UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

Nos 204 - 76.59

Representations Conformes Des Surfaces de Riemann Planes

Michel PARREAU

Mai 1975

L'objet du présent travail est de donner un exposé autonome et rapide des représentations conformes canoniques d'une surface de Riemann plane sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Cette question a fait l'objet de nombreux travaux, dont la bibliographie ne donne qu'une faible idée ; diverses méthodes peuvent être utilisées pour établir les théorèmes d'existence de représentations ayant les propriétés voulues (emploi de la fonction de Green et des mesures harmoniques, méthodes variationnelles de Garabedian-Schiffer, opérateurs principaux de Sario, etc). Pour arriver aussi vite que possible à l'essentiel, j'ai employé ici la méthode de la projection orthogonale introduite dans ces questions par Hilbert, grâce à laquelle on peut construire rapidement les différentielles des fonctions cherchées.

I - Calcul différentiel sur les surfaces de Riemann.

1. Surfaces de Riemann.

Une surface de Riemann est une variété analytique complexe de dimension 1 ; c'est-à-dire un espace topologique séparé convexe recouvert par des cartes (U_i, z_i) $z_j \circ z_i^{-1}$ étant holomorphe dans $z_i \; (U_i \cap U_j)$.

Si (U,z) est une carte telle que z se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{U}$ et $z(\overline{U}) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leqslant 1\}$, on dit que (U,z) est un <u>disque paramétrique</u>.

2. Formes différentielles sur une surface de Riemann.

Une <u>forme différentielle de degré</u> 1 ω est définie, dans chaque disque paramétrique (U,z) par une expression

$$\omega = a(z)dx + b(z)dy$$

a, b étant deux fonctions à valeurs réelles, et $x = \Re z$, $y = \Im z$; cette définition est faite de façon qu'il y ait invariance de l'expression quand on change de paramètre.

Une <u>forme différentielle de degré</u> 2 Ω est définie, dans chaque disque paramétrique (U,z) par une expression

$$\Omega = c(z)dx \wedge dy ,$$

où c est une fonction à valeurs complexes, avec invariance par changement de paramètre (ce qui signifie, si ζ est un nouveau paramètre, et $\Omega = \gamma(\zeta) d\xi \wedge d\eta$ dans (V,ζ) : $\Omega = c(z(\zeta)) \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} dx \wedge dy)$. On dira que ω (resp. Ω) est réelle, mesurable, intégrable, continue, de classe C^k , analytique réelle, si a et b

(resp. c) le sont. En outre, pour les formes de degré 2, le fait que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|^2 > 0$ implique qu'on peut définir $\Omega \geqslant 0$ par le fait que c est $\geqslant 0$; on a alors la notion de $|\Omega|$ (et Ω^+, Ω^- pour une forme Ω réelle).

3. Opérations, différentiation, forme adjointe.

On va définir les opérations sur des fonctions et des formes en se plaçant dans un disque paramétrique. Dans chaque cas on peut vérifier l'invariance par rapport au paramètre. Si f est une fonction, et $\omega = adx + bdy$, on pose $f\omega = (fa)dx + (fb)dy$. Si $\omega_k = a_k dx + b_k dy$, on pose $\omega_1 \wedge \omega_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx \wedge dy$

on a $$\omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2 .$$

Si f est de classe C^1, on pose $$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy .$$

Si $\omega = adx + bdy$, on pose $$d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

on a $$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega .$$

Outre ces opérations définies sur toute variété, la structure conforme permet d'introduire, pour les formes de degré 1, un opérateur $*$:

Si $\omega = adx + bdy$, on pose $*\omega = -bdx + ady$ (forme adjointe de ω)

on a $$**\omega = -\omega$$

$$*\omega_1 \wedge *\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$$

$$\omega_1 \wedge *\omega_2 = \omega_2 \wedge *\omega_1$$

$$\omega \wedge *\bar{\omega} = (|a|^2 + |b|^2) dx \wedge dy$$ est $\geqslant 0$, et n'est nulle que si $\omega = 0$.

4. Formes fermées, cofermées, exactes, harmoniques, analytiques.

Soit $\omega = adx + bdy$ de classe C^1. On dit que

. ω est fermée si $d\omega = 0$ $\left(\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}\right)$

. ω est exacte s'il existe f, de classe C^2, telle que $\omega = df$; une différentielle fermée est localement exacte

. ω est cofermée si $*\omega$ est fermée $\left(d{*\omega} = 0\ ,\ \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0\right)$

. ω est harmonique si elle est à la fois fermée et cofermée : si ω est harmonique, $\mathfrak{R}\omega$ et $\mathfrak{I}\omega$ le sont ; on en déduit que $a-ib$ est holomorphe, donc C^∞

. ω est pure si elle est de type $(1,0)$ c'est-à-dire de la forme $a(z)dz$ on doit donc avoir $b = ia$, soit encore $*\omega = -i\omega$

. ω est analytique si elle est fermée et pure, donc harmonique et pure alors $\omega = a(z)dz$, où a est une fonction holomorphe de z.

Si ω est harmonique, $\omega + i{*\omega}$ est analytique ; on a d'une seule manière $\omega = \varphi + \bar{\psi}$, avec φ et ψ analytiques $[\varphi = \frac{1}{2}(\omega + i{*\omega})\ ,\ \psi = \frac{1}{2}(\bar{\omega} + i{*\bar{\omega}})]$. Pour toute fonction harmonique h, dh est une différentielle harmonique, car $d * dh = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)dx \wedge dy$. Réciproquement, si ω est une différentielle harmonique, elle est localement la différentielle d'une fonction harmonique.

5. Intégration.

Si C est une courbe paramétrée, on peut définir $\int_C \omega$ pour toute ω définie dans un ouvert contenant C.

Si $\omega = df$, on a $\int_C \omega = f(b) - f(a)$, a et b étant les extrémités de C.

Si Ω est une différentielle de degré 2, et K un compact de S, on définit $\int_K \Omega$ (en supposant d'abord K ou $\mathrm{Supp}(\Omega)$ contenu dans un disque paramétrique (U,z) : alors $\int_K \Omega = \iint_{z(K\cap U)} c(x,y)dx\,dy$; on passe au cas général en utilisant une partition de l'unité).

Si $\Omega \geqslant 0$, et si G est un ouvert arbitraire d'une surface de Riemann S , on pose $\int_G \Omega = \sup\limits_{K\subset G} \int_K \Omega$; si $\int_G \Omega < +\infty$, on dit que Ω est intégrable dans G .

Pour Ω quelconque, on dit que Ω est intégrable dans G si $|\Omega|$ l'est ; alors $\Re\Omega$ et $\Im\Omega$ le sont, et on pose $\int_G \Omega = \lim\limits_{K\to G} \int_K \Omega$.

<u>Formule de Stokes</u>. Si G est un ouvert relativement compact de Ω , limité par un nombre fini de courbes simples analytiques par morceaux (on dit alors que G est <u>régulièrement immergé</u> dans S) , le bord ∂G de G est défini par la convention habituelle d'orientation, et on a pour toute forme différentielle ω de classe C^1 définie dans un ouvert contenant $\bar{G}$

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega .$$

On en déduit, plus généralement, si f est en outre une fonction de classe C^1,

$$\int_{\partial G} f\omega = \int_G df \wedge \omega + \int_G f\,d\omega .$$

En particulier, si f et g sont deux fonctions de classe C^2 définies dans un ouvert contenant $\bar{G}$

$$\int_{\partial G} f{*}dg = \int_G df \wedge dg + \int_G f\,d{*}dg$$

d'où la <u>formule de Green</u>

$$\int_{\partial G} (f{*}dg - g{*}df) = \int_G (f\,d{*}dg - g\,d{*}df) .$$

II – Espace de Hilbert des différentielles de carré intégrable. Décomposition de de Rham.

On note ${}^k\mathcal{E}^p$ (resp. ${}^k\mathcal{D}^p$) l'espace des formes différentielles de degré p et de classe C^k à support quelconque (resp. à support compact) sur S, on pose ${}^k\mathcal{E} = \bigoplus_{0\leqslant p\leqslant 2} {}^k\mathcal{E}^p$, ${}^k\mathcal{D} = \bigoplus_{0\leqslant p\leqslant 2} {}^k\mathcal{D}^p$, et on omet k s'il est égal à $+\infty$.

1. Différentielles de carré intégrable.

Sur l'espace $\mathcal{D}^1$ (ou un espace ${}^k\mathcal{D}^1$ quelconque), on peut introduire la norme

$$\|\omega\| = \left(\int \omega \wedge *\bar{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \iint (|a|^2 + |b|^2)\,dx\,dy\ ;$$

elle est associée au produit scalaire

$$(\omega_1|\omega_2) = \int \omega_1 \wedge *\bar{\omega}_2 = \iint (a_1\bar{a}_2 + b_1\bar{b}_2)\,dx\,dy\ .$$

On obtient ainsi un espace préhilbertien séparé, dont le complété s'identifie à l'espace $\mathfrak{q}$ des classes de formes différentielles localement intégrables et de carré intégrable (l'équivalence étant l'égalité presque partout).

Pour établir les résultats de de Rham dans le cas particulier étudié ici, il faut d'abord généraliser la notion de différentielle d'une fonction ou d'une forme, donc celle de forme fermée.

Proposition 1. *Pour que* $\omega \in \mathfrak{q} \cap {}^1\mathcal{E}^1$ *soit fermée, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toute forme* $*df$, *où* $f \in \mathcal{D}^0$.

Cela résulte de $(\omega|*df) = -\int \omega \wedge d\bar{f} = -\int_G \omega \wedge d\bar{f} = \int_{\partial G} \bar{f}\omega - \int_G \bar{f}\,d\omega = -\int \bar{f}\,d\omega$ si G est un ouvert contenant $\mathrm{Supp}(f)$.

Définition 1. *Une différentielle appartenant à* $\mathfrak{q}$ *est dite fermée au sens large si elle est orthogonale à* $*d\mathcal{D}$. L'ensemble de ces différentielles sera noté $\mathfrak{F}$.

De même, on dira que ω est <u>cofermée au sens large</u> si elle est orthogonale à $d\mathfrak{D}$.

<u>Définition 2. On dit qu'une différentielle</u> $\omega \in \mathfrak{q}$ <u>est exacte au sens large</u> (<u>resp. exacte au sens large et nulle à l'infini</u>) <u>si</u> $\omega \in \overline{d\mathfrak{E} \cap \mathfrak{q}}$ (<u>resp.</u> $\omega \in \overline{d\mathfrak{D} \cap \mathfrak{q}}$).

Notons qu'une différentielle exacte au sens large est fermée au sens large.

<u>Proposition 2. Si</u> ω <u>est de classe</u> C^1 <u>et est exacte au sens large, elle est exacte.</u>

Cela résulte du

<u>Lemme 1. Pour tout cycle</u> C <u>de</u> S, <u>la forme linéaire</u> $\omega \mapsto \int_C \omega$ <u>est continue dans le sous-espace</u> $\mathfrak{F} \cap {}^1\mathfrak{E}^1$.

Il suffit de se ramener au cas où C est une courbe simple fermée analytique par morceaux. En effet, soit G un ouvert annulaire contenant C, et divisé par C en G' et G'' tels que $\partial G' = C - C'$, $\partial G'' = C'' - C$; soit h une fonction C^∞ réelle comprise entre 0 et 1 nulle dans $S \setminus G$, égale à 1 dans G'' et au voisinage de C, à 0 au voisinage de C' ; on a $\int_C \omega = \int_{\partial G'} h\omega = \int_{G'} dh\ \omega$ pour toute différentielle fermée ω, donc $\int_C \omega = (\omega | \tau_C)$, où $\tau_C = *dh$ dans G, $= 0$ ailleurs. On en déduit la proposition 2, car toute forme exacte au sens large et de classe C^1 est fermée au sens habituel, et ses périodes sont nulles.

2. <u>Lemme de Weyl. Décomposition de de Rham.</u>

La décomposition de $\mathfrak{q}$ en sous espaces deux à deux orthogonaux repose essentiellement sur la

<u>Proposition</u> 3 (lemme de Weyl). <u>Si une forme différentielle</u> ω <u>de carré intégrable est à la fois fermée au sens large et cofermée au sens large, elle est [presque partout égale à] une différentielle harmonique.</u>

Ce résultat étant de caractère local, il suffit de l'établir dans $\Delta_1 = \{|z| < 1\}$. Nous raisonnerons dans $\mathbb{C}$, en supposant que les fonctions des différentielles considérées ont leurs supports contenus dans Δ_1 ; nous noterons Δ_r le disque $\{|z| < r\}$, et λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

La prop. 3 se démontre en établissant que ω est presque partout égale à sa régularisée par un opérateur convenable. Soit u_r une fonction réelle positive, de classe C^∞, de support contenu dans Δ_r, ne dépendant que de $|z|$, et telle que $\int u_r(z)\, d\lambda(z) = 1$. Nous définirons l'opérateur de régularisation M_r par

$$M_r f(z) = \int u_r(z-\zeta)\, f(\zeta) d\zeta \qquad \text{pour une fonction } f$$

$$M_r \omega = (M_r a)dx + (M_r b)dy \qquad \text{pour une différentielle } \omega = adx + bdy$$

$$M_r \Omega = (M_r c)dx \wedge dy \qquad \text{pour une différentielle } \Omega = cdx \wedge dy .$$

On vérifie que

$$M_r(*\omega) = *M_r\omega$$

$$M_r(df) = d(M_r f) \qquad \text{si } f \text{ est de classe } C^1$$

$$M_r(d\omega) = d(M_r\omega) \qquad \text{si } \omega \text{ est de classe } C^1$$

$$\int M_r f(z)\, g(z)\, d\lambda(z) = \int f(z)\, M_r g(z)\, d\lambda(z)$$

$$(M_r\omega_1 \mid \omega_2) = (\omega_1 \mid M_r\omega_2) .$$

Les fonctions ou formes $M_r f$, $M_r\omega$, $M_r\Omega$ sont de classe C^∞ ; si ω est fermée au sens large dans Δ_s, $M_r\omega$ est fermée dans Δ_{s-r} : en effet, si $f \in \mathfrak{D}$ et

$\operatorname{Supp}(f) \subset \Delta_{s-r}$, on a $\operatorname{Supp}(M_r f) \subset \Delta_s$. donc

$$(M_r\omega | *df) = (\omega | M_r *df) = (\omega | *dM_r f) = 0 .$$

Par conséquent, si ω est à la fois fermée et cofermée au sens large, $M_r\omega$ est harmonique dans Δ_{1-r}.

D'autre part, si ω est harmonique dans Δ_s, $M_r\omega$ est égale à ω dans Δ_{s-r} d'après le théorème de la moyenne. Enfin, il résulte du théorème de Lebesgue-Fubini que $M_r M_s = M_s M_r$.

Donc, si ω est à la fois fermée et cofermée au sens large dans Δ_1, on a

$$M_r\omega = M_s M_r \omega = M_r M_s \omega = M_s\omega \quad \text{dans} \quad \Delta_{1-r-s} .$$

Il en résulte que dans tout disque Δ_{r_0}, $M_r\omega$ est indépendant de r pour r assez petit, de sorte que $\lim\limits_{r\to 0} M_r\omega$ existe partout. D'autre part, $\|M_r\omega - \omega\|_{\Delta_{r_0}}$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0 ; on en déduit que $\lim\limits_{r\to 0} M_r\omega = \omega$ presque partout, donc que ω est presque partout égale à une différentielle harmonique.

<u>Théorème</u> 1 <u>(de Rham)</u>. $\mathcal{F}$ <u>est la somme directe orthogonale</u> $\mathcal{H} \oplus \overline{d\mathfrak{D}} \oplus \overline{*d\mathfrak{D}}$, <u>où</u> $\mathcal{H}$ <u>est l'espace des formes différentielles harmoniques de carré intégrable.</u>

Ou encore :

<u>Corollaire</u> : $\mathcal{H}$ <u>et</u> $\overline{d\mathfrak{D}}$ <u>sont supplémentaires orthogonaux dans</u> $\mathcal{F}$.

En effet, $\mathcal{H} = (\overline{*d\mathfrak{D}})^{\perp} \cap (\overline{d\mathfrak{D}})^{\perp} = (\overline{*d\mathfrak{D}} + \overline{d\mathfrak{D}})^{\perp}$.

En fait, nous n'aurons pas besoin de la décomposition précédente, mais d'une autre très voisine qu'on obtient en considérant dans $\mathcal{H}$ le sous espace orthogonal à toutes les différentielles exactes. En effet, si $\mathcal{H}_e = \mathcal{H} \cap d\mathcal{E}$, et si $\mathcal{H}_0$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{H}_e$ dans $\mathcal{H}$, on a

$$\mathfrak{q} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_e \oplus \overline{d\mathfrak{D}} + *\overline{d\mathfrak{D}} .$$

On notera que $\mathcal{H}_e \oplus \overline{d\mathfrak{D}}$ n'est autre que l'espace $\overline{d\mathcal{E} \cap \mathfrak{q}}$ des différentielles de carré intégrable exactes au sens large. En effet, il est contenu dedans, et d'autre part $\mathfrak{F} \supset \overline{d\mathcal{E} \cap \mathfrak{q}} \supset \overline{d\mathfrak{D}}$, donc $\overline{d\mathcal{E} \cap \mathfrak{q}} = \mathcal{H} \cap (\overline{d\mathcal{E} \cap \mathfrak{q}}) \oplus \overline{d\mathfrak{D}}$.

Or, $\mathcal{H} \cap (\overline{d\mathcal{E} \cap \mathfrak{q}}) = \mathcal{H}_e$, d'après la prop. 2 .

On a donc

<u>Théorème</u> 2. $\mathfrak{q}$ <u>est la somme directe orthogonale</u> $\mathcal{H}_0 \oplus \overline{d\mathcal{E} \cap \mathfrak{q}} \oplus *\overline{d\mathfrak{D}}$.

III - <u>Construction de formes différentielles harmoniques et analytiques ayant des singularités et un comportement à la frontière imposés.</u>

Pour construire les fonctions fournissant les représentations conformes canoniques que nous cherchons (ou, ce qui revient au même, leurs différentielles) il faut obtenir à la fois des propriétés concernant les singularités (pôles de f ou de $\log f$), et un comportement à la frontière ($\Re f$, $\Im f$, $|f|$, $\arg f$ constants sur les composantes frontières) correspondant au problème posé.

Une telle construction se fera par la méthode de la projection orthogonale.

1. <u>Différentielles avec singularités.</u>

Soit V un disque paramétrique de centre a (c'est-à-dire un disque paramétrique (V,z) tel que $z(a) = 0$) et soit σ une différentielle harmonique ou analytique régulière dans $V - \{a\}$, et ayant une singularité en a (on pourra supposer par exemple que σ se réduit à sa partie singulière par rapport à la variable z) . On dit qu'une différentielle ω sur $S - \{a\}$ a la singularité σ en a si $\omega - \sigma$ se prolonge en une différentielle régulière dans V (on dit que a est une singularité apparente pour $\omega-\sigma$) .

Si σ est une singularité analytique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} dz$, le coefficient a_1 de $\frac{dz}{z}$ est appelé le résidu de σ (ou de ω) au point a ; il est indépendant du choix du paramètre. Pour toute différentielle fermée ω ayant un nombre fini de singularités analytiques a_j dans un ouvert G régulièrement immergé dans S , on a

$$\int_{\partial G} \omega = 2i\pi \sum_j \text{Rés}_{a_j}(\omega)$$

si aucun des points a_j n'est sur ∂G .

2. Théorème d'existence.

Soient U et V deux disques paramétriques concentriques, tels par exemple que $z(U) = \Delta_2$, $z(V) = \Delta_1$; soit σ_o une différentielle analytique régulière dans $U \cap \complement E$, où E est un ensemble fini de points de V , et telle que la somme des résidus de σ_o soit nulle. Nous nous proposons de construire des différentielles harmoniques ou analytiques ayant les singularités de σ_o , et en outre un comportement à la frontière qui sera précisé plus loin.

Soit U une fonction de classe C^∞ réelle, comprise entre 0 et 1, égale à 1 dans V et à 0 dans $\complement U$; soit K un compact connexe contenu dans V et contenant E . Il existe dans $V \cap \complement K$ une primitive uniforme s_o de σ_o . Posons $s = us_o$ et

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_o & \text{dans} \quad V \\ ds & \text{dans} \quad \complement K \end{cases}$$

σ est une différentielle fermée dans $\complement E$, exacte dans $\complement K$, nulle dans $\complement U$. Comme elle est analytique régulière dans $V \cap \complement E$, on a dans cet ensemble $\sigma - i * \sigma = 0$. On peut alors prolonger $\sigma - i * \sigma$ à S tout entière en la prenant nulle dans V ; si on applique le th. 2 du § II à ce prolongement, on obtient

$$\sigma - i * \sigma = \eta + \varphi + *\psi$$

où $\eta \in \mathcal{H}_0$, $\varphi \in \overline{d\mathcal{E} \cap \mathfrak{q}}$, $\psi \in \overline{d\mathfrak{D}}$.

La différentielle

$$\omega = \sigma - \varphi = i * \sigma + \eta + *\psi$$

est fermée et cofermée au sens large dans $\complement E$; elle est donc harmonique régulière dans $\complement E$; en outre, dans V $\omega - \sigma = -\varphi = \eta + *\psi$ est harmonique régulière, donc ω a aux points de E les mêmes singularités que σ . Le raisonnement précédent montre aussi que φ et ψ sont de classe C^∞ .

Enfin, ω est orthogonale à toute différentielle exacte de carré intégrable qui s'annule au voisinage de E (par exemple dans V) . En effet, le produit scalaire de ω et d'une telle différentielle est bien défini, puisque σ , donc ω , est de carré intégrable hors de tout voisinage de E . De plus, si $df \in \mathfrak{q}$, avec $f = 0$ dans V ,

$$(df|\omega) = (df|i*\sigma) + (df|\eta) + (df|*\psi) = -i(df|*\sigma)$$

d'après la prop. 1 et la définition de $\mathcal{H}_0$. Or

$$(df|*\sigma) = -\int_{U\setminus V} df \wedge ds = -\int_{\partial U} f ds + \int_{\partial V} f ds = 0$$

puisque $f = 0$ sur ∂V et $s = 0$ sur ∂U .

Ce résultat peut se traduire, d'une manière plus générale en apparence, comme suit : <u>pour toute différentielle exacte et de carré intégrable au voisinage de la frontière</u> (c'est à dire hors d'un compact), <u>on a, pour tout ouvert régulièrement immergé</u> G <u>tel que</u> df <u>soit définie dans</u> $\complement G$

$$(1) \qquad (df|\omega)_{S\setminus\bar{G}} + \int_{\partial G} f*\bar{\omega} = 0 \ .$$

Remarquons tout d'abord que le premier membre de (1) ne dépend pas de G, puisque ω est harmonique exacte dans $\complement G$. En effet, si $\bar{G}_1 \subset G_2$, on a alors

$$(df|\omega)_{G_2\setminus\bar{G}_1} = \int_{\partial G_2} f*\bar{\omega} - \int_{\partial G_1} f*\bar{\omega}$$

d'où

$$(df|\omega)_{S\setminus\bar{G}_1} - (df|\omega)_{S\setminus\bar{G}_2} = \int_{\partial G_2} f*\bar{\omega} - \int_{\partial G_1} f*\bar{\omega} \ .$$

Comme $\int_{\partial G} *\bar{\omega} = 0$ du fait que $*\omega$ a un nombre fini de singularités analytiques dans G, dont la somme des résidus est nulle, nous pouvons poser $A(df,\omega) = (df|\omega)_{S\setminus\bar{G}} + \int_{\partial G} f*\bar{\omega}$. On remarquera que si S est une surface à bord, et si f est définie sur ∂S, $A(df,\omega) = \int_{\partial S} f*\bar{\omega}$. Dans le cas général, on voit aisément que $A(df,\omega)$ ne dépend que des valeurs de f dans un voisinage de la frontière.

Pour montrer l'équivalence de (1) avec la propriété d'orthogonalité établie plus haut, il suffit alors de remarquer que (1) implique évidemment cette propriété (prendre $G = V$), et que d'autre part, si $G \supset \bar{U}$, $A(df,\omega)$ ne change pas si on remplace f par $(1-u)f$, qui s'annule dans V et pour laquelle (1) se réduit alors, pour $G = V$, à la propriété d'orthogonalité indiquée.

En résumé :

Théorème 3. Il existe une différentielle ω et une seule ayant les propriétés suivantes :

1°) ω est harmonique dans $\complement E$, et a les mêmes singularités que σ aux points de E ;

2°) $\omega - \sigma$ est exacte dans S et harmonique dans V ;

3°) ω est exacte dans $\complement K$ et de carré intégrable dans le complémentaire d'un voisinage quelconque de E ;

4°) ω est orthogonale à toute différentielle exacte de carré intégrable et nulle au voisinage de E ; plus généralement, pour toute différentielle exacte et de carré intégrable au voisinage de la frontière, on a

$$A(df,\omega) = (df|\omega)_{S\setminus\bar{G}} + \int_{\partial G} f*\bar{\omega} = 0 .$$

L'unicité résulte immédiatement de cette dernière propriété, car si ω_1 et ω_2 satisfont les conditions imposées, et si $\omega_1 - \omega_2 = df$, on a

$$\|\omega_1 - \omega_2\|^2 = A(df, \omega_1 - \omega_2) = 0 .$$

Remarques : 1°) Si tous les résidus de σ sont nuls, cette différentielle est exacte dans $V \cap \complement E$, donc ω est exacte.

2°) En reprenant la démonstration du lemme 1, on voit que si C est une courbe fermée simple qui divise S en deux parties S', S'' (avec $S' \supset G'$, $S'' \supset G''$) on peut prendre $h = 0$ dans $S' \cap \complement G'$, $h = 1$ dans S'', donc $\tau_c = *dh$, où h est une fonction C^∞ dans S. Si C ne contient aucun point de E, on a donc $(*\omega|\tau_c) = (*\omega|*dh) = (\omega|dh) = 0$, de sorte que $\int_C *\omega = 0$. Par conséquent, $*\omega$ a une période nulle sur tout cycle diviseur, autrement dit est <u>semi-exacte</u>.

3. <u>Différentielles analytiques associées à</u> ω.

Si ω est la différentielle harmonique du th. 3, $\mathfrak{R}\omega$ et $\mathfrak{I}\omega$ sont également des différentielles harmoniques, ayant pour singularités $\mathfrak{R}\sigma$ et $\mathfrak{I}\sigma$, et possédant des propriétés analogues (en prenant f réelle, puis quelconque, on voit que

$$(df|\mathfrak{R}\omega)_{S\setminus\bar{G}} + \int_{\partial G} f{*}\mathfrak{R}\omega = 0\ ,\ (df|\mathfrak{I}\omega)_{S\setminus\bar{G}} + \int_{\partial G} f{*}\mathfrak{I}\omega = 0)\ .$$

Pour obtenir à partir de ω des différentielles analytiques ayant des singularités σ, il suffit de poser

$$\alpha = \mathfrak{R}\omega + i{*}\mathfrak{R}\omega$$

$$\beta = -{*}\mathfrak{I}\omega + i\,\mathfrak{I}\omega\ .$$

<u>Théorème</u> 3bis. <u>Les différentielles</u> α <u>et</u> β <u>ont les propriétés suivantes</u> :

1°) <u>elles sont analytiques régulières dans</u> $\complement E$, <u>et ont aux points de</u> E <u>les mêmes singularités que</u> σ ;

2°) $\alpha-\sigma$ (resp. $\beta-\sigma$) <u>est analytique dans</u> V <u>et</u> $\mathfrak{R}(\alpha-\sigma)$ [resp. $\mathfrak{I}(\beta-\sigma)$] <u>est exacte dans</u> S ;

3°) $\mathfrak{R}\alpha$ (resp. $\mathfrak{I}\beta$) <u>est exacte dans</u> $\complement K$ <u>et de carré intégrable hors de tout voisinage de</u> E ;

4°) $\mathfrak{R}\alpha$ (resp. $\mathfrak{I}\beta$) <u>est orthogonale à toute différentielle exacte de carré intégrable nulle au voisinage de</u> E ; <u>plus généralement, pour toute différentielle exacte de carré intégrable au voisinage de la frontière, on a</u>

$$(df|\mathfrak{R}\alpha)_{S\setminus\bar{G}} + \int_{\partial G} f\,\mathfrak{I}\alpha = 0\quad (\text{resp. } (df|\mathfrak{I}\beta)_{S\setminus\bar{G}} - \int_{\partial G} f\,\mathfrak{R}\beta = 0)\ .$$

Remarques : 1°) Si df est une différentielle holomorphe au voisinage de la frontière, on a $(df|\alpha)_{S\setminus\bar{G}} = 2(df|\mathfrak{R}\alpha)_{S\setminus\bar{G}}$ pour G assez grand, et la même chose pour β ; il vient alors $(df|\alpha)_{S\setminus\bar{G}} = -2\int_{\partial G} f\,\mathfrak{I}\alpha$, $(df|\beta)_{S\setminus\bar{G}} = 2\int_{\partial G} f\mathfrak{R}\beta$.

2°) On a $\alpha+\beta = \omega+i*\omega$ et $\alpha-\beta = \bar{\omega}+i*\bar{\omega}$; par conséquent, si $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\delta = \frac{\alpha-\beta}{2}$, γ et $\bar{\delta}$ sont respectivement la partie analytique et la partie antianalytique de ω ; γ a encore les singularités de σ , tandis que δ est analytique régulière sur S .

3°) Enfin $\mathfrak{I}\alpha$ et $\mathfrak{R}\beta$, donc α et β , sont semi-exactes dans $\complement K$.

4. Propriétés extrémales de α , β , γ , δ (cas plan).

Nous appellerons surface plane (ou de genre 0) toute surface S pour laquelle toute courbe fermée simple tracée sur S divise S (c'est à dire a un complémentaire non connexe). Toute surface homéomorphe à un ouvert de $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est plane.

Sur une surface plane, toute différentielle semi-exacte est exacte. En particulier, si la surface S considérée est plane, les différentielles $*\omega$, α , β , γ , δ sont exactes.

Nous allons montrer que dans ce cas α et β sont caractérisées par des propriétés d'extremum, dans l'ensemble $\mathcal{A}_\sigma$ des différentielles analytiques régulières dans $\complement E$, exactes dans $\complement K$, de carré intégrable hors de tout voisinage de E , et ayant aux points de E les mêmes singularités que σ .

On a vu que si φ et ψ sont exactes, harmoniques, de carré intégrable au voisinage de la frontière et ont un nombre fini de singularités analytiques dont la somme des résidus est nulle, l'expression

$$\mathbf{A}(\varphi,\psi) = (\varphi|\psi)_{S\setminus\bar{G}} + \int_{\partial G} g*\bar{\psi} ,$$

où g est une primitive de φ au voisinage de la frontière, est indépendante de G pour G assez grand ; si φ et ψ sont analytiques au voisinage de la frontière, on a encore

$$\mathbf{A}(\varphi,\psi) = (\varphi|\psi)_{S\setminus\bar{G}} + i\int_{\partial G} g\bar{\psi}$$

et dans ce cas $\mathbf{A}(\psi,\varphi) = \overline{\mathbf{A}(\varphi,\psi)}$ car si h est une primitive de ψ , $\int_{\partial G} g d\bar{h} + \bar{h} dg = 0$. Nous rappellerons que $\mathbf{A}(\varphi,\psi) = (\varphi|\psi)$ si φ et ψ sont régulières et exactes dans S tout entière. Enfin, pour $\psi = \varphi$, nous emploierons la notation $\mathbf{A}(\varphi)$ à la place de $\mathbf{A}(\varphi,\varphi)$.

Soit alors $\theta \in \mathcal{A}_\sigma$, et soit f une primitive de θ dans $\complement K$. On a

$$\begin{aligned}
\|\theta-\alpha\|^2 &= \mathbf{A}(\theta-\alpha) = \mathbf{A}(\theta) + \mathbf{A}(\alpha) - 2\,\mathfrak{R}\mathbf{A}(\theta,\alpha) \\
&= \mathbf{A}(\theta) + \mathbf{A}(\alpha) - 2\,\mathfrak{R}[(df|\alpha)_{S\setminus\bar{G}} + i\int_{\partial G} f\bar{\alpha}] \\
&= \mathbf{A}(\theta) + \mathbf{A}(\alpha) + 2\,\mathfrak{R}[\int_{\partial G} f\ 2\,\mathfrak{I}\alpha - i\bar{\alpha}] \\
&= \mathbf{A}(\theta) + \mathbf{A}(\alpha) + 2\,\mathfrak{I}(\int_{\partial G} f\alpha) .
\end{aligned}$$

Or, l'expression $\int_{\partial G} f\alpha$ est indépendante de G , pourvu que G contienne K ; elle est donc égale à $\int_{\partial V} f\alpha$, qu'on peut encore écrire $\int_{\partial V} f\sigma - \int_{\partial V} w\sigma$, en appelant w une primitive de α dans $\complement K$, et en remarquant que $\int_{\partial V} (f-w)(\alpha-\sigma) = 0$, puisque $f-w$ se prolonge en une fonction holomorphe dans V , et que $\int_{\partial V} w\alpha = \int_{\partial V} wdw = 0$.

En posant

$$B(\theta) = 2\,\mathfrak{I}\,(\int_{\partial V} f\sigma)$$

on peut écrire

$$\|\theta-\alpha\|^2 = \mathbf{A}(\theta) + \mathbf{A}(\alpha) + B(\theta) - B(\alpha) \ ;$$

si $\theta = \alpha$, on obtient $\mathbf{A}(\alpha) = 0$, de sorte que

(1) $$\|\theta-\alpha\|^2 = \mathbf{A}(\theta) + B(\theta) - B(\alpha) \ .$$

On en déduit que α est l'unique différentielle appartenant à $\mathcal{A}_\sigma$ qui minimise l'expression $\mathbf{A}(\theta) + B(\theta)$.

D'après sa définition, la quantité $B(\theta)$ ne dépend que du comportement de θ au voisinage des singularités ; de façon précise, si nous continuons (abusivement) à noter $f-s$ la primitive de $\theta-\sigma$ dans V qui coïncide avec cette fonction dans $V \cap \complement K$, nous avons

$$B(\theta) = 4\pi\,\mathfrak{R}\,[\sum_{a\in E} \text{Rés}_a((f-s)\sigma)] \ .$$

On peut faire pour β un calcul analogue, mais il est plus simple de remarquer que si S est plane, $i\beta$ est la différentielle qui joue le rôle de α pour la singularité $i\sigma$; en remplaçant θ par $i\theta$, α par $i\beta$, σ par $i\sigma$, on a donc

(2) $$\|\theta-\beta\|^2 = \mathbf{A}(\theta) - B(\theta) + B(\beta) \ ,$$

de sorte que β est l'unique différentielle de $\mathcal{A}_\sigma$ qui minimise $\mathbf{A}(\theta) - B(\theta)$.

Par addition membre à membre de (1) et (2), on obtient

$$\|\theta-\gamma\|^2 + \|\delta\|^2 = \mathbf{A}(\theta) - B(\delta) \ ;$$

on vérifie aisément que $B(\delta) = -2\,\|\delta\|^2$, ce qui donne

(3) $$\|\theta-\gamma\|^2 = \mathbf{A}(\theta) + \|\delta\|^2 \ ;$$

donc γ réalise le minimum de $A(\theta)$ dans $\mathcal{A}_\sigma$.

Enfin, en retranchant membre à membre (1) de (2), il vient

$$\mathfrak{R}(\theta-\gamma|\delta) = -\tfrac{1}{2}\, B(\theta-\gamma) ,$$

ce qu'on peut formuler de la façon suivante :

pour toute différentielle analytique régulière φ exacte et de carré intégrable sur S, on a

$$\mathfrak{R}(\varphi|\delta) = -\tfrac{1}{2}\, B(\varphi) . \tag{4}$$

On a donc :
$$\mathfrak{R}(\varphi|\delta) = -2\pi\, \mathfrak{R} \sum_{a\in E} \text{Rés}_a(f\sigma) ,$$

d'où (en appliquant aussi cette formule à $i\varphi$)

$$(\varphi|\delta) = -2\pi \sum_{a\in E} \text{Rés}_a(f\sigma) . \tag{5}$$

5. Convergence de α et β dans l'approximation de S par des ouverts connexes régulièrement immergés.

Pour tout ouvert connexe G régulièrement immergé dans S et contenant $\bar{U}$, nous pouvons construire des différentielles α_G, β_G relatives à la singularité σ et à la surface de Riemann G. Nous noterons A_G la fonction A relative à G ; si $\theta = df$ est encore définie sur ∂G, on a $A_G(\theta) = i \int_{\partial G} f\bar{\theta}$.

Les relations (1) et (2) permettent d'établir la convergence de α_G et β_G lorsque G tend vers S. En effet, pour $G' \supset \bar{G}$

$$\|\alpha_{G'} - \alpha_G\|^2 = A_G(\alpha_{G'}) + B(\alpha_{G'}) - B(\alpha_G) ;$$

d'autre part

$$A_G(\alpha_{G'}) = A_G(\alpha_{G'}) - A_{G'}(\alpha_{G'}) = -\|\alpha_{G'}\|^2_{G' - \bar{G}} \leqslant 0 .$$

Donc
$$B(\alpha_{G'}) - B(\alpha_G) \geqslant \|\alpha_{G'} - \alpha_G\|^2_G \geqslant 0 .$$

De même $$B(\beta_G) - B(\beta_{G'}) \geqslant \|\beta_{G'}-\beta_G\|_G^2 \geqslant 0 .$$

Enfin $$B(\beta_G) - B(\alpha_G) = \|\beta_G-\alpha_G\|_G^2 \geqslant 0 .$$

On en déduit que $B(\alpha_G)$ croît, que $B(\beta_G)$ décroît, et que les deux ont des limites finie lorsque G décrit l'ensemble filtrant croissant des ouverts connexes régulièrement immergés de S ; il en résulte que $\lim\limits_{G\to S} \|\alpha_{G'}-\alpha_G\|_G = 0$, $\lim\limits_{G\to S} \|\beta_{G'}-\beta_G\|_G = 0$.

Ces relations impliquent la convergence en norme, et uniformément sur tout compact, de α_G et de β_G vers des limites α_S et β_S , qui ne sont autre que les différentielles α et β déjà obtenues. En effet, elles ont les mêmes singularités, sont exactes dans $\complement K$, et possèdent les mêmes propriétés d'orthogonalité. Par exemple, pour toute différentielle df exacte et de carré intégrable au voisinage de la frontière, et pour G_o assez grand, on a

$$(df\,|\,\mathfrak{R}\,\alpha_S)_{S\setminus\bar{G}_o} = \lim_{G\to S} (df\,|\,\mathfrak{R}\,\alpha_S)_{G\setminus\bar{G}_o} = \lim_{G\to S} (df\,|\,\mathfrak{R}\,\alpha_G)_{G\setminus\bar{G}_o} + \lim_{G\to S} (df\,|\,\mathfrak{R}\,\alpha_S - \mathfrak{R}\,\alpha_G)_{G\setminus\bar{G}_o} .$$

Or, le dernier terme est nul, puisque $\|\mathfrak{R}\,\alpha_S - \mathfrak{R}\alpha_G\|_{G\setminus\bar{G}_o} \leqslant \|\alpha_S-\alpha_G\|_G \to 0$.

D'autre part, $\displaystyle\int_{\partial G_o} f\,\mathfrak{I}\,\alpha_S = \lim_{G\to S} \int_{\partial G_o} f\,\mathfrak{I}\,\alpha_G$; donc

$$A(df\,,\mathfrak{R}\alpha_S) = \lim_{G\to S} A_G(df\,|\,\mathfrak{R}\,\alpha_G) = 0 .$$

IV - Représentation conforme d'une surface de Riemann plane S sur des domaines à fentes parallèles.

1. Représentation conforme de S sur un domaine à fentes horizontales.

Soit $a \in S$, et (U,z) un disque paramétrique de centre a $(z(a) = 0)$.

On applique les résultats du §III à la singularité $\sigma_o = -\dfrac{dz}{z^2} = d(\frac{1}{z})$; on peut prendre $K = E = \{a\}$; la différentielle α obtenue est exacte dans $\complement\{a\}$; une primitive w de α est méromorphe dans S , holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, et possède en a un pôle simple de partie singulière $\frac{1}{z}$. Pour achever de la déterminer, on supposera que $\lim\limits_{p\to a}\ (w(p) - \frac{1}{z(p)}) = 0$.

Nous allons voir que la fonction w est univalente (c'est à dire injective) dans S , et que $\tilde{\mathbb{C}}\setminus w(S)$ est la réunion de segments compacts parallèles à l'axe réel, dont certains peuvent se réduire à des points. La démonstration de ces deux propriétés repose sur le

<u>Lemme 2. Soit D une demi-bande de $\mathbb{C}$ (de largeur finie ou infinie) parallèle à l'axe réel. Le point a est adhérent à toute composante connexe de $w^{-1}(D)$</u> .

Supposons que $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{R} z > \lambda\ ,\ \mu < \mathfrak{J} z < \nu\}$. Posons $u = \mathfrak{R} w$, $v = \mathfrak{J} w$, et

$$f(p) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\lambda - u(p)} + \dfrac{1}{\mu - v(p)} + \dfrac{1}{v(p)-\nu}\right) & \text{pour} \quad p \in G \\ 0 & \text{pour} \quad p \notin G \end{cases}$$

Si $a \notin \bar{G}$, f est une fonction C^∞ nulle au voisinage de a , et $df \in \mathfrak{q}$; on a donc $(df|du) = 0$. Mais

$$(df|du) = \int df \wedge * du = \int_G \frac{f du \wedge dv}{(\lambda-u)^2} > 0 \text{ , d'où contradiction.}$$

On a donc $a \in \bar{G}$.

Supposons alors que $w(p) = w(q) = \lambda + i\mu$, avec $w'(p) \neq 0$, $w'(q) \neq 0$. D'après le lemme 2, les ouverts $G_1 = \{u > \lambda\ ,\ v > \mu\}$, $G_2 = \{u < \lambda\ ,\ v > \mu\}$, $G_3 = \{u < \lambda\ ,\ v < \mu\}$, $G_4 = \{u > \lambda\ ,\ v < \mu\}$ sont connexes, puisqu'ils le sont au voisinage de a . Il existe alors une courbe fermée simple C contenue dans $G_1 \cup G_3 \cup \{p,q\}$. Si $S\setminus C$ est la réunion de deux ouverts disjoints S' et S'' , avec $a \in S'$, G_2 et G_4 rencontrent S' , donc sont contenus dans S' ; mais c'est impossible, car au voisinage de p ou q C sépare G_2 de G_4 . Ainsi w est univalente dans $S\setminus\{p : w'(p) \neq 0\}$; elle l'est alors dans S d'après les propriétés locales des fonctions holomorphes.

Le lemme 2 montre également que toute composante de $\tilde{\mathbb{C}}\setminus w(S)$ est portée par une parallèle à l'axe réel. Sinon, il existerait des nombres λ , μ , ν tels que $w(S) \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re z < \lambda , \mu < \Im z < \nu\}$ ait une composante relativement compacte, donc n'ayant pas $\infty = w(a)$ sur sa frontière.

En résumé

<u>Théorème 4. Toute surface de Riemann plane peut être représentée de façon bijective et conforme sur un ouvert de</u> $\tilde{\mathbb{C}}$ <u>dont le complémentaire se compose de segments compacts parallèles à l'axe réel.</u>

<u>Corollaire. Pour une surface de Riemann</u> S , <u>les trois propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) <u>toute courbe fermée simple</u> C <u>contenue dans</u> S <u>divise</u> S ;

(b) S <u>est homéomorphe à un ouvert de</u> $\tilde{\mathbb{C}}$;

(c) S <u>est analytiquement isomorphe à un ouvert de</u> $\tilde{\mathbb{C}}$.

2. <u>Propriété extrémale de la fonction</u> w .

On a vu au §III, n° 4 que dw est l'unique différentielle de $\mathcal{A}_\sigma$ qui minimise $A(\theta) + B(\theta)$. Ici, $\mathcal{A}_\sigma$ est l'ensemble des différentielles df des fonctions méromorphes dans S , régulières dans $\complement\{a\}$, ayant en a un pôle de partie singulière $\frac{1}{z}$ et d'intégrale de Dirichlet finie dans le complémentaire d'un voisinage de a. Si $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=o}^{\infty} c_n(f).z^n$, on a

$$B(df) = -4\pi\,\mathfrak{R}[\text{Rés}_a((f(z)-\tfrac{1}{z})\tfrac{dz}{z^2})] = -4\pi\,\mathfrak{R}c_1(f)\ ;$$

donc dw minimise $A(df) - 4\pi\,\mathfrak{R}c_1(f)$.

En outre, si f est <u>univalente</u> dans S (*), on a $A(df) \leqslant 0$, car $A(df) = \lim_{G\to S} (i\int_{\partial G} f\overline{df})$, et $-\frac{i}{2}\int_{\partial G} f\overline{df}$ est l'aire de $\tilde{\mathbb{C}}\setminus f(G)$. On sait d'autre part que $A(dw) = 0$. Par conséquent

$$-4\pi\,\mathfrak{R}c_1(f) \geqslant A(df) - 4\pi\,\mathfrak{R}c_1(f) \geqslant -4\pi\,\mathfrak{R}c_1(w)\text{ , et s'il y a égalité}$$

$$\|df-dw\|^2 = A(df) - 4\pi\,\mathfrak{R}c_1(f) + 4\pi\,\mathfrak{R}c_1(w) = 0\text{ , donc } f = w+c^{te}.$$

D'où la

<u>Proposition. Parmi toutes les fonctions méromorphes</u> f <u>univalentes dans</u> S <u>et ayant en</u> a <u>un pôle de partie singulière</u> $\frac{1}{z}$, w <u>est la seule (à une constante additive près) qui rende maxima</u> $\mathfrak{R}c_1(f)$.

<u>Remarque</u> : La propriété $A(dw) = 0$ exprime que <u>l'aire du complémentaire de</u> $w(S)$ <u>est nulle</u>. On obtient ainsi une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'un ensemble de segments horizontaux soit le complémentaire de l'image d'une surface de Riemann par une fonction telle que w.

3. <u>Autre démonstration du théorème</u> 4.

Nous supposerons d'abord que S est une surface de Riemann à bord compacte. Soit $\tilde{S}$ la surface conjuguée de S (même variété topologique sous-jacente, les cartes de $\tilde{S}$ étant $(U_i, \bar{z}_i)$, ou, ce qui revient au même, les fonctions

---

(*) Si f est univalente, la condition portant sur l'intégrale de Dirichlet est toujours remplie, car l'image du complémentaire d'un voisinage de a est un ensemble borné et $\|df\|^2_{S\setminus\bar{V}}$ est le double de l'aire de $f(S\setminus\bar{V})$.

analytiques sur $\tilde{S}$ étant les conjuguées des fonctions analytiques sur S). On appelle double de Schottky de S la surface compacte $\hat{S}$ obtenue en raccordant S et $\tilde{S}$ le long de ∂S, identifié point par point à $\partial\tilde{S}$.

Si $a \in S$, et si $\tilde{a}$ est le symétrique de a dans $\tilde{S}$, soit ω la différentielle harmonique sur $\hat{S}$ ayant la singularité $d(\frac{1}{z})$ en a, la singularité $d(\frac{1}{\tilde{z}})$ en $\tilde{a}$ (cf. théorème 3), et soit u une primitive de $\mathcal{R}\omega$ dans $\hat{S}\setminus\{a,\tilde{a}\}$. La fonction $p \mapsto u(p) - u(\tilde{p})$ se prolonge en une fonction harmonique régulière sur $\hat{S}$, donc constante ; comme elle s'annule sur ∂S, elle est égale à 0. On a donc $u(p) = u(\tilde{p})$, ce qui implique qu'on a $*du = 0$ le long de ∂S. Comme S est plane, tout cycle de S est homologue à un cycle frontière ; $*du$ est alors une différentielle exacte dv, et $du + idv$ est la différentielle α du théorème 3bis (car on a $\mathbf{A}(df \,|\, \mathcal{R}\alpha) = 0$ pour toute df exacte et de carré intégrable au voisinage de ∂S telle que f se prolonge continûment sur ∂S, et on montre que cela entraîne le même résultat dans le cas général).

La fonction $w = u + iv$ est alors continue dans $\bar{S}$; comme $dv = 0$ le long de ∂S, l'image par w de chaque composante de ∂S est un segment horizontal ; comme le complémentaire de $w(\partial S)$ est connexe, l'indice de $w(\partial S)$ par rapport à un nombre complexe Z quelconque est nul, et il résulte du théorème de l'argument, et du fait que w a un pôle simple en a, que w est univalente dans S. On voit en outre que w prend deux fois (distinctes ou confondues) toute valeur $Z \in w(\partial S)$. On a donc établi le théorème 4 dans le cas d'une surface à bord.

Dans le cas général, on approche S par des ouverts connexes régulièrement immergés G contenant a. Si w_G représente G sur un domaine à fentes horizontales, de façon que $w_G(a) = \infty$ et $\lim\limits_{p \to a} (w_G(p) - \frac{1}{z(p)}) = 0$, on a vu au §III, n° 5, que les différentielles dw_G convergent uniformément sur tout compact vers dw ; les fonctions w_G convergent donc vers w. La propriété extrémale de w (qu'il suffit d'établir dans le cas d'une surface à bord, car on l'étend aisément au cas général par passage à la limite) montre alors que toute composante K de $\tilde{\mathbb{C}} \setminus w(S)$ est un point ou un segment horizontal. En effet, si K n'est pas réduite à un point, $\tilde{C} \setminus K$ est simplement connexe, et peut être représenté conformément sur le complémentaire d'un segment horizontal par une fonction φ, telle que $\varphi(\infty) = \infty$ et $\varphi(Z) = Z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\varphi)}{Z^n}$ pour Z assez grand. Comme la fonction identique est méromorphe et univalente dans $\tilde{\mathbb{C}} \setminus K$, et a même partie singulière que φ, on a $\Re c_1(\varphi) \geqslant 0$; d'autre part, $\varphi \circ w$ est méromorphe univalente dans S, donc $\Re c_1(\varphi \circ w) \leqslant \Re c_1(w)$. Or $c_1(\varphi \circ w) = c_1(\varphi) + c_1(w)$. On a donc $\Re c_1(\varphi) = 0$, $\varphi(Z) = Z$, et K est un segment horizontal.

4. <u>Représentation conforme de S sur des domaines à fentes parallèles.</u>

A la place de la singularité $d(\frac{1}{z})$ en a, nous pouvons considérer plus généralement la singularité $d(\frac{e^{-i\theta}}{z})$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$. Le raisonnement du théorème 4 nous fournit alors une fonction f_θ, dont la partie singulière en a est $\frac{c^{-i\theta}}{z}$, et qui représente conformément S sur un domaine à fentes horizontales. La fonction $w_\theta = e^{i\theta} f_\theta$ admet alors pour partie singulière en a $\frac{1}{z}$, et représente S sur un ouvert connexe dont le complémentaire se compose de points ou de segments parallèles à la direction d'angle polaire θ . On supposera w_θ normalisée par la condition $\lim\limits_{p\to a\,,\,p\neq a} (w_\theta(p) - \frac{1}{z(p)}) = 0$.

On voit aisément que les différentes fonctions w_θ ainsi obtenues ne sont pas indépendantes les unes des autres. En effet, la fonction $f_o \cos\theta + f_{\frac{\pi}{2}} \sin\theta$ a la même singularité en a que f_θ , et la même propriété d'orthogonalité à la frontière (car pour toute différentielle dh exacte et de carré intégrable au voisinage de la frontière, on a

$$\mathbf{A}(dh\,,\, df_o \cos\theta + df_{\frac{\pi}{2}} \sin\theta) = \cos\theta\, \mathbf{A}(dh\,,\, df_o) + \sin\theta\, \mathbf{A}(dh\,,\, df_{\frac{\pi}{2}}) = 0) .$$

On a donc

$$f_\theta = f_o \cos\theta + f_{\frac{\pi}{2}} \sin\theta$$

d'où
$$w_\theta = e^{i\theta}(w_o \cos\theta - i w_{\frac{\pi}{2}} \sin\theta) .$$

Nous avons vu au n° 2 que la fonction w_o est caractérisée par une propriété d'extremum. Plus généralement, un calcul analogue montre que w_θ est l'unique fonction qui minimise $\mathbf{A}(df) - 4\pi\, \mathfrak{R}(e^{-2i\theta} c_1(f))$ dans l'ensemble des fonctions f méromorphes dans S , régulières dans $\complement\{a\}$, et admettant en a un développement de Laurent de la forme $\frac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f) z^n$; parmi celles des fonctions précédentes qui sont en outre univalentes dans S , w_θ rend maxima $\mathfrak{R}(e^{-2i\theta} c_1(f))$.

En particulier, $w_{\frac{\pi}{2}}$ minimise $\mathbf{A}(df) + 4\pi \mathfrak{R} c_1(f)$ parmi toutes les f admissibles, et $\mathfrak{R} c_1(f)$ parmi celles qui sont univalentes (cela résulte directement des calculs du n° 2, si l'on remarque que $dw_{\frac{\pi}{2}}$ est la différentielle β associée à la singularité $-\frac{dz}{z^2}$) . On a donc :

Si f est univalente dans S, $f(a) = 0$, et si f a pour partie singulière en a $\frac{1}{z}$,

$$\mathcal{R}c_1(w_{\frac{\pi}{2}}) \leqslant \mathcal{R}c_1(f) \leqslant \mathcal{R}c_1(w_0) .$$

5. *Fonction* $\frac{1}{2}(w_0 + w_{\frac{\pi}{2}})$.

D'après ce qu'on a vu au n° 2 et au §III, n° 4, la différentielle $\gamma = \frac{1}{2}(dw_0 + dw_{\frac{\pi}{2}})$ minimise $\mathbf{A}(df)$ parmi les fonctions f admissibles. Il est clair que cette propriété de minimum ne change pas si on effectue le changement de paramètre $z \to e^{i\theta}z$; on vérifie d'ailleurs immédiatement que

$$w_\theta + w_{\theta+\frac{\pi}{2}} = w_0 + w_{\frac{\pi}{2}} .$$

Théorème 5. La fonction $h = \frac{1}{2}(w_0 + w_{\frac{\pi}{2}})$ est univalente dans S, et représente S sur un ouvert de $\tilde{C}$ dont le complémentaire se compose de points ou d'ensembles compacts convexes (strictement convexes limités par des courbes analytiques fermées simples, si S est une surface à bord compacte). Parmi toutes les fonctions méromorphes univalentes dans S ayant en a un pôle de partie singulière $\frac{1}{z}$, h est celle pour laquelle l'aire du complémentaire de l'image de S est la plus grande.

Pour simplifier les notations, nous poserons dans le cours de cette démonstration $f = f_0 = w_0$, $g = f_{\frac{\pi}{2}} = -i\, w_{\frac{\pi}{2}}$; on a alors $h = \frac{1}{2}(f+ig)$.
Supposons d'abord que S soit une surface à bord compacte, limitée par un nombre fini de courbes de Jordan analytiques par morceaux. Si C est une composante de ∂S, la courbe paramétrée $h(C)$ est rencontrée par toute droite D de C en deux points au plus (distincts ou confondus). En effet, $\mathfrak{J}f$ et $\mathfrak{J}g$

sont constantes sur C ; si D admet pour équation $X \cos\theta + Y \sin\theta - k = 0$, on a sur C

$$\Re h \cos\theta + \Im h \sin\theta = \tfrac{1}{2}(f \cos\theta + g \sin\theta) + C^{te} = \tfrac{1}{2} f_\theta + C^{te} ;$$

or, $f_\theta(C)$ est un segment horizontal, et pour tout $Z \in f_\theta(C)$ l'équation $f_\theta(p) = Z$ a deux solutions distinctes ou confondues.

Il en résulte que l'intérieur de $h(C)$ est strictement convexe, et a une adhérence strictement convexe.

D'autre part, la fonction $\frac{dg}{df}$ est holomorphe dans S, égale à -1 en a, et prend deux fois sur toute courbe C toute valeur réelle finie ou infinie (les solutions de $\frac{dg}{df} = -\operatorname{cotg}\theta$ étant celles de $df \cos\theta + dg \sin\theta = 0$, c'est à dire celles de $df_\theta = 0$). D'après le théorème de l'argument, $\frac{dg}{df}$ ne prend aucune valeur réelle dans S, donc $\Im(\frac{dg}{df}) < 0$ dans S ; il en résulte que $\frac{dg}{df}$ décroît quand C est parcourue dans le sens positif, de sorte que $h(C)$ est parcourue dans le sens négatif.

On en déduit que h est univalente dans S. En effet, soit $Z \in \mathbb{C}$; si Z est intérieur à m courbes $h(C)$, et située sur m' d'entre elles, et si l'équation $h(p) = Z$ a n solutions dans S, et n' solutions sur ∂S, le théorème de l'argument montre que

$$-\left(m + \frac{m'}{2}\right) = n + \frac{n'}{2} - 1 ;$$

en outre, $n' \geqslant m'$ et $m' = 0$ implique $n' = 0$. Cela n'est possible que si $m = 1$, $m' = n = n' = 0$, $n = 1$, $m = m' = n' = 0$, $m' = n' = 1$, $m = n = 0$.

Par conséquent, h est univalente dans $\bar{S}$, et les intérieurs des courbes

$h(C)$ sont deux à deux disjoints.

Passons maintenant au cas général. La fonction h est limite uniforme sur tout compact des fonctions h_G analogues, relatives aux ouverts connexes régulièrement immergés G contenant a ; elle est donc encore univalente dans S. Soit d'autre part K une composante de $\tilde{\mathbb{C}}\setminus h(S)$. On sait que $\tilde{\mathbb{C}}\setminus K$ est connexe (cf. Bourbaki, Top. Géné., chap.I, §11, exerc.4). D'autre part, toute droite d'appui de K rencontre K suivant un ensemble convexe. En effet, d'après la remarque du début de ce n°, on peut supposer que cette droite d'appui est horizontale, et que c'est l'axe réel, K étant contenu dans le demi-plan supérieur. Si A (resp. B) est la composante frontière de $f(S)$ (resp. $g(S)$) qui correspond à K, on a $K \subset \frac{1}{2}(A + iB)$ et K rencontre chaque côté du rectangle $1(A + iB)$ (si (p_n) est une suite de points de S telle que $f(p_n)$ (resp. $g(p_n)$) converge vers une extrémité du segment A (resp. B), $h(p_n)$ tend vers un côté vertical (resp. horizontal) du rectangle). Par conséquent, les hypothèses précédentes impliquent que 0 est l'origine du segment B ; si x et y appartiennent à $K \cap R$, et si $(h(p_n))$ tend vers x, $(h(q_n))$ tend vers y, avec $p_n \in S$, $q_n \in S$, les suites $(g(p_n))$ et $(g(q_n))$ tendent vers 0. Comme tout voisinage V de 0 contient un voisinage W de 0 tel que W $g(S)$ soit connexe, on peut joindre $g(p_n)$ et $h(p_n)$ dans $g(S)$ par une courbe $g(C_n)$ qui tend vers 0 lorsque $w \to \infty$; l'ensemble d'accumulation de $h(C_n)$, qui est contenu dans K, contient alors $[x,y]$. Les deux propriétés précédentes équivalent à la convexité de K, en raison de la continuité de la fonction

$z \mapsto \omega(z)$, où $\omega(z)$ est l'angle sous lequel K est vu du point z .

Enfin, la propriété extrémale de h résulte du fait que si f est univalente dans S , $-\frac{1}{2}\mathbf{A}(df)$ est l'aire du complémentaire de $f(S)$.

6. <u>Classe</u> 0_{AD} .

<u>Définition</u>. On dit qu'une surface de Riemann S appartient à la classe 0_{AD} si toute différentielle analytique exacte de carré intégrable dans S est nulle.

<u>Théorème</u> 6. <u>Pour une surface de Riemann plane</u> S , <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) S <u>appartient à la classe</u> 0_{AD} ;

(b) <u>pour tout point</u> a <u>de</u> S , <u>les fonctions</u> w_0 <u>et</u> $w_{\frac{\pi}{2}}$ <u>sont égales</u> ;

(c) <u>il existe un point</u> $a \in S$ <u>pour lequel les fonctions</u> w_0 <u>et</u> $w_{\frac{\pi}{2}}$ <u>sont égales</u> ;

(d) <u>deux fonctions méromorphes univalentes dans</u> S <u>sont liées par une relation homographique (en particulier, si</u> S <u>est un ouvert connexe de</u> $\tilde{\mathbb{C}}$, <u>les seules fonctions méromorphes univalentes dans</u> S <u>sont les fonctions homographiques)</u> ;

(e) <u>pour toute fonction</u> f <u>méromorphe et univalente dans</u> S , <u>l'aire de</u> $\tilde{\mathbb{C}}\backslash f(S)$ <u>est nulle</u>.

(a) $\Longrightarrow$ (b) puisque $w_0 - w_{\frac{\pi}{2}}$ est holomorphe dans S

(b) $\Longrightarrow$ (a) en vertu de l'égalité (5) du §III, n°4, qui donne ici, pour toute fonction h holomorphe dans S telle que $df \in \mathcal{G}$

$$h'(a) = \frac{1}{2\pi}(dh|\delta)$$

avec $\delta = dw_0 - dw_{\frac{\pi}{2}}$ (la dérivée étant prise par rapport au paramètre choisi en a). Si $\delta = 0$ pour tout a, on a $dh = 0$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) de façon évidente

(c) $\Longrightarrow$ (d) : si $w_0 - w_{\frac{\pi}{2}}$ pour un point a, et si f est méromorphe et univalente dans S, il existe une fonction homographique h telle que $h \circ f$ ait un pôle simple en a de partie singulière $\frac{1}{z}$, et que $\lim\limits_{p \to a} (h(f(p)) - \frac{1}{z(p)}) = 0$; $d(h \circ f)$ est de carré intégrable en dehors de tout voisinage de a, et on a

$$\mathcal{R} c_1(w_0) = \mathcal{R} c_1(w_{\frac{\pi}{2}}) \leqslant \mathcal{R} c_1(h \circ f) \leqslant \mathcal{R} c_1(w_0)$$

(cf. nº 4), donc $\mathcal{R} c_1(h \circ f) = \mathcal{R} c_1(w_0)$, et $h \circ f = w_0$, d'où $f = h^{-1} \circ w_0$.

(d) $\Longrightarrow$ (e) du fait de la conservation des ensembles de mesure superficielle nulle dans une transformation homographique.

(e) $\Longrightarrow$ (b) car la condition (e) implique en particulier que pour tout $a \in S$, $A(\gamma) = 0$, donc $\|\delta\| = 0$.

V - Fentes circulaires et radiales.

1. Représentation conforme d'une surface de Riemann plane S sur un ouvert de $\tilde{C}$ limité par des fentes circulaires ou radiales.

Par un raisonnement très voisin de celui que nous avons fait au §IV, nous allons voir qu'on obtient de telles représentations au moyen de fonctions dont les formes α et β (associées à des singularités convenables) sont les différentielles logarithmiques.

Nous pouvons supposer que S est un ouvert de C, ce qui permet d'utiliser un paramètre unique z sur toute la surface. Soient a et b deux points de S, et soient U et V deux domaines de Jordan relativement compacts de S, tels que $\bar{V} \subset U$; soit K un arc simple d'extrémités a et b contenu dans V. Si s_o est une branche uniforme de $\log \frac{z-a}{z-b}$ dans $\tilde{C} \setminus K$, et s une fonction de classe C^∞ dans $S \setminus K$, égale à s_o dans $V \setminus K$ et nulle en dehors de U, nous poserons

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{dz}{z-a} - \dfrac{dz}{z-b} & \text{dans } V \\ \\ ds & \text{dans } S \setminus K \ ; \end{cases}$$

on a alors $\sigma = \frac{dt}{t}$, où t est la fonction définie par

$$t(z) = \begin{cases} \dfrac{z-a}{z-b} & \text{si} \quad z \in V \\ \\ e^{s(z)} & \text{si} \quad z \in S \setminus K \ . \end{cases}$$

Soient α et β les différentielles analytiques correspondant à la singularité σ dont l'existence a été établie par le th. 3bis ; comme S est plane, $\alpha - \sigma$ et $\beta - \sigma$ sont exactes dans S. Soit h (resp. k) une primitive de $\alpha - \sigma$ (resp. $\beta - \sigma$) ; on a

$$\alpha = \frac{dt}{t} + dh = \frac{dp}{p} \quad , \quad \text{avec} \quad p = te^{h}$$

$$\beta = \frac{dt}{t} + dk = \frac{dq}{q} \quad , \quad \text{avec} \quad q = te^{k} .$$

Les fonctions p et q sont méromorphes dans S , ont un zéro simple en a , un pôle simple en b , et sont finies non nulles ailleurs. Elles sont déterminées à une constante multiplicative près par les relations précédentes ; pour achever de les définir, on pourra supposer que $p'(a) = q'(a) = 1$.

Théorème 8. La fonction p (resp. q) est univalente dans S et représente S sur un ouvert de $\tilde{\mathbb{C}}$ dont le complémentaire se compose de points ou de segments portés par des demi-droites d'origine 0 (resp. de points ou d'arcs de cercle de centre 0).

Supposons d'abord que S soit une surface à bord compacte. Le raisonnement du § IV, n° 3 montre que α et β (donc p et q) sont encore analytiques sur ∂S , et que $\mathfrak{I}\alpha = 0$ et $\mathfrak{R}\beta = 0$ le long de ∂S .

Si C est une composante de ∂S , on a donc $\arg p(z) = C^{te}$ sur C , de sorte que $p(C)$ est un segment radial. Comme $\mathbb{C} \setminus p(\partial S)$ est connexe, l'indice de $p(\partial S)$ par rapport à un point quelconque de $\mathbb{C}$ est nul, et p prend le même nombre de fois toute valeur complexe finie ou infinie ; comme elle n'a qu'un seul pôle, simple, p est univalente.

De même, on voit que sur toute composante C de ∂S , $|q(z)| = C^{te}$; $q(C)$ est donc un arc de cercle ou un cercle entier. Comme β est exacte au voisinage de la frontière, on a $\int_C \frac{dq}{q} = \int_C \beta = 0$, donc $\int_C \frac{dq}{q-Z} = 0$ pour tout $Z \in \mathbb{C}$; on en déduit que l'indice de $q(\partial S)$ par rapport à un point quelconque de C est nul, et que q est univalente. Il en résulte en outre que $q(C)$ ne peut être un cercle entier.

Dans le cas général, on approche S par des ouverts connexes régulièrement immergés G contenant U. Si on normalise les fonctions correspondantes p_G et q_G par les conditions $p'_G(a) = q'_G(a) = 1$, on voit comme plus haut que p_G (resp. q_G) converge uniformément sur tout compact vers p (resp. q) ; p et q sont donc encore univalentes dans S.

Pour établir que les composantes de $\tilde{\mathbb{C}} \setminus p(S)$ (resp. $\tilde{\mathbb{C}} \setminus q(S)$) sont encore des segments radiaux (resp. des arcs de cercle de centre 0), on utilise la méthode employée au §IV, n° 3. Les propriétés d'extremum établies au §III, n° 4 peuvent ici se traduire comme suit : si f est une fonction méromorphe dans S, ayant un zéro simple en a et un pôle simple en b, finie non nulle ailleurs, et telle que $\frac{df}{f}$ soit exacte et de carré intégrable au voisinage de la frontière, on a $f(z) = \frac{z-a}{z-b} e^{w(z)}$ dans V, avec w holomorphe ; un calcul élémentaire montre que $B(\frac{df}{f}) = 4\pi \mathcal{R}[w(a) - w(b)]$. Parmi les fonctions f en question, p minimise alors $A(\frac{df}{f}) + 4\pi \mathcal{R}[w(a) - w(b)]$ et q minimise $A(\frac{df}{f}) - 4\pi \mathcal{R}[w(a) - w(b)]$.

En outre, toute fonction méromorphe f univalente dans S et telle que $f(a) = 0$, $f(b) = \infty$ appartient à la classe précédente. En effet, soit ℓ une branche uniforme du logarithme dans $\tilde{\mathbb{C}} \setminus f(K)$, et soit $g = \ell \circ f$. On a $f = e^g$ dans $S \setminus K$, d'où $\frac{df}{f} = dg$ au voisinage de la frontière. De plus $f(S \setminus V) \cap f(V) = \emptyset$, donc $\overline{f(S \setminus V)}$ est un compact de $\tilde{\mathbb{C}} \setminus f(K)$, et $g(S \setminus V) \subset \ell(\overline{f(S \setminus V)})$ est borné ; il en résulte que $\|dg\|_{S \setminus \overline{V}} < +\infty$.

On voit alors, comme au §IV, n° 3, que $A(dg) = \lim_{G\to S} (i \int_{\partial G} g\, d\bar{g})$ est $\leqslant 0$; en effet $-\frac{i}{2}\int_{\partial G} g\, d\bar{g}$ est la somme des aires des intérieurs des courbes simples fermées qui composent ∂G. Par conséquent p (resp. q) est l'unique fonction f méromorphe et univalente dans S, telle que $f(a) = 0$, $f(b) = \infty$, $f'(a) = 1$, qui réalise le maximum (resp. le minimum) de $\mathcal{R}w(b)$, w étant la fonction holomorphe dans S telle que $f(z) = \frac{z-a}{z-b} e^{w(z)}$, $w(a) = k$ fixé (avec $e^k = a-b$).

Soit alors K une composante de $\tilde{\mathbb{C}} \setminus p(S)$, non réduite à un point. $\tilde{\mathbb{C}}\setminus K$ est un ouvert simplement connexe, donc peut être représenté conformément sur le complémentaire d'un segment radial par une fonction φ, telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(0) = 1$. Si $\varphi(z) = z\, e^{\psi(z)}$, avec ψ holomorphe dans $\tilde{\mathbb{C}}\setminus K$, on a $\mathcal{R}\psi(\infty) \geqslant 0$, puisque z est holomorphe et univalente dans $\tilde{\mathbb{C}}\setminus K$, et satisfait les conditions indiquées. D'autre part, $f = \varphi \circ p$ est méromorphe et univalente dans S, $f(a) = 0$, $f(b) = \infty$, $f'(a) = 1$; comme

$$f(z) = \frac{z-a}{z-b} \exp\left[h(z) + \psi(p(z))\right]$$

on a $\mathcal{R}[h(b) + \psi(\infty)] \leqslant \mathcal{R}h(b)$, donc $\mathcal{R}\psi(\infty) \leqslant 0$. Il en résulte que $\mathcal{R}\psi(\infty) = 0$, $\varphi(z) = z$, et que K est un segment radial.

On démontrerait de la même façon le résultat analogue concernant les composantes de $\tilde{C} \setminus q(S)$.

2. Représentation sur un disque muni de fentes circulaires ou radiales.

Soit S une surface de Riemann plane ayant une composante frontière non ponctuelle isolée, qu'on supposera être une courbe analytique simple fermée C. Soit $\hat{S}_C$ la surface obtenue par symétrisation de S par rapport à C (c'est-à-dire par raccordement à S de la surface conjuguée $\tilde{S}$, le long de C identifié point par point à $\tilde{C}$) .

Soit $a \in S$, et soit $\tilde{a}$ son symétrique. Comme $\hat{S}_C$ est une surface plane, on peut appliquer les résultats du n° 1 à $\tilde{S}$ et aux points a et $b = \tilde{a}$, ce qui fournit des fonctions méromorphes univalentes p et q représentant $\hat{S}_C$ sur un ouvert de $\tilde{C}$ limité par des fentes radiales ou circulaires concentriques.

Pour toute fonction f sur $\hat{S}_C$, nous poserons $\tilde{f}(z) = f(\tilde{z})$, et $\widetilde{df} = d(\tilde{f})$, ce qui permet de définir $\tilde{\varphi}$ pour toute différentielle φ . On vérifie immédiatement que $\bar{\tilde{f}}$ (resp. $\bar{\tilde{\varphi}}$) est analytique en même temps que f (resp. φ) . Avec les notations du n° 1 , on voit alors que $\bar{\tilde{\alpha}}$ et $\bar{\tilde{\beta}}$ sont des différentielles analytiques régulières dans $\hat{S}_C \setminus \{a, \tilde{a}\}$, ayant des singularités opposées à celles de α et β , et les mêmes propriétés d'orthogonalité (car $(\tilde{\varphi}|\tilde{\psi})_{\tilde{G}} = (\varphi|\psi)_G$) . On a donc $\bar{\tilde{\alpha}} = -\alpha$, $\bar{\tilde{\beta}} = -\beta$, soit $\frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}} = -\frac{d\bar{p}}{\bar{p}}$, $\frac{d\tilde{q}}{\tilde{q}} = -\frac{d\bar{q}}{\bar{q}}$, et $\bar{p}\tilde{p} = C^{te}$, $\bar{q}\tilde{q} = C^{te}$. En particulier sur C $|p| = C^{te}$ et $|q| = C^{te}$; $p(C)$ et $q(C)$ sont donc des cercles de centre 0 , et $p(S)$ (resp. $q(S)$) est un disque de centre 0 muni de fentes radiales (resp. circulaires concentriques).

Plus généralement, une surface de Riemann plane peut être représentée sur un disque muni de fentes circulaires concentriques dès qu'il y existe une fonction holomorphe univalente et bornée (resp. ayant une intégrale de Dirichlet finie). En effet, la fonction q se caractérise ici encore par une propriété d'extremum qu'on peut caractériser comme suit : supposons d'abord que S soit un ouvert borné du plan limité par un nombre fini de courbes analytiques simples, que $a = 0$, et que f soit une fonction holomorphe univalente dans S , bornée, vérifiant $f'(0) = 0$, $f'(0) = 1$, et telle que la composante frontière extérieure de $f(S)$ corresponde à la composante frontière extérieure de S . On vérifie sans peine que l'expression

$$A(\frac{df}{f}) = \|\frac{df}{f}\|^2_{\{|f| > \varepsilon\}} + 4\pi \log \varepsilon$$

définie pour $\varepsilon > 0$ assez petit, est indépendante de ε ; elle est encore égale à $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|\frac{df}{f}\|^2_{S \cap \{|w| > \varepsilon\}} + 4\pi \log \varepsilon$, lorsque w est une fonction holomorphe quelconque univalente au voisinage de 0 , telle que $w(0) = 0$ et $w'(0) = 1$.

En prenant $f(z)$ comme paramètre dans S , on voit que $A(df) \leqslant 4\pi \log M(f)$, où $M(f) = \sup\limits_{z \in S} |f(z)|$; d'autre part, si q est la fonction associée à la composante frontière extérieure de S et au point 0 , on a $f(z) = q(z)\, e^{g(z)}$, avec g holomorphe dans S ; alors

$$A(\frac{df}{f}) = A(\frac{dq}{q}) + \|dg\|^2 + \lim_{\varepsilon \to 0} 2 \quad (dg|\frac{dq}{q})_{S_\varepsilon}$$

où $S_\varepsilon = \{z \in S : |q(z)| > \varepsilon\}$. Mais

$$(dg|\frac{dq}{q})_{S_\varepsilon} = i \int_{S_\varepsilon} dg \wedge \frac{d\bar{q}}{\bar{q}} = i \int_{\partial S_\varepsilon} g \frac{d\bar{q}}{\bar{q}} = -i \int_{\partial S_\varepsilon} g \frac{dq}{q} = -i \int_{S_\varepsilon} dg \wedge \frac{dq}{q} = 0 .$$

On a donc $$A(\frac{df}{f}) - A(\frac{dq}{q}) = \|\frac{df}{f} - \frac{dq}{q}\|^2 ;$$

comme $A(\frac{dq}{q}) = 4\pi \log M(q)$, il vient finalement

$$4\pi \log \frac{M(f)}{M(q)} \geqslant \|\frac{df}{f} - \frac{dq}{q}\|^2 .$$

On a un résultat analogue lorsqu'on remplace l'hypothèse "f bornée" par $\|df\| < +\infty$. Soit $R = \frac{\|df\|}{\sqrt{2\pi}}$. On a

$$A(\frac{df}{f}) = 4\pi \log \varepsilon + \|\frac{df}{f}\|^2_{S \cap \{\varepsilon<|f|<R\}} + \|\frac{df}{f}\|^2_{S \cap \{|f|>R\}} .$$

Or, $\|\frac{df}{f}\|^2_{S \cap \{|f|>R\}} \leqslant \frac{1}{R^2} \|df\|^2_{S \cap \{|f|>R\}} = \frac{1}{R^2} \|dz\|^2_{\{|z|<R\} \cap \complement f(S)} \leqslant \|\frac{dz}{z}\|^2_{\{|z|<R\} \cap \complement f(S)}$.

Par conséquent

$$A(\frac{df}{f}) \leqslant 4\pi \log \varepsilon + \|\frac{dz}{z}\|^2_{\{\varepsilon<|z|<R\}} = 4\pi \log R ,$$

c'est-à-dire

$$A(\frac{df}{f}) \leqslant 4\pi \log \frac{\|df\|}{\sqrt{2\pi}} ,$$

et il y a égalité lorsque $f = q$, puisque $q(S)$ est un disque fendu.

Il en résulte que

$$4\pi \log \left\|\frac{df}{dq}\right\| \geqslant \|\frac{df}{f} - \frac{dq}{q}\|^2 .$$

Soit alors S une surface de Riemann plane dans laquelle il existe une fonction holomorphe univalente f bornée (resp. à intégrale de Dirichlet finie). On suppose que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, et que la composante frontière extérieure de $f(S)$ correspond à celle de S . Soit G un ouvert connexe de S , contenant 0 , régulièrement immergé, et soit q_G la fonction holomorphe univalente, telle que $q_G(0) = 0$, $q_G'(0) = 1$, et qui représente G sur un disque de centre 0 muni de fentes circulaires concentriques, de façon que la composante frontière extérieure de G corresponde à la circonférence limitant ce disque. Les inégalités précédentes montrent que $M(q_G)$ (resp. $\|dq_G\|$) croît avec G , et a une limite finie lorsque G tend vers S . Il en résulte que $\frac{dq_G}{q_G}$ converge en norme, donc que q_G converge uniformément sur tout compact de S vers une fonction q , qui est encore univalente dans S et telle que $q(0) = 0$, $q'(0) = 1$. On a encore $M(q) \leqslant M(f)$ (resp. $\|dq\| \leqslant \|df\|$) pour toute fonction f admissible. On en déduit que q représente S sur un disque muni de fentes circulaires concentriques. En effet, dans les deux cas q est bornée ; si

$M(q) = R$, la démonstration classique du théorème de Riemann prouve que la composante frontière extérieure de $q(S)$ ne peut rencontrer le disque $D = \{|z| < R\}$, donc que c'est la circonférence $\{|z| = R\}$; enfin, si K est une autre composante frontière de $q(S)$, $D\setminus K$ peut être représenté sur un disque muni d'une fente circulaire au moyen d'une fonction φ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$; on a alors $M(\varphi) \leqslant R$, mais $M(\varphi \circ q) \geqslant R$, de sorte que $M(\varphi) = R$, donc que $\varphi(z) \equiv z$; K est alors une fente circulaire de centre 0 .

Lorsque la composante frontière extérieure C de S est isolée, la fonction q ainsi obtenue coïncide avec celle qui a été définie au départ. En effet, on peut alors approcher S supposée réalisée comme disque à fentes circulaires par des ouverts connexes S_n ayant C sur leur frontière (le reste de ∂S_n étant relativement compact dans S) ; les S_n sont régulièrement immergés dans $\hat{S}_C$, et $((\hat{S}_n)_C)$ est une exhaustion de $\hat{S}_C$; si $\hat{q}_n$ est la fonction obtenue à partir de q_n par symétrisation $\left(\hat{q}_n(z) = \dfrac{R_n^2}{q_n(\frac{R^2}{z})}\right.$ pour $\left.|z| > R\right)$, $(\hat{q}_n)$ converge vers $\hat{q}$ et la fonction $\hat{q}|S$ est bien la fonction q annoncée, car pour f méromorphe admissible sur $\hat{S}_C$ $|\frac{f(z)}{z}|$ a une limite de l'infini $\geqslant \dfrac{R_n^2}{R^2}$, donc $\geqslant 1$; donc $\hat{q}$ représente $\hat{S}_C$ sur un domaine canonique à fentes circulaires ; d'autre part, $q(z) \equiv z$ car $\max\limits_S |q| \leqslant R$ (puisque $\max\limits_{S_n} |q_n| \leqslant R_n$) .

3. <u>Représentation sur une couronne munie de fentes circulaires.</u>

Nous nous bornerons ici au cas où S est une surface à bord, d'ordre de connexion au moins égal à 2. Soient C_i les composantes de ∂S $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et a un point de S. A chaque C_i on peut associer une fonction holomorphe univalente q_i qui représente conformément S sur un disque muni de fentes circulaires de centre $0 = q_i(a)$. Pour $i \neq j$, la fonction $w_{ij} = \frac{q_i}{q_j}$ représente S sur une couronne circulaire, privée (si $n > 2$) de fentes circulaires concentriques.

En effet, il est clair que $|w_{ij}|$ est égal à une constante r_k sur C_k.

$$\text{D'autre part,} \int_{C_k} \frac{dw_{ij}}{w_{ij}-Z} = 0 \qquad \text{pour} \quad |Z| > r_k$$

$$\int_{C_k} \frac{dw_{ij}}{w_{ij}-Z} = \int_{C_k} \frac{dw_{ij}}{w_{ij}} = \int_{C_k} \frac{dq_i}{q_i} - \int_{C_k} \frac{dq_j}{q_j} \quad \text{pour} \quad |Z| < r_k .$$

Comme $\int_{C_k} \frac{dq_h}{q_h} = 0$ pour $k \neq h$, $2\pi\sqrt{-1}$ pour $k = h$, on voit que w_{ij} ne prend aucune valeur de module $< r_j$ ou $> r_i$, et que les valeurs Z tels que $r_j < |Z| < r_i$ sont prises une fois (ou deux sur C_k, pour $k \neq i$ et $\neq j$) ; on a donc bien la représentation annoncée.

VI - <u>Représentation conforme d'une surface de Riemann plane de connexion finie sur un ouvert limité par des cercles.</u>

Le théorème de Riemann, pour un ouvert simplement connexe, ou le résultat précédent, pour un ouvert doublement connexe, fournissent une représentation conforme sur un "domaine circulaire", c'est-à-dire un ouvert connexe de $\tilde{C}$ dont la frontière se compose de cercles ou de points. Koebe a conjecturé (et démontré dans le cas de la connexion finie) qu'une surface de Riemann plane peut être représentée sur un tel domaine. Nous allons reprendre sa démonstration.

Soit S une surface de Riemann plane limitée par m courbes analytiques simples C_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ [nous pouvons supposer que S n'a aucune composante frontière réduite à un point, car dans le cas contraire, il suffit d'inclure les points frontière isolés dans la surface]. Soit $\tilde{S}$ la surface conjuguée de S. Si pour chaque indice i nous raccordons à S le long de C_i (identifié à $\tilde{C}_i$) un exemplaire de $\tilde{S}$, nous obtenons une surface de Riemann plane S^* contenant S. Posons $S_0 = S$, $S_1 = S^*$, $S_2 = S_1^*, \ldots, S_n = S_{n-1}^*, \ldots$, la suite (S_n), et la suite des injections canoniques $S_n \to S_{n+1}$, définit une limite inductive S_∞ qu'on peut munir de façon évidente d'une structure analytique telle que chaque S_n soit une sous-surface de Riemann de S_∞. On peut remarquer que S_∞ n'est autre que le revêtement de Schottky du double $\hat{S}$ de S. (*)

La surface S_∞ appartient à la classe 0_{AD} définie au §IV, n° 6. En effet, supposons que nous ayons représenté S sur le complémentaire dans $\tilde{C}$ de m segment L_i ; S_∞ est alors réalisée comme la surface à une infinité de feuillets obtenue par symétrisations successives par rapport aux segments L_i et à leurs images ; c'est un revêtement ramifié de $\tilde{\mathbb{C}}$, sur lequel on peut prendre le paramètre z obtenu par projection sur $\tilde{\mathbb{C}}$, en tout point différent des points de ramification.

Soit alors r un nombre réel tel que $0 < 4r < \min_{i \neq j} d(L_i, L_j)$; soient Γ_i la courbe $\{z \in \mathbb{C} : d(z, L_i) = r\}$, G_i l'ouvert $S \cap \{z \in \mathbb{C} : d(z, L_i) < 2r\}$, H_i l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} : d(z, L_i) < r\}$. Pour tout n, soient $G_{n,k}$ (resp. $H_{n,k}$) les

---

(*) La démonstration qui suit prouve plus généralement que tout revêtement de Schottky appartient à la classe 0_{AD} (cf. Sario [14]).

ouverts de S_n qui se projettent sur un ouvert G_i (resp. H_i) et qui sont contigus à la frontière de S_n ; soit $\Gamma_{n,k}$ la frontière de $H_{n,k}$ dans S_n, et soit $S'_n = S_n \setminus \bigcup_k \bar{H}_{n,k}$. On a $\partial S'_n = \sum_k \Gamma_{n,k}$.

Considérons une fonction f holomorphe dans S_∞ et telle que $\|df\|_{S_\infty} < +\infty$. D'après la formule de la moyenne, on a $|f'(z)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi r^2} \|df\|^2_{G_{n,k}}$ en tout point z de $\Gamma_{n,k}$. Si $z \in \Gamma_{n,k}$ et si $w_{n,k}$ est une valeur quelconque prise par f sur $\Gamma_{n,k}$, on a donc

$$|f(z) - w_{n,k}| \leqslant \frac{\ell}{\sqrt{2\pi}r} \|df\|_{G_{n,k}} ,$$

ℓ étant le maximum des longueurs des courbes Γ_i. D'autre part,

$$\|df\|^2_{S'_n} = i \int_{\partial S'_n} f\, \overline{df} = i \sum_k \int_{\Gamma_{n,k}} f\, \overline{df} = i \sum_k \int_{\Gamma_{n,k}} (f - w_{n,k})\overline{df}$$

$$\leqslant \sum_k \int_{\Gamma_{n,k}} |f - w_{n,k}|\,|df| \leqslant \frac{\ell^2}{2\pi r^2} \sum_k \|df\|^2_{G_{n,k}} ,$$

et a fortiori

$$\|df\|^2_{S_{n-1}} \leqslant \frac{\ell^2}{2\pi r^2} \|df\|^2_{S_n \setminus \bar{S}_{n-1}} .$$

On en déduit que $\|df\|_{S_n}$ tend vers 0 lorsque $w \to \infty$, donc que $\|df\| = 0$ et que f est une constante.

Soit alors w la fonction qui représente S_∞ de façon bijective et conforme sur un ouvert D de $\tilde{\mathbb{C}}$, de façon que $\lim\limits_{z \to \infty} (w(z) - z) = 0$. Dans S_∞, la symétrie par rapport à C_k est un automorphisme anti-analytique, qui définit un automorphisme anti analytique de D. D'après le th. 6 du §IV, n° 6, cet anti automorphisme est de la forme $z \mapsto \overline{h(z)}$, où h est une fonction homographique. Comme $\bar{h}$ laisse invariants les points de $w(C_k)$, la courbe $w(C_k)$ est un cercle, et

$w(S)$ est un domaine circulaire. On a ainsi démontré le théorème de Koebe.

Ce théorème a été étendu par Koebe lui-même et divers auteurs (en particulier Grötzsch et Sario) au cas de certaines surfaces de Riemann planes de connexion infinie, mais la possibilité d'une représentation conforme sur un domaine circulaire n'a pas encore été établie ou infirmée dans le cas général.

Bibliographie

[1] AHLFORS-SARIO.- Riemann surfaces. Princeton Univ. Press, 1960.

[2] APPEL-GOURSAT.- Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Tome II Fonctions automorphes, par P. Fatou, Paris Gauthier-Villars, 1932.

[3] COURANT.- Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces. New-York, Interscience publ., 1960.

[4] GRÖTZSCH.- Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche, I, II, III - Ner. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 81 (1929) p. 38 et p. 217, et 83 (1931) p. 283-297.

[5] GRÖTZSCH.- Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter unendlich-vielfach zusammenhängender Bereiche. Ibid. 83 (1931) p. 185-200.

[6] GRÖTZSCH.- Das Kreisbogenschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche. Ibid. 83 (1931) p. 238-253.

[7] GRÖTZSCH.- Über das Parallelschlitztheorem der konformem Abbildung schlichter Bereiche Ibid. 84 (1932) p. 15-36.

[8] HILBERT.- Zur Theorie der konformem Abbildung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1909, p. 314-323.

[9] HURWITZ-COURANT.- Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Berlin Springer 1964, 706 pp.

[10] KOEBE.- Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, IV. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1909, p. 324-361.

[11] KOEBE.- Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Ibid. 1910, p. 59-74.

[12] KOEBE.- Abhanllungen zur Theorie der konformen Abbildung IV, V, VI Acta. Math. 41 (1918) p. 305 et Math. Zeits. 2 (1918) p. 198 et 7 (1920) p.235.

[13] NAKAÏ-SARIO.- Construction of principal functions by orthogonal projection. Canad. J. Math. 18 (1966) p. 887-896.

[14] DE POSSEL.- Zum Parallelschlitztheorem unendlich-vielfach zusammenhängender Gebiete. Nachr. Akad. Akad. Wiss. Göttingen, (1931) p. 199-202.

[15] DE POSSEL.- Sur quelques propriétés de la représentation conforme des domaines multiplement connexes, en relation avec le théorème des fentes parallèles. Math. Ann. 107 (1932/33), p. 496-504.