PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 78-08

ALGEBRES DE HEISENBERG ET GEOMETRIE SYMPLECTIQUE DES ALGEBRES DE LIE

NGHIEM-XUAN-HAI

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

N° 78-08

ALGEBRES DE HEISENBERG ET GEOMETRIE SYMPLECTIQUE
DES ALGEBRES DE LIE

NGHIEM-XUAN-HAI

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

ALGEBRES DE HEISENBERG ET GEOMETRIE SYMPLECTIQUE DES ALGEBRES DE LIE

0. INTRODUCTION.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique zéro. En localisant par des éléments semi-centraux, on peut trouver dans le corps enveloppant $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie du type suivant :

C'est le produit direct d'une algèbre de Heisenberg par une algèbre de Lie semi-simple sur un corps $\mathbb{K}$ et ces trois objets sont caractéristiques. La structure de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ est entièrement déterminée par ces trois objets et son action dans $\mathbb{K}$. De plus, ces structures sont canoniquement transposables dans le corps $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ des fractions rationnelles sur le dual de $\mathfrak{g}$.

En particulier, si $\mathfrak{g}$ est résoluble et algébrique sur un corps $\mathbb{k}$ algébriquement clos de caractéristique zéro, on obtient une réponse à la conjecture de Gelfand Kirillov dans le corps enveloppant en correspondance canonique avec une réponse à celle dans $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ (qui possède une interprétation géométrique).

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique zéro et $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$ une décomposition de Lévi de $\mathfrak{g}$ en son radical résoluble $\mathfrak{r}$ et une sous-algèbre de Lévi (semi-simple) $\mathfrak{s}$. Les dimensions de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ sont dans l'ordre γ, ρ et σ.

La représentation adjointe d'une algèbre est notée ad, une dualité naturelle par les crochets $< \, , \, >$ et le dual au moyen de symbole *

On note $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$) l'algèbre enveloppante (resp. le corps enveloppant, l'algèbre symétrique, le corps symétrique c'est-à-dire de corps des fractions de l'algèbre symétrique) de $\mathfrak{g}$. On munit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ de leur filtration : $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n(\mathfrak{g})$.

On note l'injection canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ exponentiellement au moyen de la lettre τ.

Le produit symétrisé est noté au moyen du symbole $\vee$, ainsi $A \vee B = \frac{1}{2}(AB+BA)$.

Le centre d'une algèbre est notée avec le symbole $^{\#}$.

I. LE CROCHET DE POISSON.

AVERTISSEMENT.

Dans tout ce chapitre, le corps de base $\mathbb{k}$ est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou $\mathbb{R}$ des nombres réels, car nous voulons insister sur les caractéristiques géométriques et différentielles. Le problème géométrique est purement local et peut se traiter au voisinage d'un point de $\mathfrak{g}^*$ ou d'une sous-variété $\mathfrak{g}$-invariante de $\mathfrak{g}^*$, d'où une généralisation évidente qui sera laissée au lecteur.

Tout ce chapitre repose sur l'existence de la différentielle des fonctions sur $\mathfrak{g}^*$ et nous prendrons des fonctions $\mathbb{k}$-indéfiniment différentiables pour simplifier. Dans un autre contexte, le corps $\mathbb{k}$ ne sera plus $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et la différentielle est alors définie algébriquement sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ ou $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ et là encore, le soin est laissé au lecteur pour faire la transposition évidente.

I.1. NOTATIONS. Soit $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{k}$-indéfiniment différentiables sur $\mathfrak{g}^*$.

Dans la suite, on utilise les éléments génériques suivants :

$$X,Y\in\mathfrak{g},\quad \phi\in\mathfrak{g}^*,\quad f,g,h\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$$

On prend aussi les notations habituelles et les identifications classiques :

$T(\mathfrak{g}^*)$ = fibré tangent de $\mathfrak{g}^* \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)\otimes_{\mathbb{k}}\mathfrak{g}^*$

$T^*(\mathfrak{g}^*)$ = fibré cotangent de $\mathfrak{g}^* \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)\otimes_{\mathbb{k}}\mathfrak{g}$

$T_\phi(\mathfrak{g}^*)$ = espace tangent en ϕ à $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^*$

$T_\phi^*(\mathfrak{g}^*)$ = espace cotangent en ϕ à $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$

Df = différentielle de f $(\in T^*(\mathfrak{g}^*))$

$D_\phi f$ = différentielle de f en ϕ $(\in T_\phi(\mathfrak{g}^*) \simeq \mathfrak{g})$.

On munit naturellement $T^*(\mathfrak{g}^*)$ d'un crochet de Lie en prenant le crochet en chaque point ϕ dans $T_\phi^*(\mathfrak{g}^*) \simeq \mathfrak{g}$. Ce crochet s'exprime sur $T^*(\mathfrak{g}^*) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)\otimes_{\mathbb{k}}\mathfrak{g}$ par le crochet de Lie obtenu à partir de celui de $\mathfrak{g}$ par extension des scalaires de $\mathbb{k}$ à $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$; ce crochet est noté comme celui de $\mathfrak{g}$ lui-même.

On identifie $\mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{g}^{**} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ d'où les injections canoniques

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$$

$$T^*(\mathfrak{g}^*) \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*) \otimes_k \mathfrak{g} \simeq \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)\mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

I.2. DEFINITION.

On définit le crochet de Poisson $\{\ ,\ \}$ sur $\mathfrak{g}^*$ par la formule

$$\{f,g\} = [Df, Dg]$$

où :

lorsque $f,g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ on considère $[Df,Dg]$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$

lorsque $f,g \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ (resp $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$), on considère $[Df,Dg]$ comme un élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ (resp. de $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$).

Remarque : Cette définition s'étend aussi au cas où f,g sont des éléments de $\mathcal{C}^p(V)$ où V est une sous variété de $\mathfrak{g}^*$, $\{f,g\}$ appartient alors à $\mathcal{C}^{p-1}(V)$.

Explicitons cette définition sur une base $(X_1,\ldots,X_\gamma)$ de $\mathfrak{g}$. On note $(X_1^*,\ldots,X_\gamma^*)$ la base duale de $\mathfrak{g}^*$ et $(x_1,\ldots,x_\gamma)$ les coordonnées de

$$\phi = \sum_{i=1}^{\gamma} x_i X_i^*$$

Soit

$$\psi = \sum_{i=1}^{\gamma} y_i X_i^*$$

un élément générique de $T_\phi(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^*$.

Toute fonction sur $\mathfrak{g}^*$ est une fonction de $\phi \simeq (x_1,\ldots,x_\rho)$ et on a :

$$\{f,g\}(\phi) = \langle [D_\phi f, D_\phi g], \phi \rangle$$

$$\langle D_\phi f, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot y_i, \text{ ie } D_\phi f = \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i$$

$$Df = \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_i} \otimes X_i$$

et

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} [X_i, X_j]^\tau$$

En introduisant les constantes de structures $C_{i,j}^{\ k}$: $[X_i,X_j] = \sum_{k=1}^{\gamma} C_{i,j}^{\ k}X_k$

on a explicitement

$$\{f,g\}(x_1,\dots,x_\gamma) = \sum_{i,j,k=1}^{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_\gamma)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_\gamma)C_{i,j}^{\ k}x_k$$

et cette formule ne dépend évidemment pas des bases !

I.3. LA DUALITE DE KOSTANT.

On note $\mathcal{B}_\phi$ la forme bilinéaire alternée sur $T_\phi(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}$ définie par

$$\mathcal{B}_\phi(X,Y) = <\phi,[X,Y]>$$

Cette dualité définit une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^* \simeq T_\phi(\mathfrak{g}^*)$ qui n'est autre que l'action co-adjointe de $\mathfrak{g}$ (notée ad^*). En effet

$$ad^* X.\phi = <\phi,[?,X]> \in \mathfrak{g}^*$$

n'est autre que le vecteur tangent à l'orbite de ϕ dans $\mathfrak{g}^*$ définie par l'action co-adjointe de X. Plus généralement, comme $D_\phi f \in T_\phi^*(\mathfrak{g}^*) \simeq \mathfrak{g}$, on a la

DEFINITION. On pose

$$\boxed{d_\phi f = <\phi,[?,D_\phi f]> \in T_\phi(\mathfrak{g}^*)}$$

et on appelle df le champs de vecteurs tangents à $\mathfrak{g}^*$ dont la valeur en chaque point ϕ est égale à $d_\phi f$.

Reprenant les notations de I.2, on explicite sur la base $(X_1,\dots,X_\gamma)$:

$$<d_\phi f,X_i> = <\phi, \sum_{j=1}^{\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_j}[X_i,X_j]> = \sum_{j,k=1}^{\gamma}\frac{\partial f}{\partial x_j}C_{i,j}^{\ k}x_k$$

d'où

$$d_\phi f = \sum_{i,j,k=1}^{\gamma} C_{i,j}^{\ k}\frac{\partial f}{\partial x_j}x_k X_i^*$$

$$df = \sum_{i=1}^{\gamma}[X_i,Df]^\tau X_i^*$$

On a aussi la relation évidente

(1) $\{f,g\} = \langle Df, dg\rangle = \mathrm{ad}Df \circ g$ [(1)]

I.4. FORMULES.

On remarquera d'abord que si $X \in g$, $DX^{\tau} = X$, d'où la formule

(2) $\{X^{\tau}, Y^{\tau}\} = [X,Y]^{\tau}$ ($X, Y \in \mathfrak{g}$ et $\tau : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ canonique)

Ainsi, la structure de $\mathfrak{g}$ est entièrement déterminée par $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ muni du crochet de Poisson et $\mathfrak{g}$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$

On a aussi :

(3) $\{X^{\tau}, g\} = \mathrm{ad}X.g$, $\{1,g\} = 0$ (cas particuliers de (1)).

(4) $\{f, gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$

(5) $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$ (Jacobi)

Le crochet de Poisson est évidemment bilinéaire ; la formule (4) résulte de $D(fg) = f(Dg) + (Df)g$.

La formule (5) provient des relations de Jacobi sur $\mathfrak{g}$ et n'exprime rien d'autre que l'action co-adjointe est une représentation de $\mathfrak{g}$.

Ainsi, nous avons obtenu une structure presque symplectique sur $\mathfrak{g}^*$, en ce sens que la forme bilinéaire $\mathcal{B}_{\phi}$ sur $T^*_{\phi}(\mathfrak{g}^*)$ est en général dégnénérée. Lorsque l'on se restreint à une "orbite" de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^*$, on a une véritable géométrie symplectique définie par le crochet de Poisson et c'est la structure définie par Kostant [1,2,3]

Le crochet de Poisson existe intrinsèquement sur $\mathfrak{g}^*$. Elle est déjà définie de manière un peu plus détournée par M. Vergne dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ à partir du crochet dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et par passage au quotient [4].

---

(1) L'action adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ se prolonge à $\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{g}^*)$ et aussi par $\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{g}^*)$ linéarité, elle se définit aussi sur $Df \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{g}^*) \otimes_{\mathbb{k}} \mathfrak{g}$.

I.5. ALGEBRES 2-NILPOTENTES.

DEFINITION. On appelle algèbre 2-nilpotente une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{h}$ telle que : $[\mathfrak{h},[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]]=0$

On considère l'action définie par le crochet de Poisson et on la note encore ad. Ainsi

(6) $\quad \mathrm{ad} f.g=\{f,g\}$

Cette formule est abusive compte tenue de (1), toutefois comme $D|\mathfrak{g}^{\tau}$ est l'inverse de τ, on a $\mathrm{ad}X^{\tau}=\mathrm{ad}DX^{\tau}=\mathrm{ad}X$ et elle ne prête pas à confusion.

On se restreint à $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$, $\mathcal{K}(\mathfrak{h})$, $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$, $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$. Par exemple, on note $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathfrak{h}))$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ dans $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ et un élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$ désigne aussi suivant le contexte l'application linéaire que définit la multiplication par cet élément.

Ainsi, si $x\in\mathcal{S}(\mathfrak{h})$, $x+\mathrm{ad}\frac{x}{2}\in\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathfrak{h}))$.

Par convention, on utilise les petites lettres pour désigner des éléments de $\mathfrak{h}\subset\mathcal{S}(\mathfrak{h})$, ie $\quad X^{\tau}=x$

LEMME 1.

Soit $\mathfrak{h}$ une algèbre 2-nilpotente.

L'application canonique de $\mathfrak{h}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathfrak{h}))$ définie par

$$X \longrightarrow X^{\tau}+\mathrm{ad}\,\frac{X^{\tau}}{2}$$

est un isomorphisme d'algèbre de Lie et se prolonge en un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ sur la sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathfrak{h}))$ engendrée par l'image de $\mathfrak{h}$ (et telle l'image de l'unité est l'unité).

$$[(x+\mathrm{ad}\tfrac{x}{2}),(y+\mathrm{ad}\tfrac{y}{2})]=\mathrm{ad}\tfrac{x}{2}.y+x\,\mathrm{ad}\tfrac{y}{2}-y\,\mathrm{ad}\tfrac{x}{2}-\mathrm{ad}\tfrac{y}{2}.x+[\mathrm{ad}\tfrac{x}{2},\mathrm{ad}\tfrac{y}{2}]$$

$$=\{x,y\}+\frac{1}{4}\,\mathrm{ad}\{x,y\}.$$

Lorsque $X,Y \in \mathfrak{h}$, $[X,Y]$ est central dans $\mathfrak{h}$, donc $\mathrm{ad}\{x,y\} = \mathrm{ad}[X,Y]^\tau = 0$
d'où

$$[x + \mathrm{ad}\tfrac{X}{2} , y + \mathrm{ad}\tfrac{Y}{2}] = [X,Y]^\tau + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ad}[X,Y]^\tau \qquad \text{cqfd.}$$

On note $\mathcal{V}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathfrak{h}))$ engendrée par les éléments $x + \mathrm{ad}\frac{X}{2}$ pour $x \in \mathfrak{h} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{h})$ et $\mathcal{W}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))$ engendrée par les éléments $X - \mathrm{ad}\frac{X}{2}$ pour $X \in \mathfrak{h}$. Il n'est pas difficle de voir que $\mathcal{W}$ est commutative (si $\mathfrak{h}$ est 2-nilpotente) et que la correspondance

$$X - \mathrm{ad}\, X/_2 \longrightarrow x$$

se prolonge en un isomorphisme de $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$.
De plus, considérons l'application de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ définie par l'évaluation $A \longrightarrow A.1$ de tout élément $A \in \mathcal{W}$ en $1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Elle s'identifie alors à la symétrisation $\beta : \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ alors que son inverse β^{-1} est donnée par l'évaluation de tout élément $A \in \mathcal{V}$ en $1 \in \mathcal{S}(\mathfrak{h})$.
En effet,le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathfrak{h}) & \simeq & \mathcal{V} \\ \uparrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta^{-1}} \\ \mathcal{W} & \simeq & \mathcal{S}(\mathfrak{h}) \end{array}$$

est commutatif

comme on peut le vérifier sur les éléments de la forme X^n :

$$X^n \xrightarrow{\simeq} (x + \mathrm{ad}\tfrac{X}{2})^n \xrightarrow{\beta^{-1}} (x + \mathrm{ad}\tfrac{X}{2})^n.1 = x^n \xrightarrow{\simeq} (x - \mathrm{ad}\tfrac{X}{2})^n \xrightarrow{\beta} (X - \mathrm{ad}\tfrac{X}{2})^n.1 = X^n$$

<u>LEMME</u> 2. ($\mathfrak{h}$ est 2-nilpotente).

> La symétrisation β est un isomorphisme d'algèbre de Lie lorsque l'on la restreint à $\mathcal{S}_2(\mathfrak{h})$ muni du crochet de Poisson et à $\mathcal{U}_2(\mathfrak{h})$.
> Plus généralement, si $a \in \mathcal{S}_2(\mathfrak{h})$ et $b \in \mathcal{S}(\mathfrak{h})$, on a
>
> $[\beta a, \beta b] = \beta\{a,b\}$
>
> et si $X,Y \in \mathfrak{h}$, $x = X^\tau$, $y = Y^\tau \in \mathcal{S}(\mathfrak{h})$
>
> $[x^m, y^n] = m.n x^{m-1} y^{n-1}\{x,y\}$

$$[X^m,Y^n] = \beta \sum_{o\leqslant 2p<\mathrm{Inf}(m,n)} \frac{m!n!2^{-2p}}{(m-2p-1)!(n-2p-1)!(2p+1)} \{x,y\}^{2p+1} x^{m-2p-1} y^{n-2p-1}$$

En effet :

$$\beta^{-1}[X^m,Y^n] = [(x + \mathrm{ad}\,\tfrac{x}{2})^m,\ (y + \mathrm{ad}\,\tfrac{y}{2})^n].1$$

$$= \sum_{p=o}^{m} x^{m-p} C_n^p (\mathrm{ad}\,\tfrac{x}{2})^p.y^n - \sum_{q=o}^{n} y^{n-q} C_n^{n-q} (\mathrm{ad}\,\tfrac{y}{2})^q.x^m$$

$$= \sum_{o\leqslant 2\ell<\mathrm{Inf}(m,n)} x^{n-\ell} y^{m-\ell} C_n^\ell \ell!\ C_m^\ell(\{x,y\}^\ell - \{y,x\}^\ell)$$

I.6. ALGEBRES DE LIE BILATERES.

Ces structures sont déjà définies dans [5,6].

Une telle algèbre est une algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ construit sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, les éléments de $\tilde{\mathfrak{g}}$ ne commutant pas à $\mathbb{K}$, mais "agissent dans $\mathbb{K}$" par une représentation δ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ dans l'ensemble des dérivations de $\mathbb{K}$. On a les formules

$$X\lambda - \lambda X = \delta(X).\lambda.Z_o \qquad (Z_o \text{ est l'"unité" de } \tilde{\mathfrak{g}} \text{ et } \mathbb{K} \simeq Z_o\mathbb{K})$$

$$[X\lambda,Y\mu] = [X,Y]\lambda\mu + Y(\delta(X).\mu)\lambda - X(\delta(Y).\lambda)\mu$$

et un exemple type d'une telle structure est donnée par une sous-algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ de la forme $\mathfrak{g}\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ et contenant l'unité de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ notée Z_o.

Une telle algèbre de Lie (notée $(\tilde{\mathfrak{g}},Z_o,\delta)$) admet aussi un corps enveloppant (noté $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$) et une algèbre enveloppante (notée $\mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}})$) dans lesquels Z_o est identifié à l'unité et on les appelle algèbre et corps enveloppants réduits. Comme pour le cas classique, on a un équivalent (évident) du théorème de Poincaré Birkhoff Witt avec cette identification et l'algèbre enveloppante réduite est encore filtrée par

$$\mathcal{E}(\tilde{\mathfrak{g}}) = \sum_{n=o}^{\infty} \mathcal{E}_n(\tilde{\mathfrak{g}}).$$

I.7. ASSOCIATIVITE DU PRODUIT SYMETRISE DE A,B,C APPARTENANT A UNE ALGEBRE.

$$(A \vee B) \vee C = \frac{1}{4}\{C(AB + BA) + (AB + BA)C\}$$

$$= \frac{1}{4}\{A(BC + CB) + (BC + CB)A + B(AC - CA) - (AC - CA)B\}$$

$$= A \vee (B \vee C) + \frac{1}{4}[B,[A,C]]$$

Comme le produit symétrisé est commutatif, l'associativité a lieu lorsque $[C,[A,B]]$ (ou une permutation) s'annule. Tel est le cas lorsque deux éléments appartiennent à une sous-algèbre commutative stable sous l'action adjointe du troisième.

II. ALGEBRES DE HEISENBERG

II.1. Dans tout ce chapitre, $\mathfrak{h}$ est une algèbre 2-nilpotente sur un corps $\mathbb{k}$. Son centre n'est pas réduit à zéro. Si ce centre est de dimension 1, $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Heisenberg. Le centre $\mathcal{C}$ de $\mathcal{K}(\mathfrak{h})$ est égal à $\mathcal{K}(\mathfrak{h}^{\#})$. L'algèbre $\mathfrak{h}\mathcal{C}$ est une algèbre de Lie bilatère sur $\mathcal{C}$ et en fait une algèbre de Heisenberg sur $\mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est le centre de $\mathfrak{h}\mathcal{C}$ et commute à $\mathfrak{h}\mathcal{C}$. Son algèbre enveloppante réduite est une algèbre de Weyl [7] sur $\mathcal{C}$ et elle s'identifie à $\mathcal{U}(\mathfrak{h})\mathcal{C}$.

II.2. DEFINITION.

Soient $\mathbb{k}$ un corps commutatif, $\mathbb{K}$ un surcorps de $\mathbb{k}$ et $\mathfrak{h}$ une algèbre 2-nilpotente sur $\mathbb{K}$. On appelle $\mathbb{k}$-dérivation de $\mathfrak{h}$ une application $\mathbb{k}$-linéaire δ de $\mathfrak{h}$ dans lui-même qui vérifient les relations suivantes, où X,Y sont des éléments queconques de $\mathfrak{h}$, λ un élément quelconque de K et $\lambda \longrightarrow \lambda^{\delta}$ une $\mathbb{k}$-dérivation[1] de $\mathbb{K}$:

$$\delta([X,Y]) = [\delta(X),Y] + [X,\delta(Y)]$$

$$\delta(X\lambda) = \delta(X)\lambda + X\lambda^{\delta}$$

Le centre de $\mathfrak{h}$ est invariant pour toute $\mathbb{k}$-dérivation de $\mathfrak{h}$.

II.3. DEFINITION.

On appelle base symplectique de $\mathfrak{h}$ une base $(Z_0,Z_1,\ldots,Z_r;P_1,\ldots,P_s;Q_1,\ldots,Q_s)$ de $\mathfrak{h}$ dont les seuls commutateurs éventuellement non nuls sont

(7) $$[P_i,Q_j] = \delta_{i,j}Z_0 \qquad (i,j=1,\ldots,s)$$ [2]

Remarquer que la condition de commutation est trop restrictive et une base symplectique n'existe pas toujours.

(2) $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i=j$ et 0 sinon.

(1) ie. tel que $\delta \mid \mathbb{k} = 0$. Il nous arrive de ne pas préciser le corps $\mathbb{k}$; il suffit de prendre alors $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$.

II.5. LEMME.

> Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre 2-nilpotente sur $\mathbb{K}$, $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}\mathcal{K}(\mathfrak{h})^{\#}$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{h}^{\#}$
> Alors $\tilde{\mathfrak{h}}$ admet une base symplectique $(Z_0, P_1, \dots, P_s; Q_1, \dots, Q_s)$ où $Z_0 = 1$, $P_1, \dots, P_r \in \mathfrak{h}\mathcal{U}(\mathfrak{z})$ et on peut même supposer (1)
> $P_i \in \mathfrak{h}\,\mathfrak{z}^{i-1}$, $Q_i \in \mathfrak{h}\,\mathfrak{z}^{i-1}(\mathfrak{z}^{2i-1})^{-1}$

En effet $\tilde{\mathfrak{h}}$ est une algèbre de Heisenberg dont le centre est $\mathcal{K}(\mathfrak{h})^{\#}$. On obtient la base symplectique par diagonalisation successive de la forme biliniaire alternée sur $\tilde{\mathfrak{h}}$ que définit le crochet.

Comme on diagonalise successivement, et détermine P_i et Q_i orthogonaux à $P_1, \dots, P_{i-1}, Q_1, \dots, Q_{i-1}$, les cofacteurs de la matrice partielle sont multiples de la racine carré de son déterminant, d'où une simplification possible.

II.6. LEMME.

> Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre 2-nilpotente sur $\mathbb{k}$, $\mathbb{K} = \mathcal{K}(\mathfrak{h})^{\#}$, $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}\mathbb{K}$ et $(Z_0; P_1, \dots, P_s; Q_1, \dots, Q_s)$ une base symplectique de $\tilde{\mathfrak{h}}$ considérée comme algèbre de Lie bilatère sur $\mathbb{K}$ avec $Z_0 = 1$.
>
> Alors :
>
> $\mathcal{E}_2(\tilde{\mathfrak{h}})$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et contient $\mathbb{K}$,
>
> $\mathcal{E}_2(\tilde{\mathfrak{h}})^{\#} = \mathcal{E}_1(\mathfrak{h})^{\#} = K$,
>
> Le radical de $\mathcal{E}_2(\tilde{\mathfrak{h}})$ est $\mathcal{E}_1(\tilde{\mathfrak{h}})$
>
> L'ensemble des polynômes homogènes de degré 2 en $P_1, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_s$ et symétrisés par rapport à ces variables est une sous-algèbre de Lévi de $\mathcal{E}_2(\tilde{\mathfrak{h}})$ et toute sous-algèbre de Lévi est obtenue ainsi pour un choix convenable de la base symplectique et est isomorphe à $sp(s, \mathbb{K})$.

---

(1) On note $\mathfrak{z}^i$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré i en $\mathfrak{z}$.

On écrit tout élément $X \in \mathcal{E}_2(\tilde{h})$ comme la somme de trois polynômes homogènes symétrisés :

(8) $$X = R_2(X) + R_1(X) + E(X)$$

où

(9) $$R_2(X) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} 2P_i \vee Q_j A_{j,i}(X) + Q_i Q_j B_{j,i}(X) - P_i P_j D_{j,i}(X)$$

(10) $$R_1(X) = \sum_{i=1}^{s} P_i F_i(X) - Q_i C_i(X)$$

(11) $$A_{j,i}(X), B_{j,i}(X), D_{j,i}(X), F_i(X), C_i(X), E(X) \in \mathbb{K}$$

Les coefficients $B_{j,i}(X)$ et $D_{j,i}(X)$ sont uniquement déterminés car on impose de plus les relations

(12) $$B_{i,j}(X) - B_{j,i}(X) = D_{i,j}(X) - D_{j,i}(X) = 0$$

On vérifie immédiatement les relations $(\tilde{h} = \mathcal{E}_1(\tilde{h}))$

$$[\mathcal{E}_2(\tilde{h}), \mathcal{E}_2(\tilde{h})] = \mathcal{E}_2(\tilde{h})$$
$$[\mathcal{E}_2(\tilde{h}), \mathcal{E}_1(\tilde{h})] = \mathcal{E}_1(\tilde{h})$$
$$[\mathcal{E}_1(\tilde{h}), \mathcal{E}_1(\tilde{h})] = \mathcal{E}_0(\tilde{h}) = \mathbb{K} = \mathcal{E}_2(\tilde{h})^{\#}$$

et par ailleurs, le commutateur de deux polynômes homogènes symétrisés de degré 2 en est encore un et l'ensemble de ces polynômes est isomorphe (trivialement) à une algèbre de Lie symplectique de dimension $2s$ sur K.

Enfin, le Théorème de Lévi-Malcev permet de conclure en étudiant les automorphismes spéciaux de $\mathcal{E}_2(\tilde{h})$ qui proviennent de $\mathcal{E}_1(\tilde{h})$.

Un tel automorphisme est de la forme

$$P_i \longrightarrow P_i + C_i(X) = P_i'$$
$$Q_i \longrightarrow Q_i + F_i(X) = Q_i'$$

car avec X donné par (8), on a

(13) $$[X, P_i] = \sum_{j=1}^{s} P_j A_{j,i}(X) + Q_j B_{j,i}(X) + C_i(X)$$

(14) $$[X, Q_i] = \sum_{j=1}^{s} P_j D_{j,i}(X) - Q_j A_{i,j}(X) + F_i(X)$$

et dans notre cas, $A_{j,i}, B_{j,i}, D_{j,i} = 0$ puisque $X \in \mathcal{E}_1(\tilde{h})$

II.7. LEMME.

Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie 2-nilpotente sur $\mathbb{k}$, δ une $\mathbb{k}$-dérivation de $\mathfrak{h}$, $\mathbb{K} = \mathcal{Z}(\mathfrak{h})^{\#}$, $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}\mathbb{K}$ et $(Z_0;P_1,\ldots,P_s;Q_1,\ldots,Q_s)$ une base symplectique de $\tilde{\mathfrak{h}}$ où $Z_0 = 1$.

La dérivation δ se prolonge en une k-dérivation de $\tilde{\mathfrak{h}}$ et il existe un élément $\mathfrak{R}(\delta) \in \mathcal{E}_2(\tilde{\mathfrak{h}})$, uniquement déterminé modulo $\mathbb{K}$ tel que

$$\delta(P_i) - [\mathfrak{R}(\delta),P_i] = \delta(Q_i) - [\mathfrak{R}(\delta),Q_i] = 0 \qquad (i=1,\ldots,s).$$

On peut écrire en décomposant sur la base donnée :

(15) $$\delta(P_i) = \sum_{j=1}^{s} P_j A_{j,i}(\delta) + Q_j B_{j,i}(\delta) + C_i(\delta)$$

(16) $$\delta(Q_i) = \sum_{j=1}^{s} P_j D_{j,i}(\delta) + Q_j E_{j,i}(\delta) + F_i(\delta)$$

Par les relations de Jacobi, on a

$$0 = \delta([P_i,Q_j]) = A_{j,i}(\delta) + E_{i,j}(\delta)$$

$$0 = \delta([P_i,P_j]) = -B_{j,i}(\delta) + B_{i,j}(\delta)$$

$$0 = \delta([Q_i,Q_j]) = D_{j,i}(\delta) - D_{i,j}(\delta).$$

Il suffit de comparer (15) à (13), (16) à (14) en tenant compte de (12) pour obtenir $\mathfrak{R}(\delta) = X$ donné par (8), (9), (10).

L'unicité modulo $\mathbb{K}$ résulte de ce que le commutant de $\tilde{\mathfrak{h}}$ dans $\mathcal{E}_2(\tilde{\mathfrak{h}})$ est égal à $\mathbb{K}$. On vérifie que l'on a la

II.8. DEFINITION.

On pose

(17) $$\mathfrak{R}(\delta) = \sum_{i=1}^{s} P_i\delta(Q_i) - Q_i\delta(P_i)$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} P_iP_j[\delta(Q_i),Q_j] + 2P_i \vee Q_j[\delta(P_j),Q_i] - Q_iQ_j[\delta(P_i),P_j]$$

et

(18) $$\theta(\delta) = \delta - \mathfrak{R}(\delta).$$

et $\mathfrak{R}(\delta)$ est un polynôme symétrique sans terme constant vérifiant II.7.

II.9. LEMME.

Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre 2-nilpotente sur $\mathbb{k}$ et $(Z_1,\ldots,Z_r)$ une base de $\mathfrak{h}^{\#}$.
Soit π un homomorphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{h}$ dans une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathcal{U}$ tel que $\pi(Z_1),\ldots,\pi(Z_r)$ sont algébriquement indépendants et engendrent un sous-corps de $\mathcal{U}$. Alors
π se prolonge en un isomorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ sur son image (et même de $\mathcal{K}(\mathfrak{h})$ lorsque $\mathcal{U}$ est un corps).

Ce lemme résulte du fait que $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ s'injecte dans l'algèbre enveloppante réduite $\mathcal{E}(\mathfrak{h}\,\mathcal{K}(\mathfrak{h})^{\#})$ qui est une algèbre de Weyl sur $\mathbb{K} = \mathcal{K}(\mathfrak{h})^{\#}$ et tout homomorphisme d'une algèbre de Weyl est injectif (on suppose que l'homomorphisme transforme 1 en 1)[3,7] .

III. SOUS-ALGEBRES 2-NILPOTENTES CARACTERISTIQUES.

III.1. DEFINITION.

1. Soient $\mathcal{U}$ une algèbre, $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{U}$ et $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{U}$.
   On dit que $A_1,\ldots,A_n$ sont algébriquement indépendants sur $\mathcal{A}$ lorsque zéro n'est jamais la valeur d'un polynôme ordonné en $A_1,\ldots,A_n$ à coefficients non tous nuls appartenant à $\mathcal{A}$.

2. Soient $\mathfrak{r}$ une algèbre de Lie, W un $\mathfrak{r}$-module, $T \in W$ et $V \subset W$.

On dit que T est un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo V de poids $\lambda(T)$ lorsqu'il existe $\lambda(T) \in \mathfrak{r}^*$ tel que pour tout $X \in \mathfrak{r}$, on ait

$$X.T \in \langle \lambda(T), X \rangle T + V$$

On pose alors

$$X.T = \langle \lambda(T), X \rangle T + \langle \mu(T), X \rangle$$

3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ étant fixée, on qualifie de caractéristique tout objet construit à partir de $\mathfrak{r}$ qui est invariant (globalement) par tout automorphisme de $\mathfrak{r}$.

III.2. Tout ce chapitre est consacré à la démonstration du Théorème III.3 pour le cas où $\mathbb{k}$ est algébriquement clos et sa transposition en le Théorème III.4 pour le cas général.

Ces théorèmes sont immédiatement suivis par un additif où on explicite certaines définitions passées sous silence ainsi que des conséquences immédiates des affirmations données précédemment.

Enfin, on remarquera que les propriétés des objets définis très rapidement occupent la majeure partie des énoncés.

III.3 THEOREME A.

Soit $\mathfrak{r}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension ρ sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique zéro et algébriquement clos.

Dans $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$, il existe une suite canonique (et unique) de $\mathbb{k}$-sous-espaces vectoriels strictement croissants :

$$\mathbb{k} = \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2 \ldots \subset \mathfrak{h}_n$$

déterminée par la condition $\mathcal{C}$ suivante.

On prend pour p un entier égal à $1,2,\ldots,n$, $Z_0 = 1 \in \mathcal{K}(\mathfrak{r})$, $\mathcal{E}_p$ la sous-algèbre et $\mathcal{F}_p$ le sous-corps de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ engendré par $\mathfrak{h}_p$, on note $\mathbb{K}_p$ le centre de $\mathcal{F}_p$ et on pose $\mathfrak{r}_{p+1} = (\mathfrak{r} + \mathcal{E}_p)\mathbb{K}_p$ (1).

($\mathcal{C}$): Pour tout p, $\mathfrak{h}_p$ est le $\mathbb{K}_{p-1}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ engendré par les éléments T de $\mathfrak{r}_p$ tels que

(20) 1. $[\mathfrak{r},T] \subset \mathbb{k}T + \mathbb{K}_{p-1}$ (2) ,

(21) 2. $[T,\mathfrak{h}_{p-1}] \subset \mathbb{K}_{p-1}$,

(22) 3. $[T,\mathbb{K}_{p-1}] = 0$

et le commutant de $\mathbb{K}_n$ dans $\mathfrak{r}_{n+1}$ est $\mathcal{E}_n\mathbb{K}_n$.

Les propriétés suivantes sont vraies :

($\mathcal{P}_1$) $\mathfrak{h}_p \subset \mathcal{U}(\mathfrak{r})\mathbb{K}_{p-1}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}_{p-1}$ de dimension finie et $[\mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_p] \subset \mathbb{K}_{p-1} \subset \mathfrak{h}_p^{\#}$.

($\mathcal{P}_2$) Les ensembles $\mathfrak{h}_p$ et $\mathbb{K}_p$ sont caractéristiques (3) et invariants par l'antiautomorphisme principal de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ (4).

($\mathcal{P}_3$) Le centre $\mathfrak{h}_p^{\#}$ de $\mathfrak{h}_p$ contient Z_0 et pour toute base $(Z_0, Z_{p,1}, \ldots, Z_{p,r_p})$ de $\mathfrak{h}_p^{\#}$, $Z_{p,1}, \ldots, Z_{p,r_p}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{K}_{p-1}$ (5).

($\mathcal{P}_4$) (i) Il existe sur $\mathbb{K}_p$ et $\mathfrak{h}_p$ une graduation canonique, caractéristique et compatible avec la graduation de gr $\mathcal{U}(\mathfrak{r})$ (6). Elle est déterminée par la donnée d'une base symplectique de $\mathfrak{h}_n$:

(23) $$\mathcal{B}_n = (Z_o, Z_{n,1}, \ldots, Z_{n,r_n} \; ; P_1, \ldots, P_{s_n} \; ; Q_1, \ldots, Q_{s_n})$$

et des bases symplectiques de $\mathfrak{h}_p$ ayant la forme

$$\mathcal{B}_p = (Z_o, Z_{p,1}, \ldots, Z_{p,r_p} \; ; P_1, \ldots, P_{s_p} \; ; Q_1, \ldots, Q_{s_p}) \quad (7)$$

où $0 = s_1 < s_2 \ldots < s_n < \frac{\rho}{2}$ (8)

et tous les éléments de base sont homogènes avec $\deg P_i + \deg Q_i = 1$.

De plus, pour toute base de $\mathfrak{r}$, il existe un réordonnement $(Y_1, \ldots, Y_\rho)$ pour lequel ce qui suit est vrai.

(ii) Tout élément T de $\mathcal{B}_p$ appartient à $\theta_{p-1}(\mathfrak{r}\mathbb{K}_{p-1})^{(7)} \cap \mathcal{U}(\mathfrak{r})E_{p-1}^{-1}$ (9), est un vecteur propre de l'antiautomorphisme principal de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$, vérifie (20), (21), (22) et admet une expression unique

(24) $$T = \sum_{i=o}^{t_{p-1}} \lambda_i \vee Y_i + \mathcal{R}_{p-1}\left(\sum_{i=o}^{t_{p-1}} \lambda_i \vee Y_i\right) \quad (7)(10)$$

où

$$Y_o = 1 \in \mathcal{K}(\mathfrak{r})$$

(25) $$\rho = t_o \geq t_{p-1} = \rho - r_1 - \ldots - r_{p-1} - 2s_{p-1} > t_p = \rho - r_1 - \ldots - r_p - 2s_p \geq 0$$

$\lambda_i \in \mathbb{K}_{p-1}$ est homogène de degré $= \deg T - 1 + \delta_{i,o}$

(iii) $Y_1, \ldots, Y_{t_p}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathcal{F}_p$ (11) et $(Z_o, \theta_p(Y_1), \ldots, \theta_p(Y_{t_p}))$ est une base sur $\mathbb{K}_p$ de $\theta_p(\mathfrak{r}\mathbb{K}_p)$.

Tout élément $Y \in \mathfrak{r}$ s'écrit de manière unique

(26) $$Y = \sum_{i=o}^{t_p} \lambda_i \vee \theta_p(Y_i) + \mathcal{R}_p(Y) \quad (7)$$

avec les $\lambda_i \in \mathbb{K}_p$ homogènes de degré $\delta_{i,o}$ et

$$\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p \cap \theta_p(\mathfrak{r}\mathbb{K}_p) = \mathbb{K}_p$$

(iv) Avec $\mathfrak{r}_p^{\sim} = \mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p + \theta_p(\mathfrak{r}\mathbb{K}_p)$, $(\mathfrak{r}_p^{\sim}, Z_o, \mathrm{ad})$ est une algèbre de Lie bilatère sur $\mathbb{K}_p$ dont l'algèbre enveloppante réduite $\mathcal{E}(\mathfrak{r}_p^{\sim})$ s'identifie à $\mathcal{U}(\mathfrak{r})\mathbb{K}_p$ et le corps enveloppant réduit $\mathcal{F}(\mathfrak{r}_p^{\sim})$ à $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$.

(v) Il existe un isomorphisme canonique τ (notée exponentiellement) de $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_n\mathbb{K}_n) + \theta_n(\mathfrak{r}\mathbb{K}_n)$ sur une sous-algèbre de Lie caractéristique de $\mathcal{R}(\mathfrak{r})$ muni du crochet de Poisson, il commute à l'antiantomorphisme principal, conserve la graduation, s'identifie sur $\mathfrak{r}$ avec l'injection canonique et sur $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_n\mathbb{K}_n)$ avec l'inverse de la symétrisation (12).

On a

(27) $\qquad (\lambda \vee X)^{\tau} = \lambda^{\tau}X^{\tau}$ (13) $\qquad (\lambda \in \mathbb{K}_n, X \in \mathfrak{r})$

et $Y_1^{\tau}, \ldots, Y_{t_p}^{\tau}$ sont algébriquement indépendants sur le corps des fractions rationnelles engendré par $\mathfrak{h}_p^{\tau}$ dans $\mathcal{R}(\mathfrak{r})$.

$(\mathcal{P}_5)$ On pose $R_p = r_1 + \ldots + r_p$ et $(Z_1, \ldots, Z_{R_n}) = (Z_{1,1}, \ldots, Z_{1,r_1}, Z_{2,1}, \ldots, Z_{n,r_n})$.
Alors la matrice

$$(Y_i, Z_j)_{i=1,\ldots,t_p; j=1,\ldots,R_p}$$

est de rang t_p si et seulement si $p = n$.

III.3.2. <u>ADDITIF</u>.

A_1. Ces notations sont prises aussi pour $p = 0$.

A_2. T est donc un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathbb{K}_{p-1}$ mais aussi un $\mathfrak{r}\mathbb{K}_{p-1}$-vecteur propre modulo $\mathbb{K}_{p-1}$ de poids appartenant à $(\mathfrak{r}\mathbb{K}_{p-1})^*$.

A_3. L'ensemble $\mathbb{K}_p$ est un sous-corps de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ qui est caractéristique et engendré sur $\mathbb{K}_{p-1}$ par $\mathfrak{h}_p^{\#}$. Comme $\mathfrak{h}_p$ est 2-nilpotente, $\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p$ est une algèbre de Heisenberg caractéristique de centre $\mathbb{K}_p = Z_o\mathbb{K}_p$ (cf. II.5).

A_4. Cet antiautomorphisme est le prolongement canonique à $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ de l'antiautomorphisme principal de $\mathcal{U}(\mathfrak{r})$ [3].

A_5. Ainsi $\mathbb{K}_p = \mathbb{K}_{p-1}(Z_{p,1},\ldots,Z_{p,r_p})$ est une extension pure de $\mathbb{K}_{p-1}$ et $(\mathfrak{h}_p, Z_0, \mathrm{ad})$ est une algèbre de Lie bilatère sur $\mathbb{K}_{p-1}$ dont l'algèbre enveloppante réduite $\mathcal{E}(\mathfrak{h}_p)$ s'identifie à $\mathcal{E}_p$ et dont le corps enveloppant réduit $\mathcal{F}(\mathfrak{h}_p)$ s'identifie à $\mathcal{F}_p$ d'après (II.9). Observer aussi la définition implicite de r_p.

A_6. C'est-à-dire qu'elle coïncide avec celle du gradué $\mathrm{gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{r})$ associé à $\mathcal{U}(\mathfrak{r})$ après passage à ce gradué.

A_7. Donc $(Z_0;P_1,\ldots,P_{s_p};Q_1,\ldots,Q_{s_p})$ est une $\mathbb{K}_p$-base symplectique de l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p$.

On note $\mathfrak{R}_p$ (et aussi $\theta_p = \mathrm{Id} - \mathfrak{R}_p$) l'application $\mathfrak{R}$ (et aussi $\theta = \mathrm{Id} - \mathfrak{R}$) défini en (II.8) pour cette situation.

On pose aussi $\theta_0 = \mathrm{Id}$, $\mathfrak{R}_0 = 0$.

Clairement, $\mathfrak{R}_p$ est $\mathbb{K}_{p-1}$-linéaire à droite et à gauche et compte tenu de son expression donnée en II.8, elle conserve aussi le degré dans la formule (24) puisque $\deg P_i + \deg Q_i = 1$ et $\deg[X,P_i] = \deg P_i$, $\deg[X,Q_i] = \deg Q_i$ (car la graduation est caractéristique, donc $\mathfrak{r}$-invariante).

A_8. Ainsi, $\mathfrak{h}_{p-1}\mathbb{K}_{p-1}$ admet comme supplémentaire dans $\mathfrak{h}_p$ l'espace

$$\bigoplus_{i=1}^{r_p} Z_{p,i}\mathbb{K}_{p-1} \oplus \bigoplus_{i=s_{p-1}+1}^{s_p} (P_i\mathbb{K}_{p-1} \oplus Q_i\mathbb{K}_{p-1})$$

qui est de dimension $t_{p-1} - t_p$ d'après (25).

A_9. On note E_{p-1} l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}_{p-1}$ qui sont en même temps des semi-invariants [3] de $\mathcal{U}(\mathfrak{r})$. L'ensemble E des semi-invariants de $\mathcal{U}(\mathfrak{r})$ est une algèbre commutative et tout élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{r})E^{-1}$ engendre un espace vectoriel de dimension finie sous l'action adjointe de $\mathfrak{r}$. Si $\mu \in E$, et $X \in \mathfrak{r}$, on a un nombre $c \in \mathbb{k}$ tel que

$$X\mu = \mu X + c\mu$$

d'où

$$\mu^{-1}X = (X+c)\mu^{-1} \quad \text{et} \quad \mu^{-1}(X-c) = X\mu^{-1}$$

et cette relation montre que $\mathcal{U}(\mathfrak{r})\mu^{-1} = \mu^{-1}\mathcal{U}(\mathfrak{r})$ est un $\mathcal{U}(\mathfrak{r})$- bimodule.

Tout vecteur de la base $\mathcal{B}_p$ et plus généralement tout polynôme en ces vecteurs de base appartient à $\mathcal{U}(\mathfrak{r})E_{p-1}^{-1}$ et engendre sous l'action adjointe de $\mathfrak{r}$ un espace vectoriel de dimension finie sur k.

A_{10}. Comme $P_1,\dots,P_{s_p},Q_1,\dots,Q_{s_p}$ sont des $\mathfrak{r}$-vecteurs propres modulo $\mathbb{K}_{p-1}$, donc aussi des $\mathfrak{r}\mathbb{K}_{p-1}$-vecteurs propres modulo $\mathbb{K}_{p-1}$, il existe $\lambda(T)$ et $\mu(T) \in (\mathfrak{r}\mathbb{K}_{p-1})^*$ tels que pour tout $Y \in \mathfrak{r}\mathbb{K}_{p-1}$

$$[Y,T] = <\lambda(T),Y>T + <\mu(T),Y>$$

et il vient

$$\mathcal{R}_p(T) = \sum_{i=1}^{s_p} P_i \vee Q_i \; <\lambda(Q_i),T> + P_i <\mu(Q_i),T> - Q_i <\mu(P_i),T>$$

Par récurrence, on voit que $\mathbb{K}_p(Q_1,\dots,Q_{s_p})$ est un corps simple au sens de [8] car $\mathcal{R}_p(T)$ est de degré $\leqslant 1$ en P_i.

A_{11}. En particulier, les sommes suivantes sont des sommes directes :

$$\bigoplus_{i=1}^{t_p} Y_i\mathbb{K}_p \oplus \mathcal{F}_p$$

$$\bigoplus_{i=1}^{t_p} Y_i\mathbb{K}_p \oplus \mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p)$$

A_{12}. Car $\mathfrak{h}_n\mathbb{K}_n$ (ou $\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p$) est une algèbre 2-nilpotente et sur $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_n\mathbb{K}_n)$ la symétrisation définit un isomorphisme d'après (I.5) lemme 2.

A_{13}. L'application τ est naturellement déterminée sur $\mathbb{K}_p$ qui est commutatif, sur $P_1,\dots,P_{s_p},Q_1,\dots,Q_{s_p}$ par (24) et (27) puisqu'elle est déjà définie par récurrence sur $\mathcal{R}_{p-1}(\mathfrak{r}\mathbb{K}_{p-1})$. Elle se prolongera naturellement à $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p)$ d'après A_{12}.

Remarquer aussi que par récurrence que τ conservera la graduation et sera compatible avec la graduation de $\mathrm{gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{r})$.

III.3.3. Démonstration.

Dans la suite X est un élément générique de $\mathfrak{r}$.

Construction de $\mathfrak{h}_1$.

On a $\Bbbk = \mathfrak{h}_0 = \mathbb{K}_0 = \mathcal{E}_0 = \mathfrak{F}_0$ et $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} \oplus \Bbbk \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{r})$.

L'ensemble des $\mathfrak{r}$-vecteurs propres dans $\mathfrak{r}_1$ contient $Z_0 = 1$ et est non réduit à $\Bbbk$ d'après le Théorème de Lie appliqué à l'action de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{r}$. On peut même démontrer que $\mathfrak{r}_1$ est la somme directe de ses sous-espaces de poids distincts. Il existe donc une base $(Z_0, Z_{1,1}, \ldots, Z_{1,r_1})$ de $\mathfrak{h}_1$ formée de $\mathfrak{r}$-vecteurs propres appartenant à $\mathfrak{r}$ excepté Z_0. Par sa définition même, $\mathfrak{h}_1$ est caractéristique ; elle est aussi commutative car forméeà partir de semi-invariants. On vérifie immédiatement $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Pour $\mathcal{P}_4$,

on définit $\deg Z_{1,i} = 1$ et $\deg Z_0 = 0$, d'où (i) .

On a $s_1 = 0$, $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 = 0$, $\theta_0 = \theta_1 = \mathrm{Id}$, $\mathbb{K}_1 = \mathfrak{F}_1 = \Bbbk(Z_{1,1}, \ldots, Z_1, r_1)$

et (ii) est immédiat et (iii) est conséquence du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

(iv) On a $\mathfrak{r}_1^{\sim} = \mathfrak{r}\mathbb{K}_1$; le résultat annoncé est trivial et est un cas particulier de [6] III.3.2.

De même (v) est évident par A_{13} ; la démonstration de $\mathcal{P}_6$ sera faite dans la récurrence.

<u>Construction de</u> $\mathfrak{h}_p$ <u>à partir de</u> $\mathfrak{h}_{p-1}$. On pose $q=p-1$.

Supposons $\mathfrak{h}_q$ déterminé et les propriétés énoncées valables en ce qui concerne l'indice q. Soit $(Z_0, Z_{q,1},\dots,Z_{q,r_q} ; P_1,\dots,P_{s_q} ; Q_1,\dots,Q_{s_q})$ la base symplectique de $\mathfrak{h}_q$ donnée par $\mathcal{P}_4(i)$. On a

$$\mathbb{K}_q = \mathbb{K}_{q-1}(Z_{q,1},\dots,Z_{q,r_q})$$

$\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$ est une algèbre de Heisenberg caractéristique de centre $\mathbb{K}_q$ et $(Z_0;P_1,\dots,P_s ; Q_1,\dots,Q_s)$ en est une base symplectique.

On identifie canoniquement

$$\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q = \mathcal{E}_1(\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q)$$

$$\mathcal{E}_q\mathbb{K}_q = \mathcal{E}(\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q) \quad (\text{et on pose } \mathcal{E}_{q,e} = \mathcal{E}_e(\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q),\ \mathcal{E}_{q,\infty} = \mathcal{E}(\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q))$$

$$\mathfrak{F}_q = \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_q) = \mathfrak{F}(\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q).$$

Les algèbres de Lie $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}\mathbb{K}_q, \mathfrak{r}\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_{q,2}$ agissent dans $\mathcal{E}_{q,1}$ par l'action adjointe et $P_1,\dots,P_{s_q}, Q_1,\dots,Q_{s_q}$ en sont des vecteurs propres modulo $\mathbb{K}_q$. On remarquera que $\theta_q(\mathfrak{r}\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_{q,2}) \subset \mathfrak{r}\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_{q,2}$ et $\theta_q(\mathcal{E}_{q,2}) \subset \mathbb{K}_q$ car $\theta_q\mathcal{R}_q = 0$.

III.3.4. <u>LEMME</u> 1.

> $\mathfrak{h}_p$ est le $\mathbb{K}_q$-sous-espace vectoriel engendré par $\mathfrak{h}_q$ et les éléments $\theta_q(T)$ où $T \in \mathfrak{r}\mathbb{K}_q$ est un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathcal{E}_{q,2}$ et commute à $\mathbb{K}$.

Par définition $\mathfrak{h}_q$ est engendré par les éléments $T \in \mathfrak{r}\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_{q,\infty}$ qui sont des $\mathfrak{r}$-vecteurs propres modulo $\mathbb{K}_q$ et qui vérifient

(21)' $\quad [T, \mathfrak{h}_q] \subset \mathbb{K}_q$

(22)' $\quad [T, \mathbb{K}_q] = 0$, (d'où $[T, \mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q] \subset \mathbb{K}_q$).

Comme $\mathfrak{h}_q$ est 2-nilpotente, tout élément de $\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$ fera l'affaire et $\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q \subset \mathfrak{h}_p$.

Par ailleurs, tous les éléments de $\mathfrak{r}\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_{q,2}$ transporte $\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$ dans $\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$, ce que ne fait jamais un élément de $\mathcal{E}_{q,\infty} \setminus \mathcal{E}_{q,2}$, et il suffit de se restreindre à $T \in \mathfrak{r}\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_{q,2}$.

Comme T commute à $\mathbb{K}_q$, $T - \mathfrak{R}_q(T)$ commute à $\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$; comme $[T, \mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q] \subset \mathbb{K}_q$, nécessairement $[\mathfrak{R}_q(T), \mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q] \subset \mathbb{K}_q$ et $\mathfrak{R}_q(T) \in \mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$. Cherchant à engendrer un supplémentaire dans $\mathfrak{h}_p$ de $\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$, on peut donc remplacer T par $\theta_q(T) = T - \mathfrak{R}_q(T)$. Ecrivons $T = T_1 + T_2$ où $T_1 \in \mathfrak{r}\mathbb{K}_q$ et $T_2 \in \mathcal{E}_{q,2}$. Alors $\theta_q(T_2) \in \mathbb{K}_q$ et $\theta_q(T) \in \theta_q(T_1) + \mathbb{K}_q$ et on peut remplacer $\theta_q(T)$ par $\theta_q(T_1)$. Par ailleurs, si T est un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathcal{E}_{q,2}$, T_1 l'est aussi. Notons $\mathbb{K}_q'$ le commutant de $\mathbb{K}_q$ dans $\mathfrak{r}\mathbb{K}_q$. Le lemme 1 résulte alors du

LEMME 2.

Soit $T \in \mathbb{K}_q'$ un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathcal{E}_{q,2}$. Alors $\theta_q(T)$ est un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathbb{K}_q$ de poids $\lambda(T)$ et il commute à $\mathfrak{h}_q K_q$.

On a $[T, \mathbb{K}_q] = 0$, donc $[\theta_q(T), \mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q] = 0$. Soient $\lambda(T) \in \mathfrak{r}^*$ et $\mu(T) \in \mathcal{L}(\mathfrak{r}, \mathcal{E}_{q,2})$ tels que

$$[X,T] = <\lambda(T),X> T + <\mu(T),X>$$

Il vient

$$[X,\theta_q(T)] = [X, T - \mathfrak{R}_q(T)] = <\lambda(T),X> (T - \mathfrak{R}_q(T)) + C$$

où

$$C = <\lambda(T),X> \mathfrak{R}_q(T) + <\mu(T),X> - [X, \mathfrak{R}_q(T)] \in \mathcal{E}_{q,2}$$

Comme $[X, \mathfrak{h}_q K_q] \subset \mathfrak{h}_q K_q$ et $\theta_q(T)$ commute à $\mathfrak{h}_q K_q$, le premier terme commute à $\mathfrak{h}_q K_q$, donc le dernier aussi, d'où $C \in \mathbb{K}_q$ cqfd.

LEMME 3.

(i) $(\mathfrak{r}\,\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_{q,2}, Z_0, \mathrm{ad})$ est une algèbre de Lie bilatère sur $\mathbb{K}_q$ et $\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$, $\mathcal{E}_{q,2}$ en sont des idéaux.

(ii) Le commutant $\mathbb{K}'_q$ de $\mathbb{K}_q$ dans $\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q)$ est un idéal de cette algèbre de Lie bilatère.

(iii) Les idéaux $\mathbb{K}_q \subset \mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q \subset \mathcal{E}_{q,2}$ sont caractéristiques.

Ceci ne présente aucune difficulté.

Vérifions les propriétés $\mathcal{P}$

$(\mathcal{P}_1)$. $\theta_q(\mathfrak{r}\,\mathbb{K}_q)$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}_q$, donc $\mathfrak{h}_p$ aussi.
Soient $T_1, T_2 \in \mathbb{K}'_q$ des $\mathfrak{r}$-vecteurs propres modulo $\mathcal{E}_{q,2}$. On a

$$[T_1 - \mathcal{R}_q(T_1), T_2 - \mathcal{R}_q(T_2)] \in [T_1, T_2] + \mathcal{E}_{q,2}$$

puisque $\mathcal{E}_{q,2}$ est un idéal de $\mathfrak{r}\,\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_{q,2}$. En notant avec les mêmes lettres $\lambda(T_1)$ et $\lambda(T_2)$ les prolongements $\mathbb{K}_q$-linéaires des poids de T_1 et T_2, on a

$$[T_1, T_2] = \langle \lambda(T_2), T_1 \rangle T_2 + \langle \mu(T_2), T_1 \rangle = - \langle \lambda(T_1), T_2 \rangle T_1 - \langle \mu(T_1), T_2 \rangle$$

(où $\mu(T_1), \mu(T_2) \in \mathcal{L}(\mathfrak{r}\,\mathbb{K}_q, \mathcal{E}_{q,2})$).

Le seul cas où éventuellement $[\theta_q(T_1), \theta_q(T_2)] \neq 0$ est celui où $T_1 \not\equiv T_2$ mod $\mathcal{E}_{q,2}$.
On a alors nécessairement $\langle \lambda(T_2), T_1 \rangle = \langle \lambda(T_1), T_2 \rangle = 0$ et $[T_1, T_2] \equiv 0$ mod $\mathcal{E}_{q,2}$, d'où

$$[\theta_q(T_1), \theta_q(T_2)] \in \mathcal{E}_{q,2}$$

et comme de plus

$$[[\theta_q(T_1), \theta_q(T_2)], \mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q] = 0$$

on a $[\theta_q(T_1), \theta_q(T_2)] \in \mathbb{K}_q$ cqfd.

$(\mathcal{P}_2)$. Par récurrence, $\mathfrak{h}_q, \mathbb{K}_q$ sont invariants par l'antiautomorphisme principal, et il en est de même de $\mathfrak{r}_p$ car c'est un $\mathbb{K}_q$-espace vectoriel à gauche et à droite. La définition de $\mathfrak{h}_p$ est donc aussi invariante et par suite $\mathfrak{h}_p$ est elle même invariante. Cette définition est aussi intrinsèque, donc $\mathfrak{h}_p$ est invariante par tout automorphisme de $\mathfrak{r}$.

$(\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_5)$.

On sait que $\mathfrak{h}_p$ est engendré par $\mathfrak{h}_q$ et des éléments de la forme $\theta_q(T)$ où $T \in \mathfrak{r}\mathbb{K}_q$, commute à $\mathbb{K}_q$ et est un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathcal{E}_{q,2}$.
Soient $Y_1, \ldots, Y_{t_q}$ donnés par $\mathcal{P}_4$(iii). Tout $T \in \mathfrak{r}\mathbb{K}_q$ s'écrit donc

$$T = \sum_{i=0}^{t_q} \lambda_i \vee \theta_q(Y_i) + \mathfrak{R}_q\Big(\sum_{i=0}^{t_q} \lambda_i \vee \theta_q(Y_i)\Big).$$

d'où

$$\theta_q(T) = \sum_{i=0}^{t_q} \lambda_i \vee \theta_q(Y_i) \qquad (\text{car } \theta_q \mathfrak{R}_q = 0 \text{ et } \theta_q\theta_q = \theta_q)$$

On peut donc se restreindre à prendre

$$T = \sum_{i=1}^{t_q} \lambda_i \vee Y_i \tag{28}$$

Comme $\mathbb{K}_q = \mathbb{k}(Z_1, \ldots, Z_{R_q})$, T commute à $\mathbb{K}_q$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{t_q} \lambda_i [Y_i, Z_j] = 0 \qquad (j=1,\ldots,R_q) \tag{29}$$

Les éléments $Z_1, \ldots, Z_{R_q} \in \mathbb{K}_q$ sont homogènes, donc $[Y_i, Z_j]$ est aussi homogène de degré $=\deg Z_j$ d'après $\mathcal{P}_4$(i).

$(\mathcal{P}_5)$ Lorsque ce système est de rang $< t_q$, il existe une solution non nulle sous la forme (28) avec $\lambda_i \in \mathbb{K}_q = \mathbb{k}(Z_1, \ldots, Z_{R_q})$.
Soient ν le dénominateur commun des λ_i et $\nu_i = \lambda_i \nu$. On a

$$\nu T = \nu \vee T = \sum_{i=1}^{t_q} (\nu \vee \lambda_i) \vee T_i = \sum_{i=1}^{t_q} \nu_i \vee T_i$$

Il existe un semi-invariant μ tel que $\nu_i \in \mathcal{U}(\mathfrak{r})\mu^{-1}$ pour tout i, donc $\nu T \in \mathcal{U}(\mathfrak{r})\mu^{-1}$ aussi et νT engendre un $\mathbb{k}$-espace vectoriel V de dimension finie sous l'action adjointe de $\mathfrak{r}$, donc de $\mathcal{U}(\mathfrak{r})$.

Appliquant le Théorème de Lie à $V/V \cap \mathcal{E}_{q,2}$, on trouve un élément $T_1 \in \mathfrak{r}\mathbb{K}_q \setminus \mathcal{E}_{q,2}$ qui est $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathcal{E}_{q,2}$ et $\mathfrak{h}_p$ est strictement plus grand que $\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$ cqfd.

$(\mathcal{P}_4)$ (i et ii)

On décompose $\nu_i = \sum_{d \leq D} \nu_{i,d}$ en ses composantes homogènes $\nu_{i,d}$ de degré d et chaque $\nu_{i,d}$ est un polynôme en $Z_1,\dots,Z_{R_q}$.

La démonstration précédente s'applique aussi bien à la composante de degré $d+1$ de νT :

$$(\nu T)_{d+1} = \sum_{i=1}^{t_q} \nu_{i,d} \; Y_i$$

et nous fournit un élément $A_{d+1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{r})$ tel que

$$\mathrm{ad}A_{d+1}(\nu T)_{d+1}$$

est un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathcal{E}_{q,2}$

Comme $\nu T = \sum_{d \leq D+1} (\nu \vee T)_d$, on a

$$\sum_{i=1}^{tq} \sum_{d \leq D} \nu_{i,d} \, [Y_i, Z_j] = 0$$

donc chaque composante homogène de νT est encore solution de (29) et elle commutera à $\mathbb{K}_q$.

Il est facile de voir que si T est un $\mathfrak{r}$-vecteur propre mod $\mathcal{E}_{q,2}$, $T\mathbb{K}_q + \mathcal{E}_{q,2}$ est stable sous l'action de $\mathfrak{r}$. Cette action conserve aussi l'homogénéité et le degré compte tenu des formules (26) (il suffit de faire un calcul modulo $\mathcal{E}_{q,2}$, ce qui est évident).

Ainsi $\mathrm{Ad}\, A_{D+1}(\nu T)_{D+1}$ est encore homogène de degré $D+1$ et commute à $\mathbb{K}_q$; de plus, c'est un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathcal{E}_{q,2}$.

Si $\mathrm{Ad}\, A_{D+1}(\nu T)_D \notin \mathcal{E}_{q,2}$, on peut refaire la démonstration de $\mathcal{P}_5$, d'où l'existence de A_D tel que

$$\mathrm{ad}A_D\mathrm{ad}A_{D+1}(\nu T)_D$$

soit un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathcal{E}_{q,2}$. Dans le cas contraire on passe à $D-1$. Réitérant ce procédé tant qu'on n'a pas tout transformé en vecteur propre, on voit apparaître un élément $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{r})$ tel que

$$\mathrm{ad}\, A.T\nu = \sum_{d} \mathrm{ad}A(T\nu)_d \notin \mathcal{E}_{q,2}$$

et chacun des $\mathrm{ad}A(T\nu)_d$ est soit un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathcal{E}_{q,2}$, soit un élément de $\mathcal{E}_{q,2}$. Cette relation montre d'abord que $\mathrm{ad}A.T\nu \equiv T\lambda \mod \mathcal{E}_{q,2}$ où $\lambda \in \mathbb{K}_q \setminus \{0\}$ et ensuite que T peut s'obtenir comme $\mathbb{K}_q$-combinaison linéaire $\mathrm{mod}\, \mathcal{E}_{q,2}$ de $\mathfrak{r}$-vecteurs propres modulo $\mathcal{E}_{q,2}$ qui sont homogènes.

Un vecteur propre de la forme précédente est en plus dans $\mathcal{U}(\mathfrak{r})E_q^{-1}$. En effet, il est de la forme

$$T = \mathrm{ad}A. \sum_{i=1}^{t_q} \lambda_i \vee Y_i$$

où $\lambda_i \in \mathbb{k}[Z_1,\dots,Z_{R_q}] \subset \mathcal{U}(\mathfrak{r})E_q^{-1}$. Il vient alors, puisque sous l'action de X, $\mathcal{U}(\mathfrak{r})E_q^{-1}$ est invariant et les éléments $Y_i \in \mathfrak{r}$ se transforment en des éléments de $\mathfrak{r}$,

$$T = \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i \vee Y_i \in \mathcal{U}(\mathfrak{r})E_q^{-1} \quad (\text{les } \alpha_i \in \mathcal{U}(\mathfrak{r})E_q^{-1})$$

On a encore d'après II.8 (17) :

$$\mathcal{R}_q(X) = \sum_{i=1}^{s_q} P_i[X,Q_i] - Q_i[X,P_i] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s_q} P_iP_j[[X,Q_i],Q_j]$$
$$- Q_iQ_j[[X,P_i],P_j] + 2P_i \vee Q_j[[X,P_j],Q_i]$$

et lorsque tous les P_i,Q_i appartiennent à $\mathcal{U}(\mathfrak{r})E_q^{-1}$, il en est de même de $\mathcal{R}_q(X)$. Donc il en est aussi de même de

$$\theta_q(T) = \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i \vee Y_i - \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_j \mathcal{R}_q(Y_i)$$

D'après A_6, $\theta_q(T)$ est homogène et de degré $= \deg \alpha_i + 1$.

Comme θ_q est nul sur tout polynôme de $\mathcal{E}_{q,2}$ qui est symétrique et sans terme constant, on peut réexprimer $\sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i \vee Y_i$ sur la base $(Z_o, Y_1, \ldots, Y_{t_q})$ modulo ce sous-espace vectoriel et on trouve de cette manière $m = t_q - t_p$ éléments

$$(30) \qquad T_i = \sum_{j=0}^{t_q} Y_j \vee \lambda_{i,j}$$

ayant les propriétés ci-dessus et tels que

$$\mathfrak{h}_p = \mathfrak{h}_q K_q \oplus \theta(T_1)\mathbb{K}_q \oplus \ldots \oplus \theta(T_m)K_q$$

En diagonalisant, on complète $(Z_o; P_1, \ldots, P_{s_q}; Q_1, \ldots, Q_{s_q})$ en une base symplectique qui possède toutes les propriétés annoncées:

Supposons déjà construite une base symplectique $(Z_o, Z_{p,1}, \ldots, Z_{p,\alpha}; P_1, \ldots, P_\beta; Q_1, \ldots, Q_\beta)$.

Le $\mathbb{K}_q$-espace vectoriel V qu'elle engendre est évidemment $\mathfrak{r}$-stable.

Soit V_o le $\mathbb{K}_q$-espace vectoriel engendré par $(P_{s_q+1}, \ldots, P_\beta, Q_{s_q+1}, \ldots, _\beta)$, alors $V_o \oplus \mathbb{K}_q$ est $\mathfrak{r}$-stable. Il existe un unique élément $\mathcal{R}'(\theta_q(T_i) \in V_o$ tel que $\tilde{\theta}(T_i) = \theta_q(T_i) - \mathcal{R}'(\theta_q(T_i)$ commute à V (on remarquera que $\tilde{\theta}(T_i)$ commute déjà à $\mathfrak{h}_q$). On a alors

$$[X, \tilde{\theta}(T_i)] = \langle \lambda(T_i), X \rangle \tilde{\theta}(T_i) + C$$

où $C \in V_o \oplus K_q$.

Le premier membre commute à V, donc C aussi et $C \in K_q$; ainsi $\tilde{\theta}(T_i)$ est un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathbb{K}_q$ de poids $\lambda(T_i)$. On vérifie aussi facilement que $\tilde{\theta}(T_i)$ est encore homogène de même degré que T_i et appartient encore à $\mathcal{U}(\mathfrak{r})E_q^{-1}$.

Si $\tilde{\theta}(T_i)$ est central, on pose $Z_{p,\alpha+1} = \tilde{\theta}(T_i)$.

Sinon, soit j un indice tel que

$$|\tilde{\theta}(T_i), \tilde{\theta}(T_j) = \nu \in K_q \setminus \{0\} \quad (\text{et} \quad \nu \in \mathcal{U}(\mathfrak{r})E_q^{-1} \cap \mathbb{K}_q \Longrightarrow \nu = \lambda\mu^{-1} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathcal{U}(\mathfrak{r}),\ \mu \in E_q$$

$$\Longrightarrow \lambda = \nu\mu \in \mathbb{K}_q \cap E)$$

On a

$$[X,\nu] = [[X, \tilde{\theta}(T_i)], \tilde{\theta}(T_j)] + [\tilde{\theta}(T_i), [X, \tilde{\theta}(T_j)]] = \langle \lambda(T_i) + \lambda(T_j), X \rangle \nu$$

donc ν est un semi-invariant de poids $-(\lambda(T_i)+\lambda(T_j))$ et on peut alors poser $P_{\beta+1}=\tilde{\theta}(T_i)$, $Q_{\beta+1}=\tilde{\theta}(T_j\nu^{-1})$ (et $\tilde{\theta}(T_j\nu^{-1})$ est encore un $\mathfrak{r}$-vecteur propre modulo $\mathbb{K}_q$, est homogène et appartient à $\mathcal{U}(\mathfrak{r})E_q^{-1}$).

L'expression explicite des $\tilde{\theta}(T_i)$, compte tenu de l'homogénéité, entraine que c'est un vecteur propre de l'antiautomorphisme principal pruisque les coefficients appartiennent à $\mathbb{K}_q$ (dans lequel tout élément homogène de degré d est vecteur propre avec la valeur propre $(-1)^d$).

Ceci termine la preuve de $\mathcal{P}_4$(i) et (ii).

$\mathcal{P}_4$(iii).

On a les formules

$$T_i = \sum_{j=o}^{t_q} Y_j \vee \lambda_j$$

Comme les

$$\theta(T_i) = \sum_{j=o}^{t_q} \theta_q(Y_j) \vee \lambda_{i,j}$$

forment une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q$ dans $\mathfrak{h}_p$, la matrice

$$(\lambda_{i,j})_{i=1,\dots,m\ ;\ j=1,\dots,t_q}$$

est donc de rang $m=t_q-t_p$.

Changeant éventuellement l'ordre des vecteurs de la base donnée, on peut supposer que le mineur

$$(\lambda_{i,j})_{i=1,\dots,m\ ;\ j=t_p+1,\dots,t_q}$$

est de rang m. Dans ce cas

$$(Z_o,\theta_q(Y_1),\dots,\theta_q(Y_{t_p}),\theta_q(T_1),\dots,\theta_q(T_m))$$

est une base de $\theta_q(\mathfrak{r}\mathbb{K}_q)$

Comme $\theta_p\circ\theta_q=\theta_p$ et $\theta_p\circ\theta_q(T_i)\in\mathbb{K}_p$ $(i=1,\dots,m)$

$(Z_o,\theta_p(Y_1),\dots,\theta_p(Y_{t_p}))$ engendre $\theta_p(\mathfrak{r}\mathbb{K}_p)$, et on a les relations de dépendance (26).

L'unicité de ces expressions résulte de l'indépendance algébrique de $Y_1,\dots,Y_{t_p}$ que nous démontrerons maintenant.

(31) Soit $A = \sum_{\alpha} Y_1^{\alpha_1}\dots Y_{t_p}^{\alpha_{t_p}} \lambda_\alpha$

une expression polynôminale ordonnée à coefficients non tous nuls $\lambda_\alpha \in \mathcal{F}_p = \mathcal{F}(\mathfrak{h}_p K_p)$
Soit $\mu \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}_p)$ tel que $\lambda_\alpha \mu \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}_p)$ pour tout α.

Or $\mathfrak{h}_p$ admet pour base $(\theta(T_1),\dots,\theta(T_m),Z_o,P_1,\dots,P_{s_q},Q_1,\dots,Q_{s_p})$ et tout élément admet une expression

(32) $\lambda_\alpha \mu = \sum_{\beta} U_1^{\beta_1}\dots U_m^{\beta_m} \mu_{\alpha,\beta}$

où $\mu_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}(\mathfrak{h}_q K_q)$ et

(33) $U_i = \theta(T_i) = \sum_{j=o}^{t_q} \lambda_{i,j^\vee} Y_j - \mathcal{R}_q(\sum_{j=o}^{t_q} \lambda_{i,j^\vee} Y_j)$

et $\mathcal{R}_q \in \mathcal{E}_{q,2}$.

Reportant (33) dans (32) et (32) dans (31), on réexprime $A\mu$ comme un polynôme ordonné en $Y_1,\dots,Y_{t_q}$ à coefficients à droite appartenant à $\mathcal{E}(\mathfrak{h}_q K_q)$.
On se sert des relations de commutations de $\mathfrak{r}$, de $\mathfrak{r}$ avec $\mathfrak{h}_q K_q$ et des relations (26) pour l'indice q ; en ce faisant, chaque commutation fait perdre au moins un degré en $Y_1,\dots,Y_t$, on voit facilement qu'un terme de plus haut degré de $A\mu$ a pour coefficient le coefficient du terme correspondant du polynôme commutatif

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} y_1^{\alpha_1}\dots y_{t_p}^{\alpha_{t_p}} \Big(\sum_{j=1}^{t_q} \lambda_{i,j} y_j\Big)^{\beta_1}\dots\Big(\sum_{j=1}^{t_q} \lambda_{m,j} y_j\Big)^{\beta_m} \mu_{\alpha,\beta}$$

Compte tenu de nos hypothèses, ceux-ci ne sont pas tous nuls, par conséquent $A\mu$ est non nul.
Ceci termine la preuve de $\mathcal{P}_4$(iii) car la dernière assertion est à peu près évidente.

$\mathcal{P}_4$(iv).

Comme $\theta_p(\mathfrak{r}\,K_p)$ commute à $(P_1,\dots,P_{s_p},Q_1,\dots,Q_{s_p})$,

$$[\theta_p(\mathfrak{r}\,\mathbb{K}_p),\ \mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p] \subset \mathfrak{h}_p K_p$$

Par ailleurs, on a facilement

$$[\theta_p(X),\theta_p(Y)] \equiv [X,Y] \mod \mathcal{E}_{q,2}$$

et ceci commute à $P_1,\ldots,P_{s_p},Q_1,\ldots,Q_{s_p}$ donc

$$[\theta_p(X),\theta_p(Y)] \equiv \theta_p(|X,Y|) \mod \mathbb{K}_p$$

et par $\mathbb{K}_p$-linéarité, on montre facilement que $\mathfrak{r}^{\sim}_p$ est une algèbre de Lie bilatère sur $\mathbb{K}_p$ dont une base est

$$(\theta_p(Y_1),\ldots,\theta_p(Y_{t_p}),Z_o,P_1,\ldots,P_{s_p},Q_1,\ldots,Q_{s_p})$$

Grâce à l'indépendance algébrique de $Z_{p,1},\ldots,Z_{p,r_p}$ sur $\mathbb{K}_q$, $\mathbb{K}_q(Z_{p,1},\ldots,Z_{p,r_p})$ s'identifie au sous corps de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ engendré par $\mathbb{K}_q$ et $Z_{p,1},\ldots,Z_{p,r_p}$ et $\mathcal{F}(\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p)$ au sous-corps $\mathcal{F}_p$ de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ (cf. II.9).

L'indépendance algébrique de $Y_1,\ldots,Y_{t_p}$ sur $\mathcal{F}_p$ entraine aussi celle de $\theta(Y_1),\ldots,\theta(Y_{t_p}),P_1,\ldots,P_{s_p},Q_1,\ldots,Q_{s_p}$ sur $\mathbb{K}_p$, ce qui permet d'identifier $\mathcal{E}(\mathfrak{r}^{\sim}_p)$ avec une sous-algèbre de $\mathcal{U}(\mathfrak{r})\mathbb{K}_p$ d'où les injections

$$\mathfrak{r}^{\sim}_p \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{r}^{\sim}_p) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{r})\mathbb{K}_p$$

Or les relations (26) permettent aussi les injections

$$\mathfrak{r} \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{r}^{\sim}_p) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{r})\mathbb{K}_p$$

et par la propriété universelle

$$\mathcal{U}(\mathfrak{r}) \hookrightarrow \mathcal{E}(\mathfrak{r}^{\sim}_p) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{r})K_p$$

Comme $\mathcal{E}(\mathfrak{r}^{\sim}_p)$ est aussi un K_p- espace vectoriel, on a bien

$$\mathcal{E}(\mathfrak{r}^{\sim}_p) = \mathcal{U}(\mathfrak{r})\mathbb{K}_p$$

$\mathcal{P}_4$(v). Les résultats annoncés sont les transposées des résultats précédents en algèbre commutative et n'offrent pas de difficultés.

Le seule point inhabituel concerne le crochet de Poisson.

On a $\mathfrak{h}_p \subset \mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q) + \theta_q(\mathfrak{r}\mathbb{K}_q)$

On définit τ sur $\mathbb{K}_p$ comme l'unique isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}_q(Z_{p,1},\dots,Z_{p,r_p})$ sur $\mathbb{K}_q^\tau(Z_{p,1}^\tau,\dots,Z_{p,r_p}^\tau)$ tel que $Z_{p,i} \longrightarrow Z_{p,i}^\tau$.

Les relations $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$ permettent de vérifier que l'on peut étendre les scalaires de $\mathbb{K}_q$ à $\mathbb{K}_p$ et que τ est un isomorphisme d'algèbre de Lie bilatère de $\mathfrak{r}\mathbb{K}_p + \mathfrak{h}_p K_p$ sur son image.

Par exemple, si $X,Y \in \mathfrak{r} + \mathfrak{h}_p$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}_p$, on a

$$\begin{aligned}|\lambda X + X\lambda, \mu Y + Y\mu| &= [X,\mu]\lambda Y + \mu[X,Y]\lambda + \mu X[\lambda,Y]\\ &+ \lambda[X,\mu]Y + \lambda\mu[X,Y] + [\lambda,Y]\mu X\\ &+ [X,Y]\lambda\mu + X[\lambda,Y]\mu + Y[X,\mu]\lambda\\ &+ \lambda[X,Y]\mu + [\lambda,Y]X\mu + Y\lambda[X,\mu]\\ &= 4[X,Y] \vee \lambda\mu + 4[X,\mu]\lambda \vee Y - 4[Y,\lambda]\mu \vee X\end{aligned}$$

et on retrouve les relations habituelles du crochet. On obtient ainsi

$$[\lambda \vee X, \mu \vee Y]^\tau = \{X^\tau\lambda^\tau, Y^\tau\mu^\tau\}.$$

Comme $\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p$ est une algèbre de Heisenberg sur $\mathbb{K}_p$, τ se prolonge en un isomorphisme de $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p)$ sur son image par (I.5) lemme 2. et on doit seulement vérifier les relations de commutations entre $\mathfrak{r}\mathbb{K}_p$ et $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p)$. Comme $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p)$ commute à $\mathbb{K}_p$ on peut se restreindre aux relations de la forme.

$$C = 4|X,\lambda \vee P \vee Q| = |X,\lambda(PQ+QP) + (PQ+QP)\lambda|$$

où $\lambda \in \mathbb{K}_p$ et P,Q sont des éléments de la base symplectique de $\mathfrak{h}_p$.

On utilise les relations

$$[X,P] = \langle\lambda(P),X\rangle P + \langle\mu(P),X\rangle \quad \text{où} \quad \langle\lambda(P),X\rangle \in \mathbb{k} \text{ et } \langle\mu(P),X\rangle \in \mathbb{K}_q$$

d'où

$$C = [X,\lambda] \vee (PQ+QP) + \lambda \vee [X,QP+PQ]$$

$$[X,QP+PQ] = \langle\lambda(P)+\lambda(Q),X\rangle(QP+PQ) + \langle\mu(Q),X\rangle\, P + \langle\mu(P),X\rangle\, Q$$

et ceci permet alors de conclure.

III.4. THEOREME B.

Soit $\mathfrak{r}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension ρ sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique zéro.

Dans $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$, il existe une suite canonique (et unique) de $\mathbb{k}$-sous espaces vectoriels strictement croissants :

$$\mathbb{k} = \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{h}_n$$

déterminée par la condition $\mathcal{C}$ suivante.

On prend pour p un entier égal à $1,2,\ldots,n$, $Z_0 = 1 \in \mathcal{K}(\mathfrak{r})$

$\mathcal{E}_p$ la sous-algèbre et $\mathcal{F}_p$ le sous corps de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ engendrés par $\mathfrak{h}_p$.

On note $\mathbb{K}_p$ le centre de $\mathcal{F}_p$ et on pose $\mathfrak{r}_{p+1} = (\mathfrak{r} + \mathcal{E}_p)\mathbb{K}_p$ (1)

($\mathcal{C}$) : Pour tout p, $\mathfrak{h}_p$ est le plus grand K_{p-1}-sous espace vectoriel de $\mathfrak{r}_p$ tel que :

(40) 1. la représentation adjointe de $\mathfrak{r} K_{p-1}$ dans $\mathfrak{h}_p/K_{p-1}$ est semi-simple (2)

(41) 2. $[\mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p-1}] \subset \mathbb{K}_{p-1}$

(42) 3. $[\mathfrak{h}_p, \mathbb{K}_{p-1}] = 0$

et le commutant de $\mathbb{K}_n$ dans $\mathfrak{r}_{n+1}$ est $\mathcal{E}_n \mathbb{K}_n$.

Les propriétés suivantes sont vraies.

($\mathcal{P}_1$) $\mathfrak{h}_p \subset \mathcal{U}(\mathfrak{r})\mathbb{K}_{p-1}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}_{p-1}$ de dimension finie et $[\mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_p] \subset \mathbb{K}_{p-1} \subset \mathfrak{h}_p^{\#}$.

($\mathcal{P}_2$) Les ensembles $\mathfrak{h}_p$ et $\mathbb{K}_p$ sont caractéristiques (3) et invariants par l'antiautomorphisme principal de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ (4).

($\mathcal{P}_3$) Le centre $\mathfrak{h}_p^{\#}$ de $\mathfrak{h}_p$ contient Z_0 et pour toute base $(Z_0, Z_{p,1}, \ldots, Z_{p,r_p})$ de $\mathfrak{h}_p^{\#}$, $Z_{p,1}, \ldots, Z_{p,r_p}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{K}_{p-1}$ (5)

$(\mathcal{P}_4)$ (i). Il existe sur $\mathbb{K}_p$ et $\mathfrak{h}_p$ une graduation canonique, caractéristique et compatible avec la graduation de $gr\,\mathcal{U}(\mathfrak{r})$ [(6)]. Elle est déterminée par la donnée d'une base symplectique de $\mathfrak{h}_n$

$$\mathcal{B}_n = (Z_0, Z_{n,1}, \dots, Z_{n,r_n} \; ; \; P_1, \dots, P_{s_n} \; ; \; Q_1, \dots, Q_{s_n})$$

et des bases symplectiques de $\mathfrak{h}_p$ ayant la forme

$$\mathcal{B}_p = (Z_0, Z_{p,1}, \dots, Z_{p,r_p} \; ; \; P_1, \dots, P_{s_p} \; ; \; Q_1, \dots, Q_{s_p}) \; {}^{(7)}$$

où $\qquad 0 = s_1 < s_2 \dots < s_n < \rho/2$ [(8)]

et tous les éléments de la base sont homogènes avec $\deg P_i + \deg Q_i = 1$.

De plus, pour toute base de $\mathfrak{r}$, il existe un réordonnement $(Y_1, \dots, Y_\rho)$ pour lequel ce qui suit est vrai.

(ii). Tout élément T de $\mathcal{B}_p$ appartient à $\theta_{p-1}(\mathfrak{r}\mathbb{K}_p)$ ${}^{(7)} \cap \mathcal{U}(\mathfrak{r})E_{p-1}^{-1}$ [(9)], est un vecteur propre de l'antiautomorphisme principal, vérifie (41) et (42) et admet une expression unique

(44) $$T = \sum_{i=0}^{t_{p-1}} \lambda_i \vee Y_i + \mathcal{R}_{p-1}\Big(\sum_{i=1}^{t_{p-1}} \lambda_i \vee Y_i\Big) \; {}^{(7)(10)}$$

où $\qquad Y_0 = 1 \in \mathcal{K}(\mathfrak{r})$

(45) $$\rho = t_0 \geqslant t_{p-1} = \rho - r_1 \dots - r_{p-1} - 2s_{p-1} > t_p = \rho - r_1 \dots - r_p - 2s_p \geqslant 0$$

$\lambda_i \in \mathbb{K}_{p-1}$ est homogène de degré $= \deg T - 1 + \delta_{i,o}$

(iii). $Y_1, \dots, Y_{t_p}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathcal{F}_p$ [(11)] et $(Z_0, \theta_p(Y_i), \dots, \theta_p(Y_{t_p}))$ est une base sur $\mathbb{K}_p$ de $\theta_p(\mathfrak{r}\mathbb{K}_p)$.

Tout élément $Y \in \mathfrak{r}$ s'écrit de manière unique

(46) $$Y = \sum_{i=0}^{t_p} \lambda_i \vee \theta_p(Y_i) + \mathcal{R}_p(Y) \; {}^{(7)}$$

avec les $\lambda_i \in \mathbb{K}_p$ homogènes de degré $\delta_{i,o}$ et

$$\mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p \cap \theta_p(\mathfrak{r}\mathbb{K}_p) = \mathbb{K}_p$$

(iv). Avec $\mathfrak{r}_p^{\sim} = \mathfrak{h}_p\mathbb{K}_p + \theta_p(\mathfrak{r}\mathbb{K}_p)$, $(\mathfrak{r}_p^{\sim}, Z_o, \mathrm{ad})$ est une algèbre de Lie bilatère sur $\mathbb{K}_p$ dont l'algèbre enveloppante réduite $\mathcal{E}(\mathfrak{r}_p^{\sim})$ s'identifie à $\mathcal{U}(\mathfrak{r})\mathbb{K}_p$ et le corps enveloppant réduit $\mathcal{F}(\mathfrak{r}_p^{\sim})$ à $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$.

(v). Il existe un isomorphisme canonique τ (notée exponentiellement) de $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_n\mathbb{K}_n) + \theta_n(\mathfrak{r}\mathbb{K}_n)$ sur une sous-algèbre de Lie caractéristique de $\mathcal{R}(\mathfrak{r})$ muni du crochet de Poisson ; il commute à l'antiautomorphisme principal, conserve la graduation, s'identifie sur $\mathfrak{r}$ avec l'injection canonique et sur $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_n\mathbb{K}_n)$ avec l'inverse de la symétrisation [12].

On a

(47) $\qquad (\lambda \vee X)^{\tau} = \lambda^{\tau} X^{\tau}$ [13] $\qquad (\lambda \in \mathbb{K}_n \ ;\ X \in \mathfrak{r})$

et $Y_1^{\tau}, \ldots, Y_{t_p}^{\tau}$ sont algébriquement indépendants sur le corps des fractions rationnelles engendré par $\mathfrak{h}_p^{\tau}$ dans $\mathcal{R}(\mathfrak{r})$.

(vi) Les bases $\mathcal{B}_p$ sont réduisantes pour l'action de $\mathfrak{r}$ [14].

$(\mathcal{P}_5)$ On pose $R_p = r_1 + \ldots + r_p$ et $(Z_1, \ldots, Z_n) = (Z_{1,1}, \ldots, Z_{1,r_1}, Z_2, \ldots, Z_{n,r_n})$

Alors la matrice

$$(Y_i, Z_j)_{i=1,\ldots,t_p \ ;\ j=1,\ldots,R_p}$$

est de rang t_p si et seulement si $p = n$.

<u>ADDITIF AU THEOREME</u> B.

Les numéros omis dans la suite ci-dessous sont exactement les mêmes que pour le Théorème A ; on se reportera aux A_i correspondants.

B_2 : d'après (42), $\mathfrak{h}_p/\mathbb{K}_{p-1}$ est un $\mathfrak{r}\mathbb{K}_{p-1}$-module.

B_{14} : Ce qui signifie qu'en groupant les éléments de la base de manière symétrique (ie. P_i avec Q_i) et par paquets en respectant l'ordre, on engendre les sous-espaces irréductibles pour l'action adjointe de $r\mathbb{K}_{p-1}$.

Démonstration.

On passe à la clôture algébrique de $\mathbb{k}$ pour démontrer le Théorème A et à une sous-extension finie $\mathbb{k}'$ de $\mathbb{k}$ pour laquelle les bases symplectiques formées de r-vecteurs propres peuvent être construites.
On considère ensuite les objets invariants par le groupe de Galois de $\mathbb{k}'/\mathbb{k}$, ce qui redonnera les résultats annoncés. Sous l'action de ce groupe, les éléments de base se transforment en des éléments homogènes de même degré, ce qui permet de les diagonaliser en conservant l'homogénéité.

IV. CONJECTURE DE GELFAND ET KIRILLOV. (Notations de III).

IV.1. SYSTEME DE COORDONNEES CANONIQUES SUR $\mathfrak{r}^*$.

Considérons sur $\mathfrak{r}^*$ la structure quasi-symplectique défini par le crochet de Poisson. On appelle système de coordonnées canoniques (locales) une donnée $(z_1,\dots,z_\alpha \,;\, p_1,\dots,p_\beta \,;\, q_1,\dots,q_\beta)$
où les z_i sont centraux et $\{p_i,q_j\} = \delta_{i,j} \quad (i,j=1,\dots,\beta)$
et définissant un changement de coordonnées locales sur $\mathfrak{r}^*$.
On dira que ce système est <u>algébrique</u> lorsque ce changement de coordonnées locales est birationnel.

Partant de la base $\mathcal{B}_n$ dont l'existence est donnée dans le Théorème A, on construit facilement un système de coordonnées canoniques. La matrice

$$\{\theta_n(Y_i)^\tau, Z_j^\tau\}_{i=1,\dots,t_n;\, j=1,\dots,R_n}$$

est de rang t_n, et on obtient des éléments $q_i = Z_{j_i}^\tau$ $(i=1,\dots,t_n)$ tel que le mineur

$$\mathfrak{M} = \{\theta_n(Y_i)^\tau, q_j\}_{i=1,\dots,t_n,\, j=1,\dots,t_n}$$

soit de rang t_n.

Il existe aussi $R_n - t_n$ fonctions analytiques z_i de $Z_1^\tau,\dots,Z_{R_n}^\tau$ qui commutent à $\theta_n(Y_i)^\tau$ $(i=1,\dots,t_n)$ et qui définissent un changement de coordonnées locales de la forme $(Z_1^\tau,\dots,Z_{R_n}^\tau) \longrightarrow (z_1,\dots,z_{R_n-t_n}\,,\, q_1,\dots,q_{t_n})$.

On diagonalise le mineur $\mathfrak{M}$, d'où l'existence d'éléments $p_1',\dots,p_{t_n}'$ appartenant au $\mathbb{K}_n^\tau$ espace vectoriel V de base $(\theta_n(Y_1),\dots,\theta_n(Y_{t_n}))$ et vérifiant

$$\{p_i,q_j\} = \delta_{i,j} \qquad (i,j=1,\dots,t_n)$$

Il est clair que tout élément de V qui commute à $q_1,\dots,q_{t_n}$ est nul puisque $\mathfrak{M}$ est de rang t_n. On obtient facilement que les $\lambda_{i,j} = \{p_i,p_j\}$ appartiennent à $V \otimes \mathbb{K}_n^\tau$

et commutent à $q_1,\dots,q_{t_n}$, donc sont des éléments de $\mathbb{K}_n^\tau$.

En résolvant les équations différentielles (complètement intégrables) on montre qu'il existe des fonctions analytiques λ_i de $z_1,\dots,z_{R_n-t_n}, q_1,\dots,q_{t_n}$ tels que les

$$p_i = p_i' + \lambda_i \qquad (i=1,\dots,t_n)$$

commutent ensemble, ce qui achève de déterminer le système de coordonnées canoniques. On a ainsi la

IV.1. PROPOSITION. ($\mathfrak{r}$ résoluble sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), notations du Théorême A (ou B).

> Il existe sur $\mathfrak{r}^*$ un système de coordonnées canoniques de la forme
>
> $$(z_1,\dots,z_{R_n-t_n} ; p_1,\dots,p_{t_n} , P_1^\tau,\dots,P_{s_n}^\tau ; q_1,\dots,q_{t_n} , Q_1^\tau,\dots,Q_{s_n}^\tau)$$
>
> où tous les z_i sont des fonctions analytiques $\mathfrak{r}$-invariantes de $Z_1^\tau,\dots,Z_{R_n}^\tau$, tous les q_i appartiennent à $\{Z_1^\tau,\dots,Z_{R_n}^\tau\}$ et tous les p_i appartiennent à $\theta_n(\mathfrak{r}\mathbb{K}_n)^\tau$ modulo une fonction analytique de $Z_1^\tau,\dots,Z_{R_n}^\tau$.

Remarque : Les coordonnées q_i et Q_i^τ sont des fractions rationnelles qui appartiennent à $\mathfrak{h}_n^\tau$.

On se pose maintenant la question de déterminer une condition suffisante (et simple) pour qu'il existe un système algébrique de coordonnées canonique, c'est-à-dire plus exactement pour que nos intégrations successives soient algébriques.

IV.2. CAS D'UNE ALGEBRE DE LIE RESOLUBLE SCINDEE.

On suppose que $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal abélien dont l'action sur l'idéal nilpotent (que l'on peut supposer maximal) $\mathfrak{n}$ est semi-simple.

Soient $0 = \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_2 \ldots \subset \mathfrak{n}_n = \mathfrak{n}$ la suite centrale ascendante de $\mathfrak{n}$ et pour chaque $p = 1,2,\ldots,n$, une base $(N_{p,1},\ldots,N_{p,\nu_p})$ d'un supplémentaire dans $\mathfrak{n}_p$ de $\mathfrak{n}_{p-1}$ formée de $\mathfrak{a}$-vecteurs propres. On posera $q = p-1$.

Suivant la même méthode que dans le théorème A, on construit des sous-algèbres de Heisenberg $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{h}_n$, en complétant successivement à chaque étape une base symplectique de l'algèbre précédente. En ce faisant, on ne localisera que par des éléments de $\mathcal{C} = \mathcal{K}(\mathfrak{n})^{\#}$ et tous les éléments de base que l'on choisira seront des $\mathfrak{a}$-vecteurs propres :

1°. $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathbb{k}$ avec une base $(Z_0, Z_{1,1},\ldots,Z_{1,r_1}) = \mathcal{B}_1$

2°. $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{n}_2$ est une algèbre 2-nilpotente ; pour compléter la base précédente, en une base symplectique, on doit éventuellement localiser par des éléments de $[\mathfrak{n}_2,\mathfrak{n}_2] \subset \mathfrak{n}_1$. On construit comme pour le théorème A une base symplectique "supplémentaire à $\mathfrak{n}_1$" : $(Z_{2,1},\ldots,Z_{2,r_2} ; P_1,\ldots,P_{s_2} ; Q_1,\ldots,Q_{s_2})$.

Nous allons traiter le cas de $\mathfrak{h}_3$ pour avoir une idée du cas général.

3°. Tous les éléments $N_{3,1},\ldots,N_{3,\nu_3}$ sont déjà des $\mathfrak{r}$-vecteurs propres modulo $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_2)$; on peut remarquer que le calcul du commutant de $\mathfrak{h}_2^{\#}$ fait intervenir des coefficients dans $|\mathfrak{n}_3,\mathfrak{n}_2| \subset \mathfrak{n}_1$, donc on ne localisera que par des éléments de $\mathcal{C}$. Le commutant de $\mathfrak{h}_2^{\#}$ dans $\mathfrak{n}_3\mathbb{K}_1$ nous fournit les éléments $(Z_{3,1},\ldots,Z_{3,r_3} ; P_{s_2+1},\ldots,P_{s_3} ; Q_{s_2+1},\ldots,Q_{s_3})$.

Mais certains des $N_{3,i}$ ne commutent pas avec $\mathfrak{h}_2^{\#}$, c'est-à-dire si s_3' est la codimension du commutant de $\mathfrak{h}_2^{\#}$ dans $\sum_{i=1}^{\nu_3} N_{3,i}\mathbb{K}_1$, il existe s_3' éléments de de $\mathfrak{n}_3$, que l'on peut supposer être $N_{3,1},\ldots,N_{3,s'_3}$ et s'_3 éléments de $\mathfrak{h}_2^{\#}$, que l'on peut supposer être $Z_{2,1},\ldots,Z_{2,s'_3}$ tels que $\det([N_{3,i},Z_{2,j}])_{i,j=1,\ldots,s'_3} \neq 0$.

On pose alors $(Q'_1,\ldots,Q'_{s'_3}) = (Z_{3,1},\ldots,Z_{3,s'_3})$

et en diagonalisant la matrice précédente, on peut trouver des combinaisons linéaires P''_i de $\theta_3(N_{3,i}),\ldots,\theta_3(N_{3,s'_3})$ (l'application θ_3 est définie à partir de $(P_1,\ldots,P_{s_3} ; Q_1,\ldots,Q_{s_3})$ suivant II.8) qui vérifient $[P''_i,Q'_j] = \delta_{i,j}$.

On a $c_{ij} = [P''_i,P''_j] \in \mathfrak{h}_2^{\#}\ \mathbb{K}_1$ et on peut trouver des polynômes λ_i en $Q'_1,\ldots,Q'_{s'_3}$ tels que les $P'_i = P''_i + \lambda_i$ commutent ensemble.

Il suffit d'appliquer le lemme de Poincaré :

On détermine des éléments de $\mathfrak{h}_2^{\#}$ qui commutent à $P''_1,\ldots,P''_{s'_3}$ par soustraction du développement de Taylor (qui est un polynôme car l'action de $P''_1,\ldots,P''_{s'_3}$ est nilpotente : si $Z \in (Z_{2,1},\ldots,Z_{2,r_2})$, on notera

$$Z^{(3)} = Z - \sum_{i=1}^{s'_3} Q'_i[P''_i,Z] - \frac{1}{2!}\sum_{j,i=1}^{s'_3} Q'_iQ'_j[P''_j,[P'_i,Z]] - \ldots$$

(dans le cas présent, le polynôme de Taylor est du premier degré et

$$Z_{2,1}^{(3)} = Z_{2,2}^{(3)} = \ldots = Z_{2,s'_3}^{(3)} = 0).$$

On exprime tout élément de $\mathfrak{h}_2^{\#}$ comme fonction de $Q'_1,\ldots,Q'_{s'_3}$, $Z^3_{2,s'_{3+1}},\ldots,Z^3_{2,r_2}$

et on obtient

$$\lambda_i = \int_0^1 \sum_{j=1}^{s'_3} tC_{i,j}(tQ'_1,\ldots,tQ'_{s'_3})Q'_j\,dt$$

Dans notre cas, λ_i est un polynôme de degré < 2 en $Q'_1,\ldots,Q'_{s'_3}$ sans terme constant.

Ainsi on vient d'obtenir des nouveaux éléments $P'_1,\ldots,P'_{s'_3}$, $Q'_1,\ldots,Q'_{s'_3}$ où les Q'_i

sont des $Z_{2,i}$ ainsi que des éléments de base du "nouveau" centre de $\mathfrak{h}_3$ à partir des $Z_{2,i}$ par l'application $Z \longrightarrow Z^{(3)}$.

La base de $\mathfrak{h}_3$ sera notée abusivement

$$\mathcal{B}_3 = (Z_1^3,\ldots,Z_{R_3}^3 \;;\; P_1,\ldots,P_{s_3}, P_1',\ldots,P_{s_3}' \;;\; Q_1,\ldots,Q_{s_3}, Q_1',\ldots,Q_{s_3}')$$

où
$$(Z_1,\ldots,Z_{R_3}) = Z_{1,1},Z_{1,2},\ldots,Z_{1,r_1},Z_{2,1},\ldots,Z_{2,r_2},\ldots,Z_{3,r_3})$$

(en sous entendant que les éléments de la base qui sont nuls sont omis ; cette convention sera maintenue aussi dans la suite).

4° Le cas général.

Supposons qu'à chaque étape q, on ait déterminé ainsi des nouveaux éléments de base $(Z_{q,1},\ldots,Z_{q,r_q}, P_{s_{q-1}+1},\ldots,P_{s_q}, P'_{s'_{q-1}+1},\ldots,P'_{s'_q}, Q_{s_{q-1}+1},\ldots,Q'_{s'_q})$ et soustrait aux vecteurs de base du centre le développement de Taylor correspondant, d'où les applications

$$Z_{i,j} = Z_{i,j}^{(i)} \longrightarrow Z_{i,j}^{(i+1)} \longrightarrow \ldots \longrightarrow Z_{i,j}^{(q)}$$

On pose $R_q = r_1 + r_2 + \ldots + r_q$ et

$$(Z_0^{(q)},Z_1^{(q)},\ldots,Z_{R_q}^{(q)}) = (Z_0,Z_{1,1}^{(q)},Z_{1,2}^{(q)},\ldots,Z_{1,r_1},Z_{2,1}^{(q)},Z_{2,r_2}^{(q)}\ldots Z_{q,r_q}^{(q)})$$

On appelle $\mathfrak{h}_q$ le $\mathbb{k}$-espace vectoriel engendré par la "base" symplectique

$$\mathcal{B}_q = (Z_0^{(q)},\ldots,Z_{R_q}^{(q)} \;;\; P_1,\ldots,P_{s_q},P_1',\ldots,P_{s_q'}' \;;\; Q_1,\ldots,Q_{s_q}, Q_1',\ldots,Q_{s_q'}')$$

Ainsi $\mathfrak{h}_q$ est une algèbre 2-nilpotente sur $\mathbb{k}$. On note

$$\mathfrak{z}_q = \mathbb{k}[Z_1^{(q)},\ldots,Z_{R_q}^{(q)}] \quad , \quad \mathbb{K}_q = \mathbb{k}(Z_1^{(q)},\ldots,Z_{R_q}^{(q)})$$

$$\mathcal{C}_q = \mathcal{C} \cap \mathcal{U}(\mathfrak{n}_q)$$

On a les propriétés suivantes :

(i) Tout élément de la base $\mathcal{B}_q$ est dans $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_q)\mathcal{C}_{q-1}^{-1}$

(ii) Sous l'action de $N \in \mathfrak{n}$, tout élément de $\mathcal{B}_q$ arrive dans $\mathfrak{z}_{q-1}\mathcal{C}_{q-1}^{-1}$

(iii) $\mathfrak{n}_q \subset \mathfrak{h}_q \mathfrak{z}_{q-1} \mathcal{C}_{q-1}^{-1}$.

<u>Construction de $\mathfrak{h}_p$ à partir de</u> $(N_{p,1},\ldots,N_{p,\nu_p}) = (N_1,\ldots,N_{\nu_p})$

Les éléments $N_1,\ldots,N_{\nu_p}$ sont des $\mathfrak{r}$-vecteurs propres modulo $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q)$ et ne commutent pas tous à $\mathfrak{h}_q^{\#}$. On pose pour $k=1,\ldots,q$:

$$\alpha_k = \text{rang } ([N_i,Z_j])_{i=1,\ldots,\nu_p\,;\,j=1,\ldots,R_k} - \text{rang } ([N_i,Z_j])_{i=1,\ldots,\nu_p\,;\,j=1,\ldots,R_{k-1}}$$

et $A_k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$.

A une permutation des N_i près, on peut trouver une partie à α_k éléments $\{Q''_{A_{k-1}+1},\ldots,Q''_{A_k}\} \subset \{Z_{R_{k-1}+1},\ldots,Z_{R_k}\}$ telle que la matrice

$$\mathfrak{M}_k = (|N_i,Q''_j|)_{i,j=1,\ldots,A_k} \qquad \text{soit de rang } A_k$$

Soit $\Delta_k = \det \mathfrak{M}_k$. Si $N \in \mathfrak{n}$,

$$[N,N_i] \in \mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q \quad \text{et} \quad [N,Q''_j] \in \mathbb{K}_{k-1} \quad \text{si} \quad j \in \{A_{k-1}+1,\ldots,A_k\}, \text{ donc}$$

$([N,[N_i,Q''_j]])_{i=1,\ldots,N_{\nu_p}}$ est une $\mathbb{K}_{k-1}$-combinaison linéaire des colonnes $([N_i,Q''_\ell])_{i=1,\ldots,N_{\nu_p}}$ pour $\ell = 1,\ldots,A_{k-1}$ (puisque les éléments $Q''_1,\ldots,Q''_{A_{k-1}}$ "réalisent déjà toute l'action de $N_1,\ldots,N_{\nu_p}$ dans $\mathfrak{h}_{k-1}^{\#}$"). Ceci étant valable pour tout indice k, on en déduit que $\Delta_k \in \mathcal{C}$. (On "dérive" Δ_k colonne par colonne).

On écrit la matrice $\mathfrak{M}_q$ par blocs $\alpha_k \times \alpha_\ell$ et on peut la trigonaliser en utilisant des coefficients $\in \mathcal{C}$:

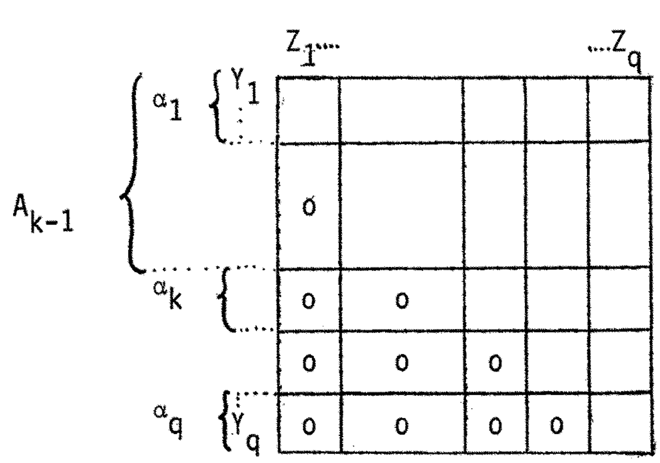

Fig.1.

Soit $i=1,\ldots,\nu_p$. Il existe des coefficients $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}_{k-1}$ tels que

$$\Delta_k N_i - \sum_{j=1}^{A_k} \lambda_{i,j} N_k = Y_i$$

commute à $\mathfrak{h}_k^{\#}$.

Ces coefficients $\lambda_{i,j}$ sont

uniques et déterminés par les commutateurs $[N_i,Q''_j]\in \mathcal{Z}_{k-1}\mathcal{C}_{k-1}^{-1}$.

Si $N\in\mathfrak{n}$, $[N,Y_i]$ commute encore à $\mathfrak{h}_k^{\#}$ et

$$[N,Y_i] \equiv \sum_{i=1}^{A_k} [N,\lambda_{i,j}]N_k \quad \mathrm{mod} \quad \mathfrak{h}_q K_q$$

ce qui implique $[N,\lambda_{i,j}]=0$. Ceci permet donc de trigonaliser $\mathfrak{M}_q$ par blocs comme sur la Figure 1.

De même, on peut diagonaliser dans chaque bloc $\alpha_k\times\alpha_k$ avec des coefficients centraux.

En effet, si $i,j\in\{A_{k-1}+1,\dots,A_k\}$

$[Y_i,Q''_j]$ est encore un élément central puisque si $N\in\mathfrak{n}$

$[N,Y_i]\in\mathfrak{h}_q K_q$ et $[N,Q''_j]\in\mathbb{K}_{k-1}$, d'où $[N,[Y_i,Q''_j]]\in [\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q,Q''_j]+[Y_i,K_{k-1}]=\{0\}$.

Enfin, on diagonalise la matrice $\mathfrak{M}_q$ par combinaisons linéaires de ses lignes, et on obtient des éléments

$$(50) \qquad P''_i = Y_i + \sum_{j=i+1}^{A_q} \lambda_{i,j}Y_j \qquad (\text{où } \lambda_{i,j}\in \mathcal{Z}_{q-1}\,\mathcal{C}_{q-1})$$

<u>Détermination du nouveau centre</u> : On soustrait successivement à $Z^{(q)}$ les développements de Taylor correspondant à $P''_{A_{q-1}+1},\dots,P''_{A_q}$ puis à $P''_{A_{q-2}+1},\dots,P''_{A_{q-1}}$ ..etc.

Par exemple, après la première soustraction, on obtient un élément appartenant à $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_q)\mathcal{C}_q^{-1}$ qui commute à $Y_{A_{q-1}+1},\dots,Y_{A_q}$, par conséquent l'action de

$P''_{A_{q-2}+1},\dots,P''_{A_{q-1}}$ sur cet élément est nilpotente compte tenu de (50). Le nouveau développement de Taylor est donc un polynôme. Ainsi, on peut trouver un polynôme de Taylor et définir l'application

$$Z^{(q)} \longrightarrow Z^{(p)}$$

qui consiste à retrancher à $Z^{(q)}$ ce polynôme de Taylor.

(On remarquera que les images des Q''_i sont nulles, et que ceci définit une transforamtion "triangulaire" inversible :

$$(Z_o^{(q)},\dots,Z_{R_q}^{(q)}) \longrightarrow (Z_o^{(p)},\dots,Z_{R_q}^{(p)},Q''_1,\dots,Q''_{A_q})$$

<u>On détermine une base symplectique de commutant de</u> $\mathfrak{h}_q^*$

par les procédés du Théorème A. Les coefficients utilisés sont centraux et appartiennent à $\mathcal{K}(\mathfrak{n}_q)$; la base "supplémentaire" est notée

$$(Z_{p,1},\dots,Z_{p,r_p}\,;P_{s_q+1},\dots,P_{s_p}\,;Q_{s_p+1},\dots,Q_{s_p})$$

<u>On détermine les</u> P_i' :

On considère l'application θ_p' définie suivant II.8 pour la base

$$(P_1,\dots,P_{s_p},P_1',\dots,P_{s_q'}'\,;Q_1,\dots,Q_{s_p},Q_1',\dots,Q_{s_q'}') = \mathcal{B}_p'$$

On a encore

$$[\theta_p'(P_i''),Q_j''] = \delta_{i,j}$$

(Comme P_i'' transforme tout élément de la base $\mathcal{B}_p'$ en un élément central, θ_p' consiste à retrancher une combinaison linéaire des éléments de cette base).
Enfin, on retranche de chaque $\theta_p'(P_j'')$ un scalaire λ_j (qui est un polynôme en $Q_1'',\dots,Q_{A_q}''$ donné par le lemme de Poincaré) pour les rendre commutants entre eux ; ceci détermine

$$P'_{s_q'+i} = P_i'' + \lambda_i$$

On peut encore choisir λ_i vecteur propre pour $\mathfrak{a}$; comme on a construit P_i'' à partir des éléments qui sont des $\mathfrak{a}$-vecteurs propres et des scalaires qui sont des polynômes universels en des commutateurs clairement P_i'' est aussi un $\mathfrak{a}$-vecteur propre et un choix convenable des λ_i fera des P_j' des $\mathfrak{a}$-vecteurs propres aussi.

Ainsi, nous avons construit la base supplémentaire

$$(Z_{p,1},\dots,Z_{p,r_p}\,;P_{s_q+1},\dots,P_{s_p},P'_{s_q'+1},\dots,P'_{s_p'}\,;Q_{s_q+1},\dots,Q_{s_p},Q'_{s_q'+1},\dots,Q'_{s_p'})$$

Ces nouveaux éléments de base sont des combinaisons $\mathcal{C}_q^{-1}\mathfrak{Z}_q$-linéaires de $(1,N_1,\dots,N_{\nu_p})$ et on vérifie facilement que les propriétés annoncées précédemment sont encore vraies. On peut donc continuer.

Ceci termine la construction de la base symplectique

$$\mathcal{B}_n = (Z_0^{(n)},\dots,Z_{R_n}^{(n)} ; P_1,\dots,P_{s_n}, P_1',\dots,P_{s_n'}' ; Q_1,\dots,Q_{s_n}, Q_1',\dots,Q_{s_n'}')$$

5° On fait intervenir $\mathfrak{a}$.

Un élément A de $\mathfrak{a}$ admet tout élément de la base comme vecteur propre. L'application θ_n définie pour la base $\mathcal{B}_n$ est de la forme

$$\theta_n(A) = A + \sum_{i=1}^{s_n} [A,P_i] \vee Q_i + \sum_{j=1}^{s_n'} [A,Q_j'] \vee P_j'$$

et $\theta_n(\mathfrak{a})$ est encore commutatif.

Un élément $\theta_n(A)$ commute à $\mathcal{B}_n$ si et seulement si ses valeurs propres sur $Z_1^{(n)},\dots,Z_{R_n}^{(n)}$ sont nulles. Ceci détermine donc un $\mathbb{k}$-sous-espace vectoriel de $\theta_n(\mathfrak{a})$ dont les éléments d'une base : $(Z_{R_{n+1}},\dots,Z_{R_n+r})$ sont des éléments centraux dans $\mathcal{H}(r)$.

Un choix convenable d'une base d'un supplémentaire dans $\theta_n(\mathfrak{a})$ et d'éléments $Z_{i_j}^{(n)}$ permet d'obtenir de nouveaux éléments de base symplectique

$P'_{s_n'+1},\dots, P'_{s_n'+r}, Q'_{s_n'+1},\dots,Q'_{s_n'+r}$.

Par contre, pour la détermination du nouveau centre, et pour obtenir assez d'éléments de base du centre, on doit supposer que l'action de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$ est algébrique.

Dans ce cas, on peut trouver une base de $\mathfrak{a}$, soit $(A_1,\dots,A_\alpha)$ telle que si ϕ est un poids de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$, $<\phi,A_i> \in \mathbb{Q}$ pour tout i. Les poids de déterminés par $Z_1^{(n)},\dots,Z_{R_n}^{(n)}$ sont encore "rationnels", notons ces poids $\phi_1,\dots,\phi_N$ (en omettant les éléments $Z_i^{(n)} = 0$ qui ne déterminent aucun poids).[9]

L'ensemble des $x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathbb{Z}^N = M$ tels que $\sum_{i=1}^{N} x_i\phi_i = 0$ est un sous-module L de M. Par conséquent, il existe une base de M adaptée à L sous la forme

$$(e_1,\dots,e_\ell, e_{\ell+1},\dots,e_N) \qquad (\text{où } e_i = (x_{i,1},\dots,x_{i,N}))$$

et des entiers α_i tels que

$$(\alpha_1 e_1, \alpha_1\alpha_2 e_2,\dots, \alpha_1\dots\alpha_\ell e_\ell)$$

soit une base de L.

Mais L est un $\mathbb{Z}$-module divisible : si $\alpha e \in L$, e aussi appartient à L, par conséquent $\alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_\ell = 1$.

On choisit alors les éléments B_i de $\mathfrak{a}$ tels que

$$< \sum_{j=1}^{N} x_{i,j}\phi_j , B_k > = \delta_{i,k} \qquad \text{pour } i = \ell+1,\dots,N$$

et il suffit de poser :

$$Z'_i = \prod_{k=1}^{N} (Z^{(n)}_{j(k)})^{x_{i,k}} \qquad \text{où } Z^{(n)}_{j(k)} \text{ correspond au poids } \phi_k$$

pour obtenir les nouveaux éléments de base du centre :

$$Z'_1,\dots,Z'_\ell$$

et les nouveaux éléments de base symplectiques sont

$$Z'_{\ell+1},\dots,Z'_N , P''_{\ell+1},\dots,P''_N$$

où $\qquad P''_{\ell+i} = B_{\ell+i} \cdot (Z'_{\ell+i})^{-1}$

Par ailleurs, dans toute notre construction, on ne fait intervenir que des fonctions du centre et des polynômes de degré < 2 en les P_i, Q_i. La démonstration du Théorème A montre qu'à chaque pas on a une sous-algèbre de $\mathcal{R}(\mathfrak{r})$ correspondant canoniquement à la sous-algèbre $\mathcal{E}_2(\mathfrak{h}_q\mathbb{K}_q) + \mathfrak{r}\mathbb{K}_q$ et les éléments supplémentaires de base que l'on construit sont toujours dans cette algèbre. Donc cette construction peut être menée parallèlement dans $\mathcal{R}(\mathfrak{r})$ et donne le

IV.3. THEOREME.

Soit $\mathfrak{r}$ une algèbre de Lie résoluble algébrique sur un corps $\mathbb{k}$ algébriquement clos de caractéristique zéro.

Il existe une base symplectique $(Z_0, Z_1', \ldots, Z_r ; P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_s)$ d'une sous algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ telle que $\mathcal{F}(\mathfrak{h}) = \mathcal{K}(\mathfrak{r})$ et un isomorphisme canonique τ de cette base dans $\mathcal{R}(\mathfrak{r})$ telle que $(Z_1^\tau, \ldots, Z_r^\tau ; P_1^\tau, \ldots, P_s^\tau ; Q_1^\tau, \ldots, Q_s^\tau)$ soit un système de coordonnées canoniques algébriques de $\mathfrak{r}^*$.

Ce théorème répond positivement à la fois à la conjecture de Gelfand et Kirillov [9,10] et à la suivante pour $\mathfrak{g}$ résoluble :

IV.4. CONJECTURE. [11,4]

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Il existe sur $\mathfrak{g}^*$ un système algébrique de coordonnées canoniques.

V. REDUCTION DES PRODUITS SEMI-DIRECTS : $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{s}$.

Le Théorème B s'applique au radical résoluble $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ et fournit la sous-algèbre $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_n \mathbb{K}_n$ de $\mathcal{K}(\mathfrak{r})$ qui est une algèbre de Heisenberg sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{K}_n$. Les algèbres $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{h}$ sont caractéristiques et $\mathfrak{h}$ admet une base symplectique sur $\mathbb{K}$ qu'on notera

$$(Z_0 \,;\, P_1,\ldots,P_s \,;\, Q_1,\ldots,Q_s) \qquad \text{(en posant } s = s_n)$$

L'application θ est alors définie suivant II.8 pour cette base.
On note de même $t = t_n$ (donné par le Théorème B) et on vérifie que $\dim \theta(\mathfrak{g}) = \sigma + t + 1$ (où $\sigma = \dim \mathfrak{s}$). L'ensemble $\theta(\mathfrak{g})$ contient le commutant dans $\mathfrak{g}\mathbb{K} + \mathcal{E}_2(\mathfrak{h})$ de $\mathbb{K}$. Ce commutant $\mathfrak{g}_1$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ qui contient $\mathbb{K}$ et sa dimension est au plus égal à $\sigma + 1$ (puisque les éléments $\theta(Y_1),\ldots,\theta(Y_t)$ donnés par le Théorème B déterminent des dérivations indépendantes de $\mathbb{K}$). On peut encore décomposer $\mathfrak{g}_1$ suivant le théorème de Lévi-Malcev : $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r}_1 \oplus \mathfrak{s}_1$ où $\mathfrak{r}_1$ est le radical résoluble de $\mathfrak{g}_1$. On a deux cas :

1) $\dim \mathfrak{r}_1 = 1$. Alors $\mathfrak{r}_1 = \mathbb{K}$ et $\mathbb{K}$ est central dans $\mathfrak{g}_1$.
Il est facile de voir que $\mathfrak{s}_1$ est alors isomorphe à $\mathfrak{s} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}$ et est une algèbre de Lie semi-simple.

2) $\dim \mathfrak{r}_1 > 1$. On peut recommencer avec $\mathfrak{r}_1$, appliquer le théorème B etc... . On a dans ce cas $\dim \mathfrak{s}_1 < \dim \mathfrak{s}$, ce qui montre que notre itération est nécessairement finie.

Enfin, si $\mathfrak{s}_1$ commute à $\mathfrak{r}_1$, on voit facilement que la construction s'arrête au pas suivant. On remarque que le Théorème B s'applique à $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r}_1 \oplus \mathfrak{s}_1$ qui commute à $\mathbb{K}$. On peut prendre des bases de $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{s}_1$ qui sont de degré 1. Dans ce cas, il sera encore possible de prolonger l'application du Théorème B.
On peut regrouper ces résultats en le

V.1. THEOREME C.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension γ sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique zéro et $Z_0 = 1 \in \mathcal{K}(\mathfrak{g})$.
Il existe des éléments $Z_1,\dots,Z_r \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $S_1,\dots,S_u$, $P_1,\dots,P_s$, $Q_1,\dots,Q_s \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathbb{k}(Z_1,\dots,Z_r)$ et des éléments(*) $Y_1,\dots,Y_t \in \mathfrak{g}$ tels que

(1) $Z_1,\dots,Z_r$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{k}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{k}(Z_1,\dots,Z_r)$ est un corps commutatif caractéristique canonique.

(2) $(Z_0 \,;\, P_1,\dots,P_s \,;\, Q_1,\dots,Q_s) = \mathcal{B}$ est une base symplectique sur $\mathbb{K}$ d'une algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}$ caractéristique et canonique.

(3) $(S_1,\dots,S_u)$ est une base sur $\mathbb{K}$ d'une algèbre de Lie semi-simple qui commute à $\mathfrak{h}$.

(4) $(Z_0,S_1,\dots,S_u)$ est une base sur $\mathbb{K}$ d'une algèbre de Lie caractéristique et canonique.

(5) La matrice

$$([Y_i,Z_j])_{i=1,\dots,t\,;\,j=1,\dots,r}$$

à coefficients dans $\mathbb{K}$ est de rang égal à t.

(6) Notant θ l'application définie selon II.8 par la base $\mathcal{B}$, $\theta(\mathfrak{g})$ admet $(Z_0,\theta(Y_1),\dots,\theta(Y_t), S_1,\dots,S_u)$ comme base sur $\mathbb{K}$ et $\theta(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie bilatère canonique sur $\mathbb{K}$ qui admet $(Z_0,\theta(Y_1),\dots,\theta(Y_t), S_1,\dots,S_u, P_1,\dots,P_s, Q_1,\dots,Q_s)$ comme base et son corps enveloppant réduit s'identifie à $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$.

(*) Ces éléments peuvent être choisis à partir d'une base quelconque de $\mathfrak{g}$.

(7) Il existe un homomorphisme canonique d'algèbre de Lie τ de

$\theta(\mathfrak{g}\mathbb{K}) + \mathcal{E}_2(\mathfrak{h})$

dans $\mathcal{A}(\mathfrak{g})$ et une graduation canonique sur $\theta(\mathfrak{g}\mathbb{K}) + \mathcal{E}_2(\mathfrak{h})$ qui est conservée par

(8) On a $\gamma = r + s + t + u$.

V.2. PRECISIONS.

Suivant de près la construction qui a abouti au Théorème C, on peut relever des propriétés supplémentaires qui sont consignées dans les additifs suivants.

Les sous-algèbres de Heisenberg que nous avons déterminées sont calculées par étapes successives, chacune d'elle donnant lieu à une sous-algèbre caractéristique. On a donc

Additif au Théorème C.

C_1 (i) Il existe des entiers $r_1 < r_2 < r_3 \ldots < r_n = r$ $s_1 < s_2 < \ldots < s_n = s$ tels que pour tout $p = 1,\ldots,n$, $\mathbb{K}_{p-1} = \mathbb{k}(Z_1,\ldots,Z_{r_{p-1}})$ est un sous-corps commutatif caractéristique et la sous-algèbre $\mathfrak{h}_p$ engendrée sur $\mathbb{K}_{p-1}$ par $(Z_o, Z_{r_{p-1}},\ldots,Z_{r_p}, P_1,\ldots,P_{s_p}, Q_1,\ldots,Q_{s_p})$ est une algèbre 2-nilpotente qui est caractéristique et admet $(Z_o, Z_{r_{p-1}+1},\ldots,Z_{r_p}\ ; P_1,\ldots,P_{s_p}\ ; Q_1,\ldots,Q_{s_p})$ comme base symplectique. De plus, tous les éléments de cette base appartiennent à $\theta_{p-1}(\mathfrak{g}\mathbb{K}_{p-1}) + \mathfrak{h}_{p-1}$ (où θ_{p-1} est définie pour $\mathfrak{h}_{p-1}$ suivant II.8).

C (ii) Les éléments $S_1,\ldots,S_u$ appartiennent à $\theta_n(\mathfrak{g}\mathbb{K}_{n-1})$.

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] BERNAT P., CONZE N., VERGNE M. etc...
Représentation des groupes de Lie résolubles. Paris DUNOD 1972 (Monographie de la Société Mathématique de France).

[2] KIRILLOV A.A.
Représentations unitaires des groupes de Lie Nilpotents. Uspekhi Math. Nauk. 1962 p.57-110.

KIRILLOV A.A.
Eléments de la théorie des représentations. Editions MIR. Moscou 1974.

KIRILLOV A.A.
Local Lie Algebras. Russian Math. Survey 31-4 (1976) p.55-75.

[3] DIXMIER J. Algèbres enveloppantes. Gauthier Villars Paris 1974.

[4] VERGNE M. La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie Nilpotente. Bull. Soc. Math. France 100 (1972) p.301-335.

[5] NGHIEM-XUAN-HAI.
Thèse de Doctorat Université de Paris-Sud. ORSAY FRANCE 1976

[6] NGHIEM-XUAN-HAI.
Sur certaines représentations d'une algèbre de Lie Résoluble complexe II. Publications d'ORSAY n° 213, 73-63.

[7] DIXMIER J. Sur les algèbres de Weyl. Bull. Sci. Math 94 (1970) p. 289-301.

[8] NGHIEM-XUAN-HAI.
Sur certains sous corps commutatifs ... Bull. Sc. Math. 2e Série 96 (1972) p.111-128.

[9] Mc. CONNEL J.C.
Representations of solvable Lie Algebras and the Gelfand-Kirillov conjecture. Proc. Lond. Math. Soc. 29 (1974) 451-488.

[10] JOSEPH. A. Proof of the Gelfand Kirillov conjecture for solvable Lie Algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974) p.1-10.

[11] GELFAND I.M. et A.A. KIRILLOV.
Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes. Publ. Math. I.H.E.S n° 31 (1966) p.5-20.

N° d'impression 317
2nd trimestre 1978