinage desquels Γ n'est pas une variété.

Si $x \in \Gamma$ et $p^{-1}(x) \subset E$ est la fibres au-dessus de x , le bord $\partial p^{-1}(x) \subset p^{-1}(x)$ est l'ensemble des bouts du graphe $p^{-1}(x)$.

Le bord ∂E de E , est, par définition:

$$\partial E = p^{-1}(\partial \Gamma) + \bigcup_{x \in \Gamma} \partial p^{-1}(x) \quad . \quad \square$$

On va considérer des voisinages réguliers orientables, de dimension 3, de $E : N$, tels que $E \cap \partial N = \partial E$ et que E rencontre ∂N transversalement. Avec ces conditions, la paire (N, E) est déterminée, à isomorphisme près.

Définition 3.34: Soit ξ un fibré singulier de base Γ :

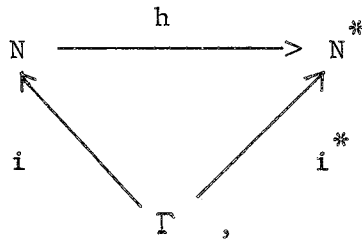
$$\xi : \Gamma \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \Gamma .$$

Le dual de ξ est le fibré singulier de base Γ :

$$\xi^* : \Gamma \xrightarrow{i^*} E^* \xrightarrow{p^*} \Gamma ,$$

défini univoquement par la condition suivante:

Soient N, N^* les voisinages réguliers orientables de E, E^* . Il existe un isomorphisme $h : N \xrightarrow{\approx} N^*$ qui rend commutatif le diagramme suivant:



et tel que:

- a) $h(E) \cap E^* = h(i(\Gamma)) = i^*(\Gamma)$.
- b) $h(E)$ et E^* se coupent transversalement.

Si $p^{-1}(x)$ est du type $A(A^*)$, $(p^*)^{-1}(x)$ est du type $A^*(A)$. On a aussi $\xi^{**} = \xi$. (Par définition, dorénavant: $A^{**} = A$) . \square

Exemple: Soit (K_2, f, M_3) un 2-polyèdre singulier, tel que $M^3(f) = \emptyset$ et que $\Psi(f)$ soit acyclique. Soit Γ la fermeture d'une composante connexe de $M^2(f)$. $f^{-1}(f \Gamma)$ consiste de deux exemplaires de Γ , "disjoints" , dans K_2 . Les "voisinages réguliers" de ces deux exemplaires, dans K_2 , sont des fibrés singuliers duaux.

(On laisse au lecteur le soin de faire l'assertion la plus général possible, dans ce contexte, quand $M^3(f) \neq \emptyset$ et $\Psi(f)$ n'est pas acyclique, mais M_3

est orientable; on n'en aura pas besoin d'ailleurs).

Lemme 3.25: Soit Γ un arbre, et $\rho(\Gamma) \subset \Gamma$ l'ensemble des points de ramification de Γ (c'est-à-dire des points $z \in \Gamma$ tels que $\dim_{\mathbb{Z}} H_1(\Gamma \text{ mod } (\Gamma - z), \mathbb{Z}) \geq 2$).

Soit $x \in \partial \Gamma$ un bout de Γ et $\omega(\Gamma, x)$ la relation d'ordre sur Γ , de la définition 3.32.

Il existe une filtration de Γ :

$$x \in \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_r = \Gamma,$$

où $r = \# \rho(\Gamma)$ ayant les propriétés suivantes:

0°. Γ_0 est un intervalle fermé ayant x comme l'une de ses extrémités.

1°. Si $x' \in \Gamma_i$ et $x'' \in \Gamma$ est tel que: $x'' < x'(\omega(\Gamma, x))$ alors $x'' \in \Gamma_i$.

2°. Chaque Γ_i est un arbre et

$$\text{cl}(\Gamma_{i+1} - \Gamma_i) = \gamma_{i+1}$$

est un arbre tel que $\# \rho(\gamma_{i+1}) = 1$.

$(\gamma_{i+1} \cap \Gamma_i = \partial \gamma_{i+1} \cap \partial \Gamma_i = \text{un point unique qu'on va désigner par } \epsilon_i)$. \square

La démonstration est triviale (et la filtration n'est pas unique).

Il suffit de considérer la restriction de l'ordre partiel $\omega(\Gamma, x)$ à l'ensemble fini $\rho(\Gamma)$ et d'éliminer successivement des éléments maximaux, e.a.d.s. \square

Une fois qu'on a compris la démonstration du second lemme d'invariance par chirurgie, on peut passer à la généralisation suivante: (qui est essentielle

pour la suite):

Lemme 3.26: (Troisième lemme d'invariance par chirurgie): "On va se placer dans les mêmes conditions qu'au début du lemme 3.24, en considérant:

$(K_2^i = K_2 \# \bar{k}_2^1 \# \dots \# \bar{k}_2^s, f^i, P_3)$, $\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2^i)$, les $(S_1 \times I)$, γ_i, Γ_j , (K_2^i, φ, P_3) , avec les conditions $0^\circ-1)$, $0^\circ-2)$, $2k_i$

$1^\circ)$, $2^\circ)$, $3^\circ)$, $4^\circ)$ (du lemme 3.24). (Donc, en particulier:

$$(\partial \Theta_4 (\Theta_3 (K_2^i))) = 2 \Theta_3 (K_2) ; V_3 , \sum_{i=1}^m \Gamma_i) \text{ et}$$

$$(\partial \Theta_4 (\Theta_3 (K_2))) = 2 \Theta_3 (K_2) ; \Theta_3 (K_2) , \sum_{i=1}^m \Gamma_i)$$

sont définis d'une manière naturelle.)

Pour chaque $x_i \in s(K_2^i)$ on considère $\mathcal{L}(x_i) = X(x_i) \vee X(x_i)$, comme au point 6° du lemme 3.24. On va désigner $X(x_i)$ par Γ^i (ne pas confondre avec $\Gamma_i \subset \partial (S_1 \times I)$!), la branche spécifiée par Γ_+^i , la branche non-spécifiée par Γ_-^i . Les voisinages "réguliers" de Γ_+^i , Γ_-^i dans K_2^i , sont les espaces totaux de deux fibrés singuliers duaux:

$$\xi_i : \Gamma^i = \Gamma_+^i \longrightarrow E^i \longrightarrow \Gamma_+^i ,$$

$$\xi_i^* : \Gamma^i = \Gamma_-^i \longrightarrow (E^i)^* \longrightarrow \Gamma_-^i .$$

On va considérer une certaine décomposition:

$$s(K_2^i) = S_1 \cup S_2 , S_1 \cap S_2 = \emptyset ,$$

telle que: pour les $x_i \in S_1$ les conditions 5° , 6° , 7° du lemme 3.24 soient satisfaites.

Pour les $x_i \in S_2$ on va remplacer 5° , 6° , 7° , par 8° , 9° , 10° , ci-dessous:

8°) (qui contient une partie de 5°): La relation d'équivalence $\Psi(\varphi)$ opère trivialement sur chaque $(S_1 \times I)_{2k_j} \cap \Gamma_{2k_j}^i$ consiste d'un nombre fini d'intervalles fermés, disjoints, qui sont, ou bien comme au point 5°, du lemme 3.24, ou bien, avec une extrémité sur Γ_j , l'autre dans $\text{int}_{2k_j}(S_1 \times I)$.

On a donc, de toute façon, comme au point 5°:

$$M_{2k_j}^2(\varphi) \cap \text{cl}_{2k_j}((S_1 \times I) - K_2^i) = \emptyset .$$

9°) Si $x_i \in S_2$, on va supposer que E^i possède toujours des fibres du type A. On va désigner par $\rho_A(\Gamma^i)$ (respectivement par $\rho_{A^*}(\Gamma^i)$) les points de $\rho(\Gamma^i)$ qui sont du type $A(A^*)$ pour le fibré $\xi_i(\xi_i^*)$.

Pour chaque Γ_+^i , on va construire (d'une manière non-univoque) un ensemble non-vide $Y_i \subset \partial \Gamma_+^i - x_i$, de la manière suivante: On part d'une filtration:

$$x_i \in (\Gamma^i)_0 \subset (\Gamma^i)_1 \subset \dots \subset (\Gamma^i)_{r_i} = \Gamma_+^i ,$$

comme dans le lemme 3.25. On considère, aussi, (voir toujours le lemme 3.25):

$$Y_{j+1}^i = \text{cl}((\Gamma^i)_{j+1} - (\Gamma^i)_j) , \quad \epsilon_j^i = Y_{j+1}^i \cap (\Gamma^i)_j$$

On va désigner par ρ_j^i , l'unique point de $\rho(Y_j^i)$. Pour chaque Y_j^i , on va choisir un bout $\alpha_j^i \in \partial Y_j^i - \epsilon_{j-1}^i$. Dans Γ^i , soient $\rho_j^i(1,1), \rho_j^i(1,2), \dots$ les points de $\rho_A(\Gamma^i)$ qui sont minimaux (dans $\rho_A(\Gamma^i)$ par rapport à la relation d'ordre $\omega(\Gamma^i, x_i)$, de la définition 3.32). Pour chaque:

$$\beta \in \partial \gamma_j^i - \epsilon_{j-1}^i - \alpha_j^i, \quad (j = j(1, 1), j(1, 2), \dots)$$

on définit l'arbre: $\Gamma(\beta) \subseteq \Gamma^i$, par:

$$z \in \Gamma(\beta) \Leftrightarrow z \geq \beta \quad (\text{par rapport à } \omega(\Gamma^i, x_i)).$$

Dans $\partial \Gamma(\beta) - \beta = \partial \Gamma(\beta) \cap \partial \Gamma^i$ on définit un ensemble $E(\beta)$, comme suit:

On commence par considérer les γ_j^i qui sont dans $\Gamma(\beta)$:

$$\gamma_{j_1}^i, \dots, \gamma_{j_p}^i \quad (j_1 < j_2 < \dots < j_p).$$

Dans $\bigcup_k \partial \gamma_{j_k}^i$ on définit un ensemble $\bar{E}(\beta)$ comme suit:

a) $\beta \in \bar{E}(\beta)$

b) Si $(\bigcup_{k \leq K} \partial \gamma_{j_k}^i) \cap \bar{E}(\beta)$ est déjà défini, et $\rho_{j_{K+1}}^i$ est du type A,

on a:

$$\partial \rho_{j_{K+1}}^i \subset \bar{E}(\beta) \quad \text{si} \quad \epsilon_{j_{K+1}-1}^i \in \bar{E}(\beta), \quad \text{et:}$$

$$\partial \rho_{j_{K+1}}^i \cap \bar{E}(\beta) = (\partial \rho_{j_{K+1}}^i - \epsilon_{j_{K+1}-1}^i - \alpha_{j_{K+1}}^i) \quad \text{si}$$

$$\epsilon_{j_{K+1}-1}^i \notin \bar{E}(\beta).$$

c) Si $\rho_{j_{K+1}}^i$ est du type A*, on a (d'une manière analogue au

point b) ci-dessus):

$$\partial \rho_{j_{K+1}}^i \cap \bar{E}(\beta) = \emptyset \quad \text{si} \quad \epsilon_{j_{K+1}-1}^i \notin \bar{E}(\beta), \quad \text{et:}$$

$$\partial \rho_{j_{K+1}}^i \cap \bar{E}(\beta) = \{\alpha_{j_{K+1}}^i, \epsilon_{j_{K+1}-1}^i\} \quad \text{si} \quad \epsilon_{j_{K+1}-1}^i \in \bar{E}(\beta).$$

Par définition:

$$E(\beta) = \bar{E}(\beta) \cap (\partial \Gamma(\beta) - \beta).$$

Ensuite, on considère $\Gamma^i - \bigcup_{\beta} (\Gamma(\beta) - \beta)$ où β parcourt l'ensemble:

$$\underbrace{\bigcup \partial \gamma_j^i - \epsilon_{j-1}^i - \alpha_j^i}_{S_2 \ni x_i ; j \in \{j(1,1), j(1,2), \dots\}}$$

et on désigne par: $\rho_{j(2,1)}^i, \rho_{j(2,2)}^i, \dots$ les points de $\rho_A(\Gamma^i - \bigcup_{\beta} (\Gamma(\beta) - \beta))$ qui sont minimaux, par rapport à $\omega(\Gamma^i, x_i)$. Pour chaque $\gamma_j^i \subset \Gamma^i - \bigcup_{\beta} (\Gamma(\beta) - \beta)$,

on considère tous les:

$$\beta' \in \partial \gamma_j^i - \epsilon_{j-1}^i - \alpha_j^i, \quad (j = j(2,1), j(2,2), \dots)$$

et l'on définit $\Gamma(\beta')$, $E(\beta') \subset \partial \Gamma(\beta') - \beta'$, tout-à-fait comme ci-dessus.

On continue, ensuite, avec

$$\Gamma^i - \bigcup_{\beta} (\Gamma(\beta) - \beta) - \bigcup_{\beta'} (\Gamma(\beta') - \beta')$$

e.a.d.s.

On va considérer l'ensemble:

$${}_i \mathcal{E} = E(\beta) \cup E(\beta') \cup E(\beta'') \cup \dots \subset \partial \Gamma^i - x_i$$

Il est entendu que ${}_i \mathcal{E}$ dépend du choix des α_j^i . Un ensemble $Y_i \subset \partial \Gamma^i - x_i$, pour lequel il existe un ${}_i \mathcal{E}$, tel que $Y_i \subset {}_i \mathcal{E}$, sera appelé "bon".

On va considérer donc, pour chaque i , tel que $x_i \in S_2$, un sous-ensemble bon : $Y_i \subset \partial \Gamma_+^i - x_i$, $Y_i \neq \emptyset$, et la condition 9°) qu'on peut, enfin, énoncer, est que:

$$\partial \Gamma_+^i \cap \partial K_2^i = Y_i$$

$$\partial \Gamma_+^i - Y_i - x_i \subset (K_2^i)_2$$

Ceci implique, que pour $\partial \Gamma^i$ on a la situation duale: les bouts qui correspondent à Y_i sont dans $(K_2^i)_2$ et les autres (moins x_i) dans ∂K_2^i .

10°) Pour chaque $x \in \bigcup [(\partial \Gamma_+^i - x_i) - Y_i]$ ($x_i \in S_2$), il existe un arc $\psi(x) : I \longrightarrow K_2^i$ comme au point 7°) du lemme 3.24, c'est-à-dire: les $\psi(x)(I)$ sont disjoints, ne touchent pas à $s(K_2^i)$, $\psi(x)(0) = x$,

$(\psi(x)(I) - \psi(x)(O)) \cap M^2(\varphi) = \emptyset$, $\psi(x)^{-1}(\partial K_2^i) = 1$, $\psi(x)[0, 1) \subset (K_2^i)_2$, et:

$$\psi(x)(I) \cap \Gamma_j = \emptyset .$$

On va supposer que les différents arcs $\psi(x_i)(I) (x_i \in S_1 \text{ ou } S_2)$ sont 2-à-2 disjoints.

Avant de donner la conclusion du lemme (qui sera, en fait, la même que celle du lemme 3.24), on commence par remarquer qu'il y a un sens naturel dans lequel le triple:

$$(2 \Theta_3(K_2^i/\Psi(\varphi)) ; \Theta_3(K_2^i/\Psi(\varphi)) , \Sigma_i \Gamma_i)$$

est défini. (Ceci n'est pas du tout évident, a priori, parce qu'on n'exclut pas des points:

$$M_+^2(\varphi) \cap (Cl_{2k_i}((S_1 \times I) - K_2^i)) \subset \cup Y_j .$$

Si de tels points n'existent pas il n'y a aucun problème.)

On commence par considérer: $\bar{K}_2^i = K_2^i \cup (\cup_i (S_1 \times I)) \supset \Sigma_i \Gamma_i$. φ s'étend

tout de suite à une projection d'espace quotient:

$$\bar{K}_2^i \xrightarrow{\bar{\varphi}} (K_2^i / \Psi(\varphi)) \cup (\cup_i (S_1 \times I)) = \bar{\bar{K}}_2^i ,$$

où: $\Psi(\bar{\varphi}) = \Psi(\varphi)$ (la même relation d'équivalence.) Ceci est un passage du 2-polyèdre singulier \bar{K}_2^i , au 2-polyèdre singulier $\bar{\bar{K}}_2^i$, (qui, contrairement à $K_2^i/\Psi(\varphi)$, n'est plus plongeable dans une variété de dimension 3), par un nombre fini de projections d'espace-quotient du type 0(1), 0(2) , tout-à-fait comme dans le lemme 3.9. (Il n'y a pas des projections du type 0(0) parce qu'on n'a pas de points triples; d'autre part, les Γ_i sont dans la même situation que les Σ^i du lemme 3.9.) La résolution des singularités:

$\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2')$, induit une résolution des singularités:

$$\bar{\pi} : W_3 \longrightarrow \Theta_3(\bar{K}_2' = \bar{K}_2' / \Psi(\bar{\varphi})) ,$$

où toutes les branches provenant des $(S_1 \times I)_{2k_i}$ sont spécifiées.

On a un plongement naturel:

$$\Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) \subset W_3 ,$$

et un difféomorphisme:

$$\partial \Theta_4(\Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi))) \approx \partial \Theta_4(\Theta_3(\bar{K}_2' / \Psi(\bar{\varphi}))) ,$$

(fourni par le lemme d'invariance 3.6, et provenant, en fait d'un difféomorphisme:

$$\Theta_4(\Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi))) \approx \Theta_4(\Theta_3(\bar{K}_2' / \Psi(\bar{\varphi}))) .$$

En plus, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) \subset W_3 & \xleftarrow{\theta(\bar{\pi})} & \partial \Theta_4(\Theta_3(\bar{K}_2' / \Psi(\bar{\varphi}))) \\ \downarrow \text{identité} & & \updownarrow \approx \\ \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) \subset 2 \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) = \partial \Theta_4(\Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi))) & & \end{array}$$

(voir la définition du foncteur θ : lemme 3.5).

En utilisant ces différents difféomorphismes et plongements, on peut définir, sans ambiguïté:

$$\begin{aligned} & (2 \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) ; \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)), \Sigma_i \Gamma_i) = \\ & = (\partial \Theta_4(\Theta_3(\bar{K}_2' / \Psi(\bar{\varphi}))) ; \theta(\bar{\pi}) \Theta_3(K_2' / \Psi(\varphi)) , \bar{\varphi} \Sigma_i \Gamma_i) . \end{aligned}$$

La conclusion du lemme est qu'il y a un difféomorphisme (induisant l'identité sur $\Sigma_i \Gamma_i$):

$$\begin{aligned} & (2 \ @_3(K_2) ; \ @_3(K_2) , \ \sum_i \ \Gamma_i) = \\ & = (2 \ @_3(K'_2/\Psi(\varphi)) ; \ @_3(K'_2/\Psi(\varphi)) , \ \sum_i \ \Gamma_i) \ .'' \ \square \end{aligned}$$

La démonstration sera donnée au chapitre suivant. Cette démonstration implique, aussi, le: Complément au lemme 3.26: "Pour chaque i , considérons un ensemble

$$B_i \subset_{2k_i} (S_1 \times I) \cap \ @_3(K'_2) \ ,$$

qui est ouvert et fermé (dans $(S_1 \times I) \cap \ @_3(K'_2)$) et tel que

$$B_i \cap M^2(\varphi) = B_i \cap M^2(f') = \emptyset \ .$$

Alors, le difféomorphisme de la fin du lemme 3.26, s'étend à un difféomorphisme:

$$\begin{aligned} & (2 \ @_3(K_2) , \ @_3(K_2) , \ \sum_i (\Gamma_i \cup B_i)) = \\ & = (2 \ @_3(K'_2/\Psi(\varphi)) , \ @_3(K'_2/\Psi(\varphi)) , \ \sum_i (\Gamma_i \cup B_i)) \ .'' \ \square \end{aligned}$$

Remarques: 1) Si $S_2 = \emptyset$ le lemme 3.26 devient la même chose que le second lemme d'invariance par chirurgie.

2) La manière dont $(2 \ @_3(K'_2/\Psi(\varphi)) ; \ @_3(K'_2/\Psi(\varphi)) , \ \sum_i \ \Gamma_i)$ a été défini, donne lieu à un procédé très général, qu'on va expliciter maintenant.

Soit (P_2, g, N_3) un 2-polyèdre singulier et $\pi : V_3 \longrightarrow \ @_3(P_2)$ une résolution des singularités. On va désigner par $\psi(P_2) \subset P_2$ l'ensemble des points qui ont des voisinages difféomorphes à $((x=0) \cap (z \leq 0)) \cup (y=0) \subset \mathbb{R}_3$.

On définit :

$$\hat{\partial} P_2 = \partial P_2 \cup \psi(P_2) \ ,$$

et l'on considère un élargissement:

$$P_2^i = P_2 \cup (\hat{\partial} P_2 \times [0, 1)) \text{ où il est entendu que } \hat{\partial} P_2 \equiv \hat{\partial} P_2 \times 0 .$$

On considère q anneaux singuliers, 2-à-2 disjoints, plongés:

$$\underset{2k_i}{(S_1 \times I)} \xrightarrow{F_i} P_2^i - s(P_2^i), \quad (i = 1, \dots, q) ,$$

et satisfaisant aux conditions suivantes:

$$a) \quad F_i(\underset{2k_i}{(S_1 \times I)}) \cap \hat{\partial} P_2 = F_i(S_1 \times 0) .$$

$$b) \quad \psi(P_2) \cap F_i(S_1 \times 1) = \emptyset .$$

$$\text{On considère: } \Gamma_i = F_i(S_1 \times 1) \text{ et } P_2^i \supset \bar{P}_2^i = P_2 \cup \left(\bigcup_i \text{Image } F_i \right) \supset \bigcup_i \Gamma_i .$$

$$\text{On remarque que } s(\bar{P}_2^i) = s(P_2) + (\psi(P_2) \cap \text{Cl} \left(\bigcup_i \text{Image } F_i - P_2 \right)) .$$

$$\text{On va considérer une résolution des singularités } \bar{\pi} : W_3 \rightarrow \Theta_3(\bar{P}_2^i)$$

qui étend $\pi : V_3 \rightarrow \Theta_3(P_2)$ et qui spécifie, pour chaque

$x \in (\psi(P_2) \cap \text{Cl}(\text{Image } F_i - P_2)) \subset s(P_2)$, la branche qui provient de $(\text{Image } F_i - P_2)$.

Dans ces conditions on peut définir le triple:

$$(*) \quad (\partial \Theta_4(\Theta_3(P_2)), \theta(\pi) V_3, \sum_i \Gamma_i)$$

comme suit: On a deux plongements naturels:

$$V_3 \xrightarrow{j_1} W_3 \text{ et } \sum_i \Gamma_i \xrightarrow{j_2} W_3 , \text{ et un difféomorphisme canonique}$$

(donné par les propriétés du foncteur θ):

$$\Theta_4(\Theta_3(P_2)) \approx \Theta_4(\Theta_3(\bar{P}_2^i)) .$$

(On se réfère ici à:

$$\theta(\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(P_2)) = (\Theta_4(\Theta_3(P_2)), \theta(\pi), V_3) \text{ et}$$

$$\theta(\bar{\pi} : W_3 \longrightarrow \Theta_3(\bar{P}_2^i)) = (\Theta_4(\Theta_3(\bar{P}_2^i)), \theta(\bar{\pi}), W_3) .)$$

On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 V_3 & \xrightarrow{j_1} & W_3 & \xrightarrow{\theta(\bar{\pi})} & \partial \otimes_4 (\otimes_3 (\bar{P}'_2)) \\
 \downarrow \text{identité} & & & & \uparrow \approx \\
 V_3 & \xrightarrow{\theta(\pi)} & & & \partial \otimes_4 (\otimes_3 (P_2)) \cdot
 \end{array}$$

On peut définir alors le triple (*) par:

$$\begin{aligned}
 & (\partial \otimes_4 (\otimes_3 (P_2)), \theta(\pi) v_3, \sum_i \Gamma_i) = \\
 & = (\partial \otimes_4 (\otimes_3 (\bar{P}'_2)), \theta(\bar{\pi}) \circ j_1 (v_3), \theta(\bar{\pi}) \circ j_2 (\sum_i \Gamma_i)) \cdot
 \end{aligned}$$

Chaque fois que, dans la suite, des triples (*) seront introduits de cette façon, on dira qu'ils sont DEFINIS COMME A LA FIN DU LEMME 3.26. \square

On finit ce paragraphe par un corollaire du premier lemme d'invariance par chirurgie:

Lemme 3.27: (Corollaire du premier lemme d'invariance par chirurgie):

"On considère un 2-polyèdre singulier (K_2, f, P_3) , tel que $s(K_2) = \emptyset$, $\otimes_3(K_2) = p \# (S_1 \times D_2)$, et que f soit un plongement. On considère aussi k exemplaires du modèle local $j(k_2) : \bar{k}_2 \longrightarrow R_3$ (de la définition 3.6), et la somme connexe:

$$(K'_2 = K_2 \# \bar{k}_2^{-1} \# \dots \# \bar{k}_2^{-k}, f', P_3) = (K_2, f, P_3) \# (\bar{k}_2^{-1}, j(\bar{k}_2^{-1}), S_3) \# \dots \cdot$$

On se donne une séquence principale

$$K_2' = K_2' / f' \xrightarrow[p(f')]{q(f')} K_2' / \Psi(f') ,$$

consistant exactement de k projections du type $O(2)$ dégénérées, et une résolution des singularités: $\pi : V_3 \longrightarrow \mathbb{O}_3(K_2')$.

Soit: $K_2'' = K_2' \cup (\partial K_2' \times [0, 1])$ (où: $\partial K_2' \equiv \partial K_2' \times 0$) et:

$$F_i : (S_1 \times I) \xrightarrow{2k_i} (K_2'')_2 \subset K_2''$$

($i = 1, \dots, q$) q anneaux singuliers plongés, tels que:

a-1) $F_i((S_1 \times I)) \cap \partial K_2' = F_i(S_1 \times 1)$.

a-2) Les $F_i(S_1 \times I)$ se coupent transversalement, et:

Image $F_i \cap$ Image $F_j = F_i(S_1 \times 1) \cap F_j(S_1 \times 1)$, si $i \neq j$.

a-3) $F_i(S_1 \times 0)$ coupe $\partial K_2'$ transversalement.

On se donne aussi, un 2-polyèdre singulier (K_2', φ, P_3') , difféomorphe au précédent (ce qui veut dire que les sources des applications f', φ sont le même objet), tel que:

I. $\Psi(\varphi)$ est acyclique.

II. $M^3(\varphi) = \emptyset$.

III. Pour chaque $x_i \in s(K_2')$, on considère, comme dans le lemme 3.26:

$$\hat{M}^2(\varphi) \supset \mathcal{L}(x_i) = \Gamma_+^i \vee \Gamma_-^i$$

et les fibrés singuliers: $\xi_i : \Gamma_+^i \rightarrow E^i \rightarrow \Gamma_+^i$.

On va supposer que E^i ne possède jamais des singularités du type A.

IV. Pour chaque x_i il existe un point $y_i \in \partial \Gamma_+^i$, tel que:

$$y_i \in \partial K_2^i \text{ et: } (\partial \Gamma_+^i - (x_i) - (y_i)) \in \text{int} (K_2^i)_2 .$$

V. $M^2(\varphi)$ et $M^2(f')$ se coupent transversalement.

VI. $M_-^2(f') \cap (\text{Cl} (\text{Image } F_i - K_2^i)) = \emptyset$, et de même pour φ .

$M_-^2(f') \cap \text{Image } F_i = F_i(e_i^i \times I)$ où $e_i^i \subset S_1$ est un ensemble fini, tel que $F_i(e_i^i \times I) \subset K_2^i$, et que la projection:

$$S_1 \times I \xrightarrow{\quad} (S_1 \times I)_{2k_i}$$

opère trivialement sur $e_i^i \times I \subset S_1 \times I$.

[VII. $M_+^2(f') \cap (\text{Image } F_i)$ consiste d'un nombre fini de points isolés de $\text{Cl}(\text{Image } F_i - K_2^i)$.

VIII. $M_+^2(\varphi) \cap (\text{Image } F_i)$ consiste d'un nombre fini de points isolés de $\text{Cl}(\text{Image } F_i - K_2^i)$.] (Ces deux conditions ne sont pas très essentielles).

IX. $M^2(\varphi) \cap F_i(S_1 \times 1) \cap F_j(S_1 \times 1) = M^2(f') \cap F_i(S_1 \times 1) \cap F_j(S_1 \times 1) = \emptyset$ ($i \neq j$)

X. $M^2(\varphi) \cap M^2(f')$ ne touche pas à $\text{Image } F_i$.

Enfin, on se donne \bar{q} cercles différentiables: $\bar{\Gamma}_i \hookrightarrow \hat{\partial} K_2^i$

(où $\hat{\partial}$ est défini comme dans la remarque 2, ci-dessus), tels que:

XI. Les $\bar{\Gamma}_i$ sont 2-à-2 disjoints.

XII. $\bar{\Gamma}_i \cap (\bigcup_j F_j(S_1 \times 1) + M^2(\varphi) + M^2(f')) = \emptyset$.

Pour un $q_1 \leq \bar{q}$, quelconque, on considère:

$$K_2^i \oplus (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times [0, 1]) \oplus \dots \oplus (\bar{\Gamma}_{\bar{q}} \times [0, 1]) \supset \bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1 + \\ + \dots + \bar{\Gamma}_{\bar{q}} \times 1 \quad \text{où } \bar{\Gamma}_i \times 0 \equiv \bar{\Gamma}_i \quad (i = q_1 + 1, \dots, \bar{q}) .$$

Pour les cercles différentiables $\bar{\Gamma}_1, \dots, \bar{\Gamma}_{q_1}$ on considère des voisinages tubulaires (très minces):

$$\bar{\Gamma}_i \times [0, -1] \hookrightarrow K_2^i \quad (i = 1, \dots, q_1)$$

(tels que $\bar{\Gamma}_i \times 0 \equiv \bar{\Gamma}_i$) et les cercles différentiables, qu'ils induisent:

$$\bar{\Gamma}_i \times (-1) \hookrightarrow K_2^i \quad (i = 1, \dots, q_1) .$$

Sous ces conditions, ils existent des ensembles finis $E_i \subset S_1$ ($i=1, \dots, q$) tels que:

$$a) \quad (S_1 \times I) \xrightarrow{2k_i} (S_1 \times I) \text{ opère trivialement sur } E_i \times I ,$$

ce qui nous permet de considérer: $E_i \times I \subset F_i(2k_i(S_1 \times I))$.

$$b) \quad E_i \times I \cap F_j(S_1 \times I) = \emptyset . \quad (i \neq j) .$$

c) Si l'on applique aux F_i les opérations A_1 de support $E_i \times I$ (définition 3.18.1), on trouve des nouveaux anneaux singuliers:

$$G_i : \quad \rho'_i(S_1 \times I) \hookrightarrow (K_2^i)''_2 .$$

Les E_i sont tels que toutes les propriétés énoncées ci-dessus, restent satisfaites, si F_i est remplacé par G_i . On désigne $G_i(S_1 \times 0)$ par $\bar{\Gamma}_i = G_i(S_1 \times 0)$.

d) Les propriétés IV, VI, VII, VIII, XI, XII, nous permettent de définir les triples suivants, comme à la fin du lemme 3.26:

$$(2 \textcircled{3}(K_2'/\Psi(f'))) = 2 \textcircled{3}(K_2) ; \textcircled{3}(K_2'/\Psi(f')) =$$

$$= \textcircled{3}(K_2), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots$$

$$\dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1) , \text{ et}$$

$$(2 \textcircled{3}(K_2'/\Psi(\varphi)) ; \textcircled{3}(K_2'/\Psi(\varphi)), \Gamma_1 + \dots + \Gamma_q + \bar{\Gamma}_1 \times (-1)$$

$$+ \dots + \bar{\Gamma}_{q_1} \times (-1) + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots + (\bar{\Gamma}_q \times 1)) .$$

Le contenu du point d), est qu'on a un difféomorphisme entre ces deux triples:

$$(2 \textcircled{3}(K_2'/\Psi(f')), \textcircled{3}(K_2'/\Psi(f')), \Gamma_1 + \dots + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) +$$

$$+ \dots) \xrightarrow{\approx} (2 \textcircled{3}(K_2'/\Psi(\varphi)) = \partial \textcircled{4}(\textcircled{3}(K_2')) ,$$

$$\textcircled{3}(K_2'/\Psi(\varphi)), \Gamma_1 + \dots + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots)$$

induisant l'identité sur: $\Gamma_1 + \dots + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \dots + (\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) + \dots$.

d') Soit $\bar{E}_i \subset \bar{\Gamma}_{q_1+i}$ un ensemble fini, tel que

$\bar{E}_i \times 0 \subset \partial (K_2'/\Psi(f'))$. Considérons les opérations A_i (définition 3.18)

de support $\bar{E}_i \times I$ appliquées à $\bar{\Gamma}_{q_1+i} \times [0, 1]$, qui remplacent

$\bar{\Gamma}_{q_1+i} \times I (\bar{\Gamma}_{q_1+i} \times 1)$ par ${}_{k_i}(\bar{\Gamma}_{q_1+i} \times I) (\bar{\Gamma}_{q_1+i} \times 1)$. On désignera par \bar{B}_i :

$$(K_2'/\Psi(\varphi)) \cap ({}_{k_i}(\bar{\Gamma}_{q_1+i} \times I)) = \bar{B}_i .$$

Alors, on a un difféomorphisme de triples, analogue au précédent:

$$\begin{aligned}
 & (2 \otimes_3(K'_2/\Psi(f')), \otimes_3(K'_2/\Psi(f')), \Gamma_1 + \dots + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \\
 & + \dots + [(\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) \cup \bar{B}_1] + \dots + [(\bar{\Gamma}_q \times 1) \cup \bar{B}_{q-q_1}]) \xrightarrow{\approx} \\
 & (2 \otimes_3(K'_2/\Psi(\varphi)), \otimes_3(K'_2/\Psi(\varphi)), \Gamma_1 + \dots + \bar{\Gamma}_1 \times (-1) + \\
 & + \dots + [(\bar{\Gamma}_{q_1+1} \times 1) \cup \bar{B}_1] + \dots + [(\bar{\Gamma}_q \times 1) \cup \bar{B}_{q-q_1}]) .
 \end{aligned}$$

e) Supposons, qu'en plus de toutes les conditions énoncées avant, on ait, aussi:

$$M_+^2(\varphi) \cap M_-^2(f') = \emptyset .$$

Alors $E_i = \emptyset$ et (donc) $\Gamma_i = F_i(S_1 \times 0)$." \square

La démonstration sera donnée au chapitre suivant.

Cette démonstration (combinée à celle du premier lemme d'invariance) implique tout de suite le:

Complément au lemme 3.27: Considérons le lemme 3.27 avec la situation e) et pour chaque i , un sous-ensemble:

$$B_i \subset \text{Image } F_i \cap \otimes_3(K'_2)$$

qui soit ouvert et fermé (dans $\text{Image } F_i \cap \otimes_3(K'_2)$) et tel que:

$$B_i \cap M^2(f) = B_i \cap M^2(\varphi) = \emptyset .$$

Alors le difféomorphisme de la fin du lemme 3.27 (dans la situation e)) s'étend à un difféomorphisme:

$$\begin{aligned}
 & (2 \otimes_3(K_2), \otimes_3(K_2), \Sigma(\Gamma_i \cup B_i) + \sum_{j \leq q_1} \bar{\Gamma}_j \times (-1) + \Sigma(\bar{\Gamma}_{q_1+l} \times 1)) = \\
 & = (2 \otimes_3(K'_2/\Psi(\varphi)), \otimes_3(K'_2/\Psi(\varphi)), \Sigma(\Gamma_i \cup B_i) + \sum_{j \leq q_1} \bar{\Gamma}_j \times (-1) + \Sigma(\bar{\Gamma}_{q_1+l} \times 1)) ." \square
 \end{aligned}$$

3.7) Une technique de chirurgie en dimension 3 (suite et fin) :

On commence par une proposition qui se rattache aux "lemmes d'invariance"

3.19-3.19.1:

Lemme 3.28: "Soient (L_2, g_1, M_3) et (L_2, g_2, M_3) deux 2-polyèdres singuliers, satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. On passe de (L_2, g_1, M_3) à (L_2, g_2, M_3) par un nombre fini de glissements élémentaires (voir la définition 3.20). On suppose nos deux polyèdres munis de résolutions de singularités compatibles avec ce passage (c'est-à-dire de la même résolution).

2°. On considère $L_2' = L_2 \oplus (\partial L_2 \times [0, 1])$ (avec: $\partial L_2 \equiv \partial L_2 \times 0$), et, dans $(L_2')_2$, p plongements 2-à-2 disjoints:

$$F_i : \begin{matrix} (S_1 \times I) \\ 2k_i \end{matrix} \longrightarrow (L_2')_2 \subset L_2'$$

($i=1, \dots, p$) , satisfaisant aux propriétés suivantes:

$$2^\circ-1. \quad F_i \left(\begin{matrix} (S_1 \times I) \\ 2k_i \end{matrix} \right) \cap \partial L_2 = F_i(S_1 \times 0) .$$

$$2^\circ-2. \quad F_i(S_1 \times 1) = \Gamma_i \text{ coupe } \partial L_2 \text{ transversalement.}$$

$$2^\circ-3. \quad M_{-}^2(g_1) \cap F_i \left(\begin{matrix} (S_1 \times I) \\ 2k_i \end{matrix} \right) = \emptyset .$$

$$2^\circ-4. \quad M_{+}^2(g_1) \cap \Gamma_i = \emptyset \text{ et:}$$

$$M_{+}^2(g_1) \cap F_i \left(\begin{matrix} (S_1 \times I) \\ 2k_i \end{matrix} \right) \subset \mathcal{CL}(\text{Image } F_i - L_2) \subset \partial L_2 .$$

On va supposer que les points de $M_{+}^2(g_1)$ correspondant aux intersections décrites ci-dessus, sont dans $(\partial L_2)_1$. On remarque aussi, que

$M_{\pm}^2(g_1) \cap \partial L_2 \equiv M_{\pm}^2(g_2) \cap \partial L_2$, ce qui fait que les intersections qu'on a

décrites sont héritées pour $M_{+}^2(g_2)$.

2°-5. A part les intersections $M_+^2(g_2) \cap (\text{Image } F_i)$, résultant du point 2°-4, toutes les autres intersections $M^2(g_2) \cap (\text{Image } F_i)$, sont contenues dans la description suivante:

On considère toutes les paires de deux cercles différentiables disjoints, S_i^- , S_i^+ , composantes connexes de ∂L_2 , bords de deux 2-disques actifs associés (voir la définition 3.20) dans l'un des glissements élémentaires du point 1°. Alors:

2°-5-1) Ils existent deux indices $j' = j'(i)$, $j'' = j''(i)$, tels que $F_{j'}(S_1 \times 0) = S_i^-$, $F_{j''}(S_1 \times 0) = S_i^+$.

2°-5-2) On va supposer que la notation a été choisie de telle façon que S_i^- touche à $M_-^2(g_2)$ et S_i^+ à $M_+^2(g_2)$. Alors:

$$2k_{j''} = 0 \text{ et } \text{Image } F_{j''} \subset L_2' - L_2 + \partial L_2.$$

2°-5-3) $M_-^2(g_2) \cap F_{j'}(S_1 \times I)$ consiste de deux intervalles fermés, de la forme $x \times I$, $2k_{j'}$ ayant un bout dans $(L_2)_2$, l'autre sur S_i^- .

On définit les triples:

$$(2 \text{ @}_3(L_2/\Psi(g_1)); \text{ @}_4(\text{ @}_3(L_2/\Psi(g_1)); \text{ @}_3(L_2/\Psi(g_1)), \Sigma \Gamma_i) \text{ et}$$

$$(2 \text{ @}_3(L_2/\Psi(g_2)); \text{ @}_4(\text{ @}_3(L_2/\Psi(g_2)); \text{ @}_3(L_2/\Psi(g_2)), \Sigma \Gamma_i)$$

comme à la fin du lemme 3.26. On se donne, aussi, un fermé $\Phi_1 \subset L_2$, qui n'est pas touché par les glissements.

Alors, il existe un difféomorphisme:

$$(2 \text{ @}_3(L_2/\Psi(g_1)); \text{ @}_3(L_2/\Psi(g_1)), \Sigma \Gamma_i + \Phi_1) =$$

$$= (2 \text{ @}_3(L_2/\Psi(g_2)); \text{ @}_3(L_2/\Psi(g_2)), \Sigma \Gamma_i + \Phi_1) \quad .'' \quad \square$$

La démonstration de ce lemme sera donnée au chapitre suivant.

Lemme 3.29: "Soit (L_2, g, M_3) un 2-polyèdre singulier muni d'une résolution des singularités et F_i des plongements satisfaisant aux conditions 2°-1, 2°-2, 2°-3, 2°-4, du lemme précédent.

Considérons $\bar{L}_2 = L_2 \cup \left(\bigcup_i \text{Image } F_i \right) \subset L_2'$, muni de la même résolution qu'avant. Supposons qu'il existe un 2-polyèdre singulier $(\bar{L}_2, \bar{g}, \bar{M}_3)$, tel que:

$$(i) \quad M_+^2(\bar{g})|_{L_2} \cong M_+^2(g) \quad , \quad \Psi(\bar{g})|_{L_2} = \Psi(g) \quad .$$

(ii) $\mathcal{C}\mathcal{L}(M_+^2(\bar{g}) - M_+^2(g))$ consiste d'un nombre fini d'intervalles fermés disjoints, ayant un bout sur ∂L_2 , l'autre dans $\text{int}(\bigcup \text{Image } F_i - L_2)$.

Considérons $(2 \otimes_3(L_2/\Psi(g)); \otimes_3(L_2/\Psi(g)), \Sigma \Gamma_i)$ défini comme ci-dessus (c'est-à-dire comme à la fin du lemme 3.26). A difféomorphisme près, cette définition donne la même chose que la construction suivante: On considère:

$$\Sigma \Gamma_i \subset \otimes_3(\bar{L}_2/\Psi(\bar{g})) \supset \otimes_3(L_2/\Psi(g)) \quad .$$

Ceci nous permet de plonger $\Sigma \Gamma_i$ et $\otimes_3(L_2/\Psi(g))$ dans $2 \otimes_3(\bar{L}_2/\Psi(\bar{g}))$.

On a un difféomorphisme:

$$(2 \otimes_3(L_2/\Psi(g)); \otimes_3(L_2/\Psi(g)), \Sigma \Gamma_i) = (2 \otimes_3(\bar{L}_2/\Psi(\bar{g})); \otimes_3(L_2/\Psi(g)), \Sigma \Gamma_i) \quad . \quad \square$$

La démonstration est laissée au lecteur. Le sens du lemme est que, dans la situation décrite, la définition "magique" de la fin du lemme 3.26 peut être démystifiée.

On peut passer, enfin, à LA DEMONSTRATION DU LEMME FONDAMENTAL .

On aura plusieurs étapes:

Etape 1°: Considérons la variété $C^\infty : X_3^{k+1}$ du lemme fondamental.

D'après le premier principe de position générale (lemme 3.4), il existe un

2-polyèdre singulier, complètement collapsible: (K_2, f, M_3) , tel que X_3^{k+1} soit $*$ -équivalente à $\Theta_3(K_2/\Psi(f))$. Il suffit donc, dans la suite, de s'occuper de (K_2, f, M_3) . On va munir (K_2, f, M_3) d'une résolution des singularités $\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2)$, qui va induire toutes les autres résolutions de singularités considérées par la suite, sauf celle de l'étape 2°.

Etape 2°: On commence par considérer la résolution des singularités:

$\pi^* : V_3^* \longrightarrow \Theta_3(K_2)$ duale à $\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2)$, dans le sens suivant: on passe de l'une à l'autre en interchangeant le rôle des branches spécifiées et non-spécifiées. On applique maintenant à (K_2, f, M_3) et à cette nouvelle résolution des singularités, la construction du début du paragraphe 3.4.

C'est-à-dire que, comme dans la définition 3.17.1, on considère (G_2^0, g^0, M_3) ,

avec $\Phi(g^0) = \Psi(g^0)$ acyclique et les cercles différentiables

$\Gamma_j^i \subset (G_2^0)_2$ (ou: $\Gamma_j^i \subset (G_2^0/\Psi(g^0))$) ($i=1, \dots, q; j=1, 2$).

On considère une bonne présentation des singularités de (G_2^0, g^0, M_3)

(définition 3.25), ce qui est toujours possible puisque K_2 est complètement collapsible:

$$G_2^0 = G_2^i \# D_2^1 \# \dots \# D_2^k.$$

Les branches $x_j^i = 0$ (définition 3.17) induisent sur $\partial \Theta_3(G_2^i)$, (respectivement sur $\partial \Theta_3(G_2^0/\Psi(g^0))$), des cercles différentiables $S_j^i \subset \partial \Theta_3(G_2^i)$

(respectivement: $S_j^i \subset \partial \Theta_3(G_2^0/\Psi(g^0))$), correspondant aux Γ_j^i . Il est entendu que sur $\partial \Theta_3(G_2^i)$ les S_j^i sont 2-à-2 disjoints, tandis que sur

$\partial \Theta_3(G_2^0/\Psi(g^0))$, S_1^i coupe S_2^i transversalement, en exactement deux points p_1^i, p_2^i , et que:

$$\text{int}_{p_1^i} (S_1^i, S_2^i) \cdot \text{int}_{p_2^i} (S_1^i, S_2^i) = -1.$$

On va désigner les S_1^i, S_2^i dans $\partial \Theta_3(G_2^0/\Psi(g^0))$ par S_1^{2i-1}, S_1^{2i} .

Maintenant on changera de notation: c'est G_2^0 qui sera appelé K_2 , g^0 sera appelé f , G_2^i sera appelé K_2^i , et q sera appelé p .

(K_2, f, M_3) est tel qu'on peut lui appliquer le lemme de l'inversion (3.20) avec $\Sigma = \emptyset$, et le lemme de l'inversion de l'inverse (3.22). Quand on applique ces lemmes, la résolution des singularités sera de nouveau

$\pi : V_3 \longrightarrow \Theta_3(K_2)$ et dorénavant toutes les résolutions seront induites par elle. Considérons:

$$\bar{K}_2^i = \beta_1 \bar{\beta} \beta(K_2 - \cup \lambda_i(D_2) - \cup \bar{\lambda}_i(D_2))/\Psi(\beta f).$$

On va désigner par $S_1^{2p+1}, \dots, S_1^{2p+q}$ les cercles différentiables

$\{\lambda_i(\partial D_2), \bar{\lambda}_j(\partial D_2)\}$, où la numération est choisie de telle façon que

$S_1^{2p+1}, \dots, S_1^{2p+r}$ correspondent aux branches spécifiées, et $S_1^{2p+r+1}, \dots, S_1^{2p+q}$

aux branches non-spécifiées. (Modulo des débordements (définition 3.30),

chaque $\lambda_i(D_2), \bar{\lambda}_i(D_2)$ touche les points doubles de l'une des applications

$(q(\beta_1 \bar{\beta} f))$, (f_1) , (g_1) , et c'est dans ce sens qu'on dit qu'ils correspondent à des branches spécifiées ou non-spécifiées, e.a.d.s.)

Considérons K_2/f (c'est-à-dire G_2^0/g^0). Sans perte de généralité, on peut supposer que:

1) $q(f) = q_1(\beta f)|_{K_2}$ (voir le point IV du lemme 3.22). Ceci est possible à cause de la manière dont $G_2^0/g^0 \cong K_2/f$ a été fabriqué à partir de la résolution des singularités duale : $\pi^* : V_3^* \longrightarrow \Theta_3(K_2)$.

2) $M^2(f_1)$ (et $M^2(g_1)$) ne touchent pas à la région de K_2/f comprise entre $I_j^i \subset K_2/f$ et $S_j^i \subset \partial K_2/f$.

Remarquons, enfin que, d'après le lemme 3.8 et le lemme 3.10:

$$\Theta_3(\bar{k}'_2) = \Theta_3(\beta(K_2 - \cup \lambda_i(D_2) - \cup \bar{\lambda}_i(\bar{D}_2)) / \Psi(\beta f)) = T_3^{2p+q} = (2p+q) \# (S_1 \times D_2) .$$

Considérons le triple:

$$(2 \Theta_3(\bar{k}'_2) , \Theta_3(\bar{k}'_2) , \underbrace{\sum_{i=1, \dots, p} \Gamma_j^i}_{j=1,2} + \sum_{l=1}^q \Gamma_{2p+l})$$

où Γ_{2p+l} ($l \leq r$) est parallèle à S_1^{2p+l} à l'intérieur de $\Theta_3(\bar{k}'_2)$ et Γ_{2p+r+l} est parallèle à S_1^{2p+r+l} à l'extérieur de $\Theta_3(\bar{k}'_2)$.

DANS TOUT CE QUI SUIT, LES Γ SONT TOUJOURS SUFFISAMMENT PROCHES DES $S_1 \subset \partial(\dots)$ CORRESPONDANTS, POUR QU'ILS NE TOUCHENT JAMAIS AUX ENSEMBLES DE LA FORME $M^2(p(f))$, e. a. d. s. (MAIS SEULEMENT AUX $M^2(q(\dots))$).

Le lemme fondamental résulte alors, si l'on peut démontrer la:

Proposition A: $(2 \Theta_3(\bar{k}'_2) , \Theta_3(\bar{k}'_2) , \sum \Gamma_j^i + \sum \Gamma_{2p+l})$ est un triple moyennement non-noué. \square

Si l'on considère l'involution canonique

$$J(\Theta_3(\bar{k}'_2)) : 2 \Theta_3(\bar{k}'_2) \longrightarrow 2 \Theta_3(\bar{k}'_2) ,$$

la proposition A est équivalente à la:

Proposition B: $(2 \Theta_3(\bar{k}'_2) , \Theta_3(\bar{k}'_2) , \sum J \Gamma_j^i + \sum J \Gamma_{2p+l})$ est un triple moyennement non-noué. \square

Considérons les anneaux plongés $\Gamma_j^i \times I \hookrightarrow \bar{k}'_2$, tels que $\Gamma_j^i \times 0 = S_j^i = S_1^{2i-a(j)}$ (où $a(j) = 0$ si $j = 2$ et $a(j) = 1$ si $j = 1$) et $\Gamma_j^i \times 1 = \bar{\Gamma}_j^i$. Dans $\cup_j \Gamma_j^i \times I$ considérons les deux intervalles fermés

$A(i)$, $B(i)$ qui sont des composantes connexes de $(\Gamma_{j_1}^i \times I) \cap (\bar{\Gamma}_{j_2}^i \times I)$, où il est entendu que:

$A(i) \subset \Gamma_{j_1}^i \times I$, $B(i) \subset \Gamma_{j_2}^i \times I$, sont supposés tels que $A(i)$ (respectivement $B(i)$) a les deux extrémités sur $\partial(\Gamma_{j_1}^i \times I)$ (respectivement sur $\partial(\Gamma_{j_2}^i \times I)$).

En appliquant aux anneaux

$$J(\Gamma_{j_1}^i \times I) \hookrightarrow 2 \Theta_3(\bar{k}_2^i) ,$$

$$J(\Gamma_{j_2}^i \times I) \hookrightarrow 2 \Theta_3(\bar{k}_2^i) ,$$

les opérations A_1 (définition 3.18) de support $A(i), B(i)$ on obtient des nouveaux anneaux singuliers:

$$2k_j^i(S_1 \times I) \xrightarrow{f_j^i} 2 \Theta_3(\bar{k}_2^i)$$

avec $(f_j^i)^{-1}(\partial \Theta_3(\bar{k}_2^i)) = (S_1 \times 0)$, et $k_1^i + k_2^i = 2$.

Désignons par $\bar{\Gamma}_j^i$ le cercle différentiable:

$$\bar{\Gamma}_j^i = f_j^i(S_1 \times 1) .$$

La proposition B est impliquée par la proposition C ci-dessous:

Proposition C : Considérons un triple standard défini comme suit: on commence par considérer des triples:

$$(S_1^i \times S_2^i, S_1^i \times D_2^i, S_1^i \times I) \quad (i = 1, \dots, \bar{p})$$

où $S_2^i = 2 D_2^i$ et I est un rayon du disque $S_2^i - \overset{\circ}{D}_2^i$, (tel que 1 corresponde au centre du disque). On considère un ensemble fini $E_i \subset S_1^i$ et l'opération A_1 de support $E_i \times I$, appliquée à $S_1^i \times I$. Ceci donne un plongement:

$$f_i : \underset{k_i}{(S_1 \times I)} \longrightarrow S_1^i \times S_2^i .$$

$$T_2 = (2 \otimes_3((\beta X_1^i - U \bar{\lambda}_i(\overset{\circ}{D}_2)) / \Psi(f_1 \circ p(\beta f))), \\ \otimes_3((\beta X_1^i - U \bar{\lambda}_i(\overset{\circ}{D}_2)) / \Psi(f_1 \circ p(\beta f))), \Sigma (\bar{\Gamma}_j^i \cup B_j^i) + \Sigma J \Gamma_{2p+l} ,$$

sont canoniquement définis.

En plus on a:

Proposition D : Le triple T_1 est (difféomorphe à) un triple standard. \square

C'est une conséquence immédiate du paragraphe 3.4.

D'autre part, d'après le point V-1 du lemme 3.22, on passe de T_1 à T_2 par des glissements élémentaires, qui ne touchent pas à $\Sigma (\bar{\Gamma}_j^i \cup B_j^i)$. On peut appliquer les lemmes 3.19-3.19.1 (voir le point V-7 du lemme 3.22, qu'on met en rapport avec le point 5-4 du lemme 3.19.1). Ils existent des anneaux

$$F_{2p+l} : S_1 \times I \longrightarrow 2 \otimes_3(\beta X_1^i - U \bar{\lambda}_i(\overset{\circ}{D}_2)) ,$$

qui unissent $J \Gamma_{2p+l}$ à $S_1^{2p+l} \subset \partial \otimes_3(\beta X_1^i - U \bar{\lambda}_i(\overset{\circ}{D}_2))$, correspondant aux F_i du lemme 3.19.1 (on est donc dans le cas où $k_i \equiv 0$). D'autre part, on s'est arrangé de telle manière que les $J \Gamma_{2p+l}$ qui touchent à $M_+^2(f_1 \circ p(\beta f))$ soient à l'extérieur et ceux qui touchent à $M_-^2(f_1 \circ p(\beta f))$ soient à l'intérieur. On a donc, la:

Proposition E : Les triples T_1 et T_2 sont difféomorphes. \square

On peut définir, aussi le triple

$$T_3 = (2 \otimes_3(\beta_1 Y_1 / \Psi(g_1 \circ p(\beta_1 \bar{\beta} f_1))), \\ \otimes_3(\beta_1 Y_1 / \Psi(g_1 \circ p(\beta_1 \bar{\beta} f_1))), \Sigma (\bar{\Gamma}_j^i \cup B_j^i) + \Sigma J \Gamma_{2p+l} ,$$

comme à la fin du lemme 3.26. (La définition "magique" est nécessaire à cause du point IV, lemme 3.22). On remarque que T_0 est défini de telle

manière qu'il s'identifie à:

$$(2 \otimes_3 (\beta_1 Y_1 / \Psi(\beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f))),$$

$$\otimes_3 (\beta_1 Y_1 / \Psi(\beta_1 \bar{\beta} q_1(\beta f))), \Sigma (\bar{\Gamma}_j^i \cup B_j^i) + \Sigma J \Gamma_{2p+l} = T_0 .$$

Le point V-2 du lemme 3.22 nous donne des glissements élémentaires allant de T_0 à T_3 . Ces glissements ne touchent pas aux $\Sigma (\bar{\Gamma}_j^i \cup B_j^i)$ puisque les B_j^i proviennent tous de branches non-spécifiées, et à cause de IV (lemme 3.22). (On remarque que $\cup B_j^i = (\Sigma (\bar{\Gamma}_j^i \cup B_j^i)) \cap \otimes_3(\dots)$).

On peut applique alors les lemmes 3.19-3.19.1 et 3.28 et l'on trouve:

Proposition F: Les triples T_0 et T_3 sont difféomorphes. \square

Etape 4°. On a fini si l'on réussit à démontrer la proposition suivante:

Proposition G: Les triples T_2 et T_3 sont difféomorphes. \square

Démonstration: C'est ici qu'on va utiliser la technique de chirurgie du paragraphe précédant. On fera maintenant un changement (important) dans la notation:

Dorénavant $J \Gamma_{2p+l}$ sera désigné par $\bar{\Gamma}_{2p+l}$, et la lettre J sera réservée pour l'application: $J : s(X_2) \longrightarrow s(Y_2)$ du lemme 3.22.

On considère la projection d'espace-quotient:

$$Y_2 = \beta_1 Y_1 / \beta_1 \bar{\beta} f_1 \xrightarrow{g_1} Y_2 / \Psi(g_1) .$$

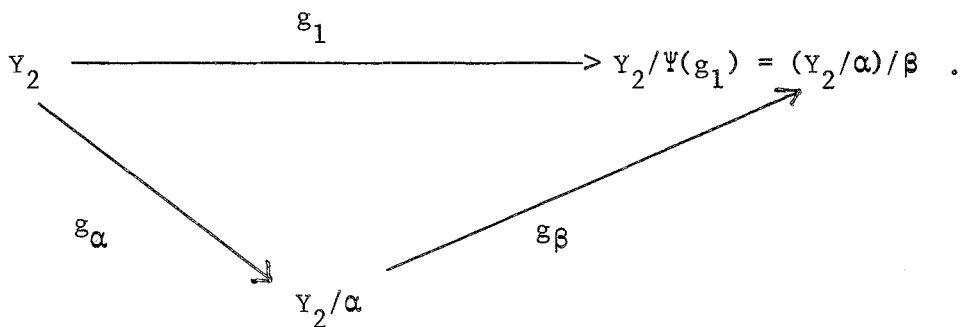
Dans $cl \Psi(g_1) \subset S^2 Y_2$ on considère les deux sous-ensembles suivants, qui sont disjoints et fermés (pour la topologie ordinaire, et pour

la Z-topologie) :

$$\alpha = \text{Cl}_Z(s(Y_2) - J s_2(X_2)) \text{ et}$$

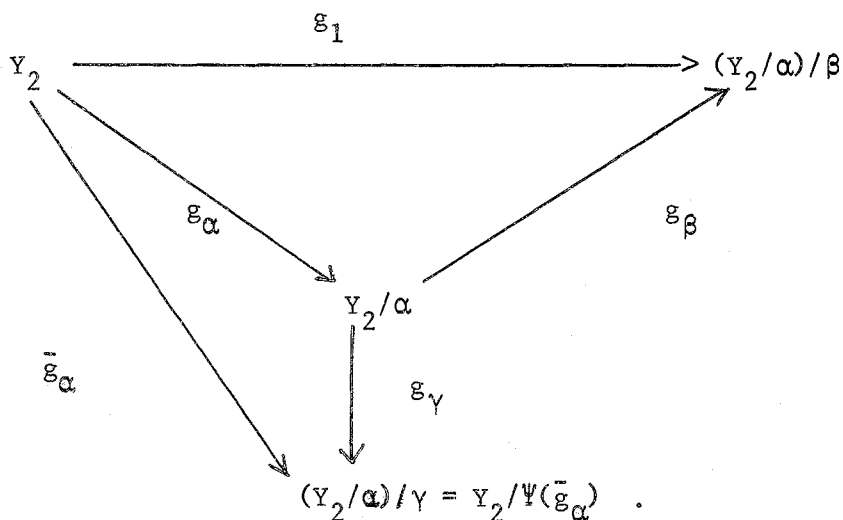
$$\beta = \text{Cl}_Z(J s_2(X_2)) .$$

On a: $\alpha \cup \beta = \text{Cl } \Psi(g_1)$; $\alpha \cap \beta = \emptyset$. α et β sont des relations d'équivalence et on peut considérer le diagramme commutatif:



$(Y_2/\alpha, g_\beta, M_3)$ est un 2-polyèdre singulier, avec $s(Y_2/\alpha) \approx J s_2(X_2)$, puisque g_α tue $s(Y_2) - J s_2(X_2)$ et ne touche pas à $J s_2(X_2)$. D'autre part, justement parce que Y_2/α possède des singularités, (Y_2, g_α) ne donne pas naissance, a priori , à un 2-polyèdre singulier. Mais, vu la condition V-6-2-d du lemme 3.22, on peut contourner cette difficulté en considérant un diagramme commutatif un peu plus compliqué:

β , était la clôture $\text{Cl}_Z(J s_2(X_2)) \subset \Psi(g_1)$. On considère $\gamma = \text{Cl}_Z(J s_2(X_2)) \subset \Psi(q(\beta_1 \bar{\beta} f_1))$. γ donne lieu à une projection d'espace-quotient g_γ , qui rend commutatif le diagramme suivant:



Cette fois-ci:

$$(Y_2, \bar{g}_\alpha, \Theta_3(Y_2/\Psi(\bar{g}_\alpha)))$$

est bien un 2-polyèdre singulier. En plus: $M^3(\bar{g}_\alpha) = \emptyset$, $\Psi(\bar{g}_\alpha)$ est acyclique, et

$$M^2(g_\gamma) = \bigcup_{x \in s_2(X_2)} \mu_{\pm}(q(\beta_1 \bar{\beta} f_1), J(x)) .$$

A partir d'ici, la démonstration de la proposition G aura deux étapes:

① . Comme à la fin du lemme 3.26, on peut définir, canoniquement, le triple:

$$\Theta_1 = (2 \Theta_3(Y_2/\Psi(\bar{g}_\alpha)), \Theta_3(Y_2/\Psi(\bar{g}_\alpha)), \Sigma(\bar{\Gamma}_j^i \cup B_j^i) + \Sigma \bar{\Gamma}_{2p+l}) .$$

Considérons d'autre part le 2-polyèdre singulier $(Y_2, q(\beta_1 \bar{\beta} f_1), \Theta_3(K_2^i))$.

On a une décomposition:

$$Y_2 = Y_2'' \# \bar{k}_2^1 \# \dots .$$

où $s(Y_2'') = \emptyset$, et, on voit tout de suite que:

$$\begin{aligned}
 & (2 \Theta_3(Y_2''), \Theta_3(Y_2''), \Sigma(\bar{T}_j^i \cup B_j^i) + \Sigma \bar{T}_{2p+l}) = \\
 = & (2 \Theta_3(Y_2/\Psi(q(\beta_1 \bar{\beta} f_1))), \Theta_3(Y_2/\Psi(q(\beta_1 \bar{\beta} f_1))), \\
 & \Sigma(\bar{T}_j^i \cup B_j^i) + \Sigma \bar{T}_{2p+l}) = (2 \Theta_3((\beta_1 \bar{\beta} \beta x_1^i - \cup \bar{\lambda}_i(\dot{D}_2))/ \\
 & \Psi(\beta_1 \bar{\beta} f_1 \circ p(\beta f))), \Theta_3((\beta_1 \bar{\beta} \beta x_1^i - \cup \bar{\lambda}_i(\dot{D}_2))/\Psi(\beta_1 \bar{\beta} f_1 \circ p(\beta f))), \\
 & \Sigma(\bar{T}_j^i \cup B_j^i) + \Sigma \bar{T}_{2p+l}) = T_2 .
 \end{aligned}$$

Je dis que $Y_2, Y_2'', q(\beta_1 \bar{\beta} f_1), \bar{g}_\alpha$ sont (respectivement) comme les K_2^i, K_2, f', φ du lemme 3.26. Les $\bar{T}_j^i, \bar{T}_{2p+l}$ jouent le rôle des Γ_j . Je vais indiquer brièvement pourquoi les différentes conditions du lemme 3.26 (3.24) sont satisfaites:

- 0°-1, 0°-2 sont satisfaites parce que les \bar{T}_{2p+l} ont été définies à partir de la résolution duale $\pi^* : V_3^* \longrightarrow \Theta_3(K_2)$ et de J .
- 1°, 2° sont satisfaites parce que $M^3(\bar{g}_\alpha) = \emptyset$ et $\Psi(\bar{g}_\alpha)$ acyclique.
- 3° est satisfaite à cause de V-6-2-d, V-5-2 (lemme 3.22).
- 4° est satisfaite à cause de la manière dont les opérations A_1 de supports $A(i), B(i)$ considérées ci-dessus, ont été définies, et pour les mêmes raisons que 0°-1, 0°-2.
- La décomposition $s(K_2^i) = S_1 \cup S_2$ (lemme 3.26) sera: $S_2 = J s_1(X_2)$,
 $S_1 = s(Y_2) - J s_1(X_2)$.
- 5° (pour S_1) est satisfaite pour les mêmes raisons que 4°.
- 6°, 7° (pour S_1): On commence par remarquer que, dans $q(\bar{g}_\alpha)$, la partie qui n'est pas excellente est exactement celle qui provient de $i s_1(X_2)$. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que:

$$(*) \quad \partial M_+^2(g_\alpha) \cap \partial Y_2 = \bigcup_{x \in s_1(X_2)} \{j \alpha_+(x)\} .$$

Ceci va impliquer 6° (pour S_1). Quant à 7°, il est vrai pour les mêmes raisons que 4° et 5°.

- 8°, 10° sont satisfaites pour les mêmes raisons que 5°, 6°, 7°.

- 9° (pour S_2) : $Y_k \subset \partial \Gamma_+^k - x_k$ va consister exactement du point $j \alpha_+(x_k)$ (lemme 3.22) et la condition 9° résulte de V-6-2-b (lemme 3.22) et de (*).

Avec tout cela, le troisième lemme d'invariance par chirurgie (lemme 3.22) (et son complément qui s'applique, à cause de IV, lemme 3.22) nous dit que:

$$T_2 = \mathbb{Q}_1 .$$

(II) Je dis que Y_2/α , g_γ , g_β sont, respectivement comme les: K_2^i , f^i , φ du lemme 3.27 (avec la situation e). Les $\bar{\Gamma}_{2p+l}^i$, $\bar{\Gamma}_j^i$, B_j^i jouent le rôle des Γ_i , $(\bar{\Gamma}_k \times 1)$, \bar{B}_k ($q_1 = 0$). Je vais indiquer brièvement pourquoi les différentes conditions du lemme 3.27 sont satisfaites:

On rappelle que $s(Y_2/\alpha) = J s_2(X_2)$.

III est satisfaite à cause de V-6-2-c (lemme 3.22)

IV est satisfaite en posant: $y_k = j \alpha_+(x_k)$ pour $J(x_k) \in s(Y_2/\alpha)$, $x_k \in s_2(X_2)$. On applique V-6-2 et une condition analogue à (*) ci-dessus.

- e) est satisfaite à cause de V-6-2-d.

- Les autres conditions du lemme 3.27 sont satisfaites pour les mêmes raisons que les conditions analogues du lemme 3.26, dans l'étape (I) ci-dessus.

Le lemme 3.27 (Corollaire du premier lemme d'invariance par chirurgie) implique alors que: $\Theta_1 = T_3$.

Ceci finit la démonstration de la proposition G , donc du lemme fondamental. \square