UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

nº 179

Régularité de certaines moyennes

Jacques Peyrière

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

REGULARITE DE CERTAINES MOYENNES

par Jacques Peyrière

1. ENONCES DES RESULTATS.

On désigne par σ_{n-1} la mesure de Radon, positive, de masse 1, invariante par rotation, portée par S_{n-1}, sphère unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ (la norme sur $\mathbf{R}^n$ sera notée $|\ \ |$).

Si β est un nombre réel et f une fonction localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$, on pose

$$F_{\beta,x}(t) = |t|^{\beta} \int f(x+ty)\, d\sigma_{n-1}(y),$$

(l'intégrale converge pour tout x de $\mathbf{R}^n$, pour presque tout t de $\mathbf{R}$).

L'objet de ce travail est d'étudier pour β et x fixés la régularité de la fonction $F_{\beta,x}$.

Nous rappelons plus loin la définition et quelques propriétés des espaces $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$ étudiés par M. H. Taibleson [1].

Si f est une fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ et à valeurs complexes, on pose $\check{f}(x) = \overline{f(-x)}$.

Voici les résultats obtenus.

THEOREME. Soient n un entier supérieur à 2, α et β deux nombres réels positifs. On suppose que β appartient à l'intervalle $\left]-1\,,\,\frac{n-2}{2}\right[$; il existe alors un nombre strictement positif C tel que pour toute fonction continue à support compact f définie sur $\mathbb{R}^n$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{\Lambda_\alpha^{2,2}(\mathbb{R})}\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f * \check{f}(x)|\,|x|^{2(\beta-\alpha)-n+1}(1+|x|^{2\alpha})\,dx.$$

COROLLAIRE 1. Soient n un entier supérieur à 2, p et q deux nombres réels tels que l'on ait $1 \leq p < q \leq 2$. Si f appartient à $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ et si α et β sont deux nombres réels tels que $-1 < \beta < \inf(\frac{n-2}{2}\,,\, n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2})$ et $0 < \alpha < \beta + \frac{1}{2} - n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})$ alors, pour presque tout x de $\mathbb{R}^n$, la fonction $F_{\beta,x}$ appartient à l'espace $\Lambda_\alpha^{2,2}(\mathbb{R})$.

COROLLAIRE 2. Soient n un entier supérieur à 3, q un nombre de l'intervalle $\left]\frac{n}{n-1}, 2\right]$ et f une fonction appartenant localement à $L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour presque tout x de $\mathbb{R}^n$, la fonction $F_x(t) = \int_{S_{n-1}} f(x+ty)\,d\sigma_{n-1}(y)$ coïncide presque partout sur $\left]0\,,+\infty\right[$ avec une fonction appartenant localement à $\Lambda_\alpha(\left]0,\infty\right[)$ pour tout α strictement inférieur à $n(1-\frac{1}{q}) - 1$.

2. RAPPELS SUR LES ESPACES $\Lambda_\alpha^{p,q}$.

Soit g une fonction appartenant à $L^p(\mathbb{R})$; notons u son intégrale de Poisson. Soient α un nombre réel strictement positif et k un entier strictement supérieur à α. La fonction g appartient à $\Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R})$ si l'expression

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} + \left\{ \int_0^\infty \left[y^{k-\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y) \right|^p dx \right)^{1/p} \right]^q \frac{dy}{y} \right\}^{1/q}$$

est finie ; cette quantité est une norme sur $\Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R})$. Deux k différents donnent deux normes équivalentes. Lorsque p ou q est infini, il faut interpréter la formule précédente de la manière hatibuelle.

Lorsque α n'est pas un nombre entier $\Lambda_\alpha^{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ est l'espace de Lipchitz habituel $\Lambda_\alpha(\mathbb{R})$.

Les relations $p_1 \leq p_2$, $q_1 \leq q_2$, $\alpha_1 - \frac{1}{p_1} = \alpha_2 - \frac{1}{p_2}$ entraînent $\Lambda_{\alpha_1}^{p_1,q_1}(\mathbb{R}) \subset \Lambda_{\alpha_2}^{p_2,q_2}(\mathbb{R})$. On a, en particulier, $\Lambda_{\alpha+\frac{1}{2}}^{2,2}(\mathbb{R}) \subset \Lambda_\alpha^{\infty,\infty}(\mathbb{R})$.

L'espace $\Lambda_\alpha^{2,2}$ est l'espace de Sobolev H_α.

3. DES LEMMES.

Soit $u_o(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2+y^2}$ le noyau de Poisson du demi-plan. On pose $u_k(x,y) = \frac{\partial^k}{\partial y^k} u_o(x,y)$.

La fonction u_{2k} est homogène de degré $-(2k+1)$ par rapport aux deux variables et impaire par rapport à la seconde, il existe donc un nombre c_k tel que l'on ait

$$|u_{2k}(x,y)| \leq c_k \frac{y}{(x^2+y^2)^{k+1}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

LEMME 1. On a $u_k(.,y) * u_k(.,y) = u_{2k}(.,2y)$.

Démonstration. La transformée de Fourier de $u_o(.,y)$ est $e^{-|\xi|y}$, celle de $u_k(.,y)$ est donc $(-|\xi|)^k e^{-|\xi|y}$ par suite celle de $u_k(.,y) * u_k(.,y)$ est $(-|\xi|)^{2k} e^{-2|\xi|y}$, d'où le résultat.

Notons χ la fonction indicatrice de l'ensemble

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ ||x|-|y|| < |z| < |x|+|y|\}$. Posons, lorsque $\chi(x,y,z)$ vaut 1, $\Delta(x,y,z) = \frac{1}{4}\sqrt{[(x+y)^2 - z^2][z^2-(x-y)^2]}$, c'est l'aire des triangles dont les longueurs des côtés sont $|x|$, $|y|$, $|z|$.

Enfin désignons par s_n l'aire de S_n.

LEMME 2. Soient n un entier supérieur à 1 et r et s deux nombres réels non nuls. Appelons μ_n la mesure image de $\sigma_n \times \sigma_n$ par l'application, $(y,z) \rightsquigarrow ry+sz$, de $S_n \times S_n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On a

$$d\mu_n(x) = \frac{2^{n-2}\, s_{n-1}}{s_n^2} \, \frac{[\Delta(|x|,r,s)]^{n-2}}{(|rs|\,.\,|x|)^{n-1}} \, \chi(|x|,r,s)\, dx.$$

Démonstration. On peut supposer que l'on a $0 < r \leq s$. Soit t un nombre positif. Calculons $\omega(t) = \mu(\{x \ ; \ |x| \leq t\})$. On a

$$\omega(t) = \int_{S_n} \Big(\int_{S_n \cap \{y;\ |ry+sz| \leq t\}} d\sigma_n(y) \Big)\, d\sigma_n(z) \ ;$$

l'intégrale interne ne dépendant manifestement pas de z nous obtenons

$$\omega(t) = \int_{S_n \cap \{y;\ |ry+sz| \leq t\}} d\sigma_n(y)$$

où z est un point quelconque de S_n.

Clairement $\omega(t)$ est nul si t est inférieur à $s-r$ et vaut 1 si t est supérieur à $s+r$. Si l'on a $s-r < t < s+r$ on désigne par φ_o le nombre compris entre 0 et π tel que $t^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\varphi_o$. On a alors

$$\omega(t) = \frac{s_{n-1}}{s_n} \int_0^{\varphi_o} (\sin\varphi)^{n-1}\, d\varphi$$

(on intègre d'abord à $\langle y,z \rangle$ constant) et

$$rs \sin\varphi_o = 2\Delta(r,s,t).$$

On a donc

$$\omega'(t) = 2^{n-2}\,\frac{s_{n-1}}{s_n}\,\frac{t\,[\Delta(r,s,t)]^{n-2}}{(rs)^{n-1}}\,\chi(r,s,t).$$

Pour conclure il suffit de remarquer que la mesure μ_n est invariante par rotation

LEMME 3. Soient v et w deux nombres réels tels que $v < 0$, $w > -1$ et $2(v+w) < -1$. Posons

$$\lambda(s) = \begin{cases} \int_1^\infty (t^2-s^2)^v (t^2-1)^w\,dt & \text{lorsque } |s|<1 \\ \int_0^1 (s^2-t^2)^v (1-t^2)^w\,dt & \text{lorsque } |s|>1. \end{cases}$$

On a, lorsque s tend vers 1,

$$\lambda(s) = \begin{cases} O(1) & \text{lorsque } v+w>-1 \\ O\,[\log(1/|1-s|)] & \text{lorsque } v+w=-1 \\ O(|1-s|^{v+w+1}) & \text{lorsque } v+w<-1. \end{cases}$$

Démonstration. Etudions d'abord le cas où s tend vers 1 par valeurs supérieures. On a, lorsque s est inférieur à 2, $\lambda(s) \leq c\int_0^1 (s-t)^v\,(1-t)^w\,dt$, d'où

$$\lambda(s) = C\int_0^1 (s-1+t)^v\,t^w\,dt = C\,(s-1)^{v+w+1}\int_0^{\frac{1}{s-1}} (1+t)^v\,t^w\,dt$$

et l'on conclut facilement.

Etudions maintenant le cas où s tend vers 1 par valeurs inférieures. On a $\lambda(s) \leq \int_1^2 (t^2-s^2)^v (t^2-1)^w dt + \int_2^\infty (t^2-1)^{v+w}\,dt$ d'où

$\lambda(s) \leq C(1 + \int_1^2 (t-s)^v (t-1)^w\,dt) \leq C(1 + \int_0^1 (1-s+t)^v\,t^w\,dt)$ et l'on conclut comme précédemment.

4. DEMONSTRATIONS.

Dans ce qui suit C désigne une fonction strictement positive de α, β, n, deux occurences différentes de C pouvant désigner deux fonctions distinctes.

Calculons d'abord $\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dx$. On a

$$|F_{\beta,x}(t)|^2 = |t|^{2\beta} \iint_{S_{n-1}\times S_{n-1}} f(x+ty_1)\,\overline{f(x+ty_2)}\, d\sigma_{n-1}(y_1)\, d\sigma_{n-1}(y_2),$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_{\beta,x}(t)|^2\, dx = |t|^{2\beta} \iint_{S_{n-1}\times S_{n-1}} f * \check{f}(ty_1 \quad ty_2)\, d\sigma_{n-1}(y_1)\, d\sigma_{n-1}(y_2).$$

Utilisons maintenant le lemme 2, nous obtenons,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_{\beta,x}(t)|^2\, dx = C\,|t|^{2\beta} \int_{\mathbb{R}^n} f * \check{f}(x)\, \frac{[\Delta(|x|,t,t)]^{n-3}}{(t^2|x|)^{n-2}}\, \chi(|x|,t,t)\, dx$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dx = C \int_{\mathbb{R}^n} f * \check{f}(x) \left[\int_{\frac{|x|}{2}}^{\infty} \frac{t^{2(\beta-n+2)}}{|x|}(4t^2-|x|^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt\right] dx$$

$$= C\left[\int_{1/2}^{\infty} t^{2(\beta-n+2)}\,(4t^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\, dt\right]\left[\int_{\mathbb{R}^n} f * \check{f}(x)\,|x|^{2\beta-n+1}\, dx\right].$$

La première intégrale converge car on a $\beta < \frac{n-2}{2}$.

Evaluons maintenant l'expression

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^{\infty} h^{2(k-\alpha)-1}\left(\int_{\mathbb{R}} |u_k(.,h) * F_{\beta,x}(t)|^2\, dt\right) dh\right] dx\ ,$$

où k est le plus petit entier strictement supérieur à α. On a

$$F_{\beta,x} * u_k(.,h)(\tau) = \iint_{\mathbb{R}\times S_{n-1}} |t|^{\beta}\, f(x+ty)\, u_k(\tau-t\ ,\ h)\, dt\, d\sigma_{n-1}(y),$$

d'où

$$|F_{\beta,x} * u_k(.,h)(\tau)|^2 = \iiiint_{\mathbb{R}^2\times S^2_{n-1}} |t_1t_2|^{\beta} f(x+t_1y_1)\,\overline{f(x+t_2y_2)}\ \times$$

$$u_k(\tau-t_1,h)\, u_k(\tau-t_2,h)\, dt_1 dt_2\, d\sigma_{n-1}(y_1)\, d\sigma_{n-1}(y_2)$$

d'où, compte tenu du lemme 1,

$$\int_{\mathbb{R}} \left| F_{\beta,x} * u_k(.,h)(\tau) \right|^2 d\tau = \iiiint_{\mathbb{R}^2 \times S^2_{n-1}} |t_1 t_2|^{\beta} f(x+t_1 y_1)\, \overline{f(x+t_2 y_2)} \times$$

$$u_{2k}(t_1-t_2, 2h)\, dt_1 dt_2 d\sigma_{n-1}(y_1)\, d\sigma_{n-}(y_2).$$

Si nous posons

$$A(\beta,h) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \left| F_{\beta,x} * u_k(.,h)(\tau) \right|^2 dx\, d\tau$$

et

$$\varphi(x) = f * \check{f}(x)$$

nous obtenons

$$A(\beta,h) = \iiiint_{\mathbb{R}^2 \times S^{n-1}} |t_1 t_2|^{\beta} \varphi(t_1 y_1 - t_2 y_2) u_{2k}(t_1-t_2, 2h) dt_1 dt_2 d\sigma_{n-1}(y_1) d\sigma_{n-1}(y_2).$$

Utilisons à nouveau le lemme 2, il vient,

$$A(\beta,h) = C \iint_{\mathbb{R}^2} |t\ t_2|^{\beta} u_{2k}(t_1-t_2, 2h) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{(\Delta(|x|, t_1, t_2))^{n-3}}{(|t_1 t_2| . |x|)^{n-2}} \chi(|x|, t_1, t_2)\, dx \right] dt_1\, dt_2.$$

Utilisant les propriétés d'homogénéité, nous obtenons

$$A(\beta,h) = C \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, |x|^{2(\beta-k)+1-n} K\left(\frac{2h}{|x|}\right) dx,$$

où l'on a posé

$$K(\tau) = \iint_{\mathbb{R}^2} |t_1 t_2|^{\beta-n+2} u_{2k}(t_1-t_2, \tau)(\Delta(1,t_1,t_2))^{n-3} \chi(1,t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

Admettons provisoirement que l'on a

$$|K(\tau)| \leq C/(1+\tau^{2k+1}).$$

Alors

$$\int_0^{\infty} h^{2(k-\alpha)-1} A(\beta,h)\, dh \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\, |x|^{2(\beta-k)-n+1} \left[\int_0^{\infty} \frac{h^{2(k-\alpha)-1}}{1+\left(\frac{2h}{|x|}\right)^{2k+1}} dh \right] dx$$

$$\leq C \left[\int_0^{\infty} \frac{\tau^{2(k-\alpha)-1}}{1+\tau^{2k+1}} d\tau \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\, |x|^{2(\beta-\alpha)-n+1} dx \right].$$

La première intégrale converge, collectant les deux estimations qui précèdent, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{\Lambda^{2,2}_\alpha}\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f * \check{f}(x)|\,|x|^{2(\beta-\alpha)-n+1}(1+|x|^{2\alpha})dx.$$

Reste à démontrer la majoration de $|K(\tau)|$. Par changement de variables nous obtenons

$$K(\tau) = C \iint_{\{(s,t)\in R^2;(t^2-1)(1-s^2)>0\}} |t^2-s^2|^{\beta-n+2} u_{2k}(s,\tau)\,|(t^2-1)(1-s^2)|^{\frac{n-3}{2}}\, ds\, dt.$$

Posons

$$L(s) = \begin{cases} (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} \displaystyle\int_1^\infty (t^2-s^2)^{\beta-n+2}(t^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\, dt & \text{si} \quad |s|<1 \\ (s^2-1)^{\frac{n-3}{2}} \displaystyle\int_0^1 (s^2-t^2)^{\beta-n+2}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt & \text{si} \quad |s|>1, \end{cases}$$

ces intégrales convergent car on a $\beta < \frac{n-2}{2}$ et $n \ge 2$.

La fonction L est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-1\,,\,1[$, le lemme 3 montre qu'elle est intégrable au voisinage de -1 et 1 lorsque l'on a $\beta > -1$ de plus lorsque s tend vers $+\infty$ on a $L(s) = O(s^{2\beta-n+1})$ ce qui montre que L est intégrable. On a

$$K(\tau) = C \int_{-\infty}^{+\infty} u_{2k}(s,\tau)\, L(s)\, ds.$$

Lorsque τ tend vers 0, $K(\tau)$ tend, à un coefficient près, vers la dérivée d'ordre $2k$ de L à l'origine. De plus

$$|K(\tau)| \le C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{(\tau^2+s^2)^{k+1}}\, |L(s)|\, ds$$

ce qui montre que $|K(\tau)|$ est $O(|\tau|^{-2k-1})$ lorsque τ tend vers $+\infty$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Démontrons maintenant le premier corollaire. Observons que l'hypothèse

$f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ implique que $f * \check{f}$ appartient à $L^r(\mathbb{R}^n) \cap L^s(\mathbb{R}^n)$ où r et s sont les nombres définis par les égalités $\frac{1}{r} = \frac{2}{p} - 1$, $\frac{1}{s} = \frac{2}{q} - 1$. Plus précisément on a

$$\|f * \check{f}\|_r \leq \|f\|_p^2 \quad \text{et} \quad \|f * \check{f}\|_s \leq \|f\|_q^2.$$

Appelons r' et s' les exposants conjugués de r et s. On a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|F_{\beta,x}\|^2_{\Lambda_\alpha^{2,2}(\mathbb{R})} dx \leq C \|f\|_p^2 \left(\int_{|x|>1} |x|^{(2\beta-n+1)r'} dx \right)^{1/r'}$$
$$+ C\|f\|_q^2 \left(\int_{|x|<1} |x|^{(2\beta-2\alpha-n+1)s'} dx \right)^{1/s'} ;$$

la première intégrale converge si $\beta < n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$, la seconde si $\alpha < \beta + \frac{1}{2} - n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})$. On obtient donc un résultat si l'on a

$$-1 < \beta < \inf\left(\frac{n-2}{2}, n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

et

$$0 < \alpha < \beta + \frac{1}{2} - n\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right).$$

Démontrons le second corollaire. Soit f un élément de $L^q(\mathbb{R}^n)$, multiplions cette fonction par la fonction indicatrice d'une boule et appliquons lecorollaire précédent en prenant $p = 1$: si α appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2} - n(\frac{1}{q} - \frac{1}{2})\right[$ on peut choisir un β convenable. On conclut en utilisant l'inclusion $\Lambda_\alpha^{2,2}(\mathbb{R}) \subset \Lambda^{\infty,\infty}_{\alpha-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

[1] TAIBLESON, M. H. On the theory of Lipschitz spaces of distributions of Euclidean n-space, I. J. Math. Mech. 13 (1964), 407-480.