n°7

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N^{os} 165 - 75.46

Daniel PERRIN

Schémas en groupes quasi-compacts sur un corps et Groupes henséliens

Publication Mathématique d'Orsay

Schémas en groupes quasi-compacts sur un corps

(1ère partie)

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le résultat essentiel prouvé dans cet article est le suivant : si k est un corps, tout k-schéma en groupes quasi-compact est limite projective filtrante de groupes algébriques sur k.

Ce résultat est classique lorsque G est affine (DG III 3.7.5) et était conjecturé dans le cas général (EGA IV 8.13.6).

Il admet comme corollaires immédiats un certain nombre de résultats connus dans le cas algébrique (Théorème de Chevalley, de Cartier ... cf V).

La méthode de démonstration consiste à construire des sous-schémas en groupes H_α, invariants dans G, définis par des idéaux de type fini et en nombre suffisant pour que $\bigcap_\alpha H_\alpha$ soit réduit à l'élément neutre. On a en effet alors $G \simeq \varprojlim G/H_\alpha$ au sens des faisceaux fpqc.

Les H_α sont construits comme stabilisateurs de fonctions rationnelles (IV.1) à l'aide d'un théorème de représentabilité (I.2).

Le point essentiel est alors de prouver la représentabilité des faisceaux fpqc G/H_α. On se ramène au cas où G est connexe en construisant la composante neutre G^o (II.2) puis le quotient G/G^o (V.1) et en utilisant alors le résultat dans le cas connexe (V.2). Dans le cas intègre (connexe et réduit) on utilise une technique de passage au quotient générique qui fait appel à la notion de groupe rationnel (ce qu'A. Weil appelait autrefois "loi de composition normale") et en approximant directement les groupes rationnels (III.2) puis en reconstruisant les groupes algébriques à partir de leur point générique (III.3).

Il semblerait naturel de traiter le cas connexe non réduit de la même manière, mais des difficultés techniques liées au défaut de platitude rendent caducs les théorèmes de passage au quotient utilisés (I.3).

On utilise dans ce dernier cas un théorème dû à Grothendieck qui permet de passer au quotient lorsqu'on sait le faire modulo un idéal nilpotent ([DG] III 2.7.1) et on se ramène alors au cas réduit en utilisant l'intermédiaire du sous-groupe H_αGréd (IV.2) qui est défini par un idéal nilpotent et l'isomorphisme

$$H_\alpha \mathrm{Gréd}/H_\alpha \simeq \mathrm{Gréd}/H_\alpha \cap \mathrm{Gréd}$$

Je tiens à remercier Michel Raynaud de l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ce travail. Nombre d'idées lui sont dues et les techniques utilisées dans cet article lui doivent beaucoup. De plus, il a lu avec soin et patience les nombreuses versions préliminaires de ce texte.

I - P R E L I M I N A I R E S

-:-:-:-:-:-:-

§1 La propriété (P).

Définition 1.1

Soit A un anneau. On dit que A vérifie (P) et on écrit $P(A)$ si et seulement si tout diviseur de zéro dans A est nilpotent.

Définition 1.2

Soit X un schéma. On dit que X vérifie (P) et on écrit $P(X)$ si et seulement si, pour tout ouvert affine de X d'anneau A on a $P(A)$.

Remarque :

On a $P(\mathrm{spec}\ A) \Longrightarrow P(A)$. Nous prouverons plus loin la réciproque.

Proposition 1.3

Si A est noethérien, on a :

$P(A) \Longleftrightarrow A$ irréductible et sans composantes immergées $\Longleftrightarrow \mathrm{Ass}\ A = \{\mathfrak{p}\}$.

Proposition 1.4

1) $P(A) \Longrightarrow A$ irréductible (A est un anneau)

2) $P(X) \Longrightarrow X$ irréductible (X est un schéma)

Démonstration :

1) Soit $\mathrm{Nil}(A)$ le nilradical de A . Si $ab \in \mathrm{Nil}A$, $a^n b^n = 0$ donc a^n ou b^n est diviseur de zéro ou nul, donc nilpotent. $\mathrm{Nil}(A)$ est alors premier, donc A irréductible.

2) Si X n'est pas irréductible, il existe U,V ouverts affines non vides avec $U \cap V = \emptyset$. Mais alors, $U \cup V$ est affine et non irréductible ce qui contredit 1).

Proposition 1.5

1) Si $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux injectif, $P(B) \Longrightarrow P(A)$.

2) Si $A = \varinjlim A_i$ avec $A_i \subset A$

$$P(A) \Longleftrightarrow [\forall i \quad P(A_i)]$$

3) $P(A) \Longrightarrow [\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \quad P(A_{\mathfrak{p}})]$.

Remarquons que la réciproque de 3) est fausse (par exemple $A = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$) , cependant on a la

Proposition 1.6

Si A est irréductible,

$$P(A) \Longleftrightarrow [\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A \quad P(A_{\mathfrak{p}})] .$$

Démonstration :

Seule l'implication $\Longleftarrow$ est non triviale. Supposons $ab = 0$ avec $a,b \in A$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Soit $I = \operatorname{Ann}(b)$, $I \neq A$ car $b \neq 0$, donc il existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$ tel que $I \subset \mathfrak{p}$.

Dans $A_{\mathfrak{p}}$, $ab = 0$ et $b \neq 0$ car $I \subset \mathfrak{p}$. Donc a est nilpotent dans $A_{\mathfrak{p}}$: $\exists\, s \notin \mathfrak{p}$ $sa^n = 0$ dans A et donc $s^n a^n = 0$ dans A . Mais $\operatorname{Nil} A$ est premier et $s \notin \mathfrak{p}$ donc $s \notin \operatorname{Nil} A$ et donc a est nilpotent. De même, $b \in \operatorname{Nil} A$.

Corollaire 1.7

Si A est un anneau, $P(A) \Longleftrightarrow P(\operatorname{spec} A)$.

Proposition 1.8

Soit k un corps, K et L deux k-algèbres de dimension zéro. Alors, les anneaux locaux de $K \otimes_k L$ vérifient la propriété (P).

Démonstration :

1) On peut supposer K et L locales.

2) K et L sont alors limites inductives de sous k-algèbres locales artiniennes essentiellement de type fini sur k .

Le résultat découle alors de deux lemmes :

Lemme 1.8.1

Si K et L sont deux extensions de k, les anneaux locaux de $K \otimes_k L$ sont irréductibles.

En effet, on décompose $k \to L$ en $k \to M \to N \to L$ avec $k \to M$ transcendante pure, $M \to N$ algébrique séparable et $N \to L$ radicielle.

$K \otimes_k M$ est un localisé d'anneau de polynômes, donc intègre et normal.

$K \otimes_k N$ est ind-étale sur $K \otimes_k M$, donc normal. Enfin $K \otimes_k L$ est plat et radiciel sur $K \otimes_k N$ donc ses anneaux locaux sont irréductibles.

Lemme 1.8.2

Soit k un corps, K et L deux k-algèbres locales artiniennes essentiellement de type fini sur k, alors $K \otimes_k L$ est un anneau de Cohen-Macaulay. Cela résulte de EGA IV 6.3.5 et 6.7.1.

Proposition 1.9

Soit X un schéma vérifiant $P(X)$, U un ouvert topologiquement dense dans X ; alors U est schématiquement dense dans X (EGA IV 11.10.2).

Démonstration :

Soit V un ouvert affine non vide de X, $V = \operatorname{spec} A$. On doit montrer que la flèche $\Gamma(V) \to \Gamma(V \cap U)$ est injective.

Recouvrons $V \cap U$ par des ouverts affines $V_f = \operatorname{spec} A_f$ et soit $s \in A$ tel que $s|V \cap U = 0$.

On a $\forall f \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad f^n s = 0$.

Si $s \neq 0$, comme on a $P(A)$, f est nilpotent donc tous les V_f sont vides, donc $V \cap U$ est vide, ce qui contredit le fait que U est dense dans X.

Corollaire 1.10

Soit X un schéma vérifiant $P(X)$ et soit $x \in X$. Le morphisme $\operatorname{spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ est schématiquement dominant (EGA IV 11.10.2).

Démonstration :

Par 1.9 et 1.4 on se ramène au cas $X = \operatorname{spec} A$. Cela résulte alors du fait que si S est une partie multiplicative de A, telle que $A_S \neq 0$, $A \to A_S$ est injectif.

§2 Théorème de représentabilité.

Considérons la situation suivante :

Soit k un corps, A une k-algèbre, B_o une k-algèbre de type fini, $B = B_o \otimes_k A$. On pose $S = \operatorname{spec} A$, $X_o = \operatorname{spec} B_o$, $X = \operatorname{spec} B$.

Rappelons que si U est un ouvert de X, U est schématiquement dense dans X relativement à S si pour tout $s \in S$, $U_s = U \cap X_s$ est schématiquement dense dans la fibre X_s ou ce qui revient au même si $\operatorname{Ass}[B \otimes_A k(s)] \subset U_s$. (cf EGA IV 11.10.10).

Si U est de la forme X_b avec $b \in B$, ceci revient à dire que b est non diviseur de zéro dans les fibres $B \otimes_A k(s)$.

Lemme 2.1

Avec les notations précédentes, soient m, $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$ avec $\mathfrak{p} \subset m$ et soit U un ouvert de X. Alors, si $U \supset \operatorname{Ass} B \otimes_A k(m)$, $U \supset \operatorname{Ass} B \otimes_A k(\mathfrak{p})$.

Démonstration :

1) On peut supposer k algébriquement clos (on fait l'extension $k \to \bar{k}$ avec une clôture algébrique et on utilise Cohen-Seidenberg).

2) Quitte à remplacer A par $A/\mathfrak{p}$, on peut supposer que $\mathfrak{p} = (0)$, donc A intègre.

3) Soit alors $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} k(\mathfrak{p}) \otimes_k B_o = \operatorname{Ass} k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$.

Soit $\mathfrak{q}_o$ son image dans spec B_o , $\mathfrak{q}_o \in \mathrm{Ass}\, B_o$ (EGA IV 3.3.6). De plus (loc. cit.) $\mathfrak{q}$ est dans $\mathrm{Ass}\, k(\mathfrak{p}) \otimes_k k(\mathfrak{q}_o)$, mais puisque k est algébriquement clos, donc $k(\mathfrak{p}) \otimes_k k(\mathfrak{q}_o)$ intègre, $\mathfrak{q}$ est l'idéal (0) dans cet anneau. Comme $\mathfrak{p} = (0)$ dans A , $\mathfrak{q}$ est encore l'idéal (0) dans $A \otimes_k k(\mathfrak{q}_o)$.

On a d'autre part les inclusions

$$\mathrm{spec}\, k(m) \otimes_k k(\mathfrak{q}_o) \subset \mathrm{spec}\, A \otimes_k k(\mathfrak{q}_o) \subset \mathrm{spec}\, A \otimes_k B_o$$

l'idéal (0) de $k(m) \otimes_k k(\mathfrak{q}_o)$ correspond à un idéal de $k(m) \otimes_k B_o$ qui est dans $\mathrm{Ass}\, k(m) \otimes_k B_o$ (loc. cit.). Mais comme n est dans $\mathrm{spec}\, A \otimes_k k(\mathfrak{q}_o)$ n est une spécialisation de $\mathfrak{q}$.

Or, par hypothèse, $n \in U$, donc $\mathfrak{q} \in U$.

Lemme 2.2

Avec les notations précédentes, soit $b \in B$, $s \in S$. On suppose b non diviseur de zéro dans $B \otimes_A k(s)$. Alors, il existe un ouvert ω de S , contenant s tel que b soit non diviseur de zéro dans les fibres de $X \to S$ au dessus de ω .

Démonstration :

Ecrivons $A = \varinjlim A_i$ avec $A_i \subset A$, A_i noethérien. Alors si $B_i = A_i \otimes_k B_o$, $B = \varinjlim B_i$. Soit $S_i = \mathrm{spec}\, A_i$, $X_i = \mathrm{spec}\, B_i$, s_i l'image de s dans S_i . On peut supposer que $b \in B_i$. On a,

$$B_i \otimes_{A_i} k(s_i) = B_o \otimes_k k(s_i) \hookrightarrow B_o \otimes_k k(s) = B \otimes_A k(s)$$

donc b est non diviseur de zéro dans $B_i \otimes_{A_i} k(s_i)$. En vertu de 2.1 b est non diviseur de zéro dans les fibres de $X_i \to S_i$ au-dessus de $\mathrm{spec}\, \mathcal{O}_{S_i,s_i}$.
Soit $V_i = \{t_i \in S_i \mid b$ non diviseur de zéro dans $B_i \otimes_{A_i} k(t_i)\}$ d'après EGA IV 11.9.17.1, V_i est constructible. Comme $V_i \supset \mathrm{spec}\, \mathcal{O}_{S_i,s_i}$ et que A_i est noethérien, $V_i \supset \omega_i$ ouvert de S_i avec $s_i \in \omega_i$.

Soit $\omega = p_i^{-1}(\omega_i)$ avec $p_i : S \to S_i$ le morphisme canonique. Alors, si

$t \in \omega$ et $t_i = p_i(t)$ on a $B_i \otimes_{A_i} k(t_i) \to B \otimes_A k(t)$ plat, donc b est non diviseur de zéro dans $B \otimes_A k(t)$.

<u>Lemme</u> 2.3

Soit k un corps, B une k-algèbre noethérienne, $X = \operatorname{spec} B$, $U \subset X$ un ouvert schématiquement dense dans X. Alors, il existe $b \in B$ tel que $X_b \subset U$ et X_b schématiquement dense dans X.

<u>Démonstration</u> :

Cela résulte immédiatement du lemme d'évitement.

<u>Proposition</u> 2.4

Avec les notations de 2.1 et 2.2, soit $U \subset X$ un ouvert quasi-compact et schématiquement dense dans X relativement à S.

Alors, localement sur S, il existe $b \in B$ tel que $X_b \subset U$ et X_b schématiquement dense dans X relativement à S.

Cela résulte immédiatement de 2.3 et 2.2.

Nous pouvons maintenant prouver le résultat principal de ce paragraphe.

<u>Théorème</u> 2.5

Soit k un corps, X_o un k-schéma, S un k-schéma quasi-compact, $X = X_o \times_k S$. Soit U un ouvert de X quasi-compact et schématiquement dense dans X relativement à S.

Soient h_1, h_2 deux S-fonctions rationnelles sur X, définies sur U.

Soit R le sous-foncteur de S des coïncidences de h_1 et h_2, i.e. si $T \in \underline{Sch/S}$

$$R(T) = \{u \in S(T) \mid u^* h_1 = u^* h_2\}$$

où $u^*h_1 = u^*h_2$ signifie que ces deux fonctions coïncident sur un ouvert relativement schématiquement dense de $X_T = X \times_S T$, ou, ce qui revient au même, sur $u^{-1}(U)$.

Alors R est un sous-schéma fermé de S défini par un idéal de type fini.

Démonstration :

1) L'assertion est locale sur S pour la topologie de Zariski. On peut donc supposer S affine $S = \operatorname{spec} A$.

2) Comme U est quasi-compact, il existe un nombre fini d'ouverts affines X_{oi} de X_o tels que les $X_{oi} \times_k S$ recouvrent U. On peut alors supposer X_o affine d'anneau B_o. En effet, si R_i est le sous-schéma fermé de S relatif à X_{io}, on a $R = \bigcap_{i=1}^{n} R_i$.

3) On peut supposer B_o de type fini sur k. Ecrivons $B_o = \varinjlim B_i$, $B_i \subset B_o$, B_i de type fini sur k.

Soient $X_{io} = \operatorname{spec} B_i$, $\varphi_i : X_o \to X_{io}$, $X_o = \varprojlim X_{io}$ donc $X = \varprojlim X_i$ avec $X_i = X_{io} \times_k S$. Comme U est quasi-compact, il provient d'un ouvert U_i de X_i, quasi-compact, pour i assez grand. On peut supposer, de plus, que h_1 et h_2 proviennent de fonctions h_{1i} et h_{2i} sur U_i. Enfin U_i est schématiquement dense dans X_i relativement à S. En effet, comme $X_i \to S$ est plat et de présentation finie, cela se voit sur les fibres (EGA IV 11.10.10). Soit donc $s \in S$, $X_{i_s} = \operatorname{spec} B_i \otimes_k k(s)$, $U_{i_s} = U_i \cap X_{i_s}$. Soit V_{i_s} un ouvert affine de X_{i_s}, V_s son image réciproque dans X_s.

Comme $B_i \subset B_o$, la flèche $B_i \otimes_k k(s) \to B_o \otimes_k k(s)$ est injective, et de même $\beta : \Gamma(V_{i_s}) \to \Gamma(V_s)$ est injective.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(V_{i_s}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \Gamma(V_{i_s} \cap U_{i_s}) \arrow[d, "\beta'"] \\ \Gamma(V_s) \arrow[r, "\alpha'"] & \Gamma(V_s \cap U_s) \end{tikzcd} .$$

Comme U_s est schématiquement dense dans X_s, α' est injectif, donc $\alpha' \circ \beta$, donc α, ce qui prouve que U_{i_s} est schématiquement dense dans X_{i_s}

Soit alors R_i le sous-foncteur de S défini par les coïncidences de h_{1i} et h_{2i}.

Il est clair que $R_i \subset R$.

De plus $R_i = R$. En effet, soit $u \in R(T)$, on peut supposer T affine. Soit $V = u^{-1}(U)$ et $V_i = u^{-1}(U_i)$. Soit $p_i : X \to X_i$, on a $V = p_i^{-1}(V_i)$. Comme T est plat sur k , $\Gamma(X_{i_T}) \to \Gamma(X_T)$ est injectif et donc aussi $\Gamma(V_i) \to \Gamma(V)$. Par conséquent $u^*(h_{1i}) = u^*(h_{2i})$ et $u \in R_i(T)$. On peut donc supposer B_o de type fini sur k .

4) On est dans la situation du début du paragraphe 2. En vertu de 2.4, quitte à restreindre S , on peut supposer qu'il existe $b \in B = B_o \otimes_k A$ tel que $X_b \subset U$ et b non diviseur de zéro dans les fibres $B_o \otimes_A k(s)$ pour tout s de S , ou encore, b universellement non diviseur de zéro.

Posons $h_1|X_b = \frac{f_1}{b^n}$, $h_2|X_b = \frac{f_2}{b^n}$ $f_1, f_2 \in B$.

Soit R' le sous-foncteur de S des coïncidences de f_1 et f_2 , alors $R = R'$.

Il est clair que $R' \subset R$.

Réciproquement, si $u \in R(T)$, $T = \operatorname{spec} C$ avec C une A-algèbre $u : A \to C$, on a $u^*h_1 = u^*h_2$ sur $u^{-1}(U) \subset T \times_S X$, donc a fortiori sur $(T \times_S X)_{1 \otimes b}$. Autrement dit $\frac{f_1}{b^n} \otimes 1 = \frac{f_2}{b^n} \otimes 1$ dans $(B \otimes_A C)_{b \otimes 1}$ ou encore $\frac{f_1 - f_2 \otimes 1}{(b \otimes 1)^n} = 0$.

Mais $b \otimes 1$ est non diviseur de zéro dans $B \otimes_A C$, donc $f_1 \otimes 1 = f_2 \otimes 1$ et $u \in R'(T)$.

5) Le théorème se réduit alors au lemme suivant

<u>Lemme</u> 2.5.1

Soit A un anneau, B une A-algèbre libre ; $f_1, f_2 \in B$.

Soit $S = \operatorname{spec} A$, $X = \operatorname{spec} B$, R le sous-foncteur de S des coïncidences de f_1 et f_2 .

Alors R est un sous-schéma fermé de S défini par un idéal de type fini.

Démonstration :

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de B sur A ,

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad ; \quad f_2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \ .$$

Alors, $R = \operatorname{spec} A/I$ avec $I = (\lambda_1-\mu_1,\dots,\lambda_n-\mu_n)$.

§3 Théorème de passage au quotient.

Définition 3.1

Soit k un anneau, K une k-algèbre, I un idéal de $K \otimes_k K$. On dit que I est un équidéal sur K si $\operatorname{spec} K \otimes_k K/I$ est une relation d'équivalence sur $\operatorname{spec} K$.

Remarque 3.2

Des propriétés des relations d'équivalence on déduit aussitôt que I est un équidéal si et seulement si il vérifie les propriétés suivantes

1) si $\Sigma\, x \otimes y \in I$, $\Sigma\, xy = 0$

2) si $\Sigma\, x \otimes y \in I$, $\Sigma\, y \otimes x \in I$

3) si $\Sigma\, x \otimes y \in I$, $\Sigma\, x \otimes 1 \otimes y \in I \otimes K + K \otimes I$.

Lemme 3.3

Avec les notations précédentes, supposons que I soit un idéal de type fini, $I = (f_1,\dots,f_n)$ et supposons que $K = \varinjlim K_i$. Alors pour i assez grand, $f_1,\dots,f_n$ proviennent de $K_i \otimes_k K_i$ et l'idéal qu'elles engendrent est un équidéal sur K_i .

Proposition 3.4

Soit k un corps, K une extension de k , I un équidéal sur K . On suppose I de type fini.

Soit K' le noyau de la double flèche canonique

$$K \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} K \underset{k}{\otimes} K/I \text{ .}$$

Alors K' est une sous-extension de K de type fini sur k et on a un isomorphisme $K \underset{K'}{\otimes} K \simeq K \underset{k}{\otimes} K/I$.

Démonstration :

1) Supposons d'abord K de type fini sur k engendré par $x_1,\dots,x_n$. Soit A la sous-k-algèbre de K engendrée par les x_i . A est intègre de type fini sur k et son corps de fractions est K . En vertu de 3.3, quitte à remplacer A par une algèbre A_a avec $a \neq 0$, on peut supposer que les générateurs $f_1,\dots,f_p$ de I sont dans $A \underset{k}{\otimes} A$ et définissent un équidéal sur A . Quitte encore à se localiser, on peut, en vertu du théorème de platitude générique (EGA IV 6.9.1) supposer que $i_1 : A \to A \underset{k}{\otimes} A/I$ est plat. On peut alors appliquer SGA Exp. V Th. 8.1. Posons $X = \operatorname{spec} A$, quitte à restreindre X , on a un quotient X' intègre. Posons $R = \operatorname{spec} A \underset{k}{\otimes} A/I$. En vertu de SGA loc. cit. $R \simeq X \underset{X'}{\times} X$. Si K' désigne le corps des fractions de X', il en résulte que $K \underset{K'}{\otimes} K \simeq K \underset{k}{\otimes} K/I$ et que K' est le noyau de (i_1,i_2) .

2) Dans le cas général, écrivons $K = \varinjlim K_i$ avec K_i sous-extension de K , de type fini sur k . D'après 3.3 I provient d'un équidéal sur K_i noté encore I et on a donc, si K_i' est le noyau de la double flèche

$$K_i \rightrightarrows K_i \underset{k}{\otimes} K_i/I$$

$K_i \underset{K_i'}{\otimes} K_i \simeq K_i \underset{k}{\otimes} K_i/I$.

Si $K' = \operatorname{Ker}(i_1,i_2)$, $K \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} K \underset{k}{\otimes} K/I$ on a $K' = \varinjlim K_i'$.

Mais alors, $K \underset{K'}{\otimes} K \simeq K \underset{k}{\otimes} K/I$.

En effet, on a une flèche surjective $K \underset{K'}{\otimes} K \to K \underset{k}{\otimes} K/I$. Réciproquement, soit f_α un générateur de I, $f_\alpha \in K_i \underset{k}{\otimes} K_i$ et donc est nul dans $K_i \underset{K_i'}{\otimes} K_i$. Mais, comme $K_i' \subset K'$, on a une flèche $K_i \underset{K_i'}{\otimes} K_i \to K \underset{K'}{\otimes} K$ et donc f_α est nul dans

dans $K \otimes_{K'} K$, d'où un homomorphisme en sens inverse $K \otimes_k K/I \to K \otimes_{K'} K$.

3) Prouvons enfin que K' est de type fini sur k .

On a le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 3.4.1

Soit $k \to K'$ une extension de corps. Pour que K' soit de type fini sur k , il faut et il suffit que le noyau de l'homomorphisme $\mu' : K' \otimes_k K' \to K'$, $x \otimes y \mapsto xy$ soit un idéal de type fini.

Cela résulte de [F] 3.6.

Soit alors $\mathfrak{J} = \operatorname{Ker} \mu'$, $\mu' : K' \otimes_k K' \to K'$.

On a $\mathfrak{J} = I \cap (K' \otimes_k K')$.

Soit i tel que $f_1, \dots, f_n \in K_i \otimes_k K_i$ et soient $g_1, \dots, g_p$ des générateurs du noyau de $\mu'_i : K'_i \otimes_k K'_i \to K'_i$. Comme $K_i \otimes_{K'_i} K_i \cong K_i \otimes_k K_i/I$, les g_k engendrent l'idéal I dans $K_i \otimes_k K_i$, donc dans $K \otimes_k K$. On a donc $g_1, \dots, g_p \in J$ qui engendrent I , mais comme $K \otimes_k K$ est libre sur $K' \otimes_k K'$, les g_k engendrent l'idéal J .

<u>Théorème</u> 3.5

Soit k un corps, K et K_o deux extensions de k , géométriquement intègres, de sorte que $K \otimes_k K_o$ est intègre. Soient $f_1, \dots, f_n \in K \tilde{\otimes}_k K_o$, corps des fractions de $K \otimes_k K_o$.

Alors, il existe une plus petite sous-extension K' de K telle que $f_1, \dots, f_n \in K' \tilde{\otimes}_k K_o$.

De plus

1) K' est de type fini sur k .

2) Si $\alpha : K \to L$ est un homomorphisme de corps et si L' est la plus petite sous-extension de L telle que $\alpha \tilde{\otimes} 1(f_i) \in L' \tilde{\otimes}_k K_o$, on a $L' = \alpha(K')$.

3) Si $K_o \subset L_o$, et si K'' est la plus petite sous-extension relative aux $f_i \in K \tilde{\otimes}_k L_o$, on a $K' = K''$.

Démonstration :

1) On peut supposer $n = 1$, $f_i = f$.

2) Considérons $K \otimes_k K = A$ et les deux flèches

$$i_1, i_2 : K \otimes_k K_o \rightrightarrows (K \otimes_k K) \otimes_k K_o .$$

Soient f_1, f_2 les images de f par i_1, i_2.

Posons $f = \frac{g}{h}$ avec $g, h \in K \otimes_k K_o$, $h \neq 0$.

Posons $X_o = \operatorname{spec} K_o$ et $X = \operatorname{spec}(K \otimes_k K) \otimes_k K_o = X_o \times_k S$, avec $S = \operatorname{spec} A$.

Comme $K \otimes_k K_o$ est intègre, l'ouvert $U_o = \operatorname{spec}(K \otimes_k K_o)_h$ est schématiquement dense dans $\operatorname{spec} K \otimes_k K_o$ et donc, puisque K est un corps, schématiquement dense relativement à K.

Il en résulte que les ouverts U_1 et U_2 de X définis par h_1 et h_2 sont schématiquement denses relativement à S et donc aussi $U = U_1 \cap U_2$. On peut donc appliquer le théorème de représentabilité 2.5.

Le sous-foncteur R de S des coïncidences de f_1 et f_2 est donc un sous-schéma fermé de S défini par un idéal I. De plus, il est clair que R est une relation d'équivalence sur S donc I un équidéal. On peut donc appliquer 3.4. Soit $K' = \operatorname{Ker}(j_1, j_2)$

$$j_1, j_2 : K \rightrightarrows K \otimes_k K/I$$

K' est une sous-extension de K et on sait que $K \otimes_{K'} K \simeq K \otimes_k K/I$.

a) Montrons tout d'abord que $f \in K' \tilde{\otimes}_k K_o$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \rightrightarrows K \otimes_{K'} K$$

d'où aussi $0 \longrightarrow K' \otimes_k K_o \longrightarrow K \otimes_k K_o \rightrightarrows K \otimes_{K'} K \otimes_k K_o$.

Soit $p : \operatorname{spec} K \otimes_k K_o \to \operatorname{spec} K' \otimes_k K_o$ et soit $U'_o = p(U_o)$, c'est un ouvert (EGA IV 2.4.10). De plus comme p est affine, on peut supposer U'_o affine, quitte à le remplacer par un ouvert plus petit.

p est fidèlement plat et donc $p_{|U_o} : U_o \to U'_o$ est fidèlement plat et quasi-compact. De plus $U_o \underset{U'_o}{\times} U_o$ est un ouvert de $\operatorname{spec} K \underset{K'}{\otimes} K \underset{k}{\otimes} K_o$ contenu dans U. Comme les deux images réciproques de f sont égales dans U, elles le sont a fortiori sur $U_o \underset{U'_o}{\times} U_o$ et donc par descente, f provient d'une fonction sur U'_o i.e. d'un élément de $K' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K_o$.

b) K' est le plus petit possible. En effet, si $K'' \subset K$ est tel que $f \in K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K_o$, les deux images réciproques de f coïncident dans $K \underset{K''}{\otimes} K \underset{k}{\otimes} K_o$ et comme R est le plus grand possible, on a $\operatorname{spec} K \underset{K''}{\otimes} K \subset R = \operatorname{spec} K \underset{K'}{\otimes} K$ et par conséquent $K' \subset K''$.

c) K' est de type fini.

Ecrivons $$f = \frac{\Sigma\, x_i \otimes y_i}{\Sigma\, z_j \otimes t_j} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots,n \\ j = 1,\dots,m \end{array}$$

Soit $K'' = k(x_1,\dots,x_n, z_1,\dots,z_m)$.

Alors $f \in K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K_o$ et donc $K' \subset K''$ ce qui prouve que K' est de type fini sur k.

d) Soit $\alpha : K \to L$ et L' la sous-extension minimale de L telle que $\alpha \tilde{\otimes} 1(f) = g \in L' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K_o$. Tout d'abord, $g \in \alpha(K') \underset{k}{\tilde{\otimes}} K_o$, et donc $L' \subset \alpha(K')$. Considérons d'autre part le diagramme

$$\begin{tikzcd} R_K \subset \operatorname{spec} K \underset{k}{\otimes} K \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \operatorname{spec} K \\ R_L \subset \operatorname{spec} L \underset{k}{\otimes} L \arrow[u, "u"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \operatorname{spec} L \arrow[u, "\operatorname{spec} \alpha"'] \end{tikzcd}$$

$$R_K = \operatorname{spec} K \underset{K'}{\otimes} K \ , \quad R_L = \operatorname{spec} L \underset{L'}{\otimes} L \ .$$

Les deux images réciproques de f coïncident sur R_L et donc, par définition de R_K, u se factorise par R_K, on a donc

$$u : \operatorname{spec} R_L \longrightarrow \operatorname{spec} R_K \quad \text{, d'où}$$

$$v : K \underset{K'}{\otimes} K \longrightarrow L \underset{L'}{\otimes} L \quad \text{, mais ceci implique} \quad \alpha(K') \subset L' \ .$$

Enfin l'assertion 3) est triviale.

II - GENERALITES SUR LES SCHEMAS EN GROUPES QUASI-COMPACTS SUR UN CORPS

-:-:-:-:-:-:-

§1 Quelques lemmes sur les morphismes.

Lémme 1.1

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes, on désigne par $\pi : G \times_k G \to G$ la multiplication, par p_1 et p_2 les projections de $G \times_k G$ dans G. Alors, pour tout $x \in G$, il existe $u \in G \times_k G$ tel que $\pi(u) = x$ et tel que $p_1(u)$ et $p_2(u)$ sont des points génériques de G.

Démonstration :

Quitte à faire l'extension de corps $k \to k(x)$, on peut supposer x rationnel. On a alors des translations, donc des morphismes

$$\tau_x : G \to G \times G \qquad y \mapsto (y, y^{-1}x)$$

$$\sigma_x : G \to G \times G \qquad z \mapsto (xz^{-1}, z)$$

qui induisent des isomorphismes de G sur $\pi^{-1}(x)$ réciproques de p_1 et p_2.

Si u est un point générique de $\pi^{-1}(x)$, $p_1(u)$ et $p_2(u)$ sont alors des points génériques de G et u convient.

Corollaire 1.2

Si G est un k-schéma en groupes, on a

$$\forall x \in G \qquad P(\mathcal{O}_{G,x}) .$$

Cela résulte de 1.1 et de I 1.5 et 1.8 en tenant compte du fait que π est plat.

Proposition 1.3

Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de k-schémas en groupes. On suppose H réduit et f quasi-compact et dominant. Alors f est fidèlement plat.

Démonstration :

Soit $y \in H$. D'après 1.1 il existe $u \in H \times_k H$ tel que $\pi_H(u) = y$ et $p_1(u) = \alpha$, $p_2(u) = \beta$ sont des points génériques de H.

Comme α et β sont génériques, $i_\alpha : \operatorname{spec} k(\alpha) \to H$ et $i_\beta : \operatorname{spec} k(\beta) \to H$ sont plats car ${}_{\circ}H$ est réduit. Il en est donc de même de

$$i = i_\alpha \times i_\beta : \operatorname{spec} k(\alpha) \otimes_k k(\beta) \to H \times_k H .$$

Posons $G_\alpha = G \times_H \operatorname{spec} k(\alpha)$, $G_\beta = G \times_H \operatorname{spec} k(\beta)$. Soit $\varphi : G_\alpha \times_k G_\beta \to G \times_k G$, comme i est plat, φ est plat donc aussi $\psi = \pi_G \circ \varphi$. On a d'autre part le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha \times_k G_\beta & \xrightarrow{\psi} & G \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{spec} k(\alpha) \otimes_k k(\beta) & \xrightarrow{\pi_H \circ i} & H \end{array} \qquad (1)$$

Comme f est quasi-compact et dominant, f' est surjectif. Il en résulte qu'il existe $x \in G$ tel que $y = f(x)$ ce qui prouve déjà que f est surjectif.

Soit $H_y = \operatorname{spec} \mathcal{O}_y$. Posons $\theta = \pi_H \circ i$, $U = G_\alpha \times_k G_\beta$, $V = \operatorname{spec} k(\alpha) \otimes_k k(\beta)$ et appliquons au carré cartésien (1) le foncteur $\cdot \times_H H_y$. On obtient

$$\begin{array}{ccc} U_y & \xrightarrow{\psi_y} & G_y \\ {\scriptstyle f'_y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_y} \\ V_y & \xrightarrow{\theta_y} & H_y \end{array}$$

Mais f' est plat ($k(\alpha)$ et $k(\beta)$ sont des corps) ainsi que ψ et θ, donc, il en est de même de f'_y, ψ_y, θ_y. De plus f'_y est surjectif (f' l'est) et θ_y aussi (H_y est local). Donc $\theta_y \circ f'_y = f_y \circ \psi_y$ est fidèlement plat. Comme ψ_y est plat, on en déduit que f_y est plat, donc f est fidèlement plat.

Corollaire 1.4

Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de k-schémas en groupes, dominant et quasi-compact. Alors, f est surjectif.

En effet, on peut supposer k parfait. Mais alors $f_{red} : G_{red} \to H_{red}$ est fidèlement plat (1.3) donc surjectif.

Proposition 1.5

Soit $f : H \to G$ un homomorphisme quasi-compact de k-schémas en groupes, N son noyau. Alors f se factorise en $i \circ f'$:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & G \\ & H' \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où i est une immersion fermée, H' un sous-schéma en groupes de G et f' un homomorphisme surjectif, schématiquement dominant et quasi-compact de noyau N.

Démonstration :

Comme G est séparé, f est quasi-compact et quasi-séparé. L'image schématique H' de H par f existe donc (EGA I 6.10.5) et on a $H' = \overline{f(H)}$. D'autre part, considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H \times_k H \arrow[r, "f' \times f'"] \arrow[d, "\pi_H"'] & H' \times_k H' \arrow[r, hook, "i \times i"] & G \times_k G \arrow[d, "\pi_G"] \\ H \arrow[r, "f'"] & H' \arrow[r, hook, "i"] & G \end{tikzcd}$$

L'image schématique de $f \circ \pi_H$ est H' (EGA I 6.10.3). D'autre part, par platitude l'image schématique de $f \times f$ est $H' \times H'$ et donc (EGA loc. cit.) π_G induit $\pi_{H'} : H' \times_k H' \to H'$. Il est clair que $(H', \pi_{H'})$ est un k-schéma en groupes et f' et i des homomorphismes. Les autres assertions résultent de EGA loc. cit. et de 1.4.

Nous allons étudier maintenant les monomorphismes de k-schémas en groupes.

Lemme 1.6

Soit A un anneau local de dimension zéro, $f : A \to B$ un épimorphisme d'anneaux. Si f est de présentation finie, f est surjectif.

Démonstration :

Comme f est de présentation finie, on se ramène immédiatement par passage à la limite au cas où A est artinien où le résultat est bien connu.

Proposition 1.7

Soit $f : X \to Y$ un monomorphisme de schémas. On suppose f de présentation finie. Alors, f est génériquement une immersion i.e. si ξ est un point générique de X et si $\eta = f(\xi)$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,\eta} \xrightarrow{v} \mathcal{O}_{X,\xi}$ est surjectif.

Démonstration :

Posons $\mathcal{O}_\xi = \mathcal{O}_{X,\xi}$, $\mathcal{O}_\eta = \mathcal{O}_{Y,\eta}$, $I = \operatorname{Ker} v$, $A = \mathcal{O}_\eta/I$. Comme $\mathcal{O}_\xi$ n'a qu'un idéal premier et que $A \to \mathcal{O}_\xi$ est injectif et local, il en est de même de A .

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{spec} \mathcal{O}_\xi \arrow[r] \arrow[dr] & X_A \arrow[r] \arrow[d, "f_A"] & X_\eta \arrow[r] \arrow[d, "f_\eta"] & X \arrow[d, "f"] \\ & \operatorname{spec} A \arrow[r] & \operatorname{spec} \mathcal{O}_\eta \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

avec $X_\eta = X \times_Y \operatorname{spec} \mathcal{O}_\eta$, $X_A = X \times_Y \operatorname{spec} A$. Comme f_A est un monomorphisme, X_A est un schéma local d'anneau B . De plus f_A est de présentation finie, donc, en vertu de 1.6, $A \to B$ est surjectif.

D'autre part, l'unique point de X_A est au-dessus de ξ dans X et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_\xi \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id"'] & B \arrow[r] & \mathcal{O}_\xi \end{tikzcd} \qquad \text{et donc } B \longrightarrow \mathcal{O}_\xi$$

est surjectif. Il en résulte que $A \to \mathcal{O}_\xi$ est surjectif et donc aussi $\mathcal{O}_\eta \to \mathcal{O}_\xi$.

Théorème 1.8

Soit k un corps, $f : H \to G$ un monomorphisme de k-schémas en groupes. On suppose f de présentation finie.

Alors, f est une immersion fermée.

Remarque :

Ce résultat sera généralisé dans la suite au cas où f est seulement quasi-compact.

Démonstration :

1) Quitte à remplacer G par l'image schématique de f, on peut supposer f surjectif et schématiquement dominant (1.5).

2) Soit ξ un point générique de H, $\eta = f(\xi)$. En vertu de 1.7 $\mathcal{O}_{G,\eta} \to \mathcal{O}_{H,\xi}$ est surjectif. D'autre part, il résulte de 1.3 que η est un point générique de G.

Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{spec} \mathcal{O}_\xi \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & H_\eta \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & H \arrow[d, "f"] \\ & \operatorname{spec} \mathcal{O}_\eta \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

où on a posé

$$\mathcal{O}_\xi = \mathcal{O}_{H,\xi}$$
$$\mathcal{O}_\eta = \mathcal{O}_{G,\eta}$$

Comme f est schématiquement dominant, f_η l'est aussi. Comme η est générique et f_η injectif (car f_η est un monomorphisme) H_η est irréductible. Ses anneaux locaux vérifient (P) (1.2) et donc $\operatorname{spec} \mathcal{O}_\xi \to H_\eta$ est schématiquement dominant (I.1.10). Donc $\operatorname{spec} \mathcal{O}_\xi \to \operatorname{spec} \mathcal{O}_\eta$ l'est aussi et $\mathcal{O}_\eta \to \mathcal{O}_\xi$ est un isomorphisme. Il résulte alors de EGA I 6.6.4 que f est un isomorphisme local en ξ.

3) On peut donc trouver un ouvert U de H contenant les points génériques tel que $f|U$ soit un isomorphisme de U sur un ouvert V de G qui contient aussi tous les points génériques de G.

Soit $i : V \times_k V \to G \times_k G$ l'immersion canonique et $\alpha = \pi_G \circ i : V \times_k V \to G$. α est fidèlement plat (1.1).

D'autre part on a le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} U \underset{k}{\times} U & \xrightarrow{f \times f} & V \underset{k}{\times} V \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ H & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

(cela résulte du fait que f est un monomorphisme). Mais $f \times f_{|U \times U}$ est un isomorphisme et donc, f est un isomorphisme.

§2 La composante neutre d'un k-schéma en groupes.

Dans tout ce paragraphe, k est un corps.

Proposition 2.1

Soit G un k-schéma en groupes, e son élément neutre

1) e appartient à une seule composante irréductible de G.

2) Soit $\overline{G}^{o}$ le sous-schéma fermé réduit de G porté par cette composante. Alors $\overline{G}^{o}$ est géométriquement irréductible sur k et ensemblistement stable par la loi de groupe, de façon précise, l'isomorphisme :

$$G \times G \to G \times G$$
$$(x,y) \mapsto (x,xy^{-1})$$

induit un isomorphisme

$$(\overline{G}^{o} \underset{k}{\times} \overline{G}^{o})_{red} \to (\overline{G}^{o} \underset{k}{\times} \overline{G}^{o})_{red} .$$

Démonstration :

1) résulte de 1.2.

2) On a le lemme

Lemme 2.1.1

Soit X un k-schéma irréductible, L une extension de k, X' une composante irréductible de X_L. Alors, $X' \to X$ est surjectif.

On décompose $k \to L$ en $k \to M \to L$ avec $k \to M$ transcendante et $M \to L$

algébrique.

Comme X_M est irréductible on est ramené au cas $k \to L$ algébrique.

Mais alors $X' \to X$ est entier et dominant, donc surjectif.

Revenons à 2.1. Soit L une extension de k, X' une composante irréductible de $(\overline{G^o})_L$. Il est clair que c'est aussi une composante irréductible de G_L.

D'après 2.1.1, X' contient l'origine de G_L, unique point de G_L au-dessus de e. Mais d'après 1.2, il n'y a qu'une composante irréductible de G_L contenant e, donc $X' = (\overline{G^o})_L$.

La dernière assertion est alors claire, $\overline{G^o} \underset{k}{\times} \overline{G^o}$ étant irréductible, $(\overline{G^o} \underset{k}{\times} \overline{G^o})_{red}$ est la composante irréductible réduite de (e,e).

<u>Proposition</u> 2.2

Avec les notations de 2.1, $\overline{G^o}$ est quasi-compact. De façon précise, si U est un ouvert quasi-compact non vide de $\overline{G^o}$, le morphisme

$$\begin{aligned} \tau : (U \times U)_{red} &\to \overline{G^o} \\ (u,u') &\mapsto uu'^{-1} \end{aligned}$$

est surjectif.

<u>Démonstration</u> :

Soit $a \in \overline{G^o}$, $L = k(a)$, $a' \in (\overline{G^o})_L$ un point rationnel sur L au-dessus de a. On a un morphisme $\tau' : (U_{L_{red}} \times U_{L_{red}})_{red} \to (\overline{G^o})_{L_{red}}$ et par translation, a' est dans l'image de τ'. En effet, comme $(G^o)_{L\,red}$ est irréductible, $a'U_{L\,red} \cap U_{L\,red} \neq \emptyset$. Il en résulte que a est dans l'image de τ.

<u>Proposition</u> 2.3

Avec les notations de 2.1.

1) Soit U un ouvert de G ; alors, le saturé V de U sous l'action de $\overline{G^o}$ est un ouvert de G. Si U est quasi-compact, V l'est aussi et V est un sous-schéma ouvert et fermé de G qui est réunion des composantes irréductibles de G qui rencontrent U.

2) Toute composante irréductible de G est intersection d'ouverts fermés du type précédent.

Démonstration :

1) Considérons l'isomorphisme u :

$$\overline{G}^{o} \times G \to \overline{G}^{o} \times G$$
$$(x,y) \mapsto (x,xy)$$

L'image par u de $\overline{G}^{o} \times U$ est un ouvert W de $\overline{G}^{o} \times G$. Le saturé V de U est alors la projection de W dans G. V est ouvert, car $\overline{G}^{o} \to \operatorname{spec} k$ est universellement ouvert (EGA IV 2.4.10). Comme $\overline{G}^{o}$ est quasi-compact, si U est quasi-compact, V l'est aussi.

2) Montrons que V est réunion des composantes irréductibles qui rencontrent U. Soit X une telle composante, $x \in X \cap U$, $y \in X$. Soit $k \to \overline{k}$ une extension séparablement close et $\overline{X}$ une composante irréductible de $X_{\overline{k}}$, donc de $G_{\overline{k}}$. En vertu de 2.1.1, il existe $\overline{x},\overline{y} \in \overline{X}$ au-dessus de x et y. Soit L une extension commune de $\overline{k}(\overline{x})$ et $\overline{k}(\overline{y})$. Comme $\overline{k}$ est séparablement clos, $\overline{X}_L = X'$ est géométriquement irréductible et est une composante de G_L. Soient x',y' L-rationnels au-dessus de x et y : il suffit de montrer l'assertion pour x' et y', autrement dit, on peut supposer x,y rationnels et X géométriquement irréductible.

Soit
$$\pi_1 : G \times G \to G$$
$$(u,v) \mapsto vu^{-1} .$$

Comme $\underline{X} \times \underline{X}$ est irréductible, $\pi_1(\underline{X} \times \underline{X})$ l'est aussi. Or $e \in \pi_1(\underline{X} \times \underline{X})$, donc $\pi_1(\underline{X} \times \underline{X}) \subset \overline{G}^{o}$. Il en résulte que $a = yx^{-1} \in \overline{G}^{o}$ et donc, $y = ax$ est dans V.

3) Supposons maintenant U quasi-compact.

Lemme 2.3.1

Soit X un schéma quasi-séparé, $V \subset X$ un ouvert quasi-compact, $Y = X-V$, $E = \{y \in Y \mid y$ générique dans $X\}$. Alors il existe un ouvert W de X tel que

$E \subset W \subset Y$.

Démonstration :

1) On peut supposer $E = \{y\}$.

2) Soit $x \in X$, $x \neq y$. Alors $\{\bar{x}\} \cap \{y\} = \emptyset$, $y \in U_x = X - \{\bar{x}\}$. Soit W_x un ouvert affine de X tel que $y \in W_x \subset U_x$. W_x est quasi-compact, donc rétro-compact (X est quasi-séparé), donc proconstructible (EGA I 7.2.4).

On a $\{y\} = \bigcap_{\substack{x \neq y \\ x \in X}} W_x$, donc $\bigcap_{x \neq y} V \cap W_x = \emptyset$. Comme V est quasi-compact, il résulte de EGA I 7.2.6 qu'il existe $x_1 \ldots x_n \in X$, $x_i \neq y$, tels que $V \cap (\bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}) = \emptyset$. Alors, $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}$ convient.

Appliquons le lemme avec $X = G$, $V = V$. Il existe un ouvert W de G contenant les points génériques de G qui sont dans $G-V$. Soit W' le saturé de W , $W' \subset G-V$. Comme W rencontre toutes les composantes de $G-V$, on a $G = V \cup W'$. Or W' est ouvert et $W' = G-V$, donc V est fermé. Ceci achève de prouver l'assertion 1).

Enfin, la seconde assertion est claire : soient ξ, η deux points génériques. Il existe un ouvert affine U_η tel que $\xi \in U_\eta$ et $\{\bar{\eta}\} \cap U_\eta = \emptyset$. On a alors, si $U'_\eta = \mathrm{sat}(U_\eta)$, $\{\bar{\xi}\} = \bigcap_{\eta \neq \xi} U'_\eta$.

Nous pouvons maintenant passer à la construction de la composante neutre proprement dite, G^o .

Théorème 2.4

Soit G un k-schéma en groupes.

Il existe un sous-schéma en groupes fermé G^o de G , appelé composante neutre, tel que :

1) L'espace sous-jacent à G^o est la composante irréductible de l'élément neutre.

2) $G^o \to G$ est une immersion fermée plate.

3) G^o est géométriquement irréductible.

De plus

4) G^o est quasi-compact.

5) G^o est un sous-groupe caractéristique de G .

Démonstration :

On a vu que la composante de e est ensemblistement intersection d'ouverts et fermés quasi-compacts.

Mais comme les morphismes de transition sont affines (ce sont des immersions ouvertes et fermées), l'intersection existe au sens schématique. On la désigne par G^o .

1) 3) et 4) sont alors claires.

2) Résulte du fait que si $x \in G^o$, on a

$$\mathcal{O}_{G^o,x} = \varinjlim \mathcal{O}_{V,x} \simeq \mathcal{O}_{G,x} .$$

Enfin, il est clair que G^o est un sous-groupe de G et, si $\varphi : G \to G$ est un isomorphisme φ se factorise ensemblistement par G_o et donc aussi schématiquement en vertu de 2).

Corollaire 2.5

Soit G un k-schéma en groupes.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) G est géométriquement irréductible.

2) G est irréductible.

3) $G = G^o$.

4) G est géométriquement connexe.

5) G est connexe.

Proposition 2.6

Soit X un schéma quasi-compact vérifiant la propriété suivante :

(c) Si U est un ouvert quasi-compact de X , l'union des composantes irréductibles de X rencontrant U est une partie ouverte et fermée de X .

Alors, il existe un ouvert affine de X qui rencontre toutes les composantes irréductibles de X.

Démonstration :

Récurrence sur n = nombre minimum d'ouverts affines recouvrant X. C'est clair pour $n = 1$. Supposons $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ avec U_i affine. Soit V_1 l'union des composantes de X rencontrant U_1 et $Y = X - V_1$. Y est ouvert et fermé, quasi-compact et vérifie (c). De plus, si $U'_i = U_i \cap Y$, $i \geqslant 2$, $Y = U'_2 \cup \ldots \cup U'_n$ et les U'_i sont des ouverts affines de Y. Il existe alors, en vertu de l'hypothèse de récurrence un ouvert affine W de Y qui rencontre toutes les composantes de Y, mais alors, $U_1 \cup W$ convient, car $U_1 \cap W = \emptyset$.

Corollaire 2.7

Soit G un k-schéma en groupes quasi-compact, U un ouvert partout dense quasi-compact de G. Il existe un ouvert affine V, partout dense. de G tel que $V \subset U$.

Démonstration :

Soit $E = \{g \in G \mid g$ point générique de $G\}$ et soit $x \in G-E$. Soit ξ l'unique point de E tel que $x \in \overline{\{\xi\}}$ et U_o un ouvert affine tel que $\xi \in U_o$, $x \notin U_o$. Soit V le saturé de U, V est ouvert et fermé car U est quasi-compact. Soit W un ouvert affine partout dense (2.6). Alors $W-V$ est affine et $\Omega = U_o \cup (W-V)$ est un ouvert affine partout dense tel que $x \notin \Omega$.

Il résulte de ceci que

$$E = \bigcap_{\substack{E \subset \Omega \\ \Omega \text{ affine}}} \Omega .$$

D'après EGA I 7.2.5, $E \subset U \implies \exists\, \Omega_1, \ldots, \Omega_n$ affines, $E \subset \Omega_i$, $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_n \subset U$. Mais, G est séparé, donc $V = \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_n$ est affine et $E \subset V$.

Lemme 2.8

Soit G un k-schéma en groupes, $\underline{X}$ une composante irréductible de G. Si $\underline{X}$ contient un point rationnel, il existe un sous-schéma fermé X de G, d'espace $\underline{X}$ et isomorphe à G^o. (En particulier, $X \to G$ est plat).

C'est clair par translation.

Proposition 2.9

Soit G un k-schéma en groupes, U un ouvert quasi-compact partout dense de G. Alors U est schématiquement dense dans G.

Démonstration :

Soit V un ouvert affine non vide de G, $s \in \Gamma(V,G)$ et supposons que $s|V \cap U = 0$.

Soit $x \in V$. Montrons que $s = 0$ dans $\mathcal{O}_{V,x} = \mathcal{O}_{G,x}$. Quitte à étendre k, on peut supposer x rationnel. Soit X sa composante irréductible qui est un sous-schéma fermé de G, plat sur X (2.8). On a donc $\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_{G,x} \simeq \mathcal{O}_{V,x}$.

Comme X est irréductible, X vérifie (P) (1.2 et I.1). Donc $U \cap X$ est schématiquement dense dans X (I 1.9). Il en résulte que $s|V \cap X = 0$ et donc, comme $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{V,x}$, $s = 0$ dans $\mathcal{O}_{V,x}$.

§3 Quelques lemmes sur les limites projectives.

Proposition 3.1

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes quasi-compact, (G_i, u_{ji}) un système projectif filtrant de k-schémas en groupes quasi-compacts, les u_{ji} étant affines à partir d'un certain rang. Soit G' la limite projective des G_i, $p_i : G' \to G_i$ le morphisme canonique, $u : G \to G'$ un homomorphisme de groupes, $u_i = p_i \circ u$.

Alors, si tous les u_i sont fidèlement plats, u est fidèlement plat.

Démonstration :

D'après Bourbaki AC ch.I 2.8.9 , u est plat.

D'autre part, comme G' est séparé et G quasi-compact, u est quasi-compact.

Il suffit alors de prouver que u est dominant (1.4). Soit U un ouvert quasi-compact de G', en vertu de EGA IV 8.2.11 , $U = p_i^{-1}(U_i)$ pour un certain i. Soit $x_i \in U_i$, il existe $x \in G$ tel que $x_i = u_i(x)$, mais alors $u(x) \in U$.

Remarque 3.1.1 :

Sous les hypothèses de 3.1 , soit $H_i = \operatorname{Ker} u_i$ et supposons que $\bigcap_{i \in I} H_i = \{e\} \simeq \operatorname{spec} k$. Alors, u est un isomorphisme. En effet, 3.1 assure que u est un épimorphisme de faisceaux fpqc et l'hypothèse $\bigcap_{i \in I} H_i = \{e\}$, que u est un monomorphisme, donc un isomorphisme.

Proposition 3.2

Soit k un corps, (G_i, u_{ji}) un système projectif filtrant de k-schémas en groupes intègres, G un k-schéma en groupes intègre. On désigne par K_i (resp. K) le corps des fonctions rationnelles sur G_i (resp. G).

On se donne pour tout i un homomorphisme $u_i : G \to G_i$.

On suppose :

1) Si $i \leqslant j$ $\quad u_{ij} \circ u_j = u_i$.

2) $\forall\, i,j$ $\quad u_i$ et u_{ij} sont fidèlement plats.

3) $K = \varinjlim K_i$.

Alors, il existe i_o tel que pour $i \geqslant i_o$, u_i et u_{ij} soient affines.

Démonstration :

Soit η_i le point générique de G_i , $X_i = u_i^{-1}(\eta_i)$, η le point générique de G . On a, en vertu de 3) $\{\eta\} = \bigcap_{i \in I} X_i$.

Soit V un ouvert affine de G contenant η , on a $\{\eta\} = \bigcap_{i \in I} X_i \subset V$.

Mais X_i est proconstructible dans G (EGA I 7.2.3.vi) et comme I est filtrant, il existe $i_o \in I$ tel que $X_{i_o} \subset V$ et par conséquent $X_i \subset X_{i_o} \subset V$ si $i \geqslant i_o$ (EGA I 7.2.5). Considérons $u_i|V : V \to G_i$ pour $i \geqslant i_o$. Comme V est affine et G_i séparé, $u_i|V$ est affine. Comme $X_i \subset V$, la fibre de η_i est affine dans G. Par translation, Ker u_i est affine pour $i \geqslant i_o$ et donc u_i est affine. Il en résulte que u_{ij} est affine pour $i \geqslant i_o$.

Proposition 3.3

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes. On suppose que $G = \varprojlim G_i$ où (G_i, u_{ji}) est un système projectif filtrant de k-schémas en groupes de type fini, les u_{ji} étant affines pour i assez grand.

On suppose de plus que $G_i \simeq G/H_i$ en tant que faisceaux pour la topologie fpqc. Soit H un sous-schéma en groupes fermé de G.

1) Si H est défini par un idéal de type fini, le faisceau quotient fpqc G/H est un schéma de type fini sur k.

2) Si H est limite projective de k-schémas en groupes de type fini (par exemple si H est affine) et si H est distingué dans G, le faisceau fpqc quotient G/H est un k-schéma en groupes.

Remarque :

Nous verrons plus tard que dans 2) la première condition signifie seulement que H est quasi-compact.

Démonstration :

1) Soit $U = \operatorname{spec} A$ un ouvert affine de G contenant l'élément neutre e de G.

Comme $G = \varprojlim G/H_i$, on a $\bigcap_{i \in I} H_i = \{e\} = \operatorname{spec} k$.

Soient $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{a}$ les idéaux de type fini de A définissant $H_i \cap U$ et $H \cap U$. Soit m l'idéal maximal de A correspondant à e.

$$\bigcap_{i \in I} H_i = \{e\} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i = m \quad \text{et donc } \mathfrak{a} \subset \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i .$$

Comme $\mathfrak{A}$ est de type fini et I filtrant, il existe $i \in I$ tel que $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_i$ et donc $H_i \cap U \subset H \cap U$. Mais, en vertu de EGA I 7.2.5, comme $\bigcap_{i \in I} H_i \subset U$ il existe $i' \in I$ tel que $H_{i'} \subset U$ et donc il existe $i \in I$ tel que $H_i \subset H$.

Considérons alors le faisceau fpqc H/H_i. C'est un sous-faisceau de G_i. D'autre part, on a $H/H_i \underset{G_i}{\times} G = H$ et comme $H \hookrightarrow G$ est une immersion fermée et $G \to G_i$ un épimorphisme fpqc, H/H_i est représentable et $H/H_i \hookrightarrow G_i$ est une immersion fermée. Posons $H_i' = H/H_i$. En tant que faisceaux fpqc, on a $G_i/H_i' \simeq G/H$. Mais, en vertu de SGA 3 Exp. VI A Th. 3.2 G_i/H_i' est un schéma de type fini sur k.

2) Considérons le faisceau fpqc $H/H \cap H_i$. En vertu de l'hypothèse faite sur H, et de i), c'est un schéma en groupes de type fini sur k, et de plus, le monomorphisme $H/H \cap H_i \to G_i$ est une immersion fermée.

Soit $H_i' = H/H \cap H_i$. D'après SGA 3 Exp. VI A Th. 3.2 G_i/H_i' est un schéma en groupes, et, si $j \geqslant i$ $G_j/H_j' \xrightarrow{f_{ij}} G_i/H_i'$ est affine. En effet, Ker f_{ij} est un quotient de Ker h_{ij}, $h_{ij} : G_j \to G_i$, qui est affine, par un sous-groupe distingué, donc Ker f_{ij} est affine ([DG] III 3.5.6). Il résulte de cela que $\varprojlim G_i/H_i'$ est un k-schéma en groupes.

D'autre part, comme $\bigcap_{i \in I} H_i = \{e\}$, on a, en vertu de 3.1 $H = \varprojlim H/H \cap H_i = \varprojlim H_i'$. On a la suite exacte de faisceaux

$$0 \to H_i' \to G_i \to G_i/H_i' \to 0$$

on en déduit la suite exacte

$$0 \to H \to G \to \varprojlim G_i/H_i' .$$

Mais en vertu de 3.1, la flèche $G \to \varprojlim G_i/H_i'$ est fidèlement plate et quasi-compacte, donc un épimorphisme fpqc et donc $G/H \simeq \varprojlim G_i/H_i'$ est bien représentable.

III - GROUPES RATIONNELS

APPROXIMATION DES SCHEMAS EN GROUPES GEOMETRIQUEMENT INTEGRES

-:-:-:-:-:-:-

§1 Définition des groupes rationnels.

Soit k un corps, K une extension de k que nous supposerons géométriquement intègre. On note $K \tilde{\otimes}_k K$ le corps des fractions de $K \otimes_k K$. De même, $K \tilde{\otimes}_k K \tilde{\otimes}_k K$ est le corps des fractions de $K \otimes_k K \otimes_k K$.

Définition 1.1

On appelle groupe rationnel sur k la donnée d'une extension K géométriquement intègre et de deux homomorphismes de k-algèbres :

$$\Delta : K \to K \tilde{\otimes}_k K$$
$$\sigma : K \to K$$

vérifiant les propriétés suivantes :

a) $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}\, K$.

b) Associativité :

considérons le diagramme suivant

$$K \xrightarrow{\Delta} K \tilde{\otimes}_k K \underset{1 \tilde{\otimes} \Delta}{\overset{\Delta \tilde{\otimes} 1}{\rightrightarrows}} K \tilde{\otimes}_k K \tilde{\otimes}_k K .$$

Alors $(\Delta \tilde{\otimes} 1) \circ \Delta = (1 \tilde{\otimes} \Delta) \circ \Delta$.

c) Soient $\Delta_1, \Delta_2 : K \to K \tilde{\otimes}_k K$ les homomorphismes définis par $\Delta_1 = (\sigma \tilde{\otimes} 1) \circ \Delta$, $\Delta_2 = (1 \tilde{\otimes} \sigma) \circ \Delta$.

Désignons par i_1, i_2, s les homomorphismes canoniques

$$i_1 : K \to K \tilde{\otimes}_k K \qquad x \mapsto x \otimes 1$$

$$i_2 : K \to K \tilde{\otimes}_k K$$
$$x \mapsto 1 \otimes x$$

$$s : K \tilde{\otimes}_k K \to K \tilde{\otimes}_k K$$
$$x \otimes y \mapsto y \otimes x .$$

On a les égalités suivantes :

$$i_2 = (i_1 \cdot \Delta_1) \circ \Delta \qquad i_2 = (i_1 \cdot \Delta) \circ \Delta_1$$

$$i_1 = (\Delta \cdot i_2) \circ \Delta_2 \qquad i_1 = (\Delta_2 \cdot i_2) \circ \Delta$$

$$\Delta \circ \sigma = (\sigma \tilde{\otimes} \sigma) \circ s \circ \Delta$$

où $i_1 \cdot \Delta_1 : K \tilde{\otimes}_k K \to K \tilde{\otimes}_k K$ est défini par

$$(i_1 \cdot \Delta_1)(x \otimes y) = i_1(x)\ \Delta_1(y)$$

et de même pour $i_1 \cdot \Delta$, $\Delta \cdot i_2$ et $\Delta_2 \cdot i_2$.

<u>Définition</u> 1.2

On dit qu'un k-groupe rationnel (K, Δ, σ) est de type fini sur k si K est une extension de type fini de k .

<u>Exemple fondamental</u> 1.3

Soit G un k-schéma en groupes, géométriquement intègre, K le corps des fonctions rationnelles sur G .

Soit $\pi : G \times G \to G$ la loi de composition, τ le passage à l'inverse.

π induit, $\Delta : K \to K \tilde{\otimes}_k K$ (car π est surjectif) et τ induit $\sigma : K \to K$.

On a bien $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}\ K$, les autres axiomes résultent de ceux des groupes :

b) résulte de $(xy)z = x(yz)$

c) de $x(x^{-1}y) = y$; $x^{-1}(xy) = y$; $(xy)\, y^{-1} = x\, (xy^{-1})y = x$; $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Autrement dit, la structure de groupe sur G induit sur K une structure de groupe rationnel.

<u>Remarque</u> 1.4 :

Un certain nombre de questions se posent naturellement à propos des groupes rationnels.

1) Tout groupe rationnel est-il du type ci-dessus.

Nous verrons que c'est vrai si K est de type fini, faux sinon.

2) Tout groupe rationnel est-il limite de groupes de type fini, c'est l'objet du paragraphe suivant.

3) Enfin on peut donner une définition plus générale (par exemple en admettant des éléments nilpotents). Malheureusement on manque pour l'instant dans ce cas d'un théorème de passage au quotient du type I 3.4 et 3.5 qui permettrait de poursuivre l'étude des groupes rationnels dans ce cas.

§2 Approximation des groupes rationnels.

Définition 2.1

Un homomorphisme de k-groupes rationnels $\varphi : (K,\Delta,\sigma) \to (K',\Delta',\sigma')$ consiste en la donnée d'un k-homomorphisme $\varphi : K \to K'$ tel que :

1) $\Delta' \circ \varphi = (\varphi \tilde{\otimes} \varphi) \circ \Delta$

2) $\sigma' \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$.

Théorème 2.2

Soit (K,Δ,σ) un k-groupe rationnel. Alors (K,Δ,σ) est limite inductive filtrante de k-groupes rationnels de type fini (K_i,Δ_i,σ_i) les K_i étant des sous-extensions de K et Δ_i et σ_i les restrictions à K_i de Δ et σ .

Démonstration :

La clé de la démonstration est I 3.5.

On a alors plusieurs étapes.

Proposition 2.2.1

Sous les hypothèses de 2.2 , si $x_1,\dots,x_n \in K$ il existe une plus petite sous-extension K' de K contenant les x_i et telle que $\Delta K' \subset K' \tilde{\otimes}_k K$. De plus, K' est de type fini sur k .

Démonstration de 2.2.1 :

Posons $f_i = \Delta x_i$ et soit K'' la sous-extension fournie par I 3.5 relativement à $f_1,\dots,f_n$. Soit K' le sous-corps de K engendré par K'' et par

$x_1,\dots,x_n$. Il suffit de prouver que $\Delta K'' \subset K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K$. Considérons $\Delta : K \to K \underset{k}{\tilde{\otimes}} K = L$. En vertu de I 3.5 2), le plus petit sous-corps L' de L tel que $\Delta \tilde{\otimes} 1(f_i) \in L' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K$ est $\Delta K''$. Or $(\Delta \tilde{\otimes} 1) \circ \Delta = (1 \tilde{\otimes} \Delta) \circ \Delta$ et donc $\Delta \tilde{\otimes} 1(f_i) = 1 \tilde{\otimes} \Delta(f_i) \in K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K \underset{k}{\tilde{\otimes}} K$. Par conséquent $\Delta K'' \subset K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K$.

Proposition 2.2.2

Sous les hypothèses de 2.2, si $x_1,\dots,x_n \in K$ il existe une plus petite sous-extension K' de K telle que

1) $\forall i = 1,\dots,n \qquad x_i \in K'$

2) $\Delta K' \subset K' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K'$.

De plus, K' est de type fini sur k .

Démonstration de 2.2.2 :

Soit K'' le sous-corps relatif aux x_i fourni par 2.2.1.

En vertu de I 3.5 il existe $K' \subset K$ minimum tel que $\forall i = 1,\dots,r$ $f_i = \Delta\xi_i \in K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K'$ où les ξ_i sont des générateurs de K'' . De plus K' est de type fini.

Considérons alors $\Delta : K \to L = K \underset{k}{\tilde{\otimes}} K$. Le plus petit sous-corps L' de L tel que $K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} L'$ contienne les $1 \tilde{\otimes} \Delta(f_i)$ est $\Delta K'$.

Or $1 \tilde{\otimes} \Delta(f_i) = \Delta \tilde{\otimes} 1(f_i) \in \Delta K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K'$. Mais comme les ξ_i engendrent K'' , $\Delta K'' \subset K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K'$ et donc, $1 \tilde{\otimes} \Delta(f_i) \in K'' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K'$. Il en résulte que $\Delta K' \subset K' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K'$. Mais alors, $K'(\xi_1,\dots,\xi_n)$ convient.

Proposition 2.2.3

Sous les hypothèses de 2.2 , si $x_1,\dots,x_n \in K$, il existe une plus petite sous-extension K' de K telle que :

1) $\forall i = 1,\dots,n \qquad x_i \in K$

2) $\Delta K' \subset K' \underset{k}{\tilde{\otimes}} K'$

3) $\sigma K' \subset K'$.

De plus K' est de type fini sur k .

Démonstration de 2.2.3 :

Soit K'' vérifiant 1) et 2), de type fini et la plus petite possible (K'' fournie par 2.2.2).

$K'' = k(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Posons $K' = k(\xi_i, \sigma(\xi_i))$. Il suffit de voir que $\Delta \circ \sigma K'' \subset K' \tilde{\otimes}_k K'$. Mais en vertu de 1.1 on a

$$\Delta \circ \sigma = (\sigma \tilde{\otimes} \sigma) \circ s \circ \Delta \qquad \text{et donc}$$

$$\Delta \circ \sigma(K'') = (\sigma \tilde{\otimes} \sigma) \circ \Delta \circ \Delta K'' \subset \sigma K'' \tilde{\otimes}_k \sigma K''$$

d'où
$$\Delta \circ \sigma(K'') \subset K' \tilde{\otimes}_k K' \ .$$

On peut alors prouver 2.2 .

Ecrivons $K = k((x_i)_{i\in I})$. Pour toute partie finie J de I on construit K_J comme en 2.2.3 .

$(K_J\ ;\ \Delta|K_J\ ;\ \sigma|K_J)$ est alors un k-groupe rationnel de type fini. Comme la famille des parties finies est filtrante pour l'inclusion et comme $K = \bigcup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ finie}}} K_J$ on a bien prouvé 2.2 .

§3 Construction d'un groupe algébrique à partir d'un groupe rationnel de type fini.

Dans tout ce paragraphe on utilise le théorème de Weil sous la forme de [SGA] Exp. XVIII.

Proposition 3.1

Soit (K,Δ,σ) un k-groupe rationnel de type fini.

Il existe un k-groupe algébrique G , lisse et connexe, unique à isomorphisme près, tel que :

1) K est isomorphe à l'anneau des fonctions rationnelles sur G .

2) Δ et σ sont les morphismes induits sur K par la multiplication et le passage à l'inverse sur G .

Démonstration :

a) Unicité.

Si G et G' conviennent, ils sont birationnellement équivalents et donc, il existe des ouverts $U \subset G$ et $U' \subset G'$ et des isomorphismes réciproques

$$U \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} U' .$$

Comme les multiplications π_G et $\pi_{G'}$ induisent toutes deux Δ sur K, φ et ψ commutent à π_G et $\pi_{G'}$ sur des ouverts convenables de $U \times U$ (resp. $U' \times U'$). Mais alors d'après SGA Exp. XVIII Prop. 2.3 φ et ψ se prolongent de manière unique en des homomorphismes de groupes

$$G \underset{\bar{\psi}}{\overset{\bar{\varphi}}{\rightleftarrows}} G' .$$

Comme $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi}_{|U'} = Id_{U'}$ et $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}_{|U} = Id_U$, en vertu de l'unicité du prolongement de id_U et $id_{U'}$ à G et G', on a $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} = Id_{G'}$ et $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi} = Id_G$.

b) Construction de G.

Posons $K = k(x_1,\dots,x_n)$, $\mathbf{A} = k[x_1,\dots,x_n]$, $X = \operatorname{spec} \mathbf{A}$. Il existe un élément $s \neq 0$ de $\mathbf{A} \otimes_k \mathbf{A}$ tel que Δ, Δ_1, Δ_2 induisent des homomorphismes

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2 : A \to (A \otimes_k A)_s .$$

Soit $U = \operatorname{spec}(\mathbf{A} \otimes_k \mathbf{A})_s$. Comme K est géométriquement intègre, $X \times X$ est intègre et donc U est partout dense dans $X \times X$.

Soient $\pi, \pi_1, \pi_2 : U \to X$ les morphismes correspondant à $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$. Si S est un k-schéma quelconque, et si $(x,y) \in U(S)$ on notera $\pi(x,y) = xy$, $\pi_1(x,y) = x^{-1}y$, $\pi_2(x,y) = xy^{-1}$.

Soient p_{ij} les projections de $X \times X \times X$ sur $X \times X$ $i,j \in \{1,2,3\}$ et soit $V = p_{12}^{-1}(U) \cap p_{23}^{-1}(U) \cap p_{13}^{-1}(U)$. Considérons $\varphi : V \to X \times X$ définie par

$$\varphi(x,y,z) = (xy,z)$$

et soit W le sous-schéma fermé de V image réciproque de la diagonale de $X \times X$ par φ. Alors (X,W) est un germe de groupe au sens de SGA Exp. XVIII

Déf. 3.1 .

En effet, il est clair que X est plat, de présentation finie sur k, séparé et sans composantes immergées et que W est de présentation finie. Il faut ensuite vérifier que $p_{ij}|W$ est une immersion ouverte de W dans $X \times X$.

Pour ceci, soit $V_{ij} = p_{ij}^{-1}(U)$ et W_{ij} le sous-schéma fermé de V_{ij} image réciproque de la diagonale par $\varphi_{ij} : V_{ij} \to X \times X$ avec

$$\varphi_{12}(x,y,z) = (xy,z)$$
$$\varphi_{13}(x,y,z) = (y,x^{-1}z)$$
$$\varphi_{23}(x,y,z) = (x,zy^{-1})$$

ce qui a un sens en vertu de la définition de V_{ij}.

Alors, p_{ij} est un isomorphisme de W_{ij} sur U de réciproque q_{ij} avec

$$q_{12}(x,y) = (x,y,xy)$$
$$q_{13}(x,z) = (x,x^{-1}z,z)$$
$$q_{23}(y,z) = (zy^{-1},y,z) .$$

Enfin W est un ouvert de W_{ij}. Pour W_{12}, c'est clair. Pour W_{13}, par exemple, il faut prouver que si $y = x^{-1}z$ on a $xy = z$, c'est-à-dire que $x(x^{-1}z) = z$, mais ceci résulte de la formule $i_2 = (i_1 . \Delta_1) \circ \Delta$ (1.1).

Il est clair alors, que $p_{ij}|W$ est une immersion ouverte de W dans $X \times X$.

D'autre part, la relation $(1 \tilde{\otimes} \Delta) \circ \Delta = (\Delta \tilde{\otimes} 1) \circ \Delta$ (1.1) entraîne l'associativité, à savoir, si $x,y,z \in X(S)$ et si $(x,y,z) \in V(S)$, on a $(xy)z = x(yz)$.

En vertu de SGA loc. cit. Prop. 3.2 il existe alors un ouvert dense X' de X et un ouvert dense W' de W tels que (X',W') soit un germe de groupe. Quitte à se restreindre, on peut donc supposer que (X,W) est un germe de groupe.

Mais alors d'après SGA loc. cit. Th. 3.7 et Cor. 3.13 il existe un groupe algébrique G lisse et connexe et une immersion ouverte schématiquement dense

$i : X \to G$ qui commute aux lois de composition (i.e. si $(x,y) \in U(S)$, $i(x)i(y) = i(xy))$. Il est alors clair que π_G induit Δ sur K , corps des fonctions rationnelles de G (ou de X) . Enfin, la formule $i_2 = (i_1 . \Delta_1) \circ \Delta$ qui s'écrit $x(x^{-1}y) = y$ montre que σ est bien le morphisme correspondant au passage à l'inverse.

§4 Le théorème d'approximation pour les groupes géométriquement intègres.

Rappelons le résultat suivant qui figure dans SGA Exp. XVIII Prop. 2.3 , mutatis mutandis.

Proposition 4.1

Soit G un k-schéma en groupes quasi-compact, U un ouvert schématiquement dense quasi-compact de G et H un k-schéma en groupes.

Soit $\overline{f} : U \to H$ un morphisme, et supposons qu'il existe un ouvert schématiquement dense V de $\pi_G^{-1}(U) \cap (U \times U)$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\overline{f} \times \overline{f}|_V} & H \times H \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_G} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_H} \\ U & \xrightarrow{\overline{f}} & H \end{array}$$

Alors, $\overline{f}$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme de groupes $f : G \to H$.

Théorème 4.2

Soit k un corps. Il y a équivalence entre les données suivantes :

1) Un k-groupe rationnel (K, Δ, σ) .

2) Un système projectif filtrant (G_i, u_{ji}) de k-groupes algébriques lisses et connexes à morphismes de transition fidèlement plats.

De plus, la limite projective du système (G_i, u_{ji}) dans la catégorie des espaces annelés est un schéma si et seulement si les u_{ji} sont affines à partir d'un certain rang.

La limite G est alors un k-schéma en groupes géométriquement intègre de corps de fonctions rationnelles isomorphe à K.

Démonstration :

Il est clair que si on a un système projectif (G_i, u_{ji}) et si K_i est le corps de fonctions rationnelles sur G_i, on a sur $K = \varinjlim K_i$ une structure de groupe rationnel.

Réciproquement, si (K, Δ, σ) est un groupe rationnel, en vertu de (2.2) il est limite de groupes rationnels $(K_i, \Delta_i, \sigma_i)$ de type fini.

En vertu de (3.1) ceux-ci définissent des groupes algébriques G_i lisses et connexes. Les inclusions $K_i \subset K_j$ pour $i < j$ définissent des applications rationnelles $\overline{u_{ij}} : V_j \to G_i$ où V_j est un ouvert dense de G_j.

$\overline{u_{ij}}$ commute aux lois de composition car on a $\Delta_i = \Delta_j/K_i$.

En vertu de (4.1) $\overline{u_{ij}}$ se prolonge en un homomorphisme $u_{ij} : G_j \to G_i$, dominant donc fidèlement plat et on a bien un système projectif filtrant.

Si les u_{ij} sont affines à partir d'un certain rang, $G = \varprojlim G_i$ est un schéma et G est la limite projective du système dans la catégorie des espaces annelés (EGA IV 8.2.14).

De plus G est un schéma en groupes géométriquement intègre et K est bien son corps de fonctions rationnelles.

Réciproquement, si $G = \varprojlim G_i$ est un schéma, en vertu de II.3.2, les u_{ij} sont affines à partir d'un certain rang.

Contre-exemple 4.3

Le théorème de Weil (3.1) ne se généralise pas sans hypothèse de finitude.

Soit en effet $(G_n, u_{nm})_{n \in \mathbb{N}}$ un système projectif de variétés abéliennes lisses et connexes telles que $\dim G_n < \dim G_{n+1}$. (On peut prendre, par exemple, sur $\mathbb{C}$ $G_n = A \times A \times \ldots \times A$ où A est une courbe elliptique).

D'après 4.2 on associe à ce système un k-groupe rationnel intègre (K,Δ,σ) avec $K = \varinjlim K_n$, K_n désignant le corps des fonctions rationnelles de G_n . Alors, (K,Δ,σ) ne provient pas d'un schéma en groupes G , intègre. Sinon, on aurait des morphisme $u_n : G \to G_n$ (4.1). Les u_n et les u_{nm} seraient fidèlement plats (II.1.3) et affines (II.3.2) pour $n \geqslant n_o$. Mais comme les u_{nm} sont propres, ils seraient finis, ce qui contredit l'hypothèse $\dim G_n < \dim G_{n+1}$.

Théorème 4.4

Soit G un k-schéma en groupes géométriquement intègre. Il existe une famille $(G_i)_{i \in I}$ de k-groupes algébriques lisses et connexes, indexée par un ensemble I ordonné filtrant et des homomorphismes de groupes

$$u_{ij} : G_j \to G_i \quad \text{définis pour } j \geqslant i$$

et tels que :

1) Le système (G_i, u_{ij}) est un système projectif filtrant de k-schémas en groupes.

2) Il existe pour tout $i \in I$ un homomorphisme $u_i : G \to G_i$ et G , muni des u_i , est la limite projective du système (G_i, u_{ij}) dans la catégorie des schémas.

3) Les u_i et u_{ij} sont fidèlement plats, de sorte que G_i est un quotient de G pour la topologie fpqc.

4) Pour $i \geqslant i_o$, les u_i et les u_{ij} sont affines de sorte que G est aussi limite du système (G_i, u_{ij}) dans la catégorie des espaces annelés.

Démonstration :

Soit (K,Δ,σ) le k-groupe rationnel attaché à G (1.3). D'après (4.2), on en déduit un système projectif (G_i, u_{ij}) du type annoncé. L'existence de u_i

résulte alors de (4.1) ; les u_i et u_{ij} sont fidèlement plats en vertu de (II.1.3). Comme $K = \varinjlim K_i$, où K_i est le corps des fonctions de G_i , on peut appliquer (II.3.2) et les u_i et u_{ij} sont affines pour i assez grand.

Mais alors $H = \varprojlim G_i$ est un schéma en groupes et on a $u : G \to H$.

D'après II.3.1 , u est fidèlement plat et quasi-compact, donc un épimorphisme de faisceaux fpqc.

D'autre part, H est intègre, soit η son point générique, ξ celui de G .

Comme on a $\mathcal{O}_{H,\eta} \simeq \mathcal{O}_{G,\xi} \simeq K \simeq \varinjlim K_i$, il en résulte que la fibre générique $u^{-1}(\eta)$ se réduit à $\{\xi\} \simeq \operatorname{spec} K$.

Considérons alors l'extension $k \to K$ et soit η' un point rationnel (sur K) de $H_K = H \otimes_k K$ au-dessus de η .

La fibre $u_K^{-1}(\eta')$ est isomorphe à spec K . Par translation à l'élément neutre, il en résulte que le noyau N_K de u_K est nul et donc aussi $N = \operatorname{Ker} u$; u est alors un monomorphisme, donc un isomorphisme.

IV - APPROXIMATION DES GROUPES CONNEXES

§1 Construction d'un stabilisateur.

Rappelons que si X est un k-schéma, une fonction rationnelle sur X est un élément $f \in \Gamma(U, O_X)$ où U est un ouvert schématiquement dense de X, deux telles fonctions étant égales si elles coïncident sur un ouvert schématiquement dense.

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes quasi-compact, K l'anneau des fonctions rationnelles sur G, $f \in K$.

En vertu de II.2.7 et II.2.9 on peut supposer f définie sur un ouvert affine U de G. Soit $T \in \underline{\underline{\mathrm{Sch}}}/k$ et $G_T = G \times_k T$. Soit $g \in G(T)$, g induit par multiplication à gauche un automorphisme de G_T (noté encore g). Soit $U_T = U \times_k T$, f_T l'image réciproque de f. On a $f_T \in \Gamma(U_T, O_{G_T})$.

On a, par g, un homomorphisme

$$\Gamma(U_T, \mathcal{O}_{G_T}) \to \Gamma(g^{-1}U_T, \mathcal{O}_{G_T}) .$$

On note ${}^g f_T$ l'image de f_T par cette flèche et on pose ${}^g f_T(a) = f_T(ga)$. De même, par translation à droite on a f_T^g, avec

$$f_T^g(a) = f_T(ag) .$$

Définissons alors un sous-groupe H de G stabilisateur à gauche et à droite de f. H est défini comme sous-foncteur de G. Soit $T \in \mathrm{Sch}/k$, $H(T) \subset G(T)$ est défini par

$$h \in H(T) \iff f_T^h = {}^h f_T = f_T .$$

Ceci signifiant que ces fonctions rationnelles coïncident sur un ouvert schématiquement dense de G_T relativement à T.

1) H est un sous-foncteur de G.

C'est clair.

2) H est un sous-faisceau fpqc de G.

En effet, si $f_T^h = f_T$ après extension fpqc $T' \to T$, les deux fonctions sont égales.

3) H est un sous-faisceau en groupes de G.

En effet, si $f_T = {}^h f_T$ sur V, on a ${}^{h'} f_T = {}^{h'h} f_T$ sur $h'^{-1}(V)$ et donc $f_T = {}^{h'h} f_T$ sur $V \cap h'^{-1}(V)$ qui est sch. dense rel. à T.

4) H est invariant dans G.

Si $h \in H(T)$ et $g \in G(T)$ on a

$$\forall a, a' \in G(T) \qquad f(aghg^{-1}a') = f(agg^{-1}a') = f(aa')$$

donc $ghg^{-1} \in H(T)$.

5) H est représentable par un sous-schéma fermé de G défini par un idéal de type fini.

Pour ceci, considérons $m : G \times G \times G \to G$ défini par $m(g,g',g'') = gg'g''$ et soit $V = m^{-1}(U)$.

On a deux diagrammes cartésiens :

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \times G \arrow[r, shift left, "q_1"] \arrow[r, shift right, "q_2"'] \arrow[d, "q_3"] & G \times G \times G \arrow[d, "p"] \\ G \times G \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & G \end{tikzcd} \qquad (1) \text{ et } (2)$$

$$\begin{tikzcd} g, a, b, g' \arrow[r, mapsto, "q_1"] \arrow[d, mapsto, "q_3"] & g, a, g' \arrow[d, mapsto, "p"] \\ a, b \arrow[r, mapsto, "p_1"] & a \end{tikzcd} \qquad \text{cartésien } (1)$$

$$\begin{tikzcd} g, a, b, g' \arrow[r, mapsto, "q_2"] \arrow[d, mapsto] & g, b, g' \arrow[d, mapsto, "p"] \\ a, b \arrow[r, mapsto, "p_2"] & b \end{tikzcd} \qquad \text{cartésien } (2)$$

Posons $V_1 = q_1^{-1}(V)$, $V_2 = q_2^{-1}(V)$, $V' = V_1 \cap V_2$, $h = m^*(f)$, $h_1 = q_1^*(f)$,
$h_2 = q_2^*(f)$.

Soit R le sous-foncteur de $G \times G$ défini par les coïncidences de h_1 et h_2 .

$R(T) \subset (G \times G)(T)$ et par définition

$$(a,b) \in R(T) \iff h_1(g,a,b,g') = h_2(g,a,b,g') .$$

Ce qui signifie encore $f(gag') = f(gbg')$ pour tous $g,g' \in G(T)$.

En vertu du théorème de représentabilité (I.2.5) R sera représentable par un sous-schéma fermé de $G \times G$ défini par un idéal de type fini pourvu que l'on prouve le lemme suivant :

Lemme 1.1

Avec les notations précédentes, $V = m^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans $G \times G \times G$ relativement à $p : G \times G \times G \to G$, $(x,y,z) \mapsto y$.

Considérons en effet le p-isomorphisme

$$\begin{aligned} u : G \times G \times G &\to G \times G \times G \\ (x,y,z) &\mapsto (xy,y,z) . \end{aligned}$$

Il suffit de voir la propriété pour $u(V)$.

Soit $\pi : G \times G \to G$ $\pi(x,y) = xy$.

$\pi^{-1}(U)$ est sch. dense dans $G \times G$ (EGA IV 11.10.5). Donc $\pi^{-1}(U) \times G$ est sch. dense dans $G \times G \times G$ rel. à G .

Or $W = \pi^{-1}(U) \times G = \{(x,y,z) \in G \times G \times G \mid xz \in U\}$

et $u^{-1}(W) = \{(x,y,z) \mid xyz \in U\} = V$.

D'où le résultat.

Ceci entraîne que H est représentable.

En effet, si $\pi_1 : G \times G \to G$ est défini par $\pi_1(a,b) = ab^{-1}$, on a $R = \pi_1^{-1}(H)$ i.e. $(a,b) \in R(T) \iff ab^{-1} \in H(T)$.

Comme H est un sous-faisceau fpqc de G, il en résulte par descente que H est un sous-schéma fermé de G défini par un idéal de type fini.

On a donc prouvé le

<u>Théorème</u> 1.2

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes quasi-compact, $f_1,\dots,f_n$ des fonctions rationnelles sur G.

Il existe un sous-schéma en groupes fermé H de G défini par un idéal de type fini, invariant et qui est le stabilisateur commun des f_i, à gauche et à droite, c'est-à-dire, avec les notations précédentes :

Si $T \in Sch/k$, $H(T) \subset G(T)$

$$h \in H(T) \iff \forall i = 1,\dots,n \quad f_{i_T} = {}^h f_{i_T} = f_{i_T}^h .$$

<u>Proposition</u> 1.3

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes, H un sous-schéma en groupes fermé de G. Si H stabilise toutes les fonctions rationnelles sur G, $H = \{e\}$ (i.e réduit à l'élément neutre).

<u>Démonstration</u> :

Soit S un k-schéma affine, $S = \operatorname{spec} A$, et soit $h \in H(S)$. Soit d'autre part U un ouvert affine dense de G (donc relativement schématiquement dense par rapport à k). Soit $U_S = U \times_k S$, $G_S = G \times_k S$. U_S est un ouvert rel. sch. dense de G_S et il en est de même de $V = U_S \cap h^{-1} U_S$. Il en résulte que $V \to S$ est fpqc. Faisons l'extension $T \to S$ de la base avec $T = V$. On a alors une section de V au-dessus de T (la diagonale), soit x

$$\begin{array}{ccc} V_T & \to & V \\ \downarrow \uparrow x & & \downarrow \\ T & \to & S \end{array} .$$

Il en résulte que l'on a deux sections x, $h_T x : T \to U_T$ de la flèche $U_T \to T$.

Comme G_S est séparé, $T = V$ est affine, $T = \operatorname{spec} C$.

On a donc x^* , $(h_T x)^* : C \underset{k}{\otimes} A \to C$ qui coïncident sur C.

Par hypothèse, elles coïncident aussi sur A. Donc $x = h_T x$ et donc $e_T = h_T$. Comme $T \to S$ est fpqc, il en résulte que $h = e$.

1.4 Soit $\alpha = (f_1,\ldots,f_n)$ une partie finie de K, H_α le stabilisateur des f_i.

Soit $H = \bigcap\limits_{\substack{\alpha \subset K \\ \alpha \text{ fini}}} H_\alpha$.

Alors H est un sous-schéma en groupes fermé que G qui stabilise toutes les fonctions rationnelles, donc, $H = \{e\}$.

Soit alors U un ouvert affine de G contenant e. On a $\bigcap\limits_{\alpha \subset K} H_\alpha \subset U$ et en vertu de EGA I 7.2.5 $H_{\alpha_1} \cap \ldots \cap H_{\alpha_n} \subset U$ et comme l'ensemble des H_α est filtrant, il existe $\alpha = (f_1 \ldots f_n)$ tel que $H_\alpha \subset U$. Il en résulte que H_α est affine et que, si $\beta \supset \alpha$, H_β est affine.

1.5 Mais alors, le quotient fpqc de H_α par H_β est un schéma affine de type fini sur k. Comme $H' = \bigcap\limits_{\alpha \subset \beta \subset K} H_\beta = \{e\}$, il en résulte que $H_\alpha \cong \varprojlim H_\alpha / H_\beta$.

Remarquons de plus que H_β est un sous-groupe de H_α, distingué dans G.

§2 Construction de HG_{red}.

Soit k un corps parfait, G un k-schéma en groupes connexe, G_{red} le groupe réduit qui est alors géométriquement intègre. On suppose données n fonctions rationnelles $f_1,\ldots,f_n$ sur G de sorte que leur stabilisateur H soit un sous-schéma en groupes fermé distingué de G, défini par un idéal de type fini, on suppose de plus H affine.

On va construire le sous-groupe HG_{red}.

Pour ceci, considérons le produit $H \times_{\mathrm{spec}\, k} G_{red}$.

Comme H est un sous-groupe distingué de G, G opère sur H :

$$\forall S \in Sch/k \qquad \forall g \in G(S) \qquad \begin{array}{ccc} H(S) & \xrightarrow{\varphi(S)} & H(S) \\ h & \longmapsto & g{*}h \end{array}$$

avec $g{*}h = ghg^{-1}$ et $\varphi(S)$ est un automorphisme de groupes.

On a alors sur $H \times G_{red}$ une structure de groupe par produit semi-direct :

$$(h,g)(h',g') = (h(g{*}h'),gg')$$

et le morphisme
$$\begin{array}{rcl} \pi : H \times G_{red} & \to & G \\ (h,g) & \mapsto & hg \end{array}$$

est alors un homomorphisme de groupes. Soit N son noyau

$$N(S) = \{(n,n^{-1}) \mid n \in H \cap G_{red}(S)\} .$$

Le faisceau quotient fpqc $H \times G_{red}/N$ est alors un sous-faisceau en groupes de G, on le note HG_{red}.

Il vérifie les propriétés habituelles attachées à cette écriture, en particulier (toujours au sens des faisceaux fpqc)

$$HG_{red}/H \cong G_{red}/H \cap G_{red} .$$

Nous allons prouver maintenant

1) HG_{red} est un schéma

2) $HG_{red} \to G$ est de présentation finie.

Il en résultera (II.1.8) que $HG_{red} \to G$ est une immersion fermée définie par un idéal de type fini, et comme $G_{red} \subset HG_{red}$, cet idéal sera nilpotent.

Montrons que HG_{red} est un schéma.

Il nous suffit pour cela de prouver que $H \times G_{red}$ (produit semi-direct) est limite projective de groupes algébriques sur k (II prop. 3.3). Or, on a vu (1.5) que $H = \varprojlim H/H_\alpha$ avec H/H_α affine de type fini et H_α distingué dans G.

Comme H_α est distingué dans G , G (et donc G_{red}) opère par automorphisme intérieur sur H/H_α . De plus (III.4.4) G_{red} est limite projective de groupes algébriques lisses et connexes G_j , $G_j = G/N_j$, N_j affine. Soit alors α quelconque, on a l'opération ω_α

$$\omega_\alpha : G_{red} \times H/H_\alpha \rightarrow H/H_\alpha$$

et G_{red} opère par automorphisme de groupes. $G_{red} \times H/H_\alpha \simeq \varprojlim(G_j \times H/H_\alpha)$ et comme H/H_α est de type fini sur k , ω_α se factorise en

$$\omega_{\alpha,j_\alpha} : G_{j_\alpha} \times H/H_\alpha \rightarrow H/H_\alpha$$

qui opère encore par automorphisme de groupes. Il en résulte sur $G_{j_\alpha} \times H/H_\alpha$ une structure de groupe algébrique par produit semi-direct.

Mais alors, on a $G \times H = \varprojlim G_j \times H/H_\alpha$ d'où la conclusion.

En effet, on peut prendre comme ensemble d'indices l'ensemble des (j,α) avec $j \geqslant j_\alpha$ car si $j \geqslant j_\alpha$, ω se factorise a fortiori par $G_j \times H/H_\alpha$. Avec cette précaution, $\mathrm{Ker}(G_{red} \times H) \rightarrow \varprojlim G_j \times H/H_\alpha = \bigcap_{\substack{(j,\alpha) \\ j \geqslant j_\alpha}} N_j \times H_\alpha = \{e\}$.

Il reste à prouver que $HG_{red} \rightarrow G$ est de présentation finie.

Donnons pour cela une définition.

Définition 2.1

Soit k un corps ; F et G deux foncteurs contravariants de Sch/k dans Ens , $f : F \rightarrow G$ un morphisme de foncteurs.

On dit que f vérifie (*) [resp. (**)] si pour tout système projectif filtrant de G-schémas affines $(S_i)_{i \in I}$, de limite S , l'application canonique

$$\alpha : \varinjlim F(S_i) \rightarrow F(S)$$

est injective (resp. bijective).

$F(S_i)$ et $F(S)$ étant entendus ici comme $\mathrm{Hom}_G(S_i,F)$ et $\mathrm{Hom}_G(S,F)$.

Proposition 2.2

Soit f un épimorphisme de k-faisceaux fpqc :

$$f : X \to Y .$$

Posons $R = X \times_Y X$ et soit ℓ le monomorphisme canonique $\ell : R \to X \times_{\operatorname{spec} k} X$.

Soit $p : Y \to \operatorname{spec} k$ la flèche canonique. Alors,

$$p \text{ vérifie } (*) \iff \ell \text{ vérifie } (**) .$$

Démonstration :

Montrons l'implication $\Longrightarrow$.

Comme ℓ est un monomorphisme, il suffit de prouver la surjectivité de α .

Soit donc $(S_i)_{i \in I}$ un système projectif de $X \times_k X$ schémas affines, S sa limite, $p_i : S \to S_i$. On a donc une flèche $a_i = (b_i, c_i) : S_i \to X \times_k X$ avec $b_i, c_i : S_i \to X$, k-morphismes, et on pose $a = a_i \circ p_i$, $b = b_i \circ p_i$, $c = c_i \circ p_i$, $a = (b, c)$ est la flèche canonique de $S \to X \times_k X$.

Dire qu'on a une $X \times_k X$ flèche de S dans R signifie alors que a se factorise par R i.e. que $f \circ c = f \circ b$. Mais alors, comme Y vérifie $(*)$ sur k , il en résulte que pour i assez grand $f \circ b_i = f \circ c_i$, donc $a_i \in R(S_i)$ car $R = X \times_Y X$.

Implication $\Longleftarrow$.

Les notations sont les mêmes.

Supposons qu'on ait (b_i) et $(c_i) \in \varinjlim Y(S_i)$ telles que

$$b = b_i \circ p_i = c = c_i \circ p_i .$$

Choisissons i quelconque. Comme f est un épimorphisme fpqc, il existe $T_i \to S_i$ affine et fpqc tel que b_i et c_i se relèvent à X :

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "p'_i"] \arrow[d, "g"] & T_i \arrow[r, shift left, "b'_i"] \arrow[r, shift right, "c'_i"'] \arrow[d, "g_i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
S \arrow[r] & S_i \arrow[r, shift left, "b_i"] \arrow[r, shift right, "c_i"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Pour $j \geqslant i$ posons $T_j = T_i \underset{S_i}{\times} S_j$, de sorte que $T = S \underset{S_i}{\times} T_i = \varprojlim T_j$.

Posons $b' = b'_i \circ p'_i$, $c' = c'_i \circ p'_i$, on a $f \circ b' = f \circ c'$, donc, $(b',c') \in R(T)$.

Comme $T = \varprojlim T_j$ et ℓ vérifie $(*)$, il existe $j \geqslant i$ tel que $(b'_j,c'_j) \in R(T_j)$ ou encore, tel que $f \circ b'_j = f \circ c'_j$. Ceci signifie aussi que $b_i \circ g_i = c_i \circ g_i$, mais, comme g_i est un épimorphisme, $b_i = c_i$.

<u>Proposition</u> 2.3

Considérons le diagramme suivant avec $r = q \circ p$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "r"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Si r vérifie $(**)$ et q $(*)$ alors p vérifie $(**)$. C'est clair.

<u>Corollaire</u> 2.4

Soit k un corps, G , H , L trois k-schémas en groupes avec le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & L \arrow[d, "\ell"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

où i , j , ℓ sont des monomorphismes quasi-compacts.

On suppose

1) i de présentation finie

2) le faisceau quotient fpqc L/H est un schéma en groupes de type fini sur k .

Alors, ℓ est de présentation finie.

Démonstration :

Il suffit de voir que $L \times G \xrightarrow{\ell \times \mathrm{Id}} G \times G$ est de présentation finie, donc que $\ell \times \mathrm{Id}$ vérifie (∗∗) (EGA IV 8.14.2). Comme $G \underset{G/L}{\times} G$ est isomorphe à $L \times G$ par la flèche $(g,g') \mapsto (gg'^{-1},g')$, il suffit de voir que G/L vérifie (∗) (2.2).

On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow L/H \xrightarrow{u} G/H \longrightarrow G/L \longrightarrow 0$$

et on considère alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} L/H \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "q"'] & & G/H \arrow[dl, "p"] \\ & \operatorname{spec} k & \end{tikzcd}$$

Il suffit de voir que u vérifie (∗∗) (2.2), mais, par hypothèse q vérifie (∗∗) et p vérifie (∗) (2.2) donc u vérifie (∗∗) (2.3).

Prenant $L = HG_{red}$ il en résulte que $HG_{red} \to G$ est de présentation finie. Il suffit de voir que HG_{red}/H l'est. Or, $HG_{red}/H \cong G_{red}/H \cap G_{red}$ et on conclut par (II 3.3).

§3 Passage au quotient et limites projectives.

Théorème 3.1

Soit k un corps parfait, G un k-schéma en groupes connexe, $f_1,\dots,f_n$ n fonctions rationnelles sur G , H leur stabilisateur qui est un sous-schéma en groupes fermé de G , défini par un idéal de type fini, distingué dans G . On suppose H affine. Alors, le faisceau fpqc quotient G/H est un schéma en groupes de type fini sur k .

Démonstration :

On a le lemme suivant dû à Grothendieck.

Lemme 3.

Soit S un k-schéma, R un k-schéma d'équivalence sur S tel que $pr_1 : R \to S$ soit fpqc. Soit S_o un sous-schéma fermé de S défini par un idéal nilpotent de type fini et saturé sous R.

Si R_o est la relation induite par R sur S_o et si le faisceau fpqc quotient S_o/R_o est un k-schéma de type fini, alors le faisceau fpqc S/R est un k-schéma de type fini.

La démonstration, mutatis mutandis, est celle de [DG] III § 2.7.1.

Le théorème en résulte aisément avec $S = G$ et $S_o = HG_{red}$. En effet HG_{red} est bien défini par un nilidéal de type fini donc nilpotent. D'autre part, on a un isomorphisme $HG_{red}/H \cong G_{red}/H \cap G_{red}$ et ce dernier quotient est un schéma en vertu de II 3.3 et III 4.4.

Théorème 3.2

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes connexe. Il existe une famille $(G_i)_{i \in I}$ de k-groupes algébriques indexée par un ensemble I ordonné filtrant et une famille $u_{ij} : G_j \to G_i$ de morphismes de groupes, définis pour $j \geqslant i$ tels que :

1) Le système (G_i, u_{ij}) est un système projectif filtrant de k-schémas en groupes connexes.

2) Les G_i sont des quotients fpqc de G et muni des morphismes canoniques $u_i : G \to G_i$, G s'identifie à la limite projective du système (G_i) dans Sch/k.

3) Pour $i \geqslant i_o$ les u_i et les u_{ij} sont affines, de sorte que G est aussi limite du système (G_i, u_{ij}) dans la catégorie des espaces annelés.

Démonstration :

1) Supposons k parfait.

Soient $(f_1 \ldots f_n)$ comme au Th. 3.1, H leur stabilisateur, H_α le stabilisateur de $\alpha = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_p)$ (cf IV 1.4). Alors $\bigcap_\alpha H_\alpha = \{e\}$ et en

Lemme 3.

Soit S un k-schéma, R un k-schéma d'équivalence sur S tel que $pr_1 : R \to S$ soit fpqc. Soit S_o un sous-schéma fermé de S défini par un idéal nilpotent de type fini et saturé sous R.

Si R_o est la relation induite par R sur S_o et si le faisceau fpqc quotient S_o/R_o est un k-schéma de type fini, alors le faisceau fpqc S/R est un k-schéma de type fini.

La démonstration, mutatis mutandis, est celle de [DG] III § 2.7.1.

Le théorème en résulte aisément avec $S = G$ et $S_o = HG_{red}$. En effet HG_{red} est bien défini par un nilidéal de type fini donc nilpotent. D'autre part, on a un isomorphisme $HG_{red}/H \cong G_{red}/H \cap G_{red}$ et ce dernier quotient est un schéma en vertu de II 3.3 et III 4.4.

Théorème 3.2

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes connexe. Il existe une famille $(G_i)_{i \in I}$ de k-groupes algébriques indexée par un ensemble I ordonné filtrant et une famille $u_{ij} : G_j \to G_i$ de morphismes de groupes, définis pour $j \geqslant i$ tels que :

1) Le système (G_i, u_{ij}) est un système projectif filtrant de k-schémas en groupes connexes.

2) Les G_i sont des quotients fpqc de G et muni des morphismes canoniques $u_i : G \to G_i$, G s'identifie à la limite projective du système (G_i) dans Sch/k.

3) Pour $i \geqslant i_o$ les u_i et les u_{ij} sont affines, de sorte que G est aussi limite du système (G_i, u_{ij}) dans la catégorie des espaces annelés.

Démonstration :

1) Supposons k parfait.

Soient $(f_1 \ldots f_n)$ comme au Th. 3.1, H leur stabilisateur, H_α le stabilisateur de $\alpha = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_p)$ (cf IV 1.4). Alors $\bigcap_\alpha H_\alpha = \{e\}$ et en vertu de 3.1 G/H_α est représentable.

Le théorème résulte alors de II 3.1.1.

2) Cas général.

Soit H un stabilisateur, par la méthode précédente, il suffit de montrer que G/H est un schéma.

Soit $\bar{k}$ une clôture parfaite de k. De la suite exacte

$$0 \to H \to G \to G/H \to 0 .$$

On déduit la suite exacte

$$0 \to \bar{H} \to \bar{G} \to \overline{G/H} \to 0$$

avec $\bar{H} = H \otimes_k \bar{k}$,...

Il en résulte que $\overline{G/H} \cong \bar{G}/\bar{H}$, mais, en vertu de 1) et II.3.3 $\bar{G}/\bar{H}$ est un schéma.

$\overline{G/H}$ est canoniquement muni d'une donnée de descente relative à $k \to \bar{k}$. Comme $k \to \bar{k}$ est radiciel et fidèlement plat, cette donnée de descente est effective et l'objet descendu est bien isomorphe à G/H (SGA 3 Exp. IV 3.5.2).

Corollaire 3.3

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes connexe, H un sous-schéma en groupes fermé de G. Alors, le faisceau fpqc quotient G/H est un schéma dans les deux cas suivants :

1) H est défini par un idéal de type fini, l'espace homogène G/H étant alors de type fini sur k.

2) H est distingué dans G.

Démonstration :

Cela résulte de 3.2 et II.3.3.

<u>Contre-exemple</u> 3.4.

Si l'on n'est pas dans le cas 1) ou 2), G/H n'est pas nécessairement un schéma.

Considérons le groupe $G_o = GL(2,\mathbb{C})$ et l'opération canonique de G_o sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ par homographies. Le stabilisateur d'un point est un sous-groupe de Borel B_o de G_o et on a $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \cong G_o/B_o$. Comme G_o et B_o sont affines, les produits infinis $G = \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$, $B = \prod_{n\in\mathbb{N}} B_n$ où $G_n = G_o$, $B_n = B_o$ sont des schémas en groupes affines avec $B \subset G$. En tant que faisceau fpqc, $G/B \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n/B_n$.
Mais alors G/B n'est pas représentable car un produit infini de copies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ n'est pas un schéma.

V - APPROXIMATION DES SCHEMAS EN GROUPES QUASI-COMPACTS : LE CAS GENERAL.

-:-:-:-:-:-:-

§1 Construction de G/G^o.

Théorème 1.1

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes quasi-compact, G^o sa composante neutre. Alors, le faisceau quotient fpqc $Y = G/G^o$ est un k-schéma en groupes, affine, dont les anneaux locaux sont des corps.

De plus, $\underline{Y}$ est compact et totalement discontinu.

Démonstration :

Considérons les deux flèches

$$G^o \times G \overset{q_1}{\underset{q_2}{\rightrightarrows}} G$$

$q_1(g,x) = x \qquad q_2(g,x) = gx$.

Soient q_1^* et q_2^* les homomorphismes induits

$$q_1^*, q_2^* : \Gamma(G) \rightrightarrows \Gamma(G^o \times_k G)$$

et soit $R = \mathrm{Ker}(q_1^*, q_2^*)$, $Y = \mathrm{spec}\ R$.

L'injection $i : R \to \Gamma(G)$ induit un morphisme $\rho : G \to Y$ dominant.

Alors (Y,p) est isomorphe à G/G^o . (1.1.1).

Avant d'aborder la démonstration de (1.1.1) donnons une description de R .

Soit $S \in \underline{\underline{Sch}}/k$, $q : G_S = G \times_k S \to G$ $\quad q^* : \Gamma(G) \to \Gamma(G_S)$. Posons $f_S = q^*(f)$.

Soit d'autre part $g \in G^o(S)$, alors g induit un isomorphisme de G_S sur G_S par multiplication à gauche, d'où $g^* : \Gamma(G_S) \to \Gamma(G_S)$. Alors, on a

$$f \in R \iff \forall S \in \underline{\underline{Sch}}/k \quad \forall g \in G^o(S) \quad g^*(f_S) = f_S$$

ce que nous écrirons $f_S(gx) = f_S(x) \quad \forall x \in G(S)$. Cela résulte immédiatement de la définition de R .

Venons-en à la démonstration de (1.1.1).

1) Pour prouver (1.1.1) et (1.1) on peut faire une extension de corps $k \to K$ (car $G^o_K \cong (G_K)^o$) .

2) D'autre part, il existe une extension $k \to K$ telle que toutes les composantes irréductibles de G_K contiennent un point rationnel sur K .

Pour cela, prenons d'abord une clôture algébrique $\bar{k}$ de k , de sorte que les composantes $(X_i)_{i \in I}$ de $G_{\bar{k}}$ sont géométriquement irréductibles. Il suffit alors de choisir $x_i \in X_i$ et de prendre une extension commune K des $\bar{k}(x_i)$. Les composantes X_{i_K} auront alors toutes des points K-rationnels.

3) On peut donc supposer que toutes les composantes de G contiennent des points rationnels sur k . On a une flèche $u : G/G^o \to Y$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "p"] \arrow[dr] & & Y \\ & G/G^o \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

En effet, cela résulte de $p_o q_1 = p_o q_2$.

4) Montrons d'abord que u est un monomorphisme.

Il suffit pour cela de prouver que

$$\forall x,y \in G(S) \qquad p(x) = p(y) \implies \exists g \in G^o(S) \quad y = gx$$

avec $S \in \underline{\underline{Sch}}/k$.

Ceci signifie aussi si T est la relation d'équivalence associée à l'opération de G^o dans G , on a

$$\forall x,y \in G(S) \qquad p(x) = p(y) \implies (x,y) \in T(S) \ .$$

Comme T est un sous-schéma fermé de $G \times G$, on est donc ramené au cas où S est affine et même local.

On a alors les lemmes suivants

Lemme 1.1.2

Soit U une partie de G, ouverte et fermée et stable par G^o. Alors l'idempotent f défini par U (i.e. $f|U = 0$, $f|\complement U = 1$) est dans R.

C'est clair.

Lemme 1.1.3

Si $x, y \in \underline{G}$ sont dans des composantes irréductibles distinctes, on a $p(x) \neq p(y)$.

En effet, si $x \in X$, composante irréductible, et si $y \in Y$, il existe un ouvert fermé saturé sous G^o tel que $X \subset U$ et $U \cap Y = \emptyset$ (II 2.3) et si f est sa fonction caractéristique, $f(x) = 0$, $f(y) = 1$. Comme $f \in R$, $p(x) \neq p(y)$.

Soit alors $S = \operatorname{spec} A$, A local et s le point fermé de s et soient $x, y : S \rightrightarrows G$ tels que $p o x = p o y$.

Alors en vertu de 1.1.3 $x(s)$ et $y(s)$ sont dans une même composante X de G.

Soit $a \in X$ un point k-rationnel, τ_a la translation $\alpha \mapsto \alpha a^{-1}$. τ_a est un isomorphisme de X sur G^o.

De plus $\tau_a o x$ et $\tau_a o y$ se factorisent par G^o. En effet, comme $\forall g \in G^o$, $\mathcal{O}_{G,g} \simeq \mathcal{O}_{G^o,g}$ (II 2.4) c'est ensembliste.

Or $G^o = \bigcap_i U_i$ avec U_i ouvert et fermé saturé et il suffit donc de voir que $\tau_a o x(\underline{S}) \subset U_i$. Or S est local et U_i ouvert, donc stable par générisation, d'où le résultat.

On a donc $\tau_a o x$, $\tau_a o y \in G^o(S)$. Mais $G^o(S)$ est un groupe, donc il existe $g \in G^o(S)$ tel que $(\tau_a o y)g = \tau_a o x$.

Mais ceci entraîne $x = yg$ donc $y = g^{-1}x$ cqfd.

5) Soit η un point générique de Y.

En vertu de 1.1.3, $p^{-1}(\eta)$ est contenu dans une composante irréductible X

de G et comme p est dominant, si ξ est le point générique de X, on a $p(\xi) = \eta$.

Montrons alors que pour tout $x \in X$, $p(x) = \eta$. Il faut prouver que

$$\forall f \in R \quad f(x) = 0 \Longrightarrow f(\xi) = 0 \quad (\text{i.e. } f \in \eta).$$

On va prouver en fait que l'image f_x de f dans $\mathbf{A} = \mathcal{O}_{G,x}$ est nulle.

Posons $S = \operatorname{spec} \mathbf{A}$ et considérons $v,w : S \rightrightarrows G$ v étant la flèche canonique, w la flèche composée de $S \to \operatorname{spec} k(x) \to G$. Comme $v(x) = w(x)$, il résulte de la méthode utilisée en 4) qu'il existe $g \in G^0(S)$ tel que $gw = v$. Donc, comme $f \in R$, $v^*(f) = f_x = w^*(f) = f(x) = 0$.

6) Montrons alors que $R_\eta \cong k$.

Soit x un point rationnel de $X = p^{-1}(\eta)$, on a une application surjective canonique

$$R_\eta \xrightarrow{\varphi} k(x) = k$$

$$f/g \mapsto f(x)/g(x).$$

Supposons donc $f(x) = 0$. En vertu de 5) on a $f(\xi) = 0$ et même, $\forall y \in X$, $f(y) = 0$. D'après 5) on en déduit $\forall y \in X$ $f_y = 0$ dans $\mathcal{O}_{G,y}$.

Or $U = \{y \in G \mid f_y = 0\}$ est un ouvert qui contient donc X. Comme $X = \bigcap_i U_i$ avec U_i ouvert fermé saturé sous G^0, il existe i tel que $U \supset U_i$.

Donc on peut supposer $f_y = 0$ sur U ouvert fermé saturé. Soit g l'idempotent qui vaut 1 sur U et 0 sur $\complement U$, $g \in R$ et on a $fg = 0$. Mais comme $g(x) = 1$, $g \notin \eta$ et donc $f = 0$ dans R_η ce qui prouve que φ est injective donc $R_\eta \cong k$.

7) Comme $k(\eta) = \operatorname{Fr}(R/\eta) = k$ et comme R est une k algèbre, il résulte de 6) que tous les idéaux de R sont à la fois maximaux et minimaux et que les anneaux locaux de R sont des corps.

Ceci assure que p est plat et surjectif donc un épimorphisme fpqc et donc en vertu de 4) p est un isomorphisme.

8) Enfin $\underline{Y}$ est séparé (donc compact). Soient $x,y \in Y$ $x \neq y$; X,Y leurs images réciproques dans G. Il existe un ouvert fermé saturé U tel que $X \subset U$, $U \cap Y = \emptyset$. Alors si f est l'idempotent associé à U on a $x \in Y_f$, $y \notin Y_f$ et Y_f ouvert et fermé ce qui prouve aussi que Y est totalement discontinu.

Corollaire 1.2

Sous les hypothèses de 1.1, les points de $Y = G/G^0$ sont à extension résiduelle algébrique sur k.

Démonstration :

Comme $Y = \operatorname{spec} R$ est un groupe affine, $Y = \varprojlim Y_i$, $Y_i = \operatorname{spec} R_i$, R_i de type fini sur k et $Y \to Y_i$ est un homomorphisme de groupes, fidèlement plat.

Les anneaux locaux de Y_i sont donc des corps donc Y_i est de dimension zéro. Mais d'après le Nullstellensatz, ces corps sont des extensions finies de k et donc, si $x \in Y$, $k(x) = \varinjlim k(x_i)$ est une extension algébrique de k.

De plus, comme Y_i est noethérien, $\underline{Y_i}$ est fini et donc $Y_i = \coprod_{\alpha=1}^{n} \operatorname{spec} k_\alpha$ avec $k \to k_\alpha$ finie. Si k est algébriquement clos, $Y_i = \coprod_{\alpha=1}^{n} \operatorname{spec} k$.

§2 Construction d'un quotient.

Théorème 2.1

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes quasi-compact, H un sous-schéma en groupes fermé de G, affine, distingué, défini par un idéal de type fini.

Alors, le faisceau quotient G/H pour la topologie fpqc est un k-groupe algébrique.

Démonstration :

On a la suite exacte de faisceaux fpqc :

$$0 \to G^{o} \to G \to G/G^{o} \to 0 .$$

De plus G/G^{o} est un schéma en groupes, affine, du type étudié en 1.1 et en particulier, ses anneaux locaux sont des corps.

Considérons le quotient fpqc $H' = H/H \cap G^{o}$. Comme H est affine, H' est un schéma en groupes et on a une immersion fermée $H' \to G' = G/G^{o}$ définie par un idéal de type fini. On en déduit la suite exacte de faisceaux :

$$0 \to HG^{o}/G^{o} \to G/H \to G'/H' \to 0$$

ou encore

$$0 \to G^{o}/H \cap G^{o} \to G/H \to G'/H' \to 0$$

$G^{o}/H \cap G^{o}$ est un schéma en groupes, algébrique sur k en vertu de IV 3.3. G'/H' est un groupe affine ([DG] III 3.5.6) du même type que G' et de plus, de type fini sur k, donc un groupe étale fini.

Le théorème résulte alors du lemme :

Lemme 2.2

Soit k un corps, S un schéma étale sur k, G un S-schéma en groupes de type fini sur S, X un S-torseur fpqc sous G. Alors X est un schéma de type fini sur S.

Démonstration :

1) On peut supposer $S = \operatorname{spec} K$ avec K extension finie séparable de k. En effet, $S = \coprod_{i=1}^{n} \operatorname{spec} k_i$ avec k_i finie séparable sur k.

2) $X \to S$ est un épimorphisme fpqc et même fppf puisque $X \times_S X \cong G \times_S X$ et que $G \to S$ est de type fini.

3) Par conséquent il existe $T \xrightarrow{p} S$ fppf et $u \in X(T)$ tels que le

diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{Id} & S \end{array}$$

Comme S est un spectre de corps, on peut supposer $T = \operatorname{spec} L$ avec $K \to L$ finie (Nullstellensatz).

Mais alors $X_L \cong G_L$ et on a donc sur X_L une donnée de descente. Comme G est algébrique sur k, G est quasi-projectif, donc comme $K \to L$ est fini, la donnée de descente est effective et donc, X est un schéma. (cf aussi [DG] III §5 1.4).

§3 Théorème d'approximation et corollaires.

Théorème 3.1

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes quasi-compact.

Il existe une famille de k-groupes algébriques $(G_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble I ordonné filtrant et une famille $u_{ij} : G_j \to G_i$ de morphismes de groupes définis pour $j \geqslant i$ tels que :

1) Le système (G_i, u_{ij}) est un système projectif de k-schémas en groupes.

2) Les G_i sont des quotients fpqc de G, et munis des morphismes canoniques $u_i : G \to G_i$, G s'identifie à la limite projective du système (G_i) dans $\underline{\underline{Sch}}/k$.

3) Pour i assez grand u_i et u_{ij} sont affines, de sorte que G est aussi limite du système (G_i) dans la catégorie des espaces annelés.

Démonstration :

Reprenant la technique de IV 1.4 on voit qu'il existe n fonctions rationnelles $f_1, \dots, f_n$ telles que si $\alpha = \{f_1, \dots, f_n\}$ et si H_α est leur stabilisateur, H_α soit affine. Si maintenant $\beta = \{f_1,\ldots,f_n ; g_1,\ldots,g_p\}$ où les g_i sont aussi des fonctions rationnelles, H_β est affine et on a $\bigcap_{\beta\supset\alpha} H_\beta = \{e\}$ (IV.1.3). De plus, si $\beta \supset \alpha$, G/H_β est un groupe algébrique (2.1).

Le théorème résulte alors de II 3.1.1 . En effet, si $\beta' \supset \beta$, le morphisme $G/H_{\beta'} \to G/H_\beta$ est affine puisque son noyau, $H_\beta/H_{\beta'}$ l'est.

<u>Corollaire</u> 3.2

Soit k un corps, G un k-schéma en groupes quasi-compact, H un sous-schéma en groupes fermé de G .

Alors, le faisceau fpqc quotient G/H est un schéma dans les deux cas suivants :

1) H est défini par un idéal de type fini, l'espace homogène G/H étant alors de type fini sur k .

2) H est distingué dans G .

Cela résulte de 3.1 et de II 3.3.

<u>Corollaire</u> 3.3

Soient G et H deux schémas en groupes sur k et $f : G \to H$ un homomorphisme quasi-compact. Soit $N = \operatorname{Ker} u$. Alors, le faisceau fpqc quotient G/N est un schéma et le monomorphisme canonique $G/N \to H$ est une immersion fermée.

<u>Démonstration</u> :

Soit G' l'image schématique de G par f . On a vu (II 1.5) que G' est un sous-schéma en groupes fermé de H et que $f : G \to G'$ est surjectif, schématiquement dominant et quasi-compact, de noyau N .

Il nous suffit de prouver le

<u>Lemme</u> 3.3.1

Soit $f : G \to H$ un homomorphisme quasi-compact et schématiquement dominant. Alors f est fidèlement plat.

Comme $f(G) = H$ contient tous les points génériques quitte à remplacer H par H° et G par $G \times_H H^{\circ}$, on peut supposer $H = H^{\circ}$, donc quasi-compact (II.2.2) et comme f est quasi-compact, G est alors quasi-compact.

Ecrivons $H = \varprojlim H_i$, H_i algébrique, et soit $N_i = \mathrm{Ker}(G \to H \to H_i)$. N_i est défini par un idéal de type fini et donc (3.2) $G_i = G/N_i$ est un schéma.

On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ {\scriptstyle q_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_i} \\ G_i & \xrightarrow{f_i} & H_i \end{array}$$

Comme p_i est fidèlement plat et f sch. dominant, $f_i \circ q_i$ est sch. dominant, donc f_i l'est aussi, puisque q_i est fidèlement plat.

D'autre part f_i est un monomorphisme, donc une immersion fermée (II.1.8) donc un isomorphisme. Il en résulte que $p_i \circ f$ est fidèlement plat et donc f aussi (II.3.1).

Corollaire 3.4

Un monomorphisme quasi-compact de k-schémas en groupes est une immersion fermée.

Contre-exemple 3.5

Si k est de caractéristique 0, soit G le k-groupe constant $\mathbb{Z}$ et H le k-groupe G_a. Alors si f est un homomorphisme non nul $f : G \to H$, f est un monomorphisme, mais pas une immersion fermée.

Corollaire 3.6

La catégorie des k-schémas en groupes quasi-compacts commutatifs est abélienne.

Corollaire 3.7

Soit k un corps algébriquement clos, $f : G \to H$ un homomorphisme fidèlement plat de k-schémas en groupes. On suppose G quasi-compact. Alors l'application induite $f(k) : G(k) \to H(k)$ est surjective.

Démonstration :

1) On connaît le résultat lorsque f est de type fini (Nullstellensatz) ou lorsque G et H sont affines (DG III 3.7.6).

On a une suite exacte $0 \to N \to G \to H \to 0$.

2) Réduction au cas où N est affine.

Soit G' un quotient algébrique de G par un sous-groupe affine distingué N'.

Soit M l'image de N' dans H qui est un sous-groupe distingué de H, isomorphe à $N'/N \cap N'$.

Soit $H' = H/M$. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ N' & \xrightarrow{g} & M \\ i\downarrow & & \downarrow j \\ G & \xrightarrow{f} & H \\ p\downarrow & & \downarrow q \\ G' & \xrightarrow{f'} & H' \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

avec g et f' fidèlement plats
G',H' de type fini,
N',M affines.

Soit alors $x \in H(k)$, $x' = q(x)$ qui se relève en $y' \in G'(k)$ puisque f' est de type fini. y' se relève en $y \in G(k)$ puisque N' est affine. Soit $x_1 = f(y)$, on a $x = x_1 j(u)$ avec $u \in M(k)$. Or u se relève puisque N' et M sont affines. Donc $u = g(v)$ $v \in N'(k)$. Mais alors si $y_1 = y\,i(v)$, on a $f(y_1) = x$.

3) Démonstration dans le cas où N est affine.

Soit $x \in H(k)$.

Soit $\mathcal{M} = \{(N',x') \mid N'$ sous-groupe distingué de G, $N' \subset N$,
$x' \in G/N'(k)$, au-dessus de $x\}$.

On ordonne $\mathcal{M}$ par

$$(N',x') \leqslant (N'',x'') \Longleftrightarrow N'' \subset N' \quad \text{et} \quad x'' \text{ au-dessus de } x' .$$

Alors $\mathcal{M}$ est inductif : si (N_i,x_i) est une famille bien ordonnée de $\mathcal{M}$, soit $N' = \bigcap_{i \in I} N_i$.

Comme les N_i sont affines, $\varprojlim G/N_i$ existe et est isomorphe à G/N' .

Comme I est bien ordonné, il existe $x' \in G/N'$ au-dessus des x_i .

D'après Zorn, $\mathcal{M}$ a un élément maximal, (N',x') . Si $N' \neq \{e\}$, il existe un sous-groupe K de G , distingué, défini par un nombre fini d'équations tel que $N' \not\subset K$. (Prendre un stabilisateur et utiliser IV 1.3).

Mais alors, soit $N'' = N' \cap K$, comme $K \to G$ est de présentation finie, il en est de même de $N' \cap K \to N'$ donc de $G/N'' \to G/N'$.

Il existe alors $x'' \in G/N''(k)$ au-dessus de x' et le couple (N',x') n'est pas maximal. On a donc prouvé que $N' = \{e\}$, donc il existe $x' \in G(k)$ au-dessus de x .

Corollaire 3.8

Soit G un k-schéma en groupes quasi-compact. L'ensemble des points à corps résiduel algébrique sur k est dense dans G .

Si k est algébriquement clos, l'ensemble des points rationnels est dense dans G .

Démonstration :

Il suffit de prouver l'assertion relative à k algébriquement clos.

Soit U un ouvert quasi-compact de G , comme $G = \varprojlim G_i$ avec G_i algébrique, U provient d'un U_i . D'après le Nullstellensatz, U_i contient un point rationnel, et donc U aussi, en vertu de 3.7.

Corollaire 3.9

Si k est de caractéristique 0 , tout schéma en groupes est géométriquement réduit. Cela résulte de 3.1 et du théorème de Cartier ([DG] II 6.1.1).

Corollaire 3.10

Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de k-schémas en groupes connexes. Soit $x \in G$, $y = f(x)$. On suppose que $f^* : \mathcal{O}_{H,y} \to \mathcal{O}_{G,x}$ est injectif. Alors, f est fidèlement plat.

Démonstration :

En vertu de 3.3 on peut supposer que f est une immersion fermée, donc f^* bijectif. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ i \uparrow & & \uparrow j \\ \operatorname{spec} \mathcal{O}_{G,x} & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{spec} \mathcal{O}_{H,y} \end{array}$$

En vertu de I 1.10 et II 1.2, j est schématiquement dominant, donc $f \circ i$ aussi et donc f est schématiquement dominant. On conclut alors par 3.3.1.

§4 Théorèmes de structure.

4.1 Composante neutre.

Théorème 4.1

Soit G un k-schéma en groupes quasi-compact, G° la composante neutre de G (cf. II.2.4).

1) $\pi_{o}(G) = G/G^{\circ}$ est un k-schéma en groupes pro-étale (i.e. limite projective de groupes étales finis).

2) Si $G = \varprojlim G_i$, on a

$$\varprojlim G_i^{\circ} = G^{\circ} \quad ; \quad \pi_o(G) = \varprojlim \pi_o(G_i)$$

3) Si k est algébriquement clos, les composantes irréductibles de G sont isomorphes à G°.

Démonstration :

2) se démontre comme dans le cas affine (cf [DG] III 3.7.7) et 1) résulte de V 1.1. Enfin, 3) résulte de 1) de 3.7 et de II.2.8.

4.2 L'affinisé.

Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de Sch/k formée des k-schémas quasi-compacts et quasi-séparés. On définit, pour $X \in \mathcal{C}$, $X_{af} = \operatorname{spec} \Gamma(X)$.
Soit $\phi_X : X \to X_{af}$ le morphisme canonique.

X_{af} est appelé l'affinisé de X. Comme $\Gamma(X \times_k Y) = \Gamma(X) \otimes_k \Gamma(Y)$ ([DG] I 2.2.6) le foncteur $X \mapsto X_{af}$ commute aux produits finis. Il en résulte que si G est un schéma en groupes quasi-compact, G_{af} est un schéma en groupes affine et ϕ_G un homomorphisme de groupes.

Proposition 4.2.1

Soit G un k-schéma en groupes quasi-compact. Pour tout homomorphisme $f : G \to H$ avec H groupe affine, il existe un unique homomorphisme $g : G_{af} \to H$ tel que $f = g \circ \phi_G$.

Théorème 4.2.2

Soit G un k-schéma en groupes quasi-compact.

1) $\phi_G : G \to G_{af}$ est fidèlement plat.

2) Si $N = \operatorname{Ker} \phi_G$, $\Gamma(N) = k$.

3) N est un k-schéma en groupes géométriquement intègre contenu dans le centre de G^o.

Démonstration :

1) En vertu de 4.2.1, G_{af} est isomorphe à l'image schématique de G par ϕ_G. Donc ϕ_G est fidèlement plat (3.3.1).

Ecrivons alors $G = \varprojlim G_i$.

On a des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N_i & \longrightarrow & G & \xrightarrow{p_i} & G_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle r_i} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_i} & & \\
0 & \longrightarrow & M_i & \longrightarrow & G_{af} & \xrightarrow{q_i} & G_{iaf} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Comme ϕ , p_i , ϕ_i sont fidèlement plats, il en est de même de q_i .

D'autre part r_i est fidèlement plat : soit $\tilde{N}_i$ l'image schématique de N_i par ϕ , on a $\tilde{N}_i \subset M_i$. D'autre part $G_{af}/\tilde{N}_i$ est affine et on a une flèche $G_i \to G_{af}/\tilde{N}_i$. Comme G_{iaf} est le plus grand quotient affine de G_i , $\tilde{N}_i = M_i$.

Comme $\varprojlim N_i = \{e\}$, il en résulte que $\varprojlim M_i = \{e\}$ et donc que $\varprojlim G_{iaf} \cong G_{af}$.

Les assertions 2 et 3 résultent alors de [DG] III 3.8.2 et 3.

4.3 Décomposition de Chevalley.

Théorème 4.3.1

Soit G un k-schéma en groupes connexe. On a une suite exacte :

$$0 \to H \to G \to \mathbf{A} \to 0$$

où H est un groupe affine et $\mathbf{A}$ une variété abélienne.

Cela résulte de 3.1 et du théorème de Chevalley dans le cas algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

[DG] DEMAZURE M. et GABRIEL P.
Groupes algébriques. Masson, North Holland

[EGA] GROTHENDIECK A.
Eléments de géométrie algébrique. Publications mathématiques de l'IHES.

[SGA] GROTHENDIECK A. et DEMAZURE M.
Séminaire de géométrie algébrique (SGA III). Schémas en groupes.
Springer Verlag.

[F] FERRAND D.
Monomorphismes et morphismes absolument plats.
Bull. SMF, 100 (1972) p. 97-128

Groupes henséliens

(2ème partie)

INTRODUCTION

La notion de groupe hensélien est intermédiaire entre celle de groupe algébrique et celle de groupe formel. Elle diffère de celle de groupe formel en ce que les anneaux henséliens remplacent les anneaux complets. De façon précise, soit k un corps, $\mathbf{H}_k$ la catégorie dont les objets sont les k-algèbres locales henséliennes à extensions résiduelles triviales, avec comme flèches les k-homomorphismes locaux.

Un groupe hensélien est alors un groupe dans la catégorie duale de $\mathbf{H}_k$. Il revient au même de se donner un objet A de $\mathbf{H}_k$ et deux flèches $\sigma : A \to A$ et $\Delta : A \to A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A$ (où $A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A$ est un produit tensoriel hensélisé, cf. I 1.1.2) avec des axiomes analogues à ceux des bigèbres de [DG] II.

Un exemple de groupe hensélien est obtenu en hensélisant l'anneau local à l'origine $\mathcal{O}_{G,e}$ d'un k-schéma en groupes G. On obtient ainsi un foncteur de la catégorie des groupes algébriques dans celle des groupes henséliens.

A la différence de ce qui se passe pour les groupes formels, on prouve, et c'est le résultat essentiel de cet article, que sous des hypothèses de finitudes convenables la catégorie des groupes algébriques connexes et celle des groupes henséliens sont essentiellement équivalentes.

En fait, il faut localiser la catégorie de départ en rendant inversibles les isogénies étales (i.e. les morphismes finis étales surjectifs). En effet, il est clair que si $f : G \to G'$ est une isogénie étale, f induit un isomorphisme sur les hensélisés (cf. II §1).

Pour établir ce résultat, on démontre d'abord (I §3) un certain nombre de résultats généraux sur les groupes henséliens (théorèmes de finitude, de structure...). Puis on prouve, d'abord dans le cas des groupes "lisses" (cf. I 3.3.4) la pleine fidélité (II §2) et l'algébrisation (II §3). Le cas général est traité en II §4. Lorsque le corps k est parfait de caractéristique $p \neq 0$, on utilise une suite exacte du type

$$0 \to N \to G_{red} \times_k {}_{F^r}G \to G \to 0$$

où ${}_{F^r}G$ est le noyau d'un itéré du morphisme de Frobenius, N étant alors un groupe infinitésimal.

Le cas où k n'est pas parfait s'obtient par descente finie radicielle.

Je tiens à remercier ici Monsieur Michel Raynaud qui m'a donné l'idée de ce travail et dont les encouragements m'ont permis de le mener à bien.

I - GROUPES HENSELIENS

DEFINITIONS - GENERALITES

§1. La catégorie $\mathbf{H}_k$.

1.1 Soit k un corps. Un objet de $\mathbf{H}_k$ est une k-algèbre $\eta_A : k \to A$, locale, hensélienne, à extension résiduelle triviale, i.e. si m_A est le radical de A, l'homomorphisme induit $\bar{\eta}_A : k \to A/m_A$ est un isomorphisme.

Une flèche de $\mathbf{H}_k$ est un homomorphisme local de k-algèbres.

Remarque 1.1.1

a) k est un objet à la fois initial et final dans $\mathbf{H}_k$.

b) Si $A \in \mathbf{H}_k$ et si I est un idéal de A distinct de A, A/I est dans $\mathbf{H}_k$ et la surjection canonique $p : A \to A/I$ est dans $\mathbf{H}_k$.

Proposition 1.1.2

Il existe une somme amalgamée dans $\mathbf{H}_k$. On note $B \underset{A}{\tilde{\otimes}} C$ la somme de B et C au-dessus de A.

Démonstration :

Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, bend left, "\varepsilon_B"] & \\ C \arrow[r, "i_2"] \arrow[rr, bend right, "\varepsilon_C"'] & B \underset{A}{\otimes} C \arrow[r, "\bar{\mu}_o"] & k \end{tikzcd}$$

où ε_B et ε_C sont les flèches canoniques, et où $\bar{\mu}_o$ est défini par $\bar{\mu}_o(b \otimes c) = \varepsilon_B(b) \cdot \varepsilon_C(c) = \overline{bc}$.

Soit $n = \operatorname{Ker} \bar{\mu}_o$; $(B \underset{A}{\otimes} C)_n$ est alors un anneau local à extension résiduelle triviale et il est immédiat de vérifier que son hensélisé $(B \underset{A}{\otimes} C)_n^{\sim}$ est l'objet cherché.

Remarques 1.1.3

a) On a de même une somme n-uple $B_1 \underset{A}{\tilde{\otimes}} \dots \underset{A}{\tilde{\otimes}} B_n$.

b) Si $A = k$, on a une somme $B \underset{k}{\tilde{\otimes}} C$.

c) Dans le cas $B = C$, on a un homomorphisme $\mu_o : B \underset{A}{\otimes} B \to B$ défini par $\mu_o(b\otimes c) = bc$ qui induit $\bar{\mu}_o : B \underset{A}{\otimes} B \to k$, $\bar{\mu}_o = \varepsilon_B \circ \mu_o$. Si n_B est le noyau de $\bar{\mu}_o$, ces homomorphismes se factorisent par $(B \underset{A}{\otimes} B)_{n_B}$ en μ_1 et $\bar{\mu}_1$ et par $(B \underset{A}{\otimes} B)^{\sim}_{n_B} = B \underset{A}{\tilde{\otimes}} B$ en μ et $\bar{\mu}$.

Lemme 1.1.4

Soit k un corps, A et B deux k-algèbres locales à extensions résiduelles triviales ; $\bar{\mu}_o : A \underset{k}{\otimes} B \to k$ l'homomorphisme canonique, $n = \operatorname{Ker} \bar{\mu}_o$. Alors l'homomorphisme $i : A \underset{k}{\otimes} B \to (A \underset{k}{\otimes} B)_n$ est injectif.

Démonstration :

1) Par passage à la limite, on se ramène au cas où A et B sont essentiellement de type fini sur k.

2) On peut supposer k algébriquement clos (si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, $A \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ et $B \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ sont locales).

3) Soit alors $r \in \operatorname{Ass}(A \underset{k}{\otimes} B)$, il faut prouver que $r \subset n$.

Pour $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A$, $\mathfrak{q} \in \operatorname{spec} B$ soit π le morphisme canonique $\pi : A \underset{k}{\otimes} B \to k(\mathfrak{p}) \underset{k}{\otimes} k(\mathfrak{q})$ et $I_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ l'image réciproque par π de $\operatorname{Ass}(k(\mathfrak{p}) \underset{k}{\otimes} k(\mathfrak{q}))$. On a alors (EGA IV 3.3.6)

$$\operatorname{Ass} B \underset{k}{\otimes} A = \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass} A} \ \bigcup_{\mathfrak{q}\in \operatorname{Ass} B} I_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} .$$

Comme k est algébriquement clos, $k(\mathfrak{p}) \underset{k}{\otimes} k(\mathfrak{q})$ est intègre, donc $I_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = \{\operatorname{Ker} \pi\}$.

Soit $\pi' : A \underset{k}{\otimes} B \to A/\mathfrak{p} \underset{k}{\otimes} B/\mathfrak{q}$. On a $\operatorname{Ker} \pi' = \operatorname{Ker} \pi$. Il suffit alors de voir que $\operatorname{Ker} \pi' \subset \operatorname{Ker} \bar{\mu}_o$, ce qui est clair.

Corollaire 1.1.5

Soient $A, B \in H_k$. L'homomorphisme canonique

$$j : A \underset{k}{\otimes} B \to A \underset{k}{\tilde{\otimes}} B \text{ est injectif.}$$

Proposition 1.1.6

Soit $f : \mathbf{A} \to B$ un épimorphisme de $\mathbf{H}_k$. On suppose $\mathbf{A}$ noethérien ; alors, f est surjectif.

Démonstration :

Notons d'abord que $\bar{f} : \mathbf{A}/m_{\mathbf{A}} = k \to B/m_{\mathbf{A}}B$ est encore un épimorphisme de $\mathbf{H}_k$.

De plus, dire que f est un épimorphisme revient à dire que $\mu : B \underset{\mathbf{A}}{\tilde{\otimes}} B \to B$ est un isomorphisme.

Il en résulte que $\mu o j = \mu_o : B \underset{\mathbf{A}}{\otimes} B \to B$ est plat, et donc, en vertu de [F] 2.1 on est ramené à voir que $\bar{f}$ est un isomorphisme, donc on est ramené au cas $\mathbf{A} = k$. Mais alors (1.1.5), comme $j : B \underset{k}{\otimes} B \to B \underset{k}{\tilde{\otimes}} B$ est injectif, $\mu_o = \mu o j$ l'est aussi, et donc $\bar{f} : k \to B$ est un épimorphisme d'anneaux. Mais comme k est un corps, $\bar{f}$ est surjectif.

1.2 Conditions de finitude.

Définition 1.2.1

Soit $\varphi : \mathbf{A} \to B$, $\varphi \in \mathbf{H}_k$.

On dit que φ est henséliennement de présentation finie (HPF) ou que B est henséliennement de présentation finie sur $\mathbf{A}$ si et seulement si B est l'hensélisé d'une $\mathbf{A}$-algèbre de présentation finie $\mathbf{A}'$ en un idéal premier $\mathfrak{p}$ (avec $k(\mathfrak{p}) = k$ nécessairement) : $B = \mathbf{A}'^{\sim}_{\mathfrak{p}}$.

Proposition 1.2.2

1) Si φ est surjectif et si $\operatorname{Ker} \varphi$ est un idéal de $\mathbf{A}$, de type fini, φ est (HPF).

2) Soient $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ avec $\varphi, \psi \in H_k$, φ, ψ (HPF), alors $\psi o \varphi$ est (HPF).

3) Soient
$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d] \\ \mathbf{A}' \arrow[r, "\varphi'"] & B \underset{\mathbf{A}}{\tilde{\otimes}} \mathbf{A}' \end{tikzcd}$$
dans H_k.

Si φ est (HPF) , φ' est (HPF).

4) Si $\varphi : A \to B$ et $\psi : A \to C$ sont (HPF) il en est de même de $\varphi \tilde{\otimes} \psi : A \to B \underset{A}{\tilde{\otimes}} C$.

Démonstration :

1) est clair et 4) résulte de 2) et 3).

Prouvons 3). On sait que $B = R^{\sim}_{\mathfrak{p}}$ où R est de présentation finie sur A . Il en résulte que B est limite inductive de R-algèbres étales. Par conséquent $A' \underset{A}{\otimes} B$ est limite de $A' \underset{A}{\otimes} R$ - algèbres étales et de plus $A' \underset{A}{\tilde{\otimes}} B$ est lui aussi limite de $A' \underset{A}{\otimes} R$ - algèbres étales. Si $\mathfrak{n}$ est l'idéal maximal de $A' \underset{A}{\tilde{\otimes}} B$ et $\mathfrak{n}'$ son image réciproque dans $A' \underset{A}{\otimes} R$, le morphisme $(A' \underset{A}{\otimes} R)_{\mathfrak{n}'} \to A' \underset{A}{\tilde{\otimes}} B$ est ind-étale au sens de [R] ch. VIII Déf. 3 et il résulte de loc. cit. Prop. 1 que $A' \underset{A}{\tilde{\otimes}} B \cong (A' \underset{A}{\otimes} R)^{\sim}_{\mathfrak{n}'}$ et donc $A' \underset{A}{\tilde{\otimes}} B$ est (HPF) sur A'.

Venons-en à 2).

On a $C = R^{\sim}_{\mathfrak{q}}$ où R est de présentation finie sur B et $B = S^{\sim}_{\mathfrak{p}}$ avec S de présentation finie sur A . On a donc $B = \varinjlim B_i$ où les B_i sont localement-étales ([R] loc. cit. Déf. 2) sur $S_{\mathfrak{p}}$. Comme R est de présentation finie sur B , R provient d'une B_i-algèbre R_i de présentation finie : $R \cong R_i \underset{B_i}{\otimes} B$.

La flèche $S_{\mathfrak{p}} \to B_i$ se décompose en $S_{\mathfrak{p}} \to S'$ étale et $S' \to S'_r = B_i$ avec $r \in \operatorname{spec} S'$. On a $S'_r = \varinjlim_{f \notin r} S'_f$ et par le même argument, R_i provient d'une S'_f-algèbre de présentation finie R_f : $R_i = R_f \underset{S'_f}{\otimes} B_i$.

S'_f , et donc aussi R_f , est de présentation finie sur $S_{\mathfrak{p}}$. Or $S_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{g \notin \mathfrak{p}} S_g$ et donc R_f provient de R_g , de présentation finie sur S_g , donc sur S , donc sur A : $R_f \cong R_g \underset{S_g}{\otimes} S'_f$. Mais alors, comme C est limite inductive de R_g-algèbres étales, si $\mathfrak{q}'$ est l'image réciproque de $\mathfrak{q}$ dans R_g , on a $C \cong (R_g)^{\sim}_{\mathfrak{q}'}$ en vertu de [R] loc. cit. prop. 1 , et donc C est (HPF) sur A .

Théorème 1.2.3

Soit $\mathbf{A} \in \mathbf{H}_k$ et I le noyau de l'homomorphisme

$$\mu : \mathbf{A} \underset{k}{\tilde{\otimes}} \mathbf{A} \to \mathbf{A} \qquad (\text{cf. } 1.1.3 \text{ c})$$

Alors, si I est un idéal de type fini, $\mathbf{A}$ est (HPF) sur k.

Le résultat et la méthode de démonstration s'inspirent des techniques de Ferrand ([F] 3.6).

Démonstration :

Lemme 1

Soient $f_1, \ldots, f_n$ les générateurs de I. Il existe $B \in \mathbf{H}_k$, (HPF) sur k et $\varphi : B \to \mathbf{A}$, $\varphi \in \mathbf{H}_k$, tels que, si $\varphi \tilde{\otimes} \varphi$ est l'homomorphisme canonique de $B \underset{k}{\tilde{\otimes}} B$ dans $\mathbf{A} \underset{k}{\tilde{\otimes}} \mathbf{A}$; $f_1, \ldots, f_n$ soient dans l'image de $\varphi \tilde{\otimes} \varphi$.

Preuve du lemme 1 :

Ecrivons $\mathbf{A} = \varinjlim \mathbf{A}_i$ avec $\mathbf{A}_i$ local à extension résiduelle triviale, essentiellement de type fini sur k. Comme $\mathbf{A}$ est hensélien, on a encore $\mathbf{A} = \varinjlim \tilde{\mathbf{A}}_i$, avec $\tilde{\mathbf{A}}_i$ (HPF) sur k. Il en résulte que $\mathbf{A} \underset{k}{\otimes} \mathbf{A} = \varinjlim \tilde{\mathbf{A}}_i \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathbf{A}}_i$, puis que $\mathbf{A} \underset{k}{\tilde{\otimes}} \mathbf{A} = \varinjlim \tilde{\mathbf{A}}_i \underset{k}{\tilde{\otimes}} \tilde{\mathbf{A}}_i$. Pour i assez grand, l'image de $\tilde{\mathbf{A}}_i \underset{k}{\tilde{\otimes}} \tilde{\mathbf{A}}_i$ contient $f_1, \ldots, f_n$ et donc $B = \tilde{\mathbf{A}}_i$ convient.

Lemme 2

Soit $\varphi : B \to \mathbf{A}$, $\varphi \in \mathbf{H}_k$. Le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
B \underset{k}{\tilde{\otimes}} B \arrow[r, "\varphi \tilde{\otimes} \varphi"] \arrow[d, "\mu_B"'] & \mathbf{A} \underset{k}{\tilde{\otimes}} \mathbf{A} \arrow[r, "\text{can.}"] & \mathbf{A} \underset{B}{\tilde{\otimes}} \mathbf{A} \\
B \arrow[r, "\varphi"] & \mathbf{A} \arrow[ur, "i_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration :

En vertu du lemme de Yoneda, il suffit de prouver la commutativité du même après application du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}_k}(\cdot, C)$

$$X = \mathrm{Hom}(A,C) \quad ; \quad Y = \mathrm{Hom}(B,C) \quad ; \quad f = \mathrm{Hom}(\varphi,C) \ .$$

On obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
Y \times_k Y & X \times_k X \arrow[l, "f \times f"'] & X \times_Y X \arrow[l, "\mathrm{can}"'] \arrow[d, "P_1"] \\
Y \arrow[u, "\Delta_Y"] & & X \arrow[ll, "f"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f(x_1),f(x_2) & (x_1,x_2) \arrow[l, mapsto] & (x_1,x_2) \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
f(x_1),f(x_1) & f(x_1) \arrow[l, mapsto] & x_1 \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

et comme $(x_1,x_2) \in X \times_Y X$, $f(x_1) = f(x_2)$, d'où le résultat.

<u>Lemme</u> 3

Sous les hypothèses du lemme 1, φ est un épimorphisme de $\mathbf{H}_k$.

Notons que ceci achève de prouver le théorème, en vertu de 1.1.6 et 1.2.2 1), Ker φ étant de type fini car B est noethérien.

<u>Preuve du lemme</u> 3 :

Soit $m : A \tilde{\otimes}_B A \to A$ la flèche canonique. Il suffit de prouver que m est un isomorphisme, donc injectif.

Le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{tikzcd}
A \tilde{\otimes}_k A \arrow[r, "c = \mathrm{can}"] \arrow[d, "\mu_A"'] & A \tilde{\otimes}_B A \arrow[dl, "m"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

et c est surjective, donc il suffit de voir que $c(I) = 0$. Or, $I = (f_1,\ldots,f_n)$ et on sait que $f_i = \varphi \tilde{\otimes} \varphi(g_i)$.

En vertu du lemme 2, on a donc :

$$c(f_i) = c \circ \varphi \tilde{\otimes} \varphi(g_i) = i_1 \circ \varphi \circ \mu_B(g_i) \ .$$

Mais $\varphi \circ \mu_B = \mu_A \circ \varphi \tilde{\otimes} \varphi$ et donc $c(f_i) = i_1 \circ \mu_A(f_i) = 0$.

1.3 Changement du corps de base.

Soit K une extension de k. Nous allons définir un foncteur $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}_K$ de $\mathbf{H}_k$ dans $\mathbf{H}_K$, commutant aux sommes amalgamées. Soit $\mathbf{A} \in \mathbf{H}_k$ et posons $A_1 = \mathbf{A} \otimes_k K$. Soit $\varepsilon' : A_1 \to K$ l'homomorphisme défini par $\varepsilon'(a \otimes \lambda) = \varepsilon(a)\lambda$ où $\varepsilon : \mathbf{A} \to k$ est l'homomorphisme canonique. Soit $n = \operatorname{Ker} \varepsilon'$, $\mathbf{A}_2 = (A_1)_n$ et soit $\mathbf{A}_K = \tilde{\mathbf{A}}_2$.

Alors, il est clair que $\mathbf{A}_K \in H_K$ et que la correspondance $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}_K$ est fonctorielle. De plus, l'homomorphisme canonique $i : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_K$ est plat et local, donc fidèlement plat et vérifie la propriété universelle suivante : pour tout $B \in \mathbf{H}_K$ et tout homomorphisme local $f : \mathbf{A} \to B$ de k-algèbres, il existe un unique homomorphisme $\bar{f}$ de $\mathbf{H}_K$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & B \\ & \bar{\mathbf{A}} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposition 1.3.1

Le foncteur $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}_K$ commute aux sommes amalgamées, c'est-à-dire qu'on a

$$(B \tilde{\otimes}_{\mathbf{A}} C)_K \cong B_K \tilde{\otimes}_{\mathbf{A}_K} C_K$$

pour $\mathbf{A}, B, C \in H_k$.

Démonstration :

Il suffit de prouver que la flèche canonique $B \tilde{\otimes}_{\mathbf{A}} C \to B_K \tilde{\otimes}_{\mathbf{A}_K} C_K$ vérifie la propriété universelle ci-dessus.

Mais, si D est une K-algèbre et $f : B \tilde{\otimes}_{\mathbf{A}} C \to D$ un k-homomorphisme, on en déduit des k-homomorphismes $B \to D$, $C \to D$ coïncidant sur $\mathbf{A}$, donc des K-homomorphismes $B_K \to D$, $C_K \to D$ coïncidant sur $\mathbf{A}_K$ et on conclut grâce à la propriété universelle de la somme amalgamée.

Remarques 1.3.2

1) Si $k \to K$ est une extension algébrique, $A \otimes_k K$ est local et entier sur A, donc hensélien. On a donc $A_K = A \otimes_k K$.

2) Transitivité. Si on a des extensions $k \to K \to L$, et si $A \in \mathbf{H}_k$, on a $A_L = (A_K)_L$.

1.4 Hensélisation et complétion.

1.4.1 Le foncteur $\mathbf{F} : \mathbf{Sch}^{\cdot}/k \to \mathbf{H}_k^{o}$.

Notons $\mathbf{Sch}^{\cdot}/k$ la catégorie des k-schémas pointés (i.e. munis d'un point rationnel $x : \operatorname{spec} k \to X$), les flèches étant les morphismes de schémas respectant les points, soit d'autre part $\mathbf{H}_k^{o}$ la catégorie opposée à $\mathbf{H}_k$.

Si $A \in \mathbf{H}_k$, on note A^{o} l'objet A considéré comme objet de $\mathbf{H}_k^{o}$.

Soit $(X,x) \in \mathbf{Sch}^{\cdot}/k$ et posons $A = \mathcal{O}_{X,x}$. On a $\mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} \cong k$, et donc l'hensélisé $\tilde{A}$ est dans $\mathbf{H}_k$.

On définit alors F par $F(X,x) = \tilde{A}^{o}$ F est évidemment un foncteur covariant, de plus on a la proposition suivante :

Proposition 1.4.2

F commute aux produits fibrés i.e.

$$F(X \times_S Y, (x,y)_s) \cong F(X,x) \times_{F(S,s)} F(Y,y) .$$

Le produit fibré dans $\mathbf{H}_k^{o}$ étant donné bien sûr par la formule $B^{o} \times_{A^{o}} C^{o} = (B \tilde{\otimes}_A C)^{o}$.

1.4.3 Le foncteur Φ (complétion).

Soit $\mathbf{HN}_k$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{H}_k$ formée des k-algèbres noethériennes, (HPF) sur k et soit $\mathbf{C}_k$ la catégorie des k-algèbres locales noethériennes complètes, à extensions résiduelles triviales, avec les homomorphismes locaux. $\mathbf{C}_k$ est une sous-catégorie de $\mathbf{H}_k$.

De plus, soit $\mathbf{CN}_k$ la sous-catégorie de $\mathbf{C}_k$ des algèbres de la forme $\hat{A}$ avec A essentiellement de type fini sur k.

Alors dans $\mathbf{CN}_k$, il existe une somme, notée $\mathbf{A} \mathop{\hat{\otimes}}_k B$ (produit tensoriel complété) obtenue en complétant l'anneau local $(A \mathop{\otimes}_k B)_n$ (notations habituelles) pour la topologie n-adique. Notons que l'anneau $\mathbf{A} \mathop{\otimes}_k B$ est noethérien donc aussi $A \mathop{\hat{\otimes}}_k B$. On définit alors $\Phi : \mathbf{HN}_k \to \mathbf{CN}_k$ par $\Phi(\mathbf{A}) = \hat{\mathbf{A}}$. De plus, il est clair alors que $\Phi(A \mathop{\tilde{\otimes}}_k B) \simeq \Phi(\mathbf{A}) \mathop{\hat{\otimes}}_k \Phi(B)$. Autrement dit Φ commute aux sommes donc $\Phi^o : (\mathbf{HN})^o \to (\mathbf{CN})^o$ commute aux produits.

§2 Groupes henséliens.

2.1 Définitions.

On se donne un corps k et on pose $\mathbf{H} = \mathbf{H}_k$. Rappelons que $\mathbf{H}^o$ désigne la catégorie opposée et si $\mathbf{A} \in \mathbf{H}$, $\mathbf{A}^o$ est le même objet vu dans $\mathbf{H}^o$. On a alors, par définition :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(\mathbf{A},B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}^o}(B^o,\mathbf{A}^o) .$$

<u>Définition</u> 2.1.1

On appelle k-groupe hensélien un groupe dans la catégorie $\mathbf{H}^o$.

<u>Définition équivalente</u> 2.1.2

Un k-groupe hensélien consiste en la donnée suivante :

1) Un objet $\mathbf{A} \in \mathbf{H}$.

2) Pour tout $B \in \mathbf{H}$ une structure de groupe sur $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{A},B)$ telle que si $B \to C$ est dans $\mathbf{H}$ l'application

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{A},B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(\mathbf{A},C) \quad \text{est un homomorphisme de groupes.}$$

$\mathbf{A}^o \in \mathbf{H}^o$ est alors un groupe hensélien.

<u>Définition équivalente</u> 2.1.3

Un groupe hensélien $\mathbf{A}^o \in \mathbf{H}^o$ consiste en les données suivantes :

1) Un objet $\mathbf{A} \in \mathbf{H}$.

2) Un morphisme $\Delta_A : A \to A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A$, $\Delta_A \in \mathbf{H}$ un morphisme $\sigma_A : A \to A$, $\sigma_A \in H$, avec les axiomes suivants résumés par les diagrammes :

a) $A \xrightarrow{\Delta_A} A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \underset{A \tilde{\otimes} \Delta_A}{\overset{\Delta_A \tilde{\otimes} A}{\rightrightarrows}} A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A$.

On a $(\Delta_A \tilde{\otimes} A) \circ \Delta_A = (A \tilde{\otimes} \Delta_A) \circ \Delta_A$.

b) $A \xrightarrow{\Delta_A} A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \xrightarrow{\varepsilon_A \tilde{\otimes} A} k \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \simeq A$.

On a $(\varepsilon_A \tilde{\otimes} A) \circ \Delta_A = id_A$.

($\varepsilon_A : A \to k$ est la flèche canonique) et de même $(A \tilde{\otimes} \varepsilon_A) \circ \Delta_A = id_A$.

c) $A \xrightarrow{\Delta_A} A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \xrightarrow{\sigma_A \tilde{\otimes} A} A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \xrightarrow{\mu_A} A$.

On a $\mu_A \circ (\sigma_A \tilde{\otimes} A) \circ \Delta_A = \eta_A \circ \varepsilon_A$

et $\mu_A \circ (A \tilde{\otimes} \sigma_A) \circ \Delta_A = \eta_A \circ \varepsilon_A$.

L'équivalence de 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 est claire. Rappelons seulement que ${}_A$ définit sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(A,B)$ une opération par $f*g = (f \tilde{\otimes} g) \circ \Delta_A$ et que a) b) c) assurent que cette loi est une loi de groupe.

<u>Définition</u> 2.1.4

Soient A^o, B^o deux groupes henséliens, $f : A \to B$, $f \in \mathbf{H}$.

On dit que $f^o : B^o \to A^o$ est un homomorphisme de groupes henséliens si pour tout $C \in \mathbf{H}$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}}(A,C)$$

est un homomorphisme de groupes.

Il revient au même de dire que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_A"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \arrow[r, "f \tilde{\otimes} f"] & B \underset{k}{\tilde{\otimes}} B \end{tikzcd}$$

et on en déduit la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\sigma_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma_B} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Nous noterons $\mathbf{HG}_k$ (ou $\mathbf{HG}$ si le corps est bien déterminé) la catégorie des k-groupes henséliens.

<u>Exemple</u> 2.1.5 : <u>Groupes infinitésimaux</u>.

Soit $G = \operatorname{spec} \mathbf{A}$ un k-schéma en groupes algébrique infinitésimal (i.e. fini et connexe) A est alors une k-algèbre locale et finie, donc $\mathbf{A} \in H_k$.

De plus $\mathbf{A} \otimes_k A$ qui est fini sur $\mathbf{A}$ est local et hensélien, de sorte que si $\Delta : \mathbf{A} \to \mathbf{A} \otimes_k \mathbf{A}$ est la comultiplication et σ le morphisme de passage à l'inverse, $\sigma : A \to \mathbf{A}$, le groupe affine $(\mathbf{A}, \Delta, \sigma)$ est aussi un groupe hensélien.

Réciproquement, si (A, Δ, σ) est un k-groupe hensélien et si $\mathbf{A}$ est fini sur k, on a $A \tilde{\otimes}_k A = A \otimes_k A$ et donc (A, Δ, σ) est un groupe affine fini infinitésimal.

2.2 <u>Noyau d'un homomorphisme de groupes henséliens</u>.

Remarquons que dans $\mathbf{HG}$, k^o est un objet nul, Δ_k étant l'isomorphisme canonique $k \xrightarrow{\sim} k \tilde{\otimes}_k k$.

Soit alors $f^o : B^o \to \mathbf{A}^o$ un homomorphisme de groupes henséliens provenant de $f : A \to B$, $f \in \mathbf{H}$. Soit $\mathbf{K}$ le foncteur de $\mathbf{H}^o$ dans $\mathbf{Ens}$, noyau de f^o, i.e.

$$K(D^o) = \operatorname{Ker}[B^o(D^o) \to \mathbf{A}^o(D^o)]$$

avec $D \in \mathbf{H}$, ou encore

$$K(D^o) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(B,D) \xrightarrow{\operatorname{Hom}(f,D)} \operatorname{Hom}(\mathbf{A},D))$$

K est évidemment un foncteur en groupes et dans la catégorie $\underline{\mathbf{Hom}}(\mathbf{H}^o, \mathbf{Ens})$ des foncteurs de $\mathbf{H}^o$ dans $\mathbf{Ens}$, on a le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & B^{\circ} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k^{\circ} & \longrightarrow & A^{\circ} \end{array}$$

où on identifie un objet $\mathbf{A}^{\circ}$ de $\mathbf{H}^{\circ}$ et le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{H}^{\circ}}(.,\mathbf{A}^{\circ})$ auquel il donne naissance.

Proposition 2.2.1

Il existe des noyaux dans la catégorie $\mathbf{HG}$. De façon précise, avec les notations précédentes, si $K = \mathrm{Ker}\, f^{\circ}$, K est représentable par $C^{\circ} \in \mathbf{H}^{\circ}$ où $C = B/m_{\mathbf{A}}B$, $C \in \mathbf{H}$.

Démonstration :

Cela résulte du fait que, dans $\mathbf{H}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathbf{A}}} & k = A/m_{\mathbf{A}} \\ f\downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B/m_{\mathbf{A}}B \end{array}$$

est cocartésien.

Remarque 2.2.2

Si on a $f^{\circ} : B^{\circ} \to \mathbf{A}^{\circ}$, $f^{\circ} \in \mathbf{HG}_k$ et si f° est un monomorphisme i.e. si $\mathrm{Ker}\, f^{\circ} = k^{\circ}$, l'homomorphisme $f : \mathbf{A} \to B$ est un épimorphisme de $\mathbf{H}_k$. En particulier en vertu de 1.1.6 si $\mathbf{A}$ est noethérien f est surjectif (f° est une "immersion fermée").

Proposition 2.2.3

Soit $f^{\circ} : B^{\circ} \to \mathbf{A}^{\circ}$ un homomorphisme de groupes, C° son noyau. On a un isomorphisme

$$B^{\circ} \times_{\mathbf{A}^{\circ}} B^{\circ} \simeq B^{\circ} \times_{k^{\circ}} C^{\circ}$$

ou aussi $$B \mathbin{\tilde{\otimes}_{\mathbf{A}}} B \simeq B \mathbin{\tilde{\otimes}_{k}} C .$$

Démonstration :

L'isomorphisme $u : B^{\circ} \times_{A^{\circ}} B^{\circ} \to B^{\circ} \times_{k^{\circ}} C^{\circ}$

est donné par $(x,y) \mapsto (x, yx^{-1})$

de réciproque $v : B^{\circ} \times_{k^{\circ}} C^{\circ} \to B^{\circ} \times_{A^{\circ}} B^{\circ}$

donnée par $(x,z) \mapsto (x,zx)$.

2.3 Changement de corps.

Soit K une extension de k . Comme le foncteur $\mathbf{A} \mapsto A_K$ de $\mathbf{H}_k$ dans $\mathbf{H}_K$ défini en 1.3 commute aux sommes, son opposé, $\mathbf{A}^{\circ} \mapsto \mathbf{A}_K^{\circ}$ de $\mathbf{H}_k^{\circ}$ dans $\mathbf{H}_K^{\circ}$ commute aux produits, donc induit un foncteur de $\mathbf{HG}_k$ dans $\mathbf{HG}_K$. De plus, ce foncteur commute aux produits fibrés, donc à la formation des noyaux.

2.4 Hensélisation et complétion.

2.4.1 Le foncteur $\mathbf{F} : \mathbf{Sch}/k \to \mathbf{H}_k^{\circ}$ défini en 1.4.1 commute aux produits, donc induit un foncteur noté encore $\mathbf{F} : \mathbf{G}_{rk} \to \mathbf{HG}_k$ où $\mathbf{G}_{rk}$ est la catégorie des k-schémas en groupes. En vertu de 1.4.2 , $\mathbf{F}$ commute à la formation des noyaux.

Remarque 2.4.2

Si G est un k-schéma en groupes et G° sa composante neutre ([P] II 2.4), il est clair que $\mathbf{F}(G) = \mathbf{F}(G^{\circ})$. On se limitera donc pour étudier $\mathbf{F}$ au cas des groupes connexes. L'étude de $\mathbf{F}$ est l'objet de la partie II.

2.4.2 De même, le foncteur

$$\Phi^{\circ} : (\mathbf{HN})^{\circ} \to (\mathbf{CN})^{\circ}$$

défini en 1.4.3 commute aux produits, donc transforme groupes en groupes.

On a donc un foncteur

$$\Phi^{\circ} : \mathbf{HGN} \to \mathbf{FG}$$

où $\mathbf{HGN}$ est la catégorie des groupes henséliens (HPF) et $\mathbf{FG}$ la catégorie des groupes formels.

2.5 Groupe réduit.

Soit k un corps parfait et (A,Δ,σ) un k-groupe hensélien. Alors A_{red} est canoniquement muni d'une structure de groupe hensélien de façon que $(A_{red})^o \to A^o$ soit un homomorphisme de groupes henséliens.

En effet, comme k est parfait, $A_{red} \underset{k}{\otimes} A_{red}$ est réduit (EGA IV 4.6.1 et 4.6.5) donc aussi $A_{red} \underset{k}{\tilde{\otimes}} A_{red}$. On a même $A_{red} \underset{k}{\tilde{\otimes}} A_{red} \cong (A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A)_{red}$.
Il est clair alors que Δ induit

$$\Delta_{red} : A_{red} \to A_{red} \underset{k}{\tilde{\otimes}} A_{red}$$

et de même, σ induit $\sigma_{red} : A_{red} \to A_{red}$.

Le groupe hensélien obtenu $(A_{red},\Delta_{red},\sigma_{red})$ s'appelle le groupe réduit associé à (A,Δ,σ).

§3 Propriétés des groupes henséliens.

3.1 Conditions de finitude.

Théorème 3.1.1

Soit (A,Δ,σ) un k-groupe hensélien. Si A est noethérien, A est (HPF) sur k.

Démonstration :

En vertu de 1.2.3, il suffit de prouver que $\operatorname{Ker}\mu$ est un idéal de type fini (μ est la flèche canonique $A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \to A$) ce qui va se faire par "translation". On a un isomorphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} A^o \times A^o & \xrightarrow{u^o} & A^o \times A^o \\ (x,y) & \longmapsto & (xy,y) \end{array}$$

de réciproque $\quad V^o : A^o \times A^o \to A^o \times A^o$

$$(z,y) \mapsto (zy^{-1},y) .$$

De plus on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(e,x) & A^o \times A^o \arrow[r, "u^o"] & A^o \times A^o & (x,x) \\
x \arrow[u, mapsto] & A^o \arrow[u, "e \times A^o"] \arrow[ur, "\delta"] & & \\
& & x \arrow[uur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

où e désigne la section unité $e : k^o \to A^o$ et δ le morphisme diagonal.

On en déduit, dans H un isomorphisme u, avec le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \tilde{\otimes}_k A \arrow[dr, "\nu"'] & & A \tilde{\otimes}_k A \arrow[ll, "u"'] \arrow[dl, "\mu"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

où ν est obtenu par hensélisation à partir de $\nu_o : A \otimes_k A \to A \quad \nu_o = \varepsilon_A \otimes A$.
Pour voir que $\operatorname{Ker} \mu$ est de type fini, il suffit donc de le voir pour $\operatorname{Ker} \nu$.

Or, $\operatorname{Ker} \nu_o = m_A \otimes A$ et A est noethérien, donc $\operatorname{Ker} \nu_o$ est de type fini.

Mais comme $\operatorname{Ker} \nu$ est engendré dans $A \tilde{\otimes}_k A$ par $\operatorname{Ker} \nu_o$, il en est de même de $\operatorname{Ker} \nu$.

3.2 Propriétés de platitude.

Proposition 3.2.1

Soit (A,Δ,σ) un k-groupe hensélien. Alors, $\Delta : A \to A \tilde{\otimes}_k A$ est fidèlement plat.

Démonstration :

Dans H^o , on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A^{\circ} \times A^{\circ} \arrow[r, "u^{\circ}"] \arrow[dr, "\pi"'] & A^{\circ} \times A^{\circ} \arrow[d, "p_1"] \\ & A^{\circ} \end{tikzcd}$$

où π est la loi de groupe, p_1 la première projection et u° le morphisme $(x,y) \mapsto (xy,y)$. u° est un isomorphisme, de réciproque

$$v^{\circ} : (z,y) \mapsto (zy^{-1},y)$$

Dans $\mathbf{H}$, ceci se traduit par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \tilde{\otimes}_k A & A \tilde{\otimes}_k A \arrow[l, "u"'] \\ & A \arrow[u, "i_1"'] \arrow[ul, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

i_1 est la flèche induite par $i_1(a) = a \otimes 1$. Comme k est un corps, i_1 est plat, et comme u est un isomorphisme, $\Delta = u \circ i_1$ est plat, donc fidèlement plat puisque Δ est local.

<u>Proposition</u> 3.2.2

Soit (A,Δ,σ) un k-groupe hensélien, $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A, $\mathfrak{p}' = \sigma^{-1}(\mathfrak{p})$, C l'algèbre définie par le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k A \arrow[r, "\alpha_{\circ}"] \arrow[d, "\beta_{\circ}"] & A_{\mathfrak{p}} \otimes_k A_{\mathfrak{p}'} \arrow[d, "\beta"] \\ A \tilde{\otimes}_k A \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd}$$

Alors $\alpha \circ \Delta : A \to C$ est fidèlement plat.

<u>Démonstration</u> :

$\alpha_{\circ}$ est plat, donc α aussi, et donc $\alpha \circ \Delta$ est plat (3.2.1).

Soit $m = \operatorname{Ker} \varepsilon_A$, il suffit donc de trouver $\mathfrak{q} \in \operatorname{spec} C$ tel que $(\alpha \circ \Delta)^{-1}(\mathfrak{q}) = m$.

Soit $u^o : A^o \to A^o \times A^o$ défini par $x \mapsto (x, x^{-1})$. Si p_1 et p_2 sont les projections de $A^o \times A^o$ sur A^o, on a $p_1 \circ u^o = Id_{A^o}$, $p_2 \circ u^o = \sigma^o$. Dans H, on a donc $u : A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \to A$ avec $u \circ i_1 = Id_A$, $u \circ i_2 = \sigma$, $u = \mu \circ (1 \otimes \sigma)$. D'autre part, si $\pi : A^o \times A^o \to A^o$ est la loi de composition, $\pi \circ u^o = e$, section unité, donc, dans H, $u \circ \Delta = \varepsilon_A$.

Soit alors $\mathfrak{q} = u^{-1}(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{q} \in \operatorname{spec} A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A$.

Comme $u \circ \Delta = \varepsilon$, on a $m = \Delta^{-1}(\mathfrak{q})$.

Comme $u \circ i_1 = Id_A$, on a $i_1^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

Comme $u \circ i_2 = \sigma$, on a $i_2^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}'$.

Il existe alors $\mathfrak{q}' \in \operatorname{spec} C$ tel que $\alpha^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}$ et donc $(\alpha \circ \Delta)^{-1}(\mathfrak{q}') = m$.

Proposition 3.2.3

Soit (A, Δ, σ) un k-groupe hensélien. On suppose A intègre, soit $K = Fr(A)$.

Soit C l'algèbre définie comme en 3.2.2 par le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A \underset{k}{\otimes} A & \xrightarrow{\alpha_o} & K \underset{k}{\otimes} K \\ \beta_o \downarrow & & \downarrow \beta \\ A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

De sorte que $\alpha_o \Delta$ est fidèlement plat. Soit $\mu_K : K \underset{k}{\otimes} K \to K$ la multiplication et $\sigma_K : K \to K$ l'homomorphisme induit par σ. On pose $u_K = \mu_K \circ (1 \otimes \sigma_K)$. Soit $\mathfrak{q}_K = \operatorname{Ker} u_K$. On a $\mathfrak{q}_K \in \operatorname{spec} K \underset{k}{\otimes} K$. Alors, le localisé $C_{\mathfrak{q}_K}$ est fidèlement plat sur A.

Démonstration :

Reprenant les notations de 3.2.2, on a $\mathfrak{q} = \operatorname{Ker} u$ (car $\mathfrak{p} = (0)$). Il est clair alors que $\beta_o^{-1}(\mathfrak{q}) = \alpha_o^{-1}(\mathfrak{q}_K)$, et donc il existe $\mathfrak{q}' \in \operatorname{spec} C$ tel que $\alpha^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}$, $\beta^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}_K$. Mais alors, $\mathfrak{q}' \in \operatorname{spec} C_{\mathfrak{q}_K}$ et $\mathfrak{q}'$ est au-dessus de m par $\alpha \circ \Delta$, donc $C_{\mathfrak{q}_K}$ est fidèlement plat sur A.

Remarque 3.2.4

Notons qu'on a un résultat analogue pour les groupes algébriques : si G est un groupe algébrique sur k, lisse et connexe et si $B = \mathcal{O}_{G,e}$ et $F = Fr(B)$ on a un homomorphisme $u : F \otimes_k F \to F$, $u = \mu o(1 \otimes \sigma)$ et si $\mathfrak{q} = \operatorname{Ker} u$, on a une factorisation $\Delta : B \to (F \otimes_k F)_{\mathfrak{q}}$.

3.3 Théorèmes de structure.

Théorème 3.3.1

Soit (A, Δ, σ) un k-groupe hensélien. Alors, spec A est irréductible. Si A est noethérien, A est de Cohen-Macaulay.

Démonstration :

1) En vertu de 2.3, quitte à faire un changement de corps $k \to \bar{k}$, on peut supposer k parfait. En effet, $i : A \to \bar{A}$ est fidèlement plat, donc, si $\bar{A}$ est irréductible, A l'est aussi.

2) En vertu de 2.5, quitte à remplacer A par A_{red}, on peut supposer A réduit.

3) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A, $\mathfrak{p}' = \sigma^{-1}(\mathfrak{p})$. Comme A est réduit, $K = A_{\mathfrak{p}}$ est un corps et $A_{\mathfrak{p}'}$ lui est isomorphe. Soit alors C défini comme en 3.2.2 et $\mathfrak{q} \in$ spec C, au-dessus de $m = \operatorname{Ker} \varepsilon_A$. $\alpha \circ \Delta : A \to C_{\mathfrak{q}}$ est fidèlement plat. Si on prouve que C est normal, $C_{\mathfrak{q}}$ sera intègre, donc A aussi.

4) Considérons le diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_k A & \xrightarrow{\alpha_0} & K \otimes_k K \\ \downarrow \beta_0 & & \downarrow \beta \\ A \tilde{\otimes}_k A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

Comme β_0 est ind-étale, il en est de même de β et en vertu de [R] VII §2 Prop. 2, il suffit de voir que $K \otimes_k K$ est normal.

5) Ecrivons $K = \varinjlim K_i$ où K_i est une sous-extension de type fini sur k. Comme k est parfait, $k \to K_i$ est séparable et donc (EGA IV 6.7.4.1) $K_i \otimes_k K$ est régulier, donc normal. Mais alors, comme $K_i \otimes_k K \to K \otimes_k K$ est plat, il résulte de (EGA IV 5.13.6) que $K \otimes_k K = \varinjlim K_i \otimes_k K$ est normal.

6) L'assertion sur Cohen-Macaulay résulte alors de EGA IV 6.3.5 et 6.7.1, de [R] loc. cit. et de 3.3.1.

<u>Théorème</u> 3.3.2

Soit (A, Δ, σ) un k-groupe hensélien. On suppose A noethérien et réduit et k parfait. Alors A est régulier.

<u>Démonstration</u> :

D'après 3.1.1, A est (HPF), donc $A \tilde{\otimes}_k A$ aussi (1.2.2 iv) donc noethérien.

D'après 3.3.1, A est intègre, soit K son corps de fractions.

Reprenons les notations de 3.2.2 et soit $\mathfrak{q} \in \operatorname{spec} C$ au-dessus de m.

Comme $A \to C_{\mathfrak{q}}$ est fidèlement plat, il suffit de voir que $C_{\mathfrak{q}}$ est régulier (EGA IV 6.5.1). Comme $A \tilde{\otimes}_k A$ est noethérien, C qui en est un localisé est noethérien, donc $C_{\mathfrak{q}}$ aussi. Soit $r = \beta^{-1}(\mathfrak{q})$, $r \in \operatorname{spec} K \otimes_k K$. Comme β_0 est plat, β est plat, et donc $\beta : (K \otimes_k K)_r \to C_{\mathfrak{q}}$ est fidèlement plat et $(K \otimes_k K)_r$ est noethérien.

Ecrivons $K = \varinjlim K_i$ avec K_i de type fini sur k. Comme k est parfait, $k \to K_i$ est séparable et donc $K \otimes_k K_i$ est régulier (EGA IV 6.7.4.1). Si r_i est l'image réciproque de r dans $K \otimes_k K_i$, $(K \otimes_k K_i)_{r_i}$ est régulier.

Comme $K \otimes_k K = \varinjlim K \otimes_k K_i$, on a aussi $(K \otimes_k K)_r = \varinjlim (K \otimes_k K_i)_{r_i}$ et il résulte de EGA IV 5.13.7 que $(K \otimes_k K)_r$ est régulier. Mais, β_0 est ind-étale, donc β aussi et donc les hensélisés de $(K \otimes_k K)_r$ et de $C_{\mathfrak{q}}$ sont isomorphes. Il en résulte que $C_{\mathfrak{q}}$ est régulier ([R] VIII §4 Th. 3).

Lemme 3.3.3

Soit k un corps, $A \in H_k$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) A est géométriquement réduite.

2) Si $\bar{k}$ est une clôture parfaite de k, la $\bar{k}$-algèbre $A_{\bar{k}}$ (1.3) est réduite.

3) Il existe une extension parfaite K de k telle que A_K soit réduite.

Démonstration :

Comme $k \to \bar{k}$ est algébrique, $A_{\bar{k}} = A \otimes_k \bar{k}$ (1.3.2) et l'équivalence de 1) et 2) résulte de EGA IV 4.6.1. Le fait que 1) $\Longrightarrow$ 3) résulte de [R] Ch. VIII Th. 3. Enfin, prouvons 3) $\Longrightarrow$ 2). On a une factorisation : $k \to \bar{k} \to K$ et donc (1.3.2) $A_K = (A_{\bar{k}})_K$. Il en résulte que $A_{\bar{k}} \to A_K$ est fidèlement plat, donc $A_{\bar{k}}$ est réduit.

Définition 3.3.4

Soit (A, Δ, σ) un k-groupe hensélien. On dit que (A, Δ, σ) est lisse sur k si et seulement si A est noethérien et vérifie les conditions équivalentes de 3.3.3.

Remarques 3.3.5

1) Il résulte de 3.3.2 et de EGA 0.17.3.3 que si (A, Δ, σ) est lisse, A est régulier.

2) Si G est un k-groupe algébrique, on a l'équivalence ([DG] II 5.2.1)

$$G \text{ lisse sur } k \Longleftrightarrow F(G) \text{ lisse sur } k$$

ce qui justifie la définition 3.3.4.

3) Si k n'est pas parfait, il se peut que A soit réduit sans que (A, Δ, σ) soit lisse (cf. [DG], on prend pour A l'hensélisé à l'origine de $k[X,Y]/X^p - \lambda Y^p$ avec $\lambda \in k$, $\lambda \notin k^p$).

Corollaire 3.3.6

Soit (A,Δ,σ) un k-groupe hensélien lisse. Alors, si $n = \dim A$, le degré de transcendance de $K = Fr(A)$ sur k est n et A est isomorphe à $k\{T_1,\ldots,T_n\} = \{S \in k[[T_1,\ldots,T_n]] \mid S$ algébrique sur $k(T_1\ldots T_n)\}$.

Démonstration :

L'assertion sur le degré de transcendance résulte de EGA IV 5.2.1 et de 3.3.1.

Soit $m = \operatorname{Ker} \varepsilon_A$. On a $m = (t_1,\ldots,t_n)$ où $t_1,\ldots,t_n$ est une suite régulière (3.3.5 1)), donc on a $\hat{A} \cong k[[t_1,\ldots,t_n]]$ et $t_1,\ldots,t_n$ est une base de transcendance de K sur k. Soit $B = k[t_1\ldots t_n]_{(t_1\ldots t_n)}$ B est normal et $B \subset A$. On a donc les inclusions

$$\tilde{B} \subset A \subset \hat{B} = \hat{A}.$$

Comme B est excellent, ses fibres formelles sont géométriquement normales, donc $\tilde{B}$ est algébriquement fermé dans $\hat{B}$. Or, K est algébrique sur B, donc sur $\tilde{B}$, et donc $A \subset \tilde{B}$.

On a donc $A = \tilde{B} = k\{t_1,\ldots,t_n\}$.

Proposition 3.3.7 (Cartier)

Si k est un corps de caractéristique zéro et (A,Δ,σ) un k-groupe hensélien avec A noethérien alors, (A,Δ,σ) est lisse sur k.

Démonstration :

On utilise le foncteur Φ^0 qui transforme groupe hensélien en groupe formel et la proposition résulte alors du théorème de Cartier formel (cf. [0]).

Proposition 3.3.8

Soit $f^0 : B^0 \to A^0$ un homomorphisme de k-groupes henséliens. On suppose A^0 et B^0 lisses sur k et f injectif. Soient K et L les corps de fractions de A et B, de sorte que f induit $\bar{f} : K \to L$. On suppose que

L est une extension algébrique séparable de K.

Alors, f^o est un isomorphisme.

Démonstration :

En vertu de 2.2.2, il suffit de prouver que $C^o = \operatorname{Ker} f^o$ est réduit à l'élément neutre. Soit m_A l'idéal maximal de A, on a $C = B/m_A B$. D'après 2.2.3, on a un isomorphisme :

$$B \tilde{\otimes}_A B \simeq B \tilde{\otimes}_k C .$$

Mais $B \otimes_A B$ s'injecte dans $L \otimes_A L = L \otimes_K L$ qui est réduit puisque $K \to L$ est séparable, $B \otimes_A B$ est donc réduit et aussi $B \tilde{\otimes}_A B$. Mais C est inclus dans $B \otimes_k C$, et comme la flèche canonique $B \otimes_k C \to B \tilde{\otimes}_k C = B \tilde{\otimes}_A B$ est injective (1.1.5), il en résulte que C est réduit, donc intègre (3.3.1) et il suffit alors de prouver que $M = Fr(C)$ est algébrique sur k.

Notons que $(B \otimes_k C)_n$ est normal (EGA IV 6.6.1) de sorte que $B \tilde{\otimes}_k C \simeq B \tilde{\otimes}_A B$ est intègre. Comme L est algébrique sur K, $N = Fr(B \tilde{\otimes}_A B)$ est algébrique sur L et, par l'isomorphisme $B \tilde{\otimes}_A B \simeq B \tilde{\otimes}_k C$, il en résulte que M est algébrique sur k.

II - ETUDE DU FONCTEUR D'HENSELISATION

§1 Hensélisation et isogénies étales.

1.1 Pour étudier le foncteur $\mathbf{F} : \mathbf{Gr}_k \to \mathbf{HG}_k$ défini en I 2.4.1 , nous avons vu qu'il était loisible de se restreindre aux groupes connexes.

De plus, nous nous limiterons au cas des groupes algébriques sur k .

Nous considérerons donc le foncteur

$$\mathbf{F} : \mathbf{AGC}_k \to \mathbf{HG}_k$$

où $\mathbf{AGC}_k$ est la catégorie des groupes algébriques connexes.

Cependant, la proposition qui suit va nous amener à modifier encore la catégorie de départ, mal adaptée à l'étude de $\mathbf{F}$, en ce sens que deux groupes algébriques connexes non isomorphes peuvent avoir le même hensélisé.

Proposition 1.1.1

Soient G,H deux groupes algébriques connexes, $f : G \to H$ un homomorphisme, $\tilde{f} : \mathbf{F}(G) \to \mathbf{F}(H)$ le morphisme déduit de f par hensélisation. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) f est une isogénie étale (i.e. f est un épimorphisme fppf et $\operatorname{Ker} f$ est un groupe étale sur k) (cf. [DG] III).

2) f est un épimorphisme fppf et est étale.

3) $\tilde{f}$ est un isomorphisme.

Démonstration :

L'équivalence de 1) et 2) résulte de l'isomorphisme

$$G \times_H G \cong G \times_k \operatorname{Ker} f .$$

Montrons 2) $\Longrightarrow$ 3). Posons $A = \mathcal{O}_{H,e}$, $B = \mathcal{O}_{G,e}$. Comme f est fppf , $f^* : A \to B$ est injectif. Comme f est étale, f^* est locale-étale et donc $\tilde{f}^* : \tilde{A} \to \tilde{B}$ est un isomorphisme ([R] VIII Prop. 2 et Th. 1).

3) $\Longrightarrow$ 1). Comme $\tilde{f}^* : \tilde{A} \to \tilde{B}$ est injectif, il en est de même de $f^* : A \to B$,

et donc f est plat, donc fidèlement plat puisque G et H sont connexes. D'autre part, on a (2.4.1) $\operatorname{Ker} \tilde{f} = \mathbf{F}(\operatorname{Ker} f)$. Donc $\mathbf{F}(\operatorname{Ker} f) = k^o$. Il en résulte que si $N = \operatorname{Ker} f$, on a $\mathcal{O}_{N,e} \cong k$, donc que N est fini étale ([DG] II 5.1.4).

1.2 Localisation dans une catégorie.

Proposition 1.2.1

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $\mathcal{J} \subset \mathrm{F}\ell(\mathcal{C})$ un ensemble de flèches stable par composition. Il existe une catégorie $\mathcal{D}$ et un foncteur $\mathbf{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fidèle et essentiellement surjectif tel que $\forall f \in \mathcal{J}$ $L(f)$ est inversible dans $\mathcal{D}$. De plus, le couple $(\mathcal{D},\mathbf{L})$ est universel pour cette situation.

Démonstration :

On prend $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et pour flèches, celles engendrées par les flèches de $\mathcal{C}$ et les inverses des éléments de $\mathcal{J}$: soient $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, une flèche $f : A \to B$, $f \in \mathrm{F}\ell(\mathcal{D})$ sera la donnée d'objets $A_o,\ldots,A_n$ de $\mathcal{C}$ avec $A_o = A$, $A_n = B$ et, pour tout i, soit d'une flèche $f_i : A_i \to A_{i+1}$, $f_i \in \mathrm{F}\ell(\mathcal{C})$, soit d'un élément de $\mathcal{J}$, $g_i : A_{i+1} \to A_i$. Pour que l'écriture de f soit unique, on imposera de plus

1) que l'on ait alternativement des flèches de type f_i et de type g_i^{-1},

2) que les éléments de $\mathcal{J}$ considérés ne soient pas inversibles dans $\mathcal{C}$.

f s'écrira alors, par exemple, $f = f_n \circ g_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ f_1$ et la composition des flèches est évidente puisque $\mathcal{J}$ est stable par composition.

Enfin, la propriété universelle est claire.

Définition 1.2.2

Sous les hypothèses de 1.2.1, on dit que $\mathcal{D}$ est la catégorie localisée de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{J}$.

Définition 1.2.3

On appelle catégorie des groupes algébriques sur k , connexes, à isogénies étales près, la catégorie $\mathfrak{A}_k$, localisée de $\mathbf{AGC}_k$ par l'ensemble $\mathfrak{I}$ des isogénies étales (1.2.2). On désigne encore par $\mathbf{F}$ le foncteur obtenu par localisation : (1.2.1 et 1.1.1)

$$\mathbf{F} : \mathfrak{A}_k \to \mathbf{HG}_k .$$

Proposition 1.2.4

Sous les hypothèses de 1.2.1 si $\mathcal{C}$ et $\mathfrak{I}$ vérifient la propriété suivante :

(P) Pour tout diagramme dans $\mathcal{C}$ du type

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & B' \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ A & & B & & C \end{tikzcd} \qquad \text{avec } u, v \in \mathfrak{I}$$

il existe $A'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\gamma \in \mathrm{Fl}(\mathcal{C})$, $w \in \mathfrak{I}$ tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif

$$\begin{tikzcd} & A'' \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ A' \arrow[dr, "\alpha"'] & & B' \arrow[dl, "v"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Alors toute flèche de $\mathfrak{D}$ est de la forme $g^{-1} \circ f$ avec $g \in \mathfrak{I}$.

De plus, la catégorie $\mathbf{AGC}_k$ et l'ensemble $\mathfrak{I}$ des isogénies étales vérifient (P).

Démonstration :

La première assertion est immédiate par récurrence. Pour prouver la seconde il suffit de prendre pour A'' la composante neutre de $A' \times_B B'$, w étant étale puisque v l'est. On en déduit évidemment que les flèches de $\mathfrak{A}_k$ sont du type ci-dessus.

§2 La pleine fidélité du foncteur $\mathbb{F}$.

2.1 Fidélité.

Proposition 2.1.1

Le foncteur $\mathbb{F} : \mathfrak{a}_k \to \mathbf{HG}_k$ est fidèle.

Démonstration :

Il suffit de voir que $\mathbb{F} : \mathbf{AGC}_k \to \mathbf{HG}_k$ l'est. Soient $G,H \in \mathbf{AGC}_k$; $f,g : G \rightrightarrows H$ deux homomorphismes tels que $\tilde{f} = \tilde{g}$. Posons $\mathbf{A} = O_{H,e}$; $B = O_{G,e}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \overset{f^*}{\underset{g^*}{\rightrightarrows}} & B \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ \tilde{\mathbf{A}} & \overset{\tilde{f}^*}{\underset{\tilde{g}^*}{\longrightarrow}} & \tilde{B} \end{array}$$

Or j est injective donc $f^* = g^*$.

On a alors le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} & H \\ {\scriptstyle \ell}\uparrow & & \uparrow \\ \operatorname{spec} B & \overset{\operatorname{spec} f^*}{\underset{\operatorname{spec} g^*}{\rightrightarrows}} & \operatorname{spec} \mathbf{A} \end{array}.$$

Mais, comme G est connexe, ℓ est schématiquement dominant ([P] I 1.10 et II 2.1 et 1.2) et donc $f = g$ (EGA 11.10.1 d)).

2.2 Pleine fidélité (énoncé du théorème).

Théorème 2.2.1

Le foncteur $\mathbb{F} : \mathfrak{a}_k \to \mathbf{HG}_k$ est pleinement fidèle.

De façon plus précise, on a :

<u>Proposition</u> 2.2.2

Soient G, H deux groupes algébriques sur k, connexes, $\mathbb{F}(G)$ et $\mathbb{F}(H)$ leurs hensélisés et $f^{o} : \mathbb{F}(G) \to \mathbb{F}(H)$ un homomorphisme de groupes henséliens.

Il existe alors un groupe algébrique connexe L, une isogénie étale $u : L \to G$ et un homomorphisme de groupes $\alpha : L \to H$, rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}(L) \arrow[d, "\mathbb{F}(u)"'] \arrow[dr, "\mathbb{F}(\alpha)"] & \\ \mathbb{F}(G) \arrow[r, "f^{o}"] & \mathbb{F}(H) \end{tikzcd}$$

où $\mathbb{F}(u)$ est un isomorphisme d'après 1.1.1.

Bien sûr, avec la définition de $\mathfrak{a}_k$, 2.2.2 entraîne 2.2.1.

Nous prouverons d'abord 2.2.2 sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

k est parfait ; G est lisse sur k.

La démonstration, sous ces hypothèses, occupe les numéros 2.3 et 2.4.

Le cas général sera traité au §4.

Dans 2.3 nous définissons une notion de groupe local (analogue aux groupes rationnels de [P] III Déf. 1) et nous montrons que sous des hypothèses de finitude, elle équivaut à la notion de groupe algébrique connexe. C'est là un théorème dû à André Weil qui dit essentiellement qu'un groupe est connu dès qu'on connaît l'anneau local en un point, qu'il soit générique (groupe rationnel), ou fermé (groupe local).

On utilise dans ce numéro l'exposé de SGA 3 N° XVIII de M. Artin sur ce théorème de Weil.

Dans 2.4 le théorème de Weil permet de construire le groupe L à partir de f et des anneaux locaux.

Cette construction est dans une large mesure indépendante des hypothèses de lissité de G et de perfection de k.

2.3 Groupes locaux.

2.3.1 Soit k un corps, $\mathbf{L}_k$ la catégorie suivante : un objet de $\mathbf{L}_k$ est une k-algèbre $\eta_A : k \to A$ locale, à extension résiduelle triviale. Une flèche de $\mathbf{L}_k$ est un homomorphisme de k-algèbres, local.

Les notations sont les mêmes qu'en I 1.1, ainsi, m_A est l'idéal maximal de A, ε_A l'homomorphisme canonique $A \to A/m_A \simeq k$.

Dans la catégorie $\mathbf{L}_k$, $(A \underset{k}{\otimes} A)_{n_A}$ est une somme de l'objet A avec lui-même (n_A est le noyau de $\bar{\mu}_o$ (I 1.1.3)) et k est objet initial et final.

On a comme en 1.4 un foncteur $\mathcal{F}$ de $\mathbf{Sch}^o/k$ dans $\mathbf{L}_k^o$ commutant aux produits fibrés : $\mathcal{F}(X,x) = (\mathcal{O}_{X,x})^o$.

<u>Définition</u> 2.3.2

On appelle k-groupe local, un groupe dans la catégorie $\mathbf{L}_k^o$ opposée à $\mathbf{L}_k$.

Comme en I 2.1.3., cette définition équivaut à la suivante :

<u>Définition</u> 2.3.3

Un groupe local sur k consiste en les données suivantes :

1) Un objet $A \in \mathbf{L}_k$.

2) Un morphisme $\Delta_A : A \to (A \underset{k}{\otimes} A)_{n_A}$, $\Delta_A \in \mathbf{L}_k$ et un morphisme $\sigma_A : A \to A$, $\sigma_A \in \mathbf{L}_k$ astreints aux axiomes habituels (cf. I 2.1.3)

a) $(\Delta_A \otimes A) \circ \Delta_A = (A \otimes \Delta_A) \circ \Delta_A$

b) $(\varepsilon_A \otimes A) \circ \Delta_A = id_A \qquad (A \otimes \varepsilon_A) \circ \Delta_A = id_A$

c) $\mu_A \circ (\sigma_A \otimes A) \circ \Delta_A = \eta_A \circ \varepsilon_A$

$\mu_A \circ (A \otimes \sigma_A) \circ \Delta_A = \eta_A \circ \varepsilon_A$.

<u>Définition</u> 2.3.4

Un homomorphisme de groupes locaux (A,Δ_A,σ_A) ; (B,Δ_B,σ_B), consiste en la donnée d'un homomorphisme local $f : A \to B$ commutant à Δ, i.e. $f \otimes f \circ \Delta_A = \Delta_B \circ f$.

On note $\mathbf{LG}_k$ la catégorie des k-groupes locaux et le foncteur $\mathcal{F}$ induit un foncteur noté encore $\mathcal{F} : \mathbf{Gr}_k \to \mathbf{LG}_k$.

Remarque 2.3.5

Notons d'ailleurs que le foncteur $\mathbf{F} : \mathbf{Gr}_k \to \mathbf{HG}_k$ se factorise par $\mathbf{LG}_k$ par construction même :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gr}_k \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\mathbf{F}"'] & \mathbf{LG}_k \arrow[d, "\mathcal{H}"] \\ & \mathbf{HG}_k \end{tikzcd}$$

et il résulte alors des théorèmes vus en I.3 des propriétés analogues pour les groupes locaux. En particulier, si (A,Δ,σ) est un groupe local, A est irréductible (puisque $\tilde{A}$ l'est : I.3.3.1) et sans composantes immergées (A est de Cohen-Macaulay) si A est noethérien (I loc. cit.).

Théorème 2.3.6 (A. Weil)

Le foncteur $\mathcal{F}$ est une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathbf{AGC}_k$ des groupes algébriques connexes sur k et la sous-catégorie de $\mathbf{LG}_k$ des groupes locaux de type fini (i.e. tels que leur algèbre A soit essentiellement de type fini sur k).

Démonstration :

On utilise les résultats et les notations de SGA Exp. XVIII.

1) Pleine fidélité de $\mathcal{F}$.

La fidélité est claire et résulte par exemple de 2.1.1. La pleine fidélité résulte aussitôt de SGA Exp. XVIII Prop. 2.3.

2) Surjectivité de $\mathcal{F}$.

Soit (A,Δ,σ) un k-groupe local. On peut écrire $A = (A_o)_m$ avec A_o de type fini sur k, m un idéal premier de A_o. On peut supposer de plus A_o irréductible et sans composantes immergées (2.3.5). Posons $X = \operatorname{spec} A_o$.

Il existe un ouvert affine standard U, $U = (X \underset{k}{\times} X)_s$ de $X\times X$ tel que Δ induise un homomorphisme $\Delta : A_o \to (A_o \underset{k}{\otimes} A_o)_s$ d'où $\pi : (X \underset{k}{\times} X)_s \to X$, on note $\pi(x,y) = xy$. De plus, on peut supposer que σ induit $u : X \to X$. On note $u(x) = x^{-1}$. Nous pouvons alors construire un germe de groupe sur X au sens de SGA loc. cit. 3.1. Pour ceci soient $\pi_1, \pi_2 : U \to X$ définis par $\pi_1(x,y) = x^{-1}y$, $\pi_2(x,y) = xy^{-1}$.

Soient p_{ij} les projections de $X \times X \times X$ sur $X \times X$ et $V = p_{12}^{-1}(U) \cap p_{13}^{-1}(U) \cap p_{23}^{-1}(U)$.

Considérons $\varphi : V \to X \times X$ définie par

$$\varphi(x,y,z) = (xy,z)$$

et soit W le sous-schéma fermé de V image réciproque par φ de la diagonale de $X \times X$

$$W(S) = \{(x,y,z) \in V(S) \mid xy = z\}$$

pour $S \in \mathbf{Sch}/k$.

Alors, quitte à restreindre X, (X,W) est un germe de groupe (SGA loc. cit. 3.2).

En vertu de SGA loc. cit. 3.7 et 3.13, il existe alors un groupe algébrique G et une immersion ouverte $i : X \to G$ schématiquement dense qui commute aux lois de composition (i.e. $i(xy) = i(x)i(y)$ et $i(x^{-1}) = i(x)^{-1}$) et comme les lois sur X induisent Δ et σ sur A, on a bien $\mathfrak{F}(G) = A^o$.

2.4 <u>La démonstration de</u> 2.2.2 (cas lisse).

On pose $A = \mathcal{O}_{H,e}$, $B = \mathcal{O}_{G,e}$, on désigne par $\tilde{A},\tilde{B}$ leurs hensélisés, de sorte qu'on a un homomorphisme $f : \tilde{A} \to \tilde{B}$ qui commute à Δ et σ.

On note $i : A \to \tilde{A}$, $j : B \to \tilde{B}$ les injections canoniques.

Soit U un ouvert affine de H contenant e, $U = \operatorname{spec} \Lambda$ avec Λ de type fini sur k engendré par $x_1,\ldots,x_n$. On a $A = \Lambda_m$.

Posons $h = f \circ i$, $\alpha_i = h(x_i)$.

Soit C_o la sous-k-algèbre de $\tilde{B}$ engendrée par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et soit $C = (C_o)_{m_{\tilde{B}} \cap C_o}$, $C \in L_k$ (2.3.1) et on a des homomorphismes locaux $A \xrightarrow{h} C$, $B \xrightarrow{j_o} C$, $C \xrightarrow{\rho} \tilde{B}$. Nous allons définir sur C une structure de groupe local (2.3.2) de façon que les homomorphismes $A \to C$, $B \to C$ soient des homomorphismes de groupes. Il faut définir $\Delta_C : C \to (C \otimes_k C)_{n_C}$ (notations de 2.3.1) en lui imposant donc de rendre commutatifs les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta_B} & (B \otimes_k B)_{n_B} \\ {\scriptstyle j_o}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_o \otimes j_o} \\ C & \xrightarrow{\Delta_C} & (C \otimes_k C)_{n_C} \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta_A} & (A \otimes_k A)_{n_A} \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h \otimes h} \\ C & \xrightarrow{\Delta_C} & (C \otimes_k C)_{n_C} \end{array} \qquad (2)$$

Considérons le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} C \otimes_k C & & \xrightarrow{\rho \otimes \rho} & & \tilde{B} \otimes_k \tilde{B} \\ {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & & & \downarrow \\ (C \otimes_k C)_{n_C} & & \longrightarrow & & (\tilde{B} \otimes_k \tilde{B})_{n_{\tilde{B}}} \\ & {\scriptstyle \ell}\searrow & & \swarrow & \\ & & \tilde{B} \otimes_k \tilde{B} & & \end{array} \qquad (3)$$

Comme ρ est injectif, il en est de même de $\rho \otimes \rho$. De plus d'après I 1.1.5 , ceci implique que $\ell_o \gamma$ est injectif. Mais, comme γ est une localisation, ℓ est injectif. Soit alors $c \in C$, c peut s'écrire $c = \frac{d}{\ell}$ avec $\ell \notin m_{C_o}$, $d, \ell \in C_o$, donc de la forme $\sum_{\underline{i}} b_{\underline{i}} \underline{\alpha}^{\underline{i}}$ avec des multi-indices $\underline{i} = (i_1 \ldots i_n)$ $\underline{\alpha} = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$. Mais, on a par hypothèses les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\Delta_B"] \arrow[d, "j_o"'] & (B \otimes B)_{n_B} \arrow[d, "j_o \tilde{\otimes} j_o"] \\ \tilde{B} \arrow[r, "\Delta_{\tilde{B}}"] & \tilde{B} \tilde{\otimes} \tilde{B} \end{tikzcd} \qquad (4)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "\Delta_{\mathbf{A}}"] \arrow[d, "i"'] & (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})_{n_{\mathbf{A}}} \arrow[d, "i \otimes i"] \\ \tilde{\mathbf{A}} \arrow[r, "\Delta_{\tilde{\mathbf{A}}}"] \arrow[d, "f"'] & \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\otimes} \tilde{\mathbf{A}} \arrow[d, "f \tilde{\otimes} f"] \\ \tilde{B} \arrow[r, "\Delta_{\tilde{B}}"] & \tilde{B} \tilde{\otimes} \tilde{B} \end{tikzcd} \qquad (5) \qquad h \tilde{\otimes} h = (f \tilde{\otimes} f) \circ (i \otimes i)$$

On a donc

$$\Delta_{\tilde{B}}(d) = \sum_{\underline{i}} \Delta_B(b_{\underline{i}})\ h \tilde{\otimes} h \circ \Delta_{\mathbf{A}}(\underline{x}^{\underline{i}})$$

et donc, $\quad \Delta_{\tilde{B}}(d) \in (C \underset{k}{\otimes} C)_{n_C}$.

On pose alors $\Delta_C(d) = \Delta_{\tilde{B}}(d)$, et comme ℓ est injectif, ceci définit bien

$$\Delta_C : C \to (C \underset{k}{\otimes} C)_{n_C} .$$

La commutativité des diagrammes (1) et (2) résulte alors de celle de (4) et (5).

On construit de même ε_C et σ_C en posant :

$$\varepsilon_C|B = \varepsilon_B \quad , \quad \varepsilon_C(\alpha_i) = \varepsilon_{\mathbf{A}}(x_i)$$
$$\sigma_C|_B = \sigma_B \quad , \quad \sigma_C(\alpha_i) = \sigma_{\mathbf{A}}(x_i) .$$

Ce qui a un sens en vertu de la commutativité de diagrammes du type :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma_{\mathbf{A}}"'] & C \arrow[d, "\sigma_{\tilde{B}}|C"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

Il reste à vérifier que (C, Δ_C, σ_C) est un groupe local au sens de (2.3.2), mais ceci résulte immédiatement du fait que $\mathbf{A}$ et B sont des groupes locaux (ou si on veut que $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{B}$ sont des groupes henséliens).

En vertu de 2.3.6 on a alors un groupe algébrique sur k, soit L, connexe, tel que $\mathcal{O}_{L,e} = C$ et des homomorphismes de groupes $u : L \to G$ et $\alpha : L \to H$, induisant j_o et h.

<u>Supposons désormais le corps</u> k <u>parfait et</u> G <u>lisse.</u>

Il en résulte que B est réduit, donc intègre, ce qui entraîne que $\tilde{B}$ est réduit (donc intègre par I 3.3.1). L'anneau C est donc intègre donc, comme k est parfait, L est lisse et connexe. Comme $j_o : B \to C$ est injectif, $u : L \to G$ est plat, et, comme G est connexe, fidèlement plat. Il faut prouver que u est étale, donc net. Pour ceci, il suffit de voir que l'extension $Fr(\mathcal{O}_{G,e}) \to Fr(\mathcal{O}_{L,e})$ est algébrique séparable. Posons $K = Fr(\mathcal{O}_{G,e}) = Fr\ B$, $K' = Fr(\mathcal{O}_{L,e}) = Fr(C)$, $\tilde{K} = Fr(\tilde{B})$. On a $K \subset K' \subset \tilde{K}$. Or en vertu de [R] ch. VIII Th. 3, $K \to \tilde{K}$ est algébrique séparable et donc $K \to K'$ aussi.

Il en résulte alors, par unicité des factorisations par les hensélisés que $F(\alpha) = f^o \circ F(u)$ ce qui achève de prouver 2.2.2.

<u>Remarques</u> 2.4.1

1) Dans la démonstration ci-dessus, la lissité de G et la perfection de k n'interviennent pas dans la construction de L, de u ou de α, mais servent uniquement pour établir que $u : L \to G$ est une isogénie étale.

2) Notons que L est le meilleur possible au sens suivant :

Si on a un groupe algébrique connexe L' avec deux flèches $u' : L' \to G$ et $\alpha' : L' \to H$ telles que u' soit une isogénie étale et que l'on ait $F(\alpha') = f^o \circ F(u')$ alors, on a une factorisation

$$\begin{tikzcd} & L' \arrow[r, "u'"] \arrow[dl, "\alpha'"'] \arrow[d, "v"] & G \\ H & L \arrow[l, "\alpha"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha \circ v \\ u' &= u \circ v \end{aligned}$$

et v est un épimorphisme.

Pour le voir, posons $C' = \mathcal{O}_{L',e}$, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle j}\downarrow \\ \tilde{A} & \xrightarrow{f} & \tilde{B} \end{array} \qquad B \xrightarrow{u'^*} C' \to \tilde{B}$$

On a donc $B \hookrightarrow C'$, et de plus, comme f se factorise par C', les $\alpha_i = f \circ i(x_i)$ sont dans C' . Il en résulte que C s'injecte dans C' et que cette injection induit un épimorphisme de groupes $v : L' \to L$.

3) On peut remarquer également que L est invariant par extension algébrique de corps, i.e. si on a une extension $\bar{k}$ de k et si on pose $\bar{G} = G \otimes_k \bar{k}$, $\bar{H} = H \otimes_k \bar{k}$,... alors, le groupe $\bar{L}$ construit par la méthode de 2.4 n'est autre que $L \otimes_k \bar{k}$.

En effet, $\bar{C}$ sera engendré par $\bar{B} = B \otimes_k \bar{k}$ et par $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, générateurs de $\bar{A} = A \otimes_k \bar{k}$ sur $\bar{k}$.

4) Enfin, dans la situation de 2), soient $N = \mathrm{Ker}\, u$, $N' = \mathrm{Ker}\, u'$; v induit un épimorphisme, noté encore $v : N' \to N$. Mais, comme u' est étale, N' est étale, donc N aussi et donc u est une isogénie étale.

Autrement dit, si le théorème est vrai, le groupe L que nous avons construit en 2.4 est convenable, i.e. $u : L \to G$ est une isogénie étale. Malheureusement, nous ne savons pas prouver directement ce fait. Notons cependant qu'en vertu des remarques 3) et 4), il suffit de prouver le théorème pour un corps parfait. En effet si $\bar{k}$ est une clôture parfaite de k , il résultera de 4) que $u \otimes_k \bar{k} : L \otimes_k \bar{k} \to G \otimes_k \bar{k}$ est étale, donc aussi u par descente.

§3 Algébrisation des groupes henséliens lisses.

3.1 Enoncé du théorème et indications sur la démonstration.

Théorème 3.1.1

Soit (A,Δ,σ) un groupe hensélien lisse. Il existe un k-groupe algébrique G lisse et connexe tel que $\mathbf{A}^{\circ}$ soit l'hensélisé de G.

La démonstration de ce théorème occupe tout le §3 et avant d'entrer dans les détails techniques, nous donnons ci-dessous des indications sur la méthode utilisée.

Soit K le corps des fractions de $\mathbf{A}$. On notera $K \check{\otimes}_k K$ (resp. $K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$) ... le corps des fractions de $\mathbf{A} \otimes_k A$, (resp. $\mathbf{A} \otimes_k \mathbf{A} \otimes_k A$).

Pour construire G, on construit un groupe rationnel au sens de [P] III. Le point essentiel pour construire ce groupe rationnel est de prouver que si

$$L = \{a \in K \mid \Delta a \in K \check{\otimes}_k K\}$$

le degré de transcendance de L est le même que celui de K. (En fait, pour des raisons techniques, on est même obligé de regarder l'image de a par $(1\tilde{\otimes}\Delta) \circ \Delta$, i.e. dans $K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$). Pour prouver l'assertion sur le degré de transcendance, on part de $a \in \mathbf{A}$ transcendant. Alors, Δa est dans le corps des fractions de $\mathbf{A} \tilde{\otimes}_k \mathbf{A}$, donc algébrique sur $K \check{\otimes}_k K$: on a une équation

$$a_n(\Delta a)^n + \dots + a_o = 0 \qquad (1) \qquad a_i \in \mathbf{A} \otimes_k \mathbf{A}$$

Si on applique $1\tilde{\otimes}\Delta$ et $\Delta\tilde{\otimes}1$ à (1), tenant compte de ce que $(1\tilde{\otimes}\Delta) \circ \Delta(a) = (\Delta\tilde{\otimes}1) \circ \Delta(a) = u$ on a :

$$1\tilde{\otimes}\Delta(a_n)\, u^n + \dots + 1\tilde{\otimes}\Delta(a_o) = 0 \qquad (2)$$

$$\Delta\tilde{\otimes}1(a_n)\, u^n + \dots + \Delta\tilde{\otimes}1(a_o) = 0 \qquad (3)$$

et on montre alors que ces équations sont proportionnelles, donc :

$$1\tilde{\otimes}\Delta(a_i)\ \Delta\tilde{\otimes}1(a_j) = 1\tilde{\otimes}\Delta(a_j)\ \Delta\tilde{\otimes}1(a_i) \qquad (4)$$

On applique alors $1 \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} \varepsilon$ à (4). En vertu des axiomes des groupes henséliens, on trouve

$$\Delta(a_i')a_j = \Delta(a_j')a_i$$

où $a_i' = 1 \tilde{\otimes} \varepsilon(a_i)$.

Donc (si $a_j' \neq 0$) on a

$$\Delta\left(\frac{a_i'}{a_j'}\right) = \frac{a_i}{a_j} \in K \underset{k}{\check{\otimes}} K \qquad \text{i.e.}\ \frac{a_i'}{a_j'} \in L\ .$$

Mais on a aussi en appliquant $1\tilde{\otimes}\varepsilon$ à (1)

$$a_n' a^n + \ldots + a_o' = 0\ .$$

Donc les $\frac{a_i'}{a_j'}$ ne sont pas tous algébriques et le degré de transcendance de L est au moins égal à 1.

On montre de manière tout à fait analogue que ce degré est le même que celui de K .

<u>Notations</u> 3.1.2

A° étant un groupe lisse, A est de la forme $k\{T_1,\ldots,T_n\}$, hensélisé à l'origine de $k[T_1,\ldots,T_n]$. On note $A = k\{\underline{T}\}$ et on a aussi $A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A = k\{\underline{X},\underline{Y}\}$, $A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A = k\{\underline{X},\underline{Y},\underline{Z}\}$. On pose $A^{\tilde{\otimes} m} = \underbrace{A \underset{k}{\tilde{\otimes}} \ldots \underset{k}{\tilde{\otimes}} A}_{m}$ et de même

$A^{\otimes m} = \underbrace{A \underset{k}{\otimes} \ldots \underset{k}{\otimes} A}_{m}$, $A^{\tilde{\otimes} m} = k\{\underline{T}_1,\ldots,\underline{T}_m\}$. On considère les flèches suivantes :

$\varphi : A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \to A^{\tilde{\otimes} 3}$ définie par

$$\varphi = (1\tilde{\otimes}\Delta) \circ \Delta = (\Delta\tilde{\otimes}1) \circ \Delta$$

$\varphi_1 \quad A^{\tilde{\otimes} 3} \to A^{\tilde{\otimes} 5}$ définie par

$$\varphi_1 = 1 \tilde{\otimes} \varphi \tilde{\otimes} 1$$

$\phi : A^{\tilde{\otimes}3} \to A^{\tilde{\otimes}5}$ définie par

$$\phi = \Delta \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} \Delta$$

$j_1 : A^{\tilde{\otimes}3} \to A^{\tilde{\otimes}5}$ définie par

$$j_1 = 1 \tilde{\otimes} \mathrm{Id} \tilde{\otimes} 1$$

$j_2 : A^{\tilde{\otimes}2} \to A^{\tilde{\otimes}5}$ définie par

$$j_2 = \mathrm{Id} \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} 1$$

$j_3 : A^{\tilde{\otimes}2} \to A^{\tilde{\otimes}5}$ définie par

$$j_3 = 1 \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} \mathrm{Id}$$

$p : A^{\tilde{\otimes}5} \to A^{\tilde{\otimes}3}$ définie par

$$p = 1 \tilde{\otimes} \varepsilon \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} \varepsilon \tilde{\otimes} 1$$

$q : A^{\tilde{\otimes}5} \to A^{\tilde{\otimes}3}$ définie par

$$q = \varepsilon \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} 1 \tilde{\otimes} \varepsilon .$$

On appelle B la sous-k-algèbre de $A^{\tilde{\otimes}5}$ engendrée par les images de j_1, j_2, j_3.

En termes de séries formelles algébriques, B est la sous-algèbre de $k\{\underline{X},\underline{Y},\underline{Z},\underline{T},\underline{U}\}$ engendrée par $k\{\underline{X},\underline{Y}\} \cup k\{\underline{Y},\underline{Z},\underline{T}\} \cup k\{\underline{T},\underline{U}\}$. Si m est l'idéal maximal de $A^{\tilde{\otimes}5}$ et si $n = m \cap B$, on pose $C = B_n$.

3.2 Lemmes préliminaires.

Lemme 3.2.1

On a les formules suivantes (notations de 3.1.2)

1) $\varphi_1 \circ \varphi = \phi \circ \varphi$

2) $p \circ \varphi_1 = \mathrm{Id}_{A^{\tilde{\otimes}3}}$, $p \circ \phi = \mathrm{Id}_{A^{\tilde{\otimes}3}}$

3) $q \circ \phi = \mathrm{Id}_{A^{\tilde{\otimes}3}}$, $q \circ \varphi_1 = \varepsilon \tilde{\otimes} \varphi \tilde{\otimes} \varepsilon$.

Démonstration :

On établit ces formules dans $\mathbf{H}^{\circ}$ et même grâce à Yoneda dans la catégorie des foncteurs de $\mathbf{H}^{\circ}$ dans $\mathbf{Ens}$. On a alors les flèches :

$$\varphi^{\circ} : \mathbf{A}^{\circ} \times \mathbf{A}^{\circ} \times \mathbf{A}^{\circ} \to \mathbf{A}^{\circ}$$
$$(x,y,z) \mapsto xyz$$

$$\varphi_1^{\circ} : (\mathbf{A}^{\circ})^5 \to (\mathbf{A}^{\circ})^3$$
$$(x,y,z,t,u) \mapsto (x,yzt,u)$$

$$\psi^{\circ} : (\mathbf{A}^{\circ})^5 \to (\mathbf{A}^{\circ})^3$$
$$(x,y,z,t,u) \mapsto (xy,z,tu)$$

et 1) résulte de l'égalité $x(yzt)u = (xy)z(tu)$

$$p^{\circ} : (\mathbf{A}^{\circ})^3 \to (\mathbf{A}^{\circ})^5$$
$$(x,y,z) \mapsto (x,1,y,1,z)$$

2) résulte alors de $(1y1) = y$ et $(x1) = x$ $(1z) = z$

$$q^{\circ} : (\mathbf{A}^{\circ})^3 \to (\mathbf{A}^{\circ})^5$$
$$(x,y,z) \mapsto (1,x,y,z,1)$$

3) résulte de $1x = x$, $z1 = z$ et de $(\varepsilon\tilde{\otimes}\varphi\tilde{\otimes}\varepsilon)^{\circ}(x,y,z) = (1,xyz,1)$.

Lemme 3.2.2

L'anneau C est noethérien et factoriel (notation de 3.1.2).

Démonstration :

Il suffit de prouver que son hensélisé $\tilde{C}$ est isomorphe à $A^{\tilde{\otimes}5}$ ([R]). Notons $\ell : C \hookrightarrow A^{\tilde{\otimes}5}$ l'injection canonique, qui est un homomorphisme local. Nous allons montrer que $\ell : C \hookrightarrow A^{\tilde{\otimes}5}$ vérifie la propriété universelle de l'hensélisation.

Soit H un anneau local hensélien et $v : C \to H$ un homomorphisme local. Soit $\mathfrak{p} = m \cap A^{\otimes 5}$ et $S = (A^{\otimes 5})_{\mathfrak{p}}$ de sorte que $\tilde{S} = A^{\tilde{\otimes}5}$.

Remarquons que $S \subset C$ et soit $j : S \to C$ l'injection canonique. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "i"'] & C \arrow[r, "v"] \arrow[d, hook, "\ell"] & H \\ & \tilde{A}^{\otimes 5} \arrow[ur, dashed, "w"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $\widetilde{A^{\otimes 5}} = \tilde{S}$, il existe w unique tel que $w \circ i = v \circ j$, donc $w \circ \ell \circ j = v \circ j$. Il suffit alors de prouver que $v = w \circ \ell$. Montrons qu'ils coïncident sur $j_1(\widetilde{A^{\otimes 3}})$. Pour ceci, soit $\mathfrak{q}$ l'idéal de $A^{\otimes 3}$, trace sur $A^{\otimes 3}$ de l'idéal maximal de $\widetilde{A^{\otimes 3}}$ et posons $R = A^{\otimes 3}_{\mathfrak{q}}$, de sorte que $\tilde{R} = \widetilde{A^{\otimes 3}}$.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, hook, "i'"'] & S \arrow[d, hook, "i"] \\ \tilde{R} = \widetilde{A^{\otimes 3}} \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[dr, "k_1"'] & \tilde{S} \\ & C \arrow[u, "\ell"'] \end{tikzcd} \qquad \text{où } i_1 = j_1|R$$

Comme $\mathrm{Im}\, j_1 \subset C$, on a une factorisation $j_1 = \ell \circ k_1$. Comme $\tilde{R}$ est l'hensélisé de R , il existe w' unique $w' : \tilde{R} \to H$ tel que $w' \circ i' = v \circ j \circ i_1$.
Mais, $v \circ j \circ i_1 = w \circ i \circ i_1 = w \circ j_1 \circ i'$ et donc

$$w' = w \circ j_1 = w \circ \ell \circ k_1 .$$

D'autre part, $k_1 \circ i' = j \circ i_1$, donc $v \circ k_1 \circ i' = v \circ j \circ i_1$, donc $w' = v \circ k_1$.
Autrement dit, $w \circ \ell$ et v coïncident sur l'image de k_1 , donc de j_1 .

On montre de même qu'ils coïncident sur les images de j_2 et j_3 , et comme C est engendré par les images de j_1, j_2, j_3 , on a $w \circ \ell = v$. cqfd.

<u>Lemme</u> 3.2.3

Soit $\varphi : A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux, fidèlement plat. Soit K (resp. K') l'anneau total des fractions de A (resp. A') . Comme φ est plat, il induit $\bar{\varphi} : K \to K'$. Alors, si $a' \in A' \cap \bar{\varphi}(K)$, $a' \in \varphi(A)$.

Démonstration :

Comme la suite $A \xrightarrow{\varphi} A' \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} A' \otimes_A A'$ est exacte, il suffit de voir que $i_1(a') = a' \otimes 1 = i_2(a') = 1 \otimes a'$. Remarquons que si s est régulier dans A , $\varphi(s)$ l'est dans A' et $i_1 \circ \varphi(s) = i_2 \circ \varphi(s)$ l'est dans $A' \otimes_A A'$ par platitude.

Comme $a' \in \bar{\varphi}(K)$, on a $a' = \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(s)}$ $a, s \in A$, s régulier.

On a donc $\varphi(s)a' = \varphi(a)$ et dans $A' \otimes_A A'$

$$i_1 \circ \varphi(s)\; i_1(a') = i_1 \circ \varphi(a)$$

$$i_2 \circ \varphi(s)\; i_2(a') = i_2 \circ \varphi(a)$$

et donc $i_1 \circ \varphi(s)\, [i_1(a') - i_2(a')] = 0$, mais comme $i_1 \circ \varphi(s)$ est régulier, $i_1(a') = i_2(a')$.

Remarque 3.2.4

Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas, $x \in X$, $s = f(x)$. On suppose f plat en x . Soit a une fonction rationnelle sur S . Il résulte de 3.2.3 que si $f^*(a)$ est définie en x , a est définie en s .

Lemme 3.2.5

Avec les notations de 3.1.2 , on a

$$p(C) \subset K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K .$$

Démonstration :

Il suffit de voir que $p(B) \subset K \otimes_k K \otimes_k K$. Soit $b \in B$, on peut écrire

$$b(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}, \underline{T}, \underline{U}) = \Sigma\, b_1(\underline{Y}, \underline{Z}, \underline{T})\; b_2(\underline{X}, \underline{Y})\; b_3(\underline{T}, \underline{U}) .$$

(3.1.2) Or, p est l'homomorphisme de $A^{\tilde{\otimes} 5}$ dans $A^{\tilde{\otimes} 3}$ qui envoie $\underline{Y}$ et $\underline{T}$ sur 0 , et donc

$$p(b) = \Sigma\, b_1(0, \underline{Z}, 0)\; b_2(\underline{X}, 0)\; b_3(0, \underline{U})$$

et $p(b) \in A \otimes_k A \otimes_k A \subset K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$

3.3 Conservation du degré de transcendance.

Proposition 3.3.1

Avec les notations de 3.1.2, soit $a \in A$, $a \neq 0$, $\alpha = \varphi(a) \in \tilde{A}^{\otimes 3}$, et soit une équation algébrique minimale :

$$a_m \alpha^m + \dots + a_o = 0 \qquad a_m \neq 0 \qquad (1)$$

de α sur le corps $K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K$, avec $a_i \in A \underset{k}{\otimes} A \underset{k}{\otimes} A$. Alors, pour tout $i = 0,\dots,m-1$, on a

$$\frac{a_i}{a_m} \in \varphi(K) .$$

Démonstration :

Soit $\beta = \psi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$ (3.2.1).

Appliquons φ_1 et ψ à (1), on obtient

$$P(\beta) = \varphi_1(a_m)\beta^m + \dots + \varphi_1(a_o) = 0 \qquad (2)$$

$$P'(\beta) = \psi(a_m)\beta^m + \dots + \psi(a_o) = 0 \qquad (3) .$$

De plus, par définition de φ_1, ψ et de l'anneau B (3.2.1) il est clair que $\varphi_1(a_i)$, $\psi(a_i) \in B \subset C$. Soit $N = Fr(C)$. Nous allons prouver que (2) et (3) sont des équations minimales de β sur N. Pour ceci, supposons qu'il existe une équation minimale :

$$Q(\beta) = c_q \beta^q + \dots + c_o = 0 \qquad (4)$$

avec $q < n$ et $c_i \in C$, $c_q \neq 0$.

Comme C est factoriel (3.2.2), on peut supposer le pgcd des c_i égal à 1.

Comme on a $P(\beta) = 0$ et comme (4) est minimale, on en déduit :

$$P(X) = Q(X)\, R(X) \qquad \text{avec } P,Q \in C[X],\ R \in N[X] .$$

Comme C est factoriel, on a $R(X) = \frac{\lambda}{\mu} R'(X)$ avec $R' \in C[X]$; $\lambda,\mu \in C$; λ,μ premiers entre eux et contenu $(R') = 1$.

Alors, dans $C[X]$, on a :

$$\mu\, P(X) = \lambda\, Q(X)\, R'(X) .$$

En vertu du lemme de Gauss, le contenu de QR' est 1, donc μ divise λ et donc $\mu \in C^*$. On a donc, en fait, avec un petit changement de notations :

$$P(X) = Q(X)\, R(X) \quad , \quad R \in C[X] .$$

Appliquons alors $p : A^{\tilde{\otimes} 5} \to A^{\tilde{\otimes} 3}$ (3.1.2). Comme $p \circ \varphi_1 = \mathrm{id}\, A^{\tilde{\otimes} 3}$ (3.2.1), $p(P)$ est un polynôme non nul de $p(C)[X]$, et on a

$$p(P(X)) = a_m X^m + \ldots + a_o = p(Q(X))\, p(R(X))$$

$p(Q)$ est donc un polynôme non nul, de degré $q < m$ et, comme $Q(\beta) = 0$, $p(Q)(\alpha) = 0$. Mais, comme $p(C) \subset K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$ (3.2.5), ceci contredit le fait que (1) est une équation minimale de α sur $K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$.

De la même façon, on prouve que (3) est minimale. Il en résulte donc que (2) et (3) sont deux équations minimales de β sur N , donc sont proportionnelles, et on a :

$$\forall\, i = 0, \ldots, m-1 \qquad \frac{\varphi_1(a_i)}{\varphi_1(a_m)} = \frac{\phi(a_i)}{\phi(a_m)} .$$

Considérons alors $q : A^{\tilde{\otimes} 5} \to A^{\tilde{\otimes} 3}$ (3.1.2).

Posons $x_i = \dfrac{\phi(a_i)}{\phi(a_m)} = \dfrac{\varphi_1(a_i)}{\varphi_1(a_m)}$. Comme $q \circ \phi = \mathrm{Id}\, A^{\tilde{\otimes} 3}$, on a $q(x_i) = \dfrac{a_i}{a_m}$.
D'autre part, si $b \in \varphi_1(A^{\tilde{\otimes} 3})$, comme $q \circ \varphi_1 = \varepsilon \tilde{\otimes} \varphi \tilde{\otimes} \varepsilon$, $q(b) \in \varphi(A) \subset \varphi(K)$.

Considérons la flèche canonique fidèlement plate

$$\varphi_1(A^{\tilde{\otimes} 3}) \to A^{\tilde{\otimes} 5}$$

elle induit par localisation une flèche

$$\varphi_1(A^{\tilde{\otimes} 3})_{\mathrm{Ker}\, q \,\cap\, \varphi_1(A^{\tilde{\otimes} 3})} \to A^{\tilde{\otimes} 5}_{\mathrm{Ker}\, q}$$

qui est fidèlement plate également. On peut donc appliquer 3.2.3. Il en résulte que $x_i \in \varphi_1(A^{\tilde{\otimes} 3})_{\mathrm{Ker}\, q \,\cap\, \varphi_1 A^{\tilde{\otimes} 3}}$. Donc $x_i = \dfrac{\varphi_1(\alpha_i)}{\varphi_1(\beta_i)}$ avec $q \circ \varphi_1(\beta_i) \neq 0$.

Il en résulte alors que $q(x_i) = \dfrac{q \circ \varphi_1(\alpha_i)}{q \circ \varphi_1(\beta_i)} \in \varphi(K)$ pour tout $i = 0,\ldots,m-1$.

Proposition 3.3.2

Avec les notations de 3.1.2 , soit

$$L = \{a \in K \mid \varphi(a) \in K \check{\underset{k}{\otimes}} K \check{\underset{k}{\otimes}} K\} .$$

Alors 1) L est un sous-corps de K et on a $\deg.\mathrm{tr.}_k L = \deg.\mathrm{tr}_k K = n$.

2) $\Delta L \subset K \check{\underset{k}{\otimes}} K$.

Démonstration :

Soit $a \in A$, $a_m \alpha^m + \ldots + a_o = 0$ une équation minimale de $\alpha = \varphi(a)$ sur $K \check{\underset{k}{\otimes}} K \check{\underset{k}{\otimes}} K$. On a (3.3.1)

$$\forall\, i = 0,\ldots,m-1 \qquad \frac{a_i}{a_m} \in \varphi(K) .$$

Il existe donc $d_o,\ldots,d_{m-1} \in A$; $e_o,\ldots,e_{m-1} \in A$, $e_i \neq 0$ tels que $\dfrac{a_i}{a_m} = \dfrac{\varphi(d_i)}{\varphi(e_i)}$.

Quitte à réduire au même dénominateur, on a $\dfrac{a_i}{a_n} = \dfrac{\varphi(d_i)}{\varphi(d_n)}$ $d_n \neq 0$.

Quitte alors à changer d'équation minimale, on peut supposer que $\forall\, i = 0,\ldots,m$ $a_i = \varphi(d_i)$ et donc $a_i \in A^{\tilde{\otimes} 3} \cap (K \check{\otimes} K \check{\otimes} K)$ qui n'est autre que le localisé $(A^{\otimes 3})_{\mathfrak{q}} = R$ (notation de 3.2.2). On a donc $\forall\, i = 0,\ldots,m$ $\dfrac{d_i}{d_n} \in L$.

Pour établir 3.3.2 , on fait cette construction avec $a = T_1,\ldots,T_n$. On obtient, pour $k = 1,\ldots,n$ avec $\alpha_k = \varphi(T_k)$:

$$a_{n_k,k}\, \alpha_k^{n_k} + \ldots + a_{o,k} = 0 .$$

Avec $a_{i,k} = \varphi(d_{i,k})$, $d_{n_k,k} \neq 0$, $d_{i,k} \in A$. Si on applique $1 \tilde{\otimes} \varepsilon \tilde{\otimes} \varepsilon$ à cette équation, comme $1 \tilde{\otimes} \varepsilon \tilde{\otimes} \varepsilon \circ \varphi = \mathrm{Id}_A$, il vient :

$$d_{n_k,k}\, T_k^{n_k} + \ldots + d_{o,k} = 0 \qquad k = 1,\ldots,n .$$

Il en résulte que $T_1,\ldots,T_n$ sont algébriques sur le corps engendré par les $\dfrac{d_{i,k}}{d_{n_k,k}}$, pour $k = 1,\ldots,n$; $i = 0,\ldots,n_k$. Mais $\dfrac{d_{i,k}}{d_{n_k,k}} \in L$ et donc, $T_1,\ldots,T_n$

sont algébriques sur L, ce qui prouve que $\deg \mathrm{tr}_k L = n$. Il reste à prouver que $\Delta L \subset K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K$. Soit $\frac{a}{b} \in L$, $\begin{matrix} a,b \in A \\ b \neq 0 \end{matrix}$. $\varphi(\frac{a}{b}) \in K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K$.

Posons $\theta = 1 \tilde{\otimes} \varepsilon \tilde{\otimes} 1 : \tilde{A}^{\otimes 3} \to \tilde{A}^{\otimes 2}$ et considérons l'homomorphisme canonique

$$(A \underset{k}{\otimes} A \underset{k}{\otimes} A)_{\mathrm{Ker}\,\theta \cap A^{\otimes 3}} \to \tilde{A}^{\otimes 3}_{\mathrm{Ker}\,\theta}\ .$$

Il est fidèlement plat.

D'autre part, posons $x = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$

$$\theta \circ \varphi = \Delta \Longrightarrow \theta(x) = \frac{\Delta(a)}{\Delta(b)}\ .$$

Appliquons 3.2.3 à x : $x \in \tilde{A}^{\otimes 3}_{\mathrm{Ker}\,\theta}$ et $x \in \mathrm{Fr}(A \otimes A \otimes A)$, donc $x \in (A \underset{k}{\otimes} A \underset{k}{\otimes} A)_{\mathrm{Ker}\,\theta \cap A^{\otimes 3}}$, c'est-à-dire $x = \frac{a'}{b'}$ avec $a',b' \in (A \underset{k}{\otimes} A \underset{k}{\otimes} A)_{\mathrm{Ker}\,\theta \cap A^{\otimes 3}}$ et $\theta(b') \neq 0$. On a donc $\theta(x) = \frac{\theta(a')}{\theta(b')}$. Mais comme $\theta(A^{\otimes 3}) \subset K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K$, il en résulte que $\theta(x) \in K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K$, et donc $\Delta(\frac{a}{b}) = \theta(x) \in K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K$.

<u>Lemme</u> 3.3.3

Avec les notations de 3.3.2, $L \to K$ est une extension algébrique séparable.

<u>Démonstration</u> :

Soit $M = \mathrm{Fr}(\tilde{A}^{\otimes 3})$, M est algébrique séparable sur $K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K$.

Supposons que l'on ait $a \in K$, avec $a^{p^r} \in L$ (p est la caractéristique de k). Alors, $\varphi(a^{p^r}) = \varphi(a)^{p^r} \in K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K$ et $\varphi(a) \in M$, donc $\varphi(a) \in K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} K$, et $a \in L$.

3.4 <u>Construction d'un groupe rationnel.</u>

<u>Proposition</u> 3.4.1

Soit L défini comme dans 3.3.2. Alors,

1) $\Delta L \subset L \overset{\vee}{\underset{k}{\otimes}} L$

2) $\sigma L \subset L$.

Il en résulte que $(L, \Delta/L, \sigma/L)$ est un k-groupe rationnel au sens de [P] III 1.1.

<u>Démonstration</u> :

Soit $L' = \{a \in K \mid \Delta a \in K \check{\otimes}_k K\}$, en vertu de 3.3.2 , on a $L \subset L'$.

1) Montrons tout d'abord que $\Delta L \subset L' \check{\otimes}_k L'$.

Soit $a \in L$ et $f = \Delta a$, $f \in K \check{\otimes}_k K$. En vertu de [P] I 3.5 , il existe un plus petit sous-corps K' de K tel que $f \in K' \check{\otimes}_k K$. De plus, $\Delta K' \subset K \check{\otimes}_k K$. En effet, considérons $\Delta : K \to P = Fr(A \tilde{\otimes}_k A)$. Le plus petit sous-corps P' de P tel que $\Delta \check{\otimes} 1(f) \in P' \check{\otimes}_k K \subset P \check{\otimes}_k K$ est $\Delta K'$ ([P] loc. cit. 2)). Or, $\Delta \check{\otimes} 1(f) = 1 \check{\otimes} \Delta(f) = \varphi(a)$ et $\varphi(a) \in K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$, donc $\Delta K' \subset K \check{\otimes}_k K$. Il en résulte que $K' \subset L'$, donc que $f \in L' \check{\otimes}_k K$. Appliquant le même raisonnement à droite, on a $f \in L' \check{\otimes}_k L'$, et comme ceci vaut pour tout $a \in L$, on a $\Delta L \subset L' \check{\otimes}_k L'$.

2) Montrons ensuite que $\Delta L \subset L \check{\otimes}_k L$.

Soit $a \in L$, $f = \Delta a \in L' \check{\otimes}_k L'$. Il existe un plus petit sous-corps K' de L' tel que $f \in K' \check{\otimes}_k L'$ ([P] loc. cit.) et c'est aussi le plus petit sous-corps de L' tel que $f \in K' \check{\otimes}_k K$ ([P] loc. cit. 3)). Alors, $\Delta K' \subset K' \check{\otimes}_k K$.

En effet, considérons $\Delta : L' \to Q = K \check{\otimes}_k K$. Le plus petit sous-corps Q' de Q tel que $\Delta \check{\otimes} 1(f) \in Q' \check{\otimes}_k K$ est $\Delta K'$. Or, on a,

$\Delta \check{\otimes} 1(f) = 1 \check{\otimes} \Delta(f) \in K' \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$, donc $\Delta K' \subset K' \check{\otimes}_k K$.

Mais alors, $\varphi(K') = (\Delta \check{\otimes} 1) \circ \Delta(K') \subset K' \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$ et donc $K' \subset L$.

On a donc $f \in L \check{\otimes}_k L'$, et de même $f \in L \check{\otimes}_k L$ d'où $\Delta L \subset L \check{\otimes}_k L$.

3) Il reste à prouver que $\sigma(L) \subset L$.

Soit $a \in L$, il faut montrer que $\varphi \circ \sigma(a) \in K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$. Or on a $\Delta \circ \sigma(a) = \sigma \otimes \sigma \circ S \circ \Delta(a)$, où $s : K \check{\otimes}_k K \to K \check{\otimes}_k K$ est défini par $s(x \otimes y) = y \otimes x$. Donc $\Delta \circ \sigma(a) \in \sigma L \check{\otimes}_k \sigma L \subset K \check{\otimes}_k K$. Il en résulte que $\sigma L \subset L'$. Mais, comme $\Delta L' \subset K \check{\otimes}_k K$, $1 \otimes \Delta \circ \Delta(\sigma(a)) \in \sigma L \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$ et donc $\varphi \circ \sigma(a) \in K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$.

Les axiomes des groupes rationnels sont alors conséquences des axiomes des groupes henséliens.

Remarque 3.4.2

C'est dans la démonstration de 3.4.1 qu'apparaît la nécessité d'avoir prouvé 3.3.2 avec L et non seulement avec L' (i.e. d'être allé jusqu'à $\tilde{A}^{\otimes 3}$).
En effet, pour utiliser [P] I 3.5 2) on doit être dans $K \check{\otimes}_k K \check{\otimes}_k K$ et pas seulement dans $Fr(\tilde{A}^{\otimes 3})$.

3.5 Fin de la démonstration de 3.1.1

Lemme 3.5.1

Soit k un corps, E et K deux extensions de k telles que $E \subset K$. On suppose

1) $\deg tr_k E = \deg tr_k K = n$.

2) Il existe $T_1, \dots, T_n \in K$ tels que K soit une extension algébrique séparable de $k(T_1 \dots T_n)$.

Alors, il existe $f_1, \dots, f_p \in E$ tels que E soit une extension algébrique séparable de $k(f_1, \dots, f_p)$.

Démonstration :

Soit $U_1, \dots, U_n$ une base de transcendance de E sur k. Posons $E' = \{a \in E \mid a \text{ radiciel sur } k(U_1 \dots U_n)\}$. Il suffit de prouver que E' est de type fini sur k.

Soit L le sous-corps de K engendré par les T_i et les U_i. Alors on a $k(T_1, \dots, T_n) \subset L \subset K$ et donc K est une extension séparable de L. Si $a \in E'$, $a^{p^r} \in k(U_1 \dots U_n)$, donc $a^{p^r} \in L$. Par conséquent, $a \in L$ puisque $L \to K$ est séparable. On a donc $E' \subset L$, donc E' est de type fini sur k.

Revenons alors à 3.1.1.

En vertu de 3.4.1 , (L,Δ,σ) est un groupe rationnel. D'après [P] III 2.2 , L est limite inductive filtrante de groupes rationnels de type fini (L_i,Δ_i,σ_i) avec $L_i \subset L$, $\Delta_i = \Delta | L_i$, $\sigma_i = \sigma | L_i$. Comme $K = k\{T_1,\ldots,T_n\}$ est une extension séparable de k , il en est de même de L (Bbki Alg V 7 N°3 Prop. 3) et donc (lemme 3.5.1) il existe $f_1,\ldots,f_r \in L$ tels que l'extension $k(f_1,\ldots f_r) \to L$ soit algébrique séparable. Choisissons i assez grand pour que $f_1,\ldots,f_r$ soient dans L_i et posons $F = L_i$.

D'après [P] III 3.1 il existe un groupe algébrique sur k , soit G , lisse et connexe, dont le corps des fonctions rationnelles est F , Δ_F et σ_F étant induites par les opérations de G .

Soit $B = \mathcal{O}_{G,e}$, l'anneau local de G à l'origine. B est local, régulier, de dimension n et $Fr(B) = F$.

En vertu de Bbki Alg V 8 Prop. 5, l'extension $F \to K$ est algébrique séparable comme composée de $F \to L$ et $L \to K$.

D'autre part, soit $\mu_o : F \underset{k}{\otimes} F \to F$ l'homomorphisme défini par $\mu_o(x \otimes y) = xy$ et $u_o = \mu_o \circ (1 \otimes \sigma_F)$, $u_o : F \underset{k}{\otimes} F \to F$. Posons $\mathfrak{J}_o = \operatorname{Ker} u_o$, on a vu que la loi de composition sur G induit un homomorphisme

$$\Delta_B : B \to (F \underset{k}{\otimes} F)_{\mathfrak{J}_o} \qquad \text{(I 3.2.4)} .$$

Considérons l'application canonique $\phi : B \to K$ obtenue en composant les inclusions :

$$B \subset F \subset L \subset K .$$

On a $\Delta_A : A \to A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A$ qui induit $\Delta_K : K \to Fr(A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A)$ et le diagramme ci-dessous est commutatif par construction

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_B"'] & F \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[d, "\Delta_K"] \\
(F \underset{k}{\otimes} F)_{\mathfrak{J}_o} \arrow[r] & F \underset{k}{\check{\otimes}} F \arrow[r] & L \underset{k}{\check{\otimes}} L \arrow[r] & Fr(A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A)
\end{tikzcd}$$

Si $b \in B$, il en résulte que

$$\Delta_K \circ \psi(b) \in (\psi \otimes \psi)(F \otimes F)_{\mathfrak{I}_0} \qquad \text{et donc,}$$

$\Delta_K \circ \psi(b) \in (K \underset{k}{\otimes} K)_{\mathfrak{I}_K}$ où, suivant les notations de (I 3.2.3) on a $\mathfrak{I}_K = \mathrm{Ker}\, u_K$ et $u_K = \mu_K \circ (1 \otimes \sigma_K)$. Il en résulte que $\Delta_K \circ \psi(b) \in C_{\mathfrak{I}_K}$ avec les notations de I 3.2.3.

Comme $A \xrightarrow{\Delta} C_{\mathfrak{I}_K}$ est fidèlement plat, on peut appliquer 3.2.3, donc $\psi(b) \in \mathbf{A}$.

On a donc en fait un homomorphisme d'anneaux $\psi : B \to \mathbf{A}$ qui est local car $(F \otimes F)_{\mathfrak{I}_0} \to C_{\mathfrak{I}'}$ l'est. Comme ψ commute à Δ et σ, on en déduit $\tilde{\psi} : \tilde{B} \to \tilde{A}$ et $\tilde{\psi}^0$ est un homomorphisme de groupes henséliens. Comme ψ est injectif et B régulier, $\tilde{\psi}$ est injectif, comme $F \to K$ est algébrique séparable, il en est de même de $\tilde{F} \to K$ où $\tilde{F} = \mathrm{Fr}(\tilde{B})$. Mais alors, en vertu de I 3.3.8, $\tilde{\psi}^0$ est un isomorphisme de groupes henséliens, et on a donc bien $\mathbf{A}^0 = \mathbf{F}(G)$.

§4 Le cas général.

Nous allons, dans ce paragraphe, éliminer les hypothèses de lissité en caractéristique $p > 0$ en utilisant le morphisme de Frobenius.

4.1 <u>Le morphisme de Frobenius.</u>

On se référera aux exposés classiques sur Frobenius, par exemple [DG] II §7 et III §3 N° 6 ou [SGA] Exp. VII_A N°4.

4.1.1 <u>Notations.</u>

Soit $\varphi : k \to \ell$ un homomorphisme d'anneaux, $\mathbf{A}$ une ℓ-algèbre. On désigne par ${}_{\varphi}A$ la k-algèbre déduite de $\mathbf{A}$ par restriction des scalaires et on a, pour $\lambda \in k$, $a \in \mathbf{A}$:

$$\lambda . a = \varphi(\lambda) a .$$

Réciproquement, si B est une k-algèbre on pose $B \underset{\varphi}{\otimes} \ell = B \underset{k}{\otimes} \ell$. Un élément de $B \underset{k}{\otimes} \ell$ est donc du type $\Sigma\, b \otimes \lambda$, $b \in B$, $\lambda \in \ell$ et, si $\mu \in k$, on a

$$\Sigma\, \mu b \otimes \lambda = \Sigma\, b \otimes \varphi(\mu)\lambda .$$

4.1.2 Définitions.

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et $\varphi_o : k \to k$ l'endomorphisme de Frobenius $\varphi_o(x) = x^p$. Si k est parfait, φ_o est un automorphisme de k.

Soit $\eta_{\mathbf{A}} : k \to \mathbf{A}$ une k-algèbre et soit $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ l'homomorphisme d'anneaux $\varphi(a) = a^p$.

On en déduit deux homomorphismes de k-algèbres $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\varphi_o}$ et $\varphi \underset{\varphi_o}{\otimes} k : \mathbf{A} \underset{\varphi_o}{\otimes} k \to \mathbf{A}$.

Soit $\mathbf{A}^p = \{a \in \mathbf{A} \mid \exists b \in \mathbf{A} \;\; a = b^p\}$. On a $\mathbf{A}^p = \varphi(\mathbf{A})$ et si k est parfait, $\mathbf{A}^p = \varphi \underset{\varphi_o}{\otimes} k \;(\mathbf{A} \underset{\varphi_o}{\otimes} k)$, donc, si k est parfait, $\mathbf{A}^p$ est une sous-k-algèbre de $\mathbf{A}$.

Supposons désormais que $\mathbf{A} \in \mathbf{H}_k$ avec k parfait. Alors $\mathbf{A}^p \in \mathbf{H}_k$ comme quotient d'un anneau local hensélien.

Si $m_{\mathbf{A}}$ est l'idéal maximal de $\mathbf{A}$ et $m_{\mathbf{A}^p}$ celui de $\mathbf{A}^p$, on a $m_{\mathbf{A}^p} = (m_{\mathbf{A}})^p = m_{\mathbf{A}} \cap \mathbf{A}^p$. Si de plus $\mathbf{A}$ est l'algèbre d'un groupe hensélien, nous allons montrer que $\mathbf{A}^p$ est aussi l'algèbre d'un groupe hensélien.

Supposons donc que $(\mathbf{A},\Delta,\sigma) \in \mathbf{HG}_k$. Alors, Δ et σ induisent Δ^p, σ^p sur $\mathbf{A}^p$. Pour σ, c'est clair. Considérons d'autre part $\mathbf{A}^p \underset{k}{\otimes} \mathbf{A}^p = \varphi(\mathbf{A}) \underset{k}{\otimes} \varphi(\mathbf{A})$. C'est aussi $\varphi(\mathbf{A} \underset{k}{\otimes} \mathbf{A})$ en vertu de la formule $(\Sigma\, a \otimes b)^p = \Sigma\, a^p \otimes b^p$.

De plus, si $\varepsilon_p : \mathbf{A}^p \to k$ est la flèche canonique et $n_p = \mathrm{Ker}(\varepsilon_p \otimes \varepsilon_p)$, on a aussi $(\mathbf{A}^p \underset{k}{\otimes} \mathbf{A}^p)_{n_p} = \varphi((\mathbf{A} \underset{k}{\otimes} \mathbf{A})_n)$.

Enfin, on a le lemme suivant :

Lemme 4.1.2.1

Si $\mathbf{A}$ est un anneau local de caractéristique $p > 0$, on a, avec les notations précédentes :

$$(\mathbf{A}^p)^{\sim} = (\tilde{\mathbf{A}})^p \,.$$

Démonstration :

On a $\mathbf{A}^p = \varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}/I$ avec $I = \{a \in \mathbf{A} \mid a^p = 0\}$ et on sait que $(\mathbf{A}/I)^{\sim} = \tilde{\mathbf{A}}/I\tilde{\mathbf{A}}$. Or $\tilde{\mathbf{A}}^p = \tilde{\mathbf{A}}/J$ avec $J = \{\tilde{a} \in \tilde{\mathbf{A}} \mid \tilde{a}^p = 0\}$ on a donc $I\tilde{\mathbf{A}} \subset J$ et il suffit de prouver l'inclusion inverse.

Soit $\tilde{a} \in J$. Comme $\tilde{\mathbf{A}} = \varinjlim \mathbf{A}_i$ avec $\mathbf{A}_i$ locale-étale sur $\mathbf{A}$, on peut supposer $a \in \mathbf{A}_i$ et $\mathbf{A}_i$ localisée d'une algèbre standard :

$$B = \mathbf{A}[X]/P \quad , \quad C = B_{p'} \quad , \quad \mathbf{A}_i = (C)_{\mathfrak{p}} \,.$$

Il suffit alors de prouver que si

$$J_C = \{c \in C \mid c^p = 0\} \quad , \quad J_C \subset IC \,.$$

Or, d'après [R] VII Prop. 0 Cor. on a, si $y \in B$

$$P'(x)y = \sum_{0}^{n-1} Tr_{B/A}(b_i y)\, x^i$$

où x est l'image de X dans B , $Tr_{B/A}$ l'opérateur trace et b_i un élément de B tel que dans $B[X]$ on ait $P(X) = (X-x)\sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$.
Alors, si $y^p = 0$, $(b_i y)^p = 0$ et $Tr(b_i y)^p = 0$, donc $Tr(b_i y) \in I$ et $y \in IC$ car $P'(x)$ est inversible dans C .

Il résulte de ce lemme que $\mathbf{A}^p \tilde{\otimes}_k \mathbf{A}^p = \varphi(\mathbf{A} \tilde{\otimes}_k \mathbf{A})$ et donc, si $a^p \in \mathbf{A}^p$, $\Delta(a^p) = \Delta(a)^p \in \mathbf{A}^p \tilde{\otimes}_k \mathbf{A}^p$ et il est clair alors que $(\mathbf{A}^p, \Delta^p, \sigma^p)$ est un k-groupe hensélien.

On peut itérer cette opération et construire ainsi $(\mathbf{A}^{p^r}, \Delta^{p^r}, \sigma^{p^r})$ pour $r \in \mathbb{N}$.

Remarques 4.1.3

Si (A,Δ,σ) est un groupe hensélien sur k parfait, le groupe obtenu par changement de base $\varphi_o : k \to k$ a pour algèbre $A \underset{\varphi_o}{\otimes} k$ car φ_o est fini. De plus l'homomorphisme $\varphi \underset{\varphi_o}{\otimes} k : A \underset{\varphi_o}{\otimes} k \to A$ est alors un homomorphisme de groupes henséliens.

D'autre part, l'injection canonique $i : A^p \to A$ est aussi un homomorphisme de groupes henséliens et on a une factorisation

$$\begin{tikzcd}
A \underset{\varphi_o}{\otimes} k \arrow[rr, "\varphi \underset{\varphi_o}{\otimes} k"] \arrow[dr, "u = (\varphi \underset{\varphi_o}{\otimes} k)"'] & & A \\
& A^p \arrow[ur, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

u est surjectif et i^o et $(\varphi \underset{\varphi_o}{\otimes} k)^o$ ont même noyau.

Ceci est l'analogue de la situation suivante sur les groupes algébriques (cf [DG] loc. cit.)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_F G \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[dr] & G^{(p)} \\
& & & G/_F G \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

où A correspond à G, $A \underset{\varphi_o}{\otimes} k$ à $G^{(p)}$, $G/_F G$ à A^p.

Proposition 4.1.4

$(A^{p^r}, \Delta^{p^r}, \sigma^{p^r})$ est lisse pour r assez grand si A est noethérien.

Démonstration :

Soit $\mathfrak{R}$ le nilradical de A, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{R}^n = (0)$. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $p^r \geqslant n$. Alors, si $a \in A^{p^r}$ et si $a^q = 0$, on a $a = b^{p^r}$ avec $b \in A$. $a^q = (b^{p^r})^q = 0$, donc b est nilpotent. Mais alors $b^n = 0$, donc $b^{p^r} = a = 0$. A^{p^r} est donc réduit, donc $(A^{p^r}, \Delta^{p^r}, \sigma^{p^r})$ lisse.

<u>On suppose désormais</u> A^{p^r} <u>lisse</u>.

Considérons maintenant l'homomorphisme $i : A^{p^r} \hookrightarrow A$ et soit $B^o_{p^r}$ le noyau de i^o.

<u>Lemme</u> 4.1.5

$B = B_{p^r}$ est fini sur k.

<u>Démonstration</u> :

On a $B = A/m^{p^r}$ où m est l'idéal maximal de A. Il en résulte que $\dim B = 0$. Donc B est artinien, d'où le résultat. Il en résulte que B^o qui est un groupe hensélien fini est en fait un groupe algébrique infinitésimal.

On a donc si k est parfait, deux sous-groupes de A^o, B^o et A^o_{red}. De plus, B^o étant distingué, A^o et a fortiori $A^o red$ opèrent sur B^o par automorphismes intérieurs. Le produit $B^o \underset{k}{\times} A^o red$ est alors muni d'une structure de groupe comme produit semi-direct : si on désigne par $\omega : A^o red \times B^o \to B^o$ l'opération de $A^o red$ sur B^o on a sur $B^o \times A^o red$ la loi suivante

$(n,g)(n',g') = (n\omega(g,n'),gg')$ où $\omega(g,n') = g\,n'\,g^{-1}$.

L'application canonique $B^o \times A^o red \xrightarrow{\theta^o} A^o$ définie par $(g,n) \mapsto gn$ est alors un homomorphisme de groupes henséliens. θ^o provient sur les anneaux d'un homomorphisme θ obtenu par composition

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\theta"'] & A \underset{k}{\tilde{\otimes}} A \arrow[d, "can \,\tilde{\otimes}\, can"] \\ & A_{red} \underset{k}{\tilde{\otimes}} B \end{tikzcd}$$

Notons que, comme B est fini sur k, on a

$$A_{red} \underset{k}{\tilde{\otimes}} B = A_{red} \underset{k}{\otimes} B .$$

<u>Proposition</u> 4.1.6

L'homomorphisme $\theta : A \to A_{red} \underset{k}{\otimes} B$ est injectif.

<u>Démonstration</u> :

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "id"'] & A \tilde{\otimes}_k A \arrow[r, "can"] \arrow[d, "\varepsilon_A \otimes 1"] & A_{red} \otimes_k B \arrow[d, "\varepsilon_A \otimes 1"] \\ & A \arrow[r, "can"] & B \end{tikzcd}$$

Donc, si $\theta(a) = 0$, a est nul dans B : $a \in m^{p^r}$, $a = b^{p^r}$, $b \in m$.

On a aussi le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "id"'] & A \tilde{\otimes}_k A \arrow[r, "can"] \arrow[d, "1 \otimes \varepsilon_A"] & A_{red} \otimes_k B \arrow[d, "1 \otimes \varepsilon_B"] \\ & A \arrow[r, "can"] & A_{red} \end{tikzcd}$$

Donc, si $\theta(a) = 0$, a est nilpotent. Or $a = b^{p^r}$, donc a est nilpotent dans A^{p^r} qui est lisse : $a = 0$.

<u>Remarque</u> 4.1.7

Sur les groupes algébriques, ceci revient à dire que l'homomorphisme θ^o

$$\theta^o : G_{red} \times_k {}_{F^r}G \longrightarrow G$$

est un épimorphisme.

Soit $C^o = \mathrm{Ker}\ \theta^o$, on a pour $D \in H_k$

$$C^o(D) = \{(n^{-1}, n) \in A^o{}_{red} \times B^o(D) \mid n \in B^o(D)\}$$

C^o est donc un sous-groupe de B^o et en particulier C qui est un quotient de B est fini sur k .

4.2 <u>Algébrisation d'une opération.</u>

Soit k un corps, G un k-groupe algébrique lisse et connexe, N un groupe infinitésimal algébrique. Soit $\tilde{G}$ l'hensélisé de G . On suppose que $\tilde{G}$ opère sur $N = \tilde{N}$ par automorphismes de groupes henséliens. Autrement dit dans

$\mathbf{H}_k^o$ on a un homomorphisme

$$\omega : \tilde{G} \times_k N \longrightarrow N$$

tel que, si $D \in \mathbf{H}_k$ et si on pose, pour $g \in \tilde{G}(D)$, $n \in N(D)$, $\omega(g,n) = g.n$ on ait :

1) $(gg').n = g.(g'.n)$

2) $1.n = n$

3) $g.(nn') = (g.n)(g.n')$.

Si on note $R = \mathcal{O}_{G,e}$, $\tilde{R}$ l'hensélisé de G , $N = \operatorname{spec} B$, $u : B \to B \otimes_k \tilde{R}$ l'homomorphisme correspondant à ω , les axiomes 1) 2) 3) se traduisent par la commutativité des diagrammes a) b) c)

$$B \xrightarrow{u} B \otimes_k \tilde{R} \overset{u \otimes \tilde{1}}{\underset{1 \otimes \Delta_{\tilde{R}}}{\rightrightarrows}} B \otimes_k \tilde{R} \otimes_k \tilde{R} \qquad \text{a)}$$

où $\Delta_{\tilde{R}}$ est la loi de groupe hensélien de $\tilde{R}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & B \otimes_k \tilde{R} \arrow[r, "1 \otimes \varepsilon_{\tilde{R}}"] & B \end{tikzcd} \qquad \text{b)}$$

$$B \xrightarrow{u} B \otimes_k \tilde{R} \overset{1 \otimes u}{\underset{\Delta_B \otimes 1}{\rightrightarrows}} B \otimes_k B \otimes_k \tilde{R} \qquad \text{c)}$$

où Δ_B est la loi de groupe du groupe affine $N = \operatorname{spec} B$.

Proposition 4.2.1

Avec les notations précédentes, il existe un groupe algébrique L lisse et connexe, une isogénie étale $\alpha : L \to G$ et une opération par automorphismes de groupes de L sur N notée $\beta : L \times_k N \to N$ tels que $\mathbb{F}(\beta) = \omega$.

Démonstration :

Elle est analogue à celle de la pleine fidélité.

On choisit une base $e_1,\ldots,e_n$ de B sur k avec $e_1 = 1$. On a alors

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes a_{ij} \qquad a_{ij} \in \tilde{R} .$$

Soit S la sous-R-algèbre de $\tilde{R}$ engendrée par les a_{ij}.

En vertu de la commutativité de a) on a

$$\sum_{j=1}^{n} u(e_j) \otimes a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \Delta_{\tilde{R}}(a_{ij}) .$$

Or
$$\sum_{j=1}^{n} u(e_j) \otimes a_{ij} = \sum_{j,k} e_k \otimes a_{jk} \otimes a_{ij}$$

ou, en changeant les noms des indices

$$\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \Delta(a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \otimes a_{ik} .$$

Il en résulte que $\Delta(a_{ij}) \in S \otimes_k S$ et par la méthode utilisée en II 2.2.2 on construit donc un groupe local sur S qui fournit un groupe algébrique L lisse et connexe. L'injection $R \hookrightarrow S$ donne l'isogénie étale α et on termine comme en II 2.2.2 mutatis mutandis.

4.3 La pleine fidélité (k parfait).

On reprend la démonstration de 2.2.2 sans hypothèses de lissité, mais en supposant k parfait.

On a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{f^{o}} & \tilde{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & & H \end{array}$$

Soit G_{red} le groupe réduit associé à G. G_{red} est lisse et connexe et $(G_{red})^{\sim} = (\tilde{G})_{red}$. Posons $\tilde{H} = (\tilde{A})^{o}$, $\tilde{G} = (\tilde{B})^{o}$.

On a construit $\tilde{B}^{p^r}$ qui est un groupe hensélien lisse pour r assez grand. Soit N le noyau de $(\tilde{B})^{o} \to (\tilde{B}^{p^r})^{o}$. On a aussi un homomorphisme de groupes henséliens $(\tilde{G})_{red} \times N \to \tilde{G}$. Soit U son noyau. En vertu de 4.2 l'opération de $\tilde{G}_{red}$ sur N induit une opération par automorphismes de groupes d'un groupe L

sur N avec $L \xrightarrow{\alpha} G_{red}$ une isogénie étale. On a d'autre part des homomorphismes de groupes henséliens obtenus par composition :

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}_{red} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "g^o"'] & \tilde{G} \arrow[r, "f^o"] & \tilde{H} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "h^o"'] & \tilde{G} \arrow[r, "f^o"] & \tilde{H} \end{tikzcd}$$

qui induisent des homomorphismes de groupes algébriques $L' \xrightarrow{u} H$ et $N \xrightarrow{v} H$ avec $L' \longrightarrow G_{red}$ isogénie étale.

On peut supposer $L = L'$ quitte à prendre une isogénie majorant L et L'.

De plus, on a sur $L \times N$ une structure de produit semi-direct grâce à l'opération de L sur N et l'homomorphisme φ de $L \times N$ dans H défini par $\varphi(\ell,n) = u(\ell)v(n)$ est un homomorphisme de groupes.

En effet, c'est vrai sur les hensélisés et un argument du type de 2.1.1 permet de conclure.

D'autre part, on a aussi une flèche $U \hookrightarrow L \times N$ qui est une immersion fermée et U est un sous-groupe distingué de $L \times N$. Soit $M = L \times N/U$ le groupe quotient. On a les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & G_{red} \times N \arrow[r] & G \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & L \times N \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

et comme $L \longrightarrow G_{red}$ est une isogénie étale, il en est de même de $M \to G$.

Pour achever la démonstration de 2.2.2, il suffit de prouver que φ s'annule sur U. Or $\tilde{\varphi}$ s'annule sur U et par fidélité φ s'annule sur U.

Ceci achève, en vertu de la remarque 2.4.1 iv la démonstration de 2.2.2 dans le cas général.

4.4 L'algébrisation (k parfait).

Soit (A, Δ, σ) un k-groupe hensélien.

Considérons $\theta^o : B^o \times \mathbf{A}^o_{red} \to \mathbf{A}^o$ avec $C^o = \operatorname{Ker} \theta^o$.

B^o et C^o sont des groupes infinitésimaux notés N et U.

De plus (3.1.1) il existe G lisse et connexe tel que $\mathbf{F}(G) = \mathbf{A}^o_{red}$.

Quitte à remplacer G par L avec $L \to G$ isogénie étale, on peut supposer que G opère sur N par automorphismes de groupes (4.2). On a donc un produit semi-direct $N \times G$ et une immersion fermée $0 \to U \to N \times G$, U étant un sous-groupe distingué de $N \times G$.

Soit alors $H = N \times G/U$. Je dis que $\mathbf{A}^o = \mathbf{F}(H)$.

Soit $D = O_{H,e}$, $\mathbf{A}' = \tilde{D}$. (A', Δ', σ') est un groupe hensélien et on a un homomorphisme

$$\mathbf{A}' \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbf{A}_{red} \underset{k}{\otimes} B$$

et $\operatorname{Ker} j^o = U = C^o$.

De plus j est fidèlement plat, car $N \times G \to H$ l'est.

On a donc $\mathbf{A}' = \operatorname{Ker}(i_1, i_2)$ avec

$$\mathbf{A}' \overset{j}{\hookrightarrow} A_{red} \otimes B = E \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} E \underset{\mathbf{A}'}{\otimes} E .$$

De plus $\mathbf{A}' \to E$ étant fini, $E \underset{\mathbf{A}'}{\otimes} E \simeq E \underset{\mathbf{A}'}{\tilde{\otimes}} E$ et donc $E \underset{\mathbf{A}'}{\otimes} E \simeq E \underset{k}{\tilde{\otimes}} C = E \underset{k}{\otimes} C \simeq E \underset{\mathbf{A}}{\tilde{\otimes}} E$. Mais, on a $\theta : \mathbf{A} \to E$ et $i_1 \circ \theta = i_2 \circ \theta$ donc θ se factorise par $\mathbf{A}'$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{\theta} & E \\ & {\scriptstyle u}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle j} & \\ & \mathbf{A}' & \end{array}$$

Enfin, comme $\operatorname{Ker} \theta^o = \operatorname{Ker} j^o$, u est un isomorphisme, donc $\mathbf{A}^o = \mathbf{F}(H)$.

4.5 L'algébrisation (cas général).

4.5.1 Rappels sur le foncteur de restriction de Weil.

Soit $S' \to S$ un morphisme de schémas, fini et localement libre, F' un foncteur contravariant de Sch/S' dans Ens.

On pose pour $X \in Sch/S$

$$R_{S'/S}F'(X) = F'(X \underset{S}{\times} S')$$

$R_{S'/S}F$ est un foncteur contravariant de Sch/S dans Ens.

Le foncteur covariant $R_{S'/S}$ (ou R) s'appelle la restriction de Weil et possède les propriétés suivantes :

1) R commute aux produits.

2) R est exact à gauche.

3) Si X' est un schéma sur S' tel que tout ensemble fini de points de X' soit contenu dans un ouvert affine, $R(X')$ est un schéma. Si X' est affine sur S', $R(X')$ est affine sur S. Si X' est de présentation finie sur S', $R(X')$ l'est aussi sur S.

4) Si $X \in Sch(S)$, on a une flèche canonique $X \to R\,(X \underset{S}{\times} S')$ qui est une immersion fermée.

Nous appliquerons ceci au cas où $S = \operatorname{spec} k$, $S' = \operatorname{spec} k'$, $k \to k'$ étant une extension de corps, finie.

Le foncteur $R = R_{k'/k}$ induit alors un certain nombre de foncteurs.

5) Tout d'abord, $R^\circ : Sch^\circ/k' \to Sch^\circ/k$.

En effet, si X' est muni d'un point rationnel $x' : \operatorname{spec} k' \to X'$, en vertu de la bijection

$$\mathrm{Hom}_{Sch/k}(\operatorname{spec} k\,,\, R(X')) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_{Sch/k'}(\operatorname{spec} k'\,,\, X')$$

$R(X')$ est muni d'un point rationnel x.

Si on pose $R^\circ(X',x') = (R(X'),x)$ on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}^\circ/k}((X,\xi)\,,\,R^\circ(X',x')) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}^\circ/k'}((X\underset{k}{\otimes}k'\,,\,\xi');(X',x'))\ .$$

6) De la même façon R induit un foncteur sur les k'-algèbres ; noté encore R :

$$R : k'\text{-alg} \to k\text{-alg}$$

par $R(\mathrm{spec}\ A') = \mathrm{spec}\ R(A')$.

On a alors

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(R(A'),B) \simeq \mathrm{Hom}_{k'\text{-alg}}(A',B\underset{k}{\otimes}k')\ .$$

7) Ceci permet d'obtenir un foncteur

$$R_\ell : L_{k'} \to L_k \quad \text{par} \quad R_\ell(A') = R(A')_m$$

où m est l'unique point k-rationnel de $R(A')$.

On a alors

$$\mathrm{Hom}_{L_k}(R_\ell(A'),B) \simeq \mathrm{Hom}_{L_{k'}}(A',B\underset{k}{\otimes}k')\ .$$

Notons que $B\underset{k}{\otimes}k'$ est dans $L_{k'}$ car $k \to k'$ est fini.

8) Enfin on a $R_h : H_{k'} \to H_k$ défini par $R_h(A') = R_\ell(A')^\sim$ et on a

$$\mathrm{Hom}_{H_k}(R_h(A'),B) \simeq \mathrm{Hom}_{H_{k'}}(A',B\underset{k}{\otimes}k')\ .$$

Ces foncteurs commutent aux sommes. De plus, les propriétés universelles montrent qu'ils commutent aux hensélisations et aux localisations :

si $(X',x') \in \mathrm{Sch}^\circ/k'$ on a, en posant $(X,x) = R^\circ(X',x')$

9) $$R_\ell(\mathcal{O}_{X',x'}) = \mathcal{O}_{X,x}\ .$$

De même si $A' \in L_{k'}$ on a

10) $$R_h(\tilde{A}') = \widetilde{R_\ell(A')}\ .$$

11) Remarquons enfin que si $A \in H_k$ on a canoniquement une flèche

$$R(A\underset{k}{\otimes}k') \to A \qquad \text{surjective (4)}$$

et cette flèche se factorise par $R_h(A \otimes_k k')$ en une flèche surjective.

4.5.2 L'algébrisation, cas général.

Nous sommes en mesure de prouver le théorème fondamental.

Théorème fondamental.

Le foncteur $F : \mathfrak{a}_k \to HGN_k$ est une équivalence de catégories.

Démonstration :

Vu les résultats de (2.2.2), (3.1.1), (4.3) et (4.4) il reste à prouver que si k est un corps (non parfait) et (A,Δ,σ) un k-groupe hensélien (HPF), (A,Δ,σ) est algébrisable.

1) Soit $\bar{k}$ une clôture parfaite de k et soit $(\bar{A},\bar{\Delta},\bar{\sigma})$ le $\bar{k}$-groupe hensélien obtenu par changement de base. En vertu de (4.4), ce groupe est algébrisable ; on a donc : $\bar{A}^o = F(\bar{G})$ où $\bar{G}$ est un $\bar{k}$-groupe algébrique connexe.

Ecrivons alors $\bar{k} = \varinjlim k_i$ avec k_i extension finie radicielle de k. Comme $\bar{G}$ est algébrique sur $\bar{k}$, en vertu de EGA IV.8, il provient pour i assez grand d'un groupe algébrique connexe sur k_i, soit G_i. De plus, quitte à augmenter i, on peut supposer que l'hensélisé $F(G_i)$ est le k_i-groupe hensélien $(A_i = A \otimes_k k_i, \Delta_i, \sigma_i)$.

2) Posant $k' = k_i$, on a la situation suivante : si $A' = A \otimes_k k'$, le k'-groupe hensélien (A',Δ',σ') est algébrisable : $A'^o = F(G')$ avec G' algébrique et connexe.

Soit $H = R(G')$. H est un k-groupe algébrique (4.5.1, 1 et 3). De plus, on a :

$$F(H) = R_h(F(G')) . \qquad (4.5.1, 10)$$

On a d'autre part une immersion fermée $A^o \hookrightarrow R_h(A'^o)$ correspondant à la surjection canonique

$$R_h(A') \to A . \qquad (4.5.1, 11)$$

De plus, cette flèche est un homomorphisme de groupes henséliens car dans la bijection

$$\mathrm{Hom}_{H_k}(R_h(A'),A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{H_{k'}}(A',A')$$

elle correspond à $\mathrm{id}_{A'}$.

Par extension des scalaires, on a une immersion fermée

$$A'^{o} \hookrightarrow R_h(A'^{o}) \otimes_k k'$$

c'est-à-dire

$$F(G') \overset{i}{\hookrightarrow} F(H) \otimes_k k' = F(H \otimes_k k') .$$

Posons $H' = H \otimes_k k'$. Soit H^{o} la composante neutre de H. On a $H'^{o} = H^{o} \otimes_k k'$ ($k \to k'$ est fini radiciel, donc un homéomorphisme universel). De plus, $F(H') = F(H'^{o})$.

On a donc $\qquad i : F(G') \hookrightarrow F(H'^{o})$.

En vertu de la pleine fidélité de F (2.2.2), il existe un k'-groupe algébrique connexe disons L' et des homomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} L' & \xrightarrow{j} & H'^{o} \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \\ G' & & \end{array}$$

avec $F(j) = i$ et u une isogénie étale. De plus, soit $N' = \mathrm{Ker}\ j$. On a $F(N') = \mathrm{Ker}\ i$ donc N' est un groupe fini étale. Quitte à remplacer L' par un groupe isogène (L'/N') on peut supposer que j est une immersion fermée.

On a donc sur k' la situation suivante : L' algébrique connexe, $j : L' \to H'^{o}$ immersion fermée et $H'^{o} = H^{o} \otimes_k k'$. Prouvons alors qu'il existe L, algébrique et connexe sur k tel que $L \otimes_k k' = L'$. Pour ceci, posons $k'' = k' \otimes_k k'$. Soit H''^{o}, l'image réciproque de H sur k'', L''_1 et L''_2 les images réciproques de L' sur k''. Il faut prouver que $L''_1 = L''_2$, ou aussi bien, que $L''_1 = L''_1 \cap L''_2$. On a alors une immersion fermée $L''_1 \cap L''_2 \xrightarrow{\alpha} L''_1$ mais, comme $F(L') = A'^{o}$ provient de A^{o} sur k, on a un isomorphisme $F(L''_1) \simeq F(L''_2) \simeq F(L''_1 \cap L''_2)$. Il en résulte que α est étale et comme L''_1 est connexe, α est un isomorphisme. Il en résulte par descente que $L' = L \otimes_k k'$.

Enfin, montrons que $F(L) = A^{o}$.

On a deux sous-groupes henséliens de $F(H^{o})$ à savoir $F(L)$ et A^{o} qui sur k' sont égaux à $A'^{o} = F(L')$. Ils sont égaux sur k par fidèle platitude, cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

[DG] DEMAZURE M. et GABRIEL P.
Groupes algébriques. Masson, North Holland.

[F] FERRAND D.
Monomorphismes et morphismes absolument plats. Bull. Soc. Math. France 100 (1972) p. 97-128.

[EGA] GROTHENDIECK A.
Eléments de géométrie algébrique. Paris, PUF (1960-1967) (I.H.E.S. N^{os} 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28).

[SGA] GROTHENDIECK A. et DEMAZURE M.
Séminaire de géométrie algébrique (SGA 3). Schémas en groupes. Springer Verlag.

[O] OORT.
Inventiones Mathematicae, 2, 79-80 (1966).

[P] PERRIN D.
Schémas en groupes quasi-compacts sur un corps. Publications mathématiques de l'Université Paris-Sud (1ère partie de ce manuscrit).

[R] RAYNAUD M.
Anneaux locaux henséliens. Springer Verlag (lectures notes N° 169).