

4583

UNIVERSITE DE PARIS
Faculté des Sciences d'Orsay

PUBLICATIONS DU SEMINAIRE
de MATHEMATIQUES d'ORSAY

5ème année : 1965/66

Secrétariat Mathématique d'Orsay

1966

UNIVERSITÉ DE PARIS
FACULTÉ des SCIENCES
d'ORSAY
MATHÉMATIQUES

Cohomologie de SPENCER

(d'après QUILLEN)

4583

par

B. MALGRANGE

~~4583~~

Cours rédigé avec l'aide de

MM. Ruget et Schapira

CHAPITRE I - Définition des suites de Spencer

§ 1 - Quelques notations

Soit X une variété de dimension n (C^∞ ou analytique réelle) de faisceau structural \mathcal{O} . Nous noterons J^k (k fini ou infini) le faisceau des germes de k -jets de sections de \mathcal{O} . Nous considérerons deux applications canoniques de \mathcal{O} dans J^k : l'application j^k associe à une fonction f , et au point x , le k -jet en x de f ; alors que l'application i^k leur associe le k -jet en x de la fonction constante $f(x)$. Nous allons d'ailleurs donner une définition de J^k comme quotient, et ces deux applications nous apparaîtront de façon naturelle : soient Y un deuxième exemplaire de X , $\mathcal{O}_{X \times Y}$ le faisceau structural de $X \times Y$, \mathcal{J} l'idéal de définition de la diagonale de $X \times Y$, \mathcal{J}^∞ l'idéal des fonctions plates sur cette diagonale. Alors, J^k est le quotient de $\mathcal{O}_{X \times Y}$ par \mathcal{J}^{k+1} ; l'application i^k provient de l'application i de \mathcal{O} dans $\mathcal{O}_{X \times Y}$ qui, à $f(x)$, associe $f(x)$, tandis que j^k provient de l'application j qui, à $f(x)$, associe $f(y)$.

Les applications i^k et j^k donnent à J^k deux structures de \mathcal{O} -module; nous les distinguerons en écrivant la première comme structure à gauche, la seconde comme structure à droite. Lorsque nous écrirons un produit tensoriel de \mathcal{O} -modules comportant J^k en facteur, la place de J^k nous indiquera quelles structures considérer : par exemple, E étant un \mathcal{O} -module, $J^k \otimes_{\mathcal{O}} E$ est le produit tensoriel de E et de J^k muni de sa structure à droite (structure héritée de j^k); ce produit sera lui-même considéré comme \mathcal{O} -module grâce à la structure gauche de J^k .

Nous poserons $J^k(E) = J^k \otimes_{\mathcal{O}} E$. On définit encore une

application $j^k : E \rightarrow J^k(E)$, par passage au quotient à partir de l'application $E \rightarrow \underset{O_Y}{O_{X \times Y}} \otimes E$ qui, à s , germe de section de E en x associe $1 \otimes s$ en (x, x) . (Par contre, ici l'application i^k n'a pas de sens). Lorsque E est localement libre de type fini, il est le faisceau des sections d'un fibré vectoriel de rang fini sur X , on retrouve les définitions habituelles (vérification immédiate, laissée au lecteur).

Soit Z un troisième exemplaire de X . L'application $f(x, y) \mapsto f(x, z)$ (le second membre étant considéré comme fonction de $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$) induit par passage au quotient, pour tous r, s entiers ≥ 0 une injection $J^{r+s} \hookrightarrow J^r(J^s)$, qui est σ -linéaire. L'application associée dans les fibrés peut être décrite ainsi : soit α une section de σ au voisinage de x : par j^s , on en déduit une section de J^s , puis par j^r une section de $J^r(J^s)$. Soit $J^r(J^s)(x)$ la fibre en x du fibré associé à $J^r(J^s)$; il est clair que $j^r(j^s \alpha)(x) \in J^r(J^s)(x)$ ne dépend que du développement de Taylor de α d'ordre $r+s$ en x , i.e. de l'élément de $J^{r+s}(x)$ défini par α . D'où une application $J^{r+s}(x) \rightarrow J^r(J^s(x))$, qui est l'application cherchée (vérification immédiate).

Par produit tensoriel, on en déduit une injection canonique σ -linéaire : $J^{r+s}(E) \hookrightarrow J^r(J^s(E))$.

§ 2 - Opérateurs et suites de Spencer : définitions

a) Premier opérateur de Spencer

Nous considérons encore un σ -module E sur une variété X , de faisceau structural σ ; désignons par T^* le faisceau associé au fibré cotangent de X . Reprenons un deuxième exemplaire Y de X : la différentielle extérieure par rapport à la variable x nous fournit, pour tout p positif ou nul, des applications :

$$d_X : \underset{\sigma}{\wedge^p T^*} \otimes \underset{\sigma}{\sigma}_{X \times Y} \rightarrow \underset{\sigma}{\wedge^{p+1} T^*} \otimes \underset{\sigma}{\sigma}_{X \times Y}$$

($\sigma_{X \times Y}$ étant considéré comme σ -module grâce à i)

Par passage au quotient, nous obtenons des opérateurs

$$D : \bigwedge^p T^* \otimes_{\sigma} J^k \rightarrow \bigwedge^{p+1} T^* \otimes_{\sigma} J^{k-1}, \quad p, k \geq 0,$$

qui sont σ -linéaires pour les structures héritées des structures à droite des J^k . D'où, par tensorisation à droite par E , des opérateurs

$$D : \bigwedge^p T^* \otimes_{\sigma} J^k(E) \rightarrow \bigwedge^{p+1} T^* \otimes_{\sigma} J^{k-1}(E), \quad p, k \geq 0$$

qui ne sont pas σ -linéaires pour les structures provenant des structures de σ -module usuelles des $J^k(E)$. Dans les fibrés associés, D est un opérateur différentiel d'ordre 1.

b) Premières suites de Spencer d'un fibré.

Un noyau de l'application

$$d_X : \mathcal{O}_{X \times Y} \rightarrow T^* \otimes_{\sigma} \mathcal{O}_{X \times Y}$$

est $\sigma \xrightarrow{j} \mathcal{O}_{X \times Y}$. Par passage au quotient, nous trouvons que la suite

$$0 \rightarrow \sigma \xrightarrow{j^1} J^1 \xrightarrow{D} T^* \otimes \sigma \rightarrow 0$$

est exacte. Si nous tensorisons à droite par le σ -module localement libre E , nous obtenons la suite exacte

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{j^1} J^1(E) \xrightarrow{D} T^* \otimes E \rightarrow 0,$$

que nous appelons première suite de Spencer, à l'ordre 1, du fibré E .

Plus généralement, nous pouvons considérer la suite

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{j^r} J^r(E) \xrightarrow{D} T^* \otimes J^{r-1}(E) \rightarrow \dots \xrightarrow{D} \bigwedge^n T^* \otimes J^{r-n}(E) \rightarrow 0$$

(si $k < 0$, nous convenons que $J^k(E) = 0$)

Nous l'appelons première suite de Spencer, à l'ordre r , du fibré E , et nous allons montrer qu'elle est exacte. On a évidemment $D D = 0$, puisque $d_x d_x = 0$.

§ 3 - Exactitude de la première suite de Spencer.

a) Localement, une section s de $J^r(E) \otimes \wedge^k T^*$ peut s'écrire :

$$s = \sum_{|\alpha| \leq r, |i| \leq k} a_{\alpha, i}(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} dx^{\wedge i}$$

En expliquant d_x en coordonnées locales, on voit que $D_{r,k}$ est localement la différence de deux opérateurs d' et d'' dont aucun n'est défini globalement :

$$D_{r,k} s = d'' s - d' s.$$

avec

$$d' s = \sum_{\substack{|\alpha| \leq r-1, |i| \leq k, \\ 1 \leq j \leq n}} a_{\alpha + \epsilon_j, i}(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} dx_j \wedge dx^{\wedge i}$$

et

$$d'' s = \sum_{\substack{|\alpha| \leq r-1, |i| \leq k, \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{\partial a_{\alpha, i}}{\partial x_j}(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} dx_j \wedge dx^{\wedge i}$$

b) Considérons le diagramme (B_r)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & S^r(T^*) \otimes E & \xrightarrow{\delta^{r,0}} & S^{r-1}(T^*) \otimes T^* \otimes E & \xrightarrow{\delta^{r-1,1}} & S^{r-2}(T^*) \otimes \wedge^2 T^* \otimes E & \xrightarrow{\delta^{r-2,2}} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\
 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{j^r} & J^r(E) & \xrightarrow{D} & T^* \otimes J^{r-1}(E) & \xrightarrow{D} & \wedge^2 T^* \otimes J^{r-2}(E) & \xrightarrow{D} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \\
 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{j^{r-1}} & J^{r-1}(E) & \xrightarrow{D} & T^* \otimes J^{r-2}(E) & \xrightarrow{D} & \wedge^2 T^* \otimes J^{r-3}(E) & \xrightarrow{D} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

dont nous savons que les colonnes sont exactes, et où les $\delta^{r-k,k}$ sont définis de façon à assurer la commutativité : $\delta^{r-k,k}$ provient du morphisme σ -linéaire provenant du morphisme de fibrés défini comme suit :

$$\delta^{r-k,k} : S^{r-k}(T^*) \otimes \Lambda^k(T^*) \xrightarrow{\quad} S^{r-k-1}(T^*) \otimes \Lambda^{k+1}(T^*)$$

$\searrow \quad \swarrow$
 X

$$y^\alpha dx^{\wedge i} \quad (y \in T_x^*, dx \in T_x^*, |\alpha|=r-k, |i|=k)$$

représentant un point du fibré associé à $S^{r-k}(T^*) \otimes \Lambda^k(T^*)$ au-dessus de x , nous posons :

$$\delta^{r-k,k}(y^\alpha dx^{\wedge i}) = \sum_{i < j \leq n} \frac{\partial}{\partial y_j} (y^\alpha) dx_j \wedge dx^{\wedge i}$$

Le complexe écrit dans la première ligne de (B_r) est acyclique car il provient, par tensorisation par le faisceau E , d'un complexe acyclique de fibrés (en chaque point, c'est simplement le complexe de la différentielle extérieure pour les polynômes!) La deuxième et la troisième ligne de (B_r) ont donc la même cohomologie. Ainsi, la cohomologie de la première suite de Spencer de E ne dépend pas de l'ordre r auquel est écrite cette suite : et elle est triviale pour $r=0$, donc pour tout r .

§ 4 - Deuxième suite de Spencer d'un fibré.

Reprenons les diagrammes (B_r) , avec des notations condensées:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & \Gamma^{r+2,k-1} \otimes E & \xrightarrow{\delta} & \Gamma^{r+1,k} \otimes E & \xrightarrow{\delta} & \Gamma^{r,k+1} \otimes E \rightarrow \dots \\ & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\ \dots & \rightarrow & \Lambda^{k-1} \otimes J^{r+2}(E) & \xrightarrow{D} & \Lambda^k \otimes J^{r+1}(E) & \xrightarrow{D} & \Lambda^{k+1} \otimes J^r(E) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \dots & \rightarrow & \Lambda^{k-1} \otimes J^{r+1}(E) & \xrightarrow{D} & \Lambda^k \otimes J^r(E) & \xrightarrow{D} & \Lambda^{k+1} \otimes J^{r-1}(E) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Nous avons écrit une partie du diagramme (B_{r+k+1}) : elle

nous permet de définir le faisceau $\mathcal{E}^{r,k+1}$ ($r \geq 1, k \geq 1$)

$$\mathcal{E}^{r,k+1} = \Lambda^{k+1} \otimes J^r(E) / i\delta(\Gamma^{r+1,k} \otimes E) = \Lambda^{k+1} \otimes J^r(E) / \text{Di}(\Gamma^{r+1,k} \otimes E)$$

Pour tout p positif ou nul, pour tout q strictement positif, nous définissons de même $\mathcal{E}^{p,q}$; et nous posons enfin :

$$\mathcal{E}^{p,0} = J^p(E)$$

Le diagramme (B_{r+k+1}) nous donne un morphisme canonique, soit $D_{r,k}^1$, entre les faisceaux de \mathbb{R} -espaces $\Lambda^k \otimes J^r(E)$ et $\mathcal{E}^{r,k+1}$; $D_{r,k}^1$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 ; son noyau contenant $D(\Lambda^{k-1} \otimes J^{r+1}(E))$, $D_{r,k}^1$ induit un opérateur différentiel d'ordre 1

$$D'_{r,k} : \mathcal{E}^{r,k} \longrightarrow \mathcal{E}^{r,k+1}$$

En fait, le noyau de $D_{r,k}^1$ est égal à $D(\Lambda^{k-1} \otimes J^{r+1}(E))$. Le noyau de $D'_{r,k}$ est :

$$D(\Lambda^{k-1} \otimes J^{r+1}(E)) / \text{Di}(\Gamma^{r+2,k} \otimes E) \hookrightarrow \mathcal{E}^{r,k}$$

Or, c'est l'image de $D'_{r,k-1}$. Pour tout r positif ou nul, pour tout k strictement positif, la suite :

$$\mathcal{E}^{r,k-1} \xrightarrow{D'_{r,k-1}} \mathcal{E}^{r,k} \xrightarrow{D'_{r,k}} \mathcal{E}^{r,k+1}$$

est donc exacte. La considération des trois premières colonnes du diagramme (B_{r+1}) montre l'exactitude de la suite :

$$E \xrightarrow{j^r} J^r(E) = \mathcal{E}^{r,0} \xrightarrow{D'_{r,0}} \mathcal{E}^{r,1}$$

Désignant tous les opérateurs $D'_{r,k}$ par la même lettre D' , nous obtenons, pour tout r positif, une suite exacte :

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{j^r} \mathcal{E}^{r,0} \xrightarrow{D'} \mathcal{E}^{r,1} \xrightarrow{D'} \dots \xrightarrow{D'} \mathcal{E}^{r,n} \rightarrow 0,$$

que nous appelons deuxième suite de Spencer (à l'ordre r) du fibré E .

§ 5 - Où apparaissent les systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Nous donnerons ici un bref exposé, de caractère provisoire. La question sera entièrement reprise d'un point de vue dual au chapitre III. Lorsque certaines hypothèses de régularité sont satisfaites, les deux points de vue sont équivalents.

Soit X une variété, E un \mathcal{O}_X -module :

Définition (valable seulement pour la fin de ce chapitre).

Nous appellerons système d'équations aux dérivées partielles d'ordre k sur E un sous-faisceau ϕ de $J^k(E)$. Le faisceau $F = \phi \cap j^r E$ sera appelé faisceau des solutions du système.

Considérons l'injection $i : J^{k+1}(E) \hookrightarrow J^1(J^k(E))$ définie au §1. Nous poserons $\phi^{k+1} = i^{-1}[J^1(\phi^k)]$. Par récurrence, nous définirons de même ϕ^{r+k} pour tout $k \geq 0$ (avec $\phi^r = \phi$), et

nous appellerons les ϕ^{r+k} "prolongés" de ϕ . Soit π la projection $J^{s+1}(E) \rightarrow J^s(E)$; on a $\pi \phi^{s+1} \subset \phi^s$ ($s \geq r$)

En général, on supposera E localement libre de type fini, et on ne s'intéressera qu'aux systèmes vérifiant les conditions de régularité suivantes :

- 1) Pour tout $k \geq 0$, ϕ^{r+k} est localement libre
- 2) Pour $s \geq s_0$, le morphisme $\pi : \phi^{s+1} \rightarrow \phi^s$ est surjectif

Au chapitre III, nous discuterons ces conditions (ou, plus exactement, des conditions "duales").

Exemples :

i) Supposons $E = \mathcal{O}$ (ou plus généralement) supposons E localement libre de type fini, ce qui revient au même localement), et prenons des coordonnées locales en un point de x . Supposons ϕ défini par un système fini d'équations :

$$\sum_{|\alpha| \leq r} a_{\alpha}^i(x) f_{\alpha}(x) = 0 \quad i=1, \dots, p ; \quad f_{\alpha} \text{ à valeurs dans } \sigma^p$$

alors $J^1(\phi)$ est défini par les équations

$$\begin{cases} \sum a_{\alpha}^i(x) f_{\alpha}(x) = 0 \\ \sum \frac{\partial a_{\alpha}^i(x)}{\partial x_j} f_{\alpha}(x) + \sum a_{\alpha}^i(x) f_{\alpha, j}(x) = 0 \end{cases}$$

(parce que J^1 est localement libre pour sa structure de σ -module à droite) ; par conséquent ϕ^{p+1} est défini par les équations :

$$\begin{cases} \sum a_{\alpha}^i(x) f_{\alpha}(x) = 0 \\ \sum \frac{\partial a_{\alpha}^i(x)}{\partial x_j} f_{\alpha}(x) + \sum a_{\alpha}^i(x) f_{\alpha + \epsilon_j}(x) = 0 . \end{cases}$$

Les exemples qui suivent sont des particuliers de celui-là

ii) Prenons $r=1$, et définissons ϕ par l'équation

$$f_{\alpha}(x)=0 \quad (\text{i.e., } p=1 ; a_{\alpha}^1=1 \text{ si } \alpha=0, a_{\alpha}^1=0 \text{ si } |\alpha|=1)$$

Alors ϕ^2 est défini par les équations $\begin{cases} f_{\alpha}(x)=0 \\ f_{\epsilon_j}(x)=0 \end{cases}$

L'hypothèse 2 n'est pas satisfaite

iii) Prenons $m=1$. Soient ξ_1 et ξ_2 deux champs de vecteurs sur X . Prenons $E=\sigma$, et soit ϕ le sous-faisceau de J^1 défini par les équations

$$\sum \xi_i^j f_{\epsilon_j} = 0 \quad (\xi_i^j, \text{ coordonnées locales de } \xi_i, i=1,2)$$

les solutions sont alors les $f \in \sigma$ vérifiant $\theta(\xi_i)(f) = 0$ en désignant par $\theta(\xi_i)$ l'opérateur différentiel défini par ξ_i ; elles vérifient donc aussi $\theta[\xi_1, \xi_2](f) = 0$. Et un calcul immédiat montre que si $g \in \phi^2$, on a :

$$\sum [\xi_1, \xi_2]^j g_{\epsilon_j} = 0$$

De même, si $g \in \phi^3$, il vérifiera des équations telles que $\sum [\xi_1, [\xi_1, \xi_2]]^j g_{\epsilon_j} = 0$ etc...

L'hypothèse 2 sera vérifiée notamment si $[\xi_1, \xi_2]$ est combinaison sur σ de ξ_1 et ξ_2 ; mais en général elle ne sera pas vérifiée. Cet exemple montre que la condition 2 est liée à "l'intégralité" du système (approximativement : dans les équations de définition de ϕ , toutes les équations d'ordre k du système ont déjà été écrites). Voir au chapitre II et au chapitre III une discussion détaillée de cette question.

§ 6 - Suites de Spencer attachées à un système d'équations ϕ .

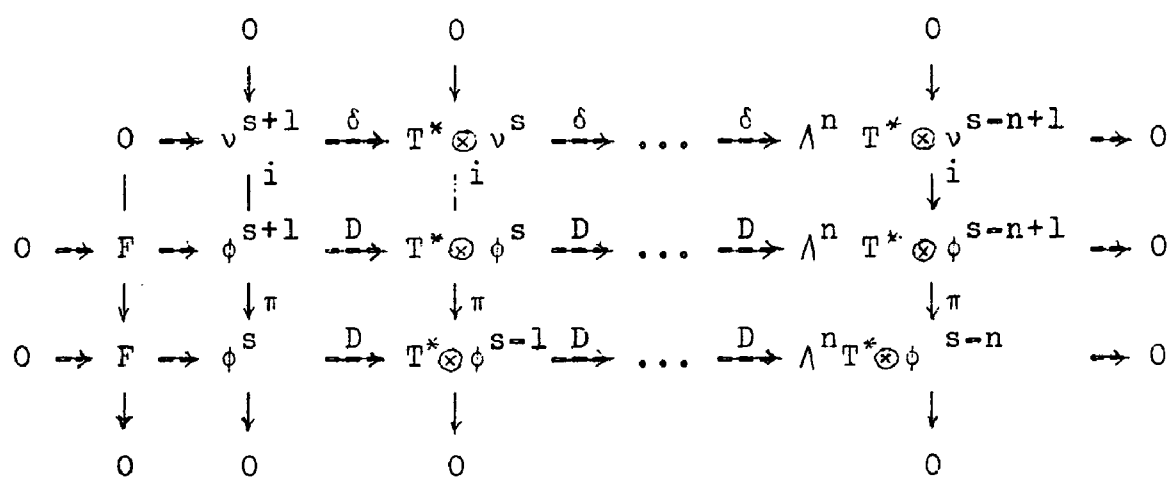
a) On voit immédiatement que l'opérateur de Spencer, induit un opérateur différentiel

$$D : \Lambda^p T^* \otimes \phi^{s+1} \longrightarrow \Lambda^{p+1} T^* \otimes \phi^s \quad (s \geq k)$$

Soit v^{s+1} le noyau de $\pi : \phi^{s+1} \rightarrow \phi^s$. On voit aussi immédiatement que δ induit le morphisme σ -linéaire :

$$\delta : \Lambda^p T^* \otimes v^{s+1} \rightarrow \Lambda^{p+1} T^* \otimes v^s$$

Plaçons-nous dans les hypothèses de régularité considérées au §5 ; pour s assez grand (p. ex. $s \geq s_0 + n$), considérons le diagramme commutatif :



Les colonnes en sont exactes (hypothèse 2). La ligne inférieure (resp. médiane) s'appelle la suite de Spencer d'ordre s (resp. $s+1$) du système \downarrow . La ligne supérieure donne lieu à une suite de fibrés, dont nous montrerons plus loin que, pour tout point $x \in X$, elle est exacte dans le fibré en x pour s assez grand. Par conséquent (argument standard de cohomologie des complexes de fibrés), la suite de faisceaux sera aussi exacte en x (et aussi, d'ailleurs aux points voisins de x). Donc la suite de Spencer, restreinte aux germes en x , aura une cohomologie indépendante de s .

b) Sous les hypothèses de régularité 1) et 2) (et, plus généralement, sous l'hypothèse 2), on peut définir de manière analogue à §4 une deuxième suite de Spencer. Nous laissons au lecteur le soin d'étudier cette question (que nous reprendrons d'un point de vue dual au chapitre III).

CHAPITRE II - Résolutions locales

1 - Généralités.

Dans ce chapitre \mathcal{O} désigne l'un des anneaux suivants :

- a) Germes de fonctions C^∞ en 0 dans \mathbb{R}^n , à valeurs complexes
- b) Germes de fonctions analytiques en 0 dans \mathbb{R}^n , à valeurs complexes
- c) Séries formelles $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$
- d) L'anneau \mathbb{C} (identifié aux fonctions constantes sur \mathbb{R}^n).

On désigne par \mathcal{D} l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à n variables, à coefficients dans \mathcal{O} . \mathcal{D} est un anneau (non commutatif), et \mathcal{O} se plonge dans \mathcal{D} en identifiant \mathcal{O} avec les opérateurs différentiels d'ordre zéro. En particulier \mathcal{D} est un \mathcal{O} -module à droite et à gauche.

Soit S un \mathcal{O} -module à gauche. Un système d'équations aux dérivées partielles (au sens usuel, et non à celui du chapitre I) dans S est défini par une matrice $a \in \mathcal{O}^{p \times q}$, qui définit une application (notée encore a) $S^q \rightarrow S^p$ (on écrit les éléments de S^p comme des matrices à une colonne) ; on note sol le noyau de cette application.

Considérons l'application $\mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^q : b \mapsto b a$ (on écrit $b \in \mathcal{D}^p$ comme une matrice à une ligne) que nous noterons encore a ; soit M son conoyau, qui est un \mathcal{D} -module à gauche. En vertu de l'exactitude à droite de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, S)$, on a un isomorphisme canonique $\text{sol} \sim \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, S)$. Cela montre que, à un isomorphisme près, sol ne dépend que de M (et non de la présentation $\mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^q \rightarrow M \rightarrow 0$ choisie)

Examinons maintenant les équations avec second membre : on s'intéresse à la question suivante :

Soit $g \in S^p$; on suppose que, $\forall b \in \mathcal{D}^p$ vérifiant $ba = 0$, on a : $bg = 0$; existe-t-il $f \in S^q$ tel que $af = g$?
 Supposons que $b_1, \dots, b_r \in \mathcal{D}^p$ engendrent sur \mathcal{D} le sous-module $\{b \in \mathcal{D}^p \mid ba = 0\} = \mathcal{R}$ la matrice $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix} \in \mathcal{D}^{r \times p}$ définit une application $b : \mathcal{D}^r \rightarrow \mathcal{D}^p$, et nos hypothèses signifient que la suite

$$\mathcal{D}^r \xrightarrow{b} \mathcal{D}^p \xrightarrow{a} \mathcal{D}^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est exacte ; appliquant encore le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(., M)$, on trouve que notre problème équivaut à l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \text{sol} \longrightarrow S^q \xrightarrow{a} S^p \xrightarrow{b} S^r$$

i.e. à $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(M, S) = 0$

(ce résultat serait d'ailleurs vrai aussi sous l'hypothèse de finitude faite sur \mathcal{R} ; cependant, cela n'aura pas d'intérêt pour nous dans la suite). Ici encore, nous trouvons que, la solution de notre problème "ne dépend que de M " et non du choix de a et b , puisque deux "présentations d'ordre 2" de M sont homotopiquement équivalentes (voir n'importe quel traité d'algèbre homologique).

Appelons de façon générale p-présentation de M ($p \geq 0$) une suite exacte

$$\mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}^1 \rightarrow \mathcal{D}^0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

et nous appellerons résolution de M une ∞ -présentation, i.e. une suite illimitée du type précédent ⁽¹⁾. La première chose à faire est donc d'étudier la possibilité de trouver de telles présentations, et d'étudier leurs propriétés ; le problème d'étudier les $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(M, S)$, p. ex. pour S convenable (p. ex. $S = \mathcal{O}$ lui-même) est en général beaucoup plus difficile : c'est l'objet de la théorie des équations aux dérivées partielles proprement dite, qui ne sera pas abordée dans ce cours.

(1) Nous sous-entendons ici, en parlant de p-présentation et de résolution les mots "libre de type fini" (convention valable seulement au chapitre II).

2 - Bonnes présentations.

Désignons par $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$ le sous-ensemble des opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$. On obtient ainsi une filtration de \mathcal{D} , avec $\mathcal{D}_0 \cong \sigma$; posons $\overline{\mathcal{D}}_k = \mathcal{D}_k / \mathcal{D}_{k-1}$; $\overline{\mathcal{D}}_k$ est isomorphe à l'ensemble des polynômes homogènes de degré k sur σ , et le gradué associé $\overline{\mathcal{D}} = \bigoplus \overline{\mathcal{D}}_k$ est isomorphe en tant qu'anneau à $\sigma[\xi_1, \dots, \xi_n]$ ($\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$)

Théorème 1.

Si σ est noethérien, \mathcal{D} est noethérien à gauche (et à droite).

Soit \mathcal{J} un idéal à gauche de \mathcal{D} , et $\overline{\mathcal{J}}$ son image dans $\overline{\mathcal{D}}$ i.e. la somme directe des $\overline{\mathcal{J}}_k = (\mathcal{J} \cap \mathcal{D}_k) / \mathcal{D}_{k-1}$; $\overline{\mathcal{J}}$ est un idéal homogène de $\overline{\mathcal{D}}$, qui est noethérien (Hilbert); donc il existe $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_p$ éléments homogènes de $\overline{\mathcal{J}}$, qui engendrent $\overline{\mathcal{J}}$. Soient a_1, \dots, a_p des éléments de \mathcal{J} qui remontent les \overline{a}_i ; nous allons voir qu'ils engendrent \mathcal{J} .

Soit en effet $b \in \mathcal{J}$; posons $d^\circ b = \inf\{k | b \in \mathcal{D}_k\}$, et \overline{b} = la classe de b dans $\overline{\mathcal{D}}_{d^\circ b}$ ($k = d^\circ b$); il existe $\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_p \in \overline{\mathcal{D}}$ tels qu'on ait $\overline{b} = \sum \overline{\gamma}_i \overline{a}_i$, et l'on peut supposer qu'on a, $\forall i$ $d^\circ \overline{\gamma}_i \neq d^\circ \overline{a}_i = d^\circ \overline{b}$. En remontant les $\overline{\gamma}_i$ en des $\gamma_i \in \mathcal{D}$, on trouve que $c = b - \sum \gamma_i a_i$ vérifie $d^\circ c < d^\circ b$. D'où, par récurrence sur $d^\circ b$, le résultat.

Supposons σ noethérien, et donnons-nous une p-présentation

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{a_p} \mathcal{D}^{p-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{D}^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

posons $Z^p = \ker(a_p)$; d'après le théorème 1, Z^p est de type fini sur \mathcal{D} , donc s'écrit comme un quotient d'un \mathcal{D}^{p+1} , ce qui prolonge notre p-présentation en une p+1-présentation. Par récurrence, on en déduit ceci: toute p-présentation se prolonge en une résolution; tout \mathcal{D} -module de type fini (i.e. admettant une 0-présentation) admet une résolution.

Examinons maintenant les propriétés de filtration; commençons par le cas d'une 1-présentation

$$(1) \quad \mathcal{D}^1 \xrightarrow{a_0} \mathcal{D}^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

Soit m_0 le degré de $\alpha_0 = (\text{sup. des degrés des termes de la matrice } a_0)$; sur $\text{Ker } \varepsilon = Z^0$, il y a deux filtrations

1°) la filtration induite $Z_p^0 = Z_0 \cap \mathcal{D}_p^0$

2°) la filtration image $Z_p^{0'} = a_0(\mathcal{D}_{p-m_0}^{l_1})$ ($= 0$ si $p < m_0$)

On a toujours $Z_p^{0'} \subset Z_p^0$, mais on n'a pas l'égalité en général

Définition.

On dira que la 1-présentation (1) est 0-bonne si, pour p assez grand, on a $Z_p^{0'} = Z_p^0$.

Théorème 2.

Supposons \mathcal{O} noethérien. Toute 0-présentation se prolonge en une 1-présentation 0-bonne.

Soit $\mathcal{D}^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$ une 0-présentation, et posons encore $Z^0 = \text{Ker } \varepsilon$, $Z_p^0 = Z^0 \cap \mathcal{D}_p^0$

Lemme.

Il existe m tel qu'on ait, $\forall p \geq 0$: $\mathcal{D}_p Z_m^0 = Z_{m+p}^0$

En passant au gradué associé, il suffit en effet de prendre pour m le sup. des degrés d'un système de générateurs de $\overline{Z^0}$ (détails laissés au lecteur).

Pour démontrer le théorème, prenons un m ayant la propriété du lemme.

Il suffit de trouver une 1-présentation telle qu'on ait $Z_m^{0'} = Z_m^0$; en effet, on aura, pour tout $p \geq 0$

$$Z_{m+p}^{0'} \subset Z_{m+p}^0 = \mathcal{D}_p Z_m^0 = \mathcal{D}_p Z_m^{0'}$$

$$\mathcal{D}_p Z_m^{0'} \subset Z_{m+p}^{0'} \quad \text{d'où} \quad Z_{m+p}^{0'} = Z_{m+p}^0 .$$

Or, Z_m^0 est un module de type fini sur \mathcal{O} (pour la structure induite par la multiplication à gauche par \mathcal{O}) ; soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell_1}$ des générateurs de Z_m^0 et soit a la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1} \end{pmatrix} , \text{ qui est de degré } m .$$

on a $a(\mathcal{D}_0^{l_1}) = Z_m^0$, et comme $\mathcal{D}_p^{l_1} Z_m^0 = Z_{m+p}^0$, on a aussi $a(\mathcal{D}^{l_1}) = Z^0$; d'où le résultat.

Définissons maintenant, par récurrence, la notion de k -présentation k -bonne ($k \leq p-1$)

a) Si $k < p-1$, on dira que la p -présentation est k -bonne si la $(p-1)$ -présentation qu'elle définit est k -bonne

b) Si $k = p-1$, on dira qu'elle est $(p-1)$ -bonne si elle est $(p-2)$ -bonne et si la 1-présentation de Z^{k-2} qu'elle définit est 0-bonne.

De même on définira une résolution k -bonne ; si elle l'est pour tout k , on dira simplement "bonne".

Du théorème précédent, on déduit immédiatement que, si \mathcal{O} est noethérien, toute p -présentation $(p-1)$ -bonne (en particulier, toute 0-présentation) se prolonge en une bonne résolution.

Reprenons maintenant une 1-présentation ; avec les notations précédentes, posons

$$M_p = \mathcal{D}_p^{\ell_0} / Z_p^0 ; M'_p = \mathcal{D}_p^{\ell_0} / Z_p^{0'}$$

l'application $\mathcal{D}_p^{\ell_0} \rightarrow \mathcal{D}_{p-1}^{\ell_0}$ définit par passage au quotient des applications (la première étant injective, mais non la seconde en général) $M_{p-1} \rightarrow M_p$ et $M'_{p-1} \rightarrow M'_p$ dont nous désignerons les conoyaux respectivement par \bar{M}_p et \bar{M}'_p ; $\bar{M} = \bigoplus \bar{M}_p$ (resp. $\bar{M}' = \bigoplus \bar{M}'_p$) est muni naturellement d'une structure de $\bar{\mathcal{D}}$ -module, que le lecteur explicitera.

Comme $Z_p^{0'} \subset Z_p^0$, M_p est un quotient de M'_p ; et pour que la présentation soit 0-bonne, il faut et il suffit que l'application $M'_p \rightarrow M_p$ soit bijective pour p assez grand.

Prenons maintenant une p -présentation et désignons par K^\bullet le complexe non augmenté associé ; soit K_r^\bullet le complexe K^\bullet "restreint au degré r " :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{r-m_0}^{\ell_p} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_{r-m_0}^{\ell_1} \rightarrow \mathcal{D}_r^{\ell_0} \rightarrow 0 \quad (m_i = d^0 a_i)$$

on a une suite exacte $0 \rightarrow K_r^\bullet \rightarrow K_{r+1}^\bullet \rightarrow \bar{K}_{r+1}^\bullet \rightarrow 0$ (en définissant \bar{K}_{r+1}^\bullet de manière évidente).

Prenons la suite exacte de cohomologie :

$$a) \text{ on a une suite } H_0(K_r^*) \rightarrow H_0(K_{r+1}^*) \rightarrow H_0(\bar{K}_{r+1}) \rightarrow 0$$

Si la p -présentation est 0-bonne on a, pour r assez grand $M_r = H_0(K_r^*)$ et de même pour r remplacé par $r+1$; donc, on a $\bar{M}_{r+1} = H_0(K_{r+1}^*)$.

b) Si elle est $(p-1)$ -bonne, on aura pour r assez grand $H_q(K_r^*) = H_q(K_{r+1}^*) = 0$ ($1 \leq q \leq p-1$) ; en utilisant ce fait (et, pour $q=1$, le fait que $M_r \rightarrow M_{r+1}$ est injectif), on voit qu'on a : $H_q(\bar{K}_{r+1}) = 0$.

Par conséquent, le complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{r-m_0}^{\ell_p} \dots \mathcal{D}_{-m_p} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\mathcal{D}}_r^{\ell_0} \rightarrow \bar{M}_r \rightarrow 0$$

sera acyclique en dimensions $-1, 0, \dots, p-1$ (mais non p en général). Désignons par L^* le complexe augmenté défini par la p -présentation (i.e. ladite présentation munie de $0 \rightarrow$ à son extrémité gauche). Le résultat précédent peut s'exprimer en disant que le gradué associé \bar{L}^* (on gradue M par les M_r) a sa cohomologie en dimensions $-1, 0, \dots, p-1$ concentrée dans les bas degrés : nous dirons que, pour ces dimensions, il est "asymptotiquement acyclique".

Réciproquement, prenons, pour $p \geq 2$ une p -présentation de M , et supposons que, pour $1 \leq q \leq p-1$ on ait $H_q(\bar{K}_r^*) = 0$ pour tous les r assez grands ; en notant qu'on a $M_r' = H_0(K_r^*)$, on trouve par la suite exacte de cohomologie que l'application $M_r' \rightarrow M_{r+1}'$ est injective pour r assez grand ; d'autre part, on voit facilement qu'on a : $\text{Ker}(M_r' \rightarrow M_r) = \varinjlim_p \text{Ker}(M_r' \rightarrow M_{r+p}')$ d'où le résultat.

Appliquant ensuite la suite exacte de cohomologie, on trouve que, pour $q=1, \dots, p-2$, l'application canonique $H_q(K_r^*) \rightarrow H_q(K_{r+1}^*)$ est bijective pour r assez grand ; passant à la limite inductive, on a $H_q(K_r^*) = H_q(K^*) = 0$, puisque K^*

provient d'une p-présentation.

En particulier, avec des définitions évidentes, on trouve le résultat suivant :

Théorème 3.

Pour qu'une résolution soit bonne, il faut et il suffit que le complexe (non augmenté) gradué associé soit asymptotiquement acyclique en dimensions ≥ 1 .

3 - Symbole.

Soit \mathfrak{p} un idéal premier de \mathfrak{D} ne contenant pas l'idéal engendré par ξ_1, \dots, ξ_n ; il revient au même de dire que \mathfrak{p} contient des polynômes homogènes de degré arbitrairement grand. Soit M un \mathfrak{D} -module à gauche, soit K^* une bonne résolution de M (supposée exister), et soit K^* le gradué associé à K . Localisons cette situation par rapport à \mathfrak{p}

Théorème 4.

$K_{\mathfrak{p}}^*$ est une résolution de $\bar{M}_{\mathfrak{p}}^*$.

Soit en effet α un cycle de $\bar{K}_{\mathfrak{p}}^*$; en multipliant α par un polynôme homogène $b \notin \mathfrak{p}$ de degré assez grand, on trouvera (théorème 3) que $b\alpha$ est un bord ; $db\alpha = b^{-1}(b\alpha)$ est aussi un bord.

Ceci montre que $K_{\mathfrak{p}}^*$ est acyclique en dimension > 0 . Le fait que $H_0(K_{\mathfrak{p}}^*) = \bar{M}_{\mathfrak{p}}$ est laissé au lecteur (la démonstration est analogue).

Soit $\bar{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \bar{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{p}}$ le corps résiduel de $\bar{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{p}}$. On peut considérer le complexe,

$\text{Hom}_{\bar{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{p}}}(\bar{K}_{\mathfrak{p}}^*, \bar{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \bar{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{p}})$ qu'on appelle p-symbole de L^* ; ses

groupes de cohomologie sont alors

$$\text{Ext}_{\bar{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{p}}}^i(\bar{M}_{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \bar{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{p}})$$

Théorème 5.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le p-symbole de K^* est acyclique en toutes dimensions

2. Il est acyclique en dimension 0

3. $\bar{M}_P = \{0\}$

Il est évident que $3) \Rightarrow 1) \Rightarrow 2)$. Le fait que $2) \Rightarrow 3)$ résulte du lemme suivant conséquence immédiate du lemme de Nakayama :

Lemme.

Soit A un anneau local, m son idéal maximal et E un A-module de type fini. Si $\text{Hom}_A(E, A/m) = \{0\}$ on a $E = \{0\}$.

Exemple. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^n, \lambda \neq 0$, et soit (λ) l'idéal de \mathcal{D} formé des $f(x, \xi)$ tels que $f(0, \lambda) = 0$. Le complexe symbole est alors :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^{\ell_0} \xrightarrow{a_0(0, \lambda)} \mathbb{C}^{\ell_1} \xrightarrow{a_1(0, \lambda)} \dots$$

(les éléments des \mathbb{C}^{ℓ_i} sont ici des matrices à une colonne, sur lesquelles les a opèrent à gauche)

Dire qu'il est acyclique en degré 0 signifie simplement que $a_0(0, \lambda)$ est injectif (ceci vrai aussi, naturellement, dans le cas général). Si cette propriété a lieu, le théorème 5 montre que ce complexe est acyclique en toute dimension. Les experts en équations aux dérivées partielles verront tout de suite l'application possible aux systèmes elliptiques.

4 - Existence de solutions formelles.

Nous nous placerons ici dans le cas où $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$. Soit M un \mathcal{D} -module à gauche de type fini et K' une résolution de M . En faisant opérer \mathcal{D} de la manière usuelle sur les "fonctions" [opération notée $(a, f) \mapsto a(f)$], on fait de \mathcal{O} un \mathcal{D} -module à gauche. Le problème de l'existence des solutions formelles pour les équations avec second membre revient, comme nous l'avons vu au §1, à étudier les groupes de cohomologie du complexe $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(K', \mathcal{O})$, qui sont égaux aux $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^p(M, \mathcal{O})$.

Remarquons maintenant qu'on a des isomorphismes canoniques $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ (\mathbb{C} considéré comme quotient de \mathcal{O} par son idéal maximal), le dernier isomorphisme étant celui qui est défini par l'accouplement $\mathcal{D} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C} : (a, f) \mapsto a(f)(0)$.

Appliquant cet isomorphisme à une résolution de M , on trouve des isomorphismes canoniques, où M est considéré comme \mathcal{O} -module par l'isomorphisme $\mathcal{O} \simeq \mathcal{D}_0$

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^p(M, \mathcal{O}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}}^p(M, \mathcal{C}) . \text{ En particulier}$$

Théorème 6.

Si M est libre sur \mathcal{O} on a, pour $p \geq 1$: $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^p(M, \mathcal{O}) = 0$

L'hypothèse sera vérifiée en particulier dans le cas suivant : on se donne une \mathcal{O} -présentation de M , définissant une filtration de M par des M_k (notations du §3) ; et l'on suppose ceci :

- a) M_{k_0} est libre sur \mathcal{O}
- b) Pour $k > k_0$, les \bar{M}_k sont libres sur \mathcal{O}

(ces conditions sont à rapprocher des "conditions de régularité" du chapitre I).

Si l'on prend pour \mathcal{O} l'anneau des séries convergentes (au lieu des séries formelles), Quillen a démontré, en utilisant la théorie de Cartan-Kähler que sous les hypothèses a) et b) précédentes, on a encore $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^p(M, \mathcal{O}) = 0$. A noter que ce cas est plus difficile que le cas des séries formelles, car on n'a pas ici l'isomorphisme $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O}) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ (le premier terme est l'anneau \mathcal{O} des séries convergentes, tandis que le second est l'anneau des séries formelles!). Quant au cas où $\mathcal{O} =$ l'anneau des germes de fonctions C^∞ , on sait que les conditions a) et b) sont loin de suffire pour qu'on ait le résultat désiré (même si M admet une résolution de longueur 1 : contre-exemples de Hans Lewy et de Hörmander), et que la question est incomparablement plus difficile.

CHAPITRE III - La résolution de Spencer

§ 1 - Quelques notations

Soit X une variété de dimension n (C^∞ ou analytique réelle) de faisceau structural \mathcal{O} (nous nous intéresserons parfois à des situations "ponctuelles" ; \mathcal{O} sera alors un anneau de germes, ou même de séries formelles).

\mathcal{D} est le faisceau des germes d'opérateurs différentiels sur X ; il est filtré par les \mathcal{D}_k , $k \geq 0$, faisceaux des germes d'opérateurs de degré $\leq k$

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}_k$$

$$\mathcal{D}_k = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(J^k, \mathcal{O}),$$

les J^k étant munis de leur structure de \mathcal{O} -module à gauche. La composition des opérateurs différentiels

$$\mathcal{D}_k \times_{\mathcal{X}} \mathcal{D}_\ell \rightarrow \mathcal{D}_{k+\ell} \quad k, \ell \geq 0$$

munit \mathcal{D} d'une structure de faisceau d'anneaux non commutatifs.

\mathcal{O} s'injecte dans \mathcal{D} , une fonction pouvant être considérée comme opérateur de degré 0 ; \mathcal{D} est ainsi muni de deux structures de \mathcal{O} -module filtré, une à gauche, et une à droite. Lorsque nous écrirons un produit tensoriel comportant \mathcal{D} en facteur, pour savoir quelles structures de \mathcal{O} -module interviennent, nous adopterons les mêmes conventions que pour les produits tensoriels faisant intervenir J (cf. chapitre I).

Nous identifierons $\mathcal{D}_1/\mathcal{O}$ à T , faisceau des germes de sections du fibré tangent à X . Les deux structures de \mathcal{O} -module sur

\mathcal{D}_1 donnent, par passage au quotient, la même structure sur T . D'autre part, T s'injecte dans \mathcal{D}_1 , un champ de vecteurs étant considéré comme un opérateur de degré 1 de la façon usuelle. Cette injection est un morphisme pour la structure de \mathcal{O} -module à gauche de \mathcal{D}_1 .

Nous désignerons par $\overline{\mathcal{D}}_m$ le quotient $\mathcal{D}_m / \mathcal{D}_{m-1}$. Les deux structures de \mathcal{O} -module induites par celles de \mathcal{D}_m y coïncident. $\overline{\mathcal{D}}$ sera le gradué associé au module filtré \mathcal{D} :

$$\overline{\mathcal{D}} = \bigoplus_{m \geq 0} \overline{\mathcal{D}}_m$$

Dans la situation "ponctuelle" (\mathcal{O} est un anneau de germes ...), $\overline{\mathcal{D}}$ est isomorphe à une algèbre de polynômes $\mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$.

Soit E un fibré vectoriel ⁽¹⁾ sur X . Nous désignerons par $\mathcal{D}(E)$ le faisceau des germes d'opérateurs sur E , à valeurs scalaires :

$$\mathcal{D}(E) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}_k(E)$$

$$\mathcal{D}_k(E) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(J^k(E), \mathcal{O})$$

On vérifie que $\mathcal{D}_k(E)$ est isomorphe à $\mathcal{D}_k \otimes_{\mathcal{O}} E^*$, E^* étant le fibré dual de E , et \mathcal{D}_k étant muni, suivant nos conventions, de sa structure de \mathcal{O} -module à droite.

Plus généralement, le faisceau $\mathcal{D}_k(E, F)$ des germes d'opérateurs différentiels de E dans F (E et F sont deux fibrés vectoriels sur X), de degré $\leq k$, est isomorphe à $F \otimes \mathcal{D}_k \otimes E^*$, l'opérateur différentiel associé à $f \otimes a \otimes e^*$ ($f \in F$, $a \in \mathcal{D}_k$, $e^* \in E^*$) étant celui qui transforme la section e de E en la section $a(\langle e^*, e \rangle).f$ de F .

Remarquons au passage que $\mathcal{D} \otimes E$ et $E \otimes \mathcal{D}$ sont deux être tout à fait différents ; le premier est le faisceau des opérateurs sur E^* , à valeurs scalaires ; le second est le faisceau des opérateurs sur le fibré 1_X , à valeurs dans E .

(1) Nous désignerons un fibré vectoriel et le faisceau de ses sections par la même lettre en laissant le lecteur interpréter.

§ 2 - Introduction

Nous nous intéresserons à une situation du type suivant :
 a est une section au-dessus de X du faisceau d'opérateurs- $\mathcal{D}(E, F)$, et nous voulons étudier le faisceau des sections de E annihilées par a .

Par composition à droite, a définit un morphisme de \mathcal{D} -modules à gauche

$$a : \mathcal{D}(F) \longrightarrow \mathcal{D}(E) ,$$

dont nous appelons M le conoyau. Appliquons le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{O})$ à la suite exacte

$$\mathcal{D}(F) \xrightarrow{a} \mathcal{D}(E) \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Nous obtenons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O}) \longrightarrow E \xrightarrow{a} F$$

(où E désigne le faisceau des germes de sections de E) ;
 cette suite nous montre que $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{O})$ est le faisceau de solutions à étudier (cf. chapitre II, §1).

Dans la suite, nous partirons d'un \mathcal{D} -module à gauche M , la loi de \mathcal{D} -module sur M étant contenue dans le morphisme ε de la suite

$$\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} M \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 ,$$

et nous chercherons à prolonger cette suite en une résolution de M .

§ 3 - Recherche d'une résolution de M

Considérons le morphisme

$$\begin{aligned} D : \mathcal{D} \otimes \mathcal{D}_1 \otimes M &\longrightarrow \mathcal{D} \otimes M \\ a \otimes \xi \otimes m &\longmapsto a\xi \otimes m - a \otimes \xi m \end{aligned}$$

Si ξ est de degré 0, l'image de $a \otimes \xi \otimes m$ est 0. Par passage au quotient, nous en déduisons un morphisme

$$D : \mathcal{D} \otimes T \otimes M \longrightarrow \mathcal{D} \otimes M$$

(donné par la même formule si nous considérons que T est injecté dans \mathcal{D}_1)

Plus généralement, fabriquons les morphismes

$$D : \mathcal{D}_k \otimes \wedge^p T \otimes M \longrightarrow \mathcal{D}_{k+1} \otimes \wedge^{p-1} T \otimes M, \quad k, p \geq 0$$

$$\begin{aligned} a \otimes (\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p) \otimes m &\longmapsto \sum_i (-1)^{i-1} [a \xi_i \otimes (\xi_1 \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_i \wedge \dots \wedge \xi_p) \otimes m \\ &\quad - a \otimes (\xi_1 \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_i \wedge \dots \wedge \xi_p) \otimes \xi_i m] \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} a \otimes ([\xi_i, \xi_j] \wedge \xi_1 \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_i \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_j \wedge \dots \wedge \xi_p) \otimes m \end{aligned}$$

Nous affirmons que la suite

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{D} \otimes \wedge^n T \otimes M \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \mathcal{D} \otimes \wedge T \otimes M \xrightarrow{D} \mathcal{D} \otimes M \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

est une résolution de M .

On vérifie facilement que $D \circ D = 0$

Le complexe (*) est fibré par les complexes

$$(*p) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{D}_{p-n} \otimes \wedge^n T \otimes M \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \mathcal{D}_p \otimes M \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

($p \geq 0$; si $k < 0$, on pose $\mathcal{D}_k = 0$). Le noyau de l'injection de (* $p-1$) dans (* p) est le complexe

$$(+p) \quad 0 \longrightarrow \bar{\mathcal{D}}_{p-n} \otimes \wedge^n T \otimes M \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \bar{\mathcal{D}}_p \otimes M \longrightarrow 0,$$

où l'opération

$$d : \bar{\mathcal{D}}_q \otimes \wedge^p T \otimes M \longrightarrow \bar{\mathcal{D}}_{q+1} \otimes \wedge^{p-1} T \otimes M$$

est définie par

$$d(\bar{a} \otimes (\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p) \otimes m) = \sum_i (-1)^{i-1} a_{\xi_i} \otimes (\xi_1 \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_i \wedge \dots \wedge \xi_p) \otimes m$$

Si M est localement libre sur σ , le complexe $(+p)$ est acyclique ; cela résulte de l'acyclicité du complexe

$$(*p) \quad 0 \rightarrow \bar{\mathcal{D}}_{p-n} \otimes \wedge^n T \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \bar{\mathcal{D}}_p \rightarrow 0$$

(d étant défini comme on le pense). Or, la fibre en $x \in X$ du fibré associé au faisceau $\bar{\mathcal{D}}_q$ est l'espace des polynômes homogènes de degré q : $\mathbb{R} \left[\frac{\partial}{\partial X_1} \dots \frac{\partial}{\partial X_n} \right]_q$, où $(x_1 \dots x_n)$ est un système de coordonnées locales de X au voisinage de x . Le complexe $(*p)$ est un complexe de Koszul sur un anneau de polynômes ; on sait qu'un tel complexe est acyclique (c'est le dual du δ -complexe considéré au chapitre I, §3b).

Il en résulte que tous les complexes $(*p)$ ont la même cohomologie, soit une cohomologie nulle puisque $(*0)$ est le complexe acyclique :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_0 \otimes M \xrightarrow{id} M \rightarrow 0$$

Le complexe $(*)$, limite inductive des $(*p)$, est donc exact.

§ 4 - Résolution d'un module M filtré

Nous supposerons maintenant M filtré par des M_k ($k \geq 0$), et nous allons filtrer en conséquence la résolution trouvée pour M . Nous ferons dès le départ deux hypothèses sur la filtration de M :

- 1) pour tous k, ℓ positifs ou nuls : $\mathcal{D}_k M_\ell \subset M_{k+\ell}$
- 2) pour k supérieur à un k_0 , M_k engendre M sur \mathcal{D} .

Le complexe $(*)$ est filtré par les complexes :

$$(k*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D} \otimes \wedge^n T \otimes M_{k-n} \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \mathcal{D} \otimes T \otimes M_{k-1} \xrightarrow{D} \mathcal{D} \otimes M_k \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

Le complexe gradué associé à cette filtration a pour composantes homogènes :

$$(k*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D} \otimes \Lambda^n T \otimes \bar{M}_{k-n} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \mathcal{D} \otimes T \otimes \bar{M}_{k-1} \xrightarrow{\delta} \mathcal{D} \otimes \bar{M}_k \rightarrow 0$$

où $\delta : \mathcal{D} \otimes \Lambda^p \otimes \bar{M}_q \rightarrow \mathcal{D} \otimes \Lambda^{p-1} \otimes \bar{M}_{q+1}$

est défini par

$$\delta(a \otimes (\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p) \otimes \bar{m}) = \sum (-1)^i a \otimes (\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_i \wedge \dots \wedge \xi_p) \otimes \xi_i \bar{m}$$

Ce dernier complexe est le tensorisé par \mathcal{D} d'un complexe que nous écrivons :

$$(k+) \quad 0 \rightarrow \Lambda^n T \otimes \bar{M}_{k-n} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} T \otimes \bar{M}_{k-1} \xrightarrow{\delta} \bar{M}_k \rightarrow 0$$

Nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, les complexes $(k+)$ sont exacts, pour k assez grand. \mathcal{D} étant libre sur \mathcal{O} , les complexes $(k*)$ seront aussi exacts. Les complexes $(k*)$ auront donc à partir d'un certain rang une cohomologie constante, donc égale à celle de leur limite inductive $(*)$, donc nulle. Nous aurons ainsi trouvé de nouvelles résolutions de M , moins volumineuses que la résolution du §3 (susceptibles par exemple d'être de type fini).

Pour étudier la cohomologie de $(k+)$, plaçons-nous dans les germes en un point x de X . Rappelons que

$$\bar{\mathcal{D}}_x = \mathcal{O}_x \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$$

Désormais, nous omettrons les indices x .

a) Premier système d'hypothèses : \mathcal{O} est noethérien, \bar{M} est de type fini sur $\bar{\mathcal{D}}$.

Soit ξ un élément de $T = \bar{\mathcal{D}}_1$. Nous utiliserons l'opération

$$\xi_{\wedge} : \Lambda^p T \otimes \bar{M} \rightarrow \Lambda^{p+1} T \otimes \bar{M}$$

définie par :

$$\xi_{\wedge}(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p \otimes \bar{m}) = (\xi_{\wedge} \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p) \otimes \bar{m} .$$

On vérifie (d'abord sur les éléments décomposés) la formule d'homotopie

$$\delta(\xi_{\wedge} x) = \xi x - \xi_{\wedge} \delta x \quad \begin{array}{l} \xi \in T \\ x \in \wedge^* T \otimes \bar{M} \end{array}$$

Cette formule montre que, si x est un cycle, ξx est un bord. On en déduit que, si x est un cycle, et α un élément homogène de $\bar{\mathcal{D}}$, de degré >0 , alors αx est un bord.

Appelons Z_p l'ensemble des cycles de $\wedge^p T \otimes \bar{M}$. L'opération δ étant $\bar{\mathcal{D}}$ -linéaire et homogène, \bar{M} étant de type fini sur $\bar{\mathcal{D}}$, qui est noethérien d'après le théorème de Hilbert, Z_p est un $\bar{\mathcal{D}}$ -module gradué, homogène, de type fini. Soit $\{z_i\}_{i \in I}$ un système (fini) de générateurs homogènes de Z_p , et λ le plus grand degré de ces opérateurs. Soit z un élément de Z_p , homogène, de degré strictement supérieur à λ . On a

$$z = \sum_{i \in I} a_i z_i ,$$

où les a_i sont des éléments homogènes de $\bar{\mathcal{D}}$, de degré >0 . Le cycle z est donc un bord, et nous avons montré la nullité de la cohomologie de $(k+)$ pour $k > \lambda + n$.

b) Deuxième système d'hypothèses : $\sigma = C^\infty$, les \bar{M}_k sont libres de type fini au-dessus d'un voisinage de x .

Calculons d'abord la valeur en $x \in X$ de la suite de δ -cohomologie, c'est-à-dire travaillons, non pas avec σ_x , mais avec son quotient par son idéal maximal, qui est \mathbb{R} . Ce dernier est noethérien et la démonstration du a) peut être reproduite : la valeur en x de la δ -cohomologie est nulle en degré assez grand.

Nous nous plaçons maintenant, non plus dans les germes, mais au-dessus d'un voisinage ouvert Ω de x . L'espace $\Lambda^p T \otimes \bar{M}_{k-p}$ étant libre de type fini sur \mathcal{O} (si Ω est assez petit), il est isomorphe à l'espace des sections au-dessus de Ω d'un fibré vectoriel $E_{k,p}$ de base X . Les applications δ étant \mathcal{O} -linéaires, $(k+)$ est le complexe des sections au-dessus de Ω d'un complexe de fibrés

$$(k.) \quad 0 \rightarrow E_{k,n} \xrightarrow{\delta} E_{k,n-1} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} E_{k,0} \rightarrow 0$$

Nous avons en fait démontré que, au point x , la suite des fibres

$$0 \rightarrow E_{k,n}(x) \xrightarrow{\delta} E_{k,n-1}(x) \rightarrow \dots \rightarrow E_{k,0}(x) \rightarrow 0$$

est exacte. On en déduit alors que le complexe des sections de $(k.)$ est exact, si Ω est assez petit (raisonnement classique).

Remarque 1 (de caractère pratique) : sur la liberté (locale) des M_k et \bar{M}_k (leur type étant supposé fini)

a) Si les \bar{M}_k sont localement libres pour $k > k_0$, et si M_{k_0} est localement libre, alors M_k est localement libre pour $k > k_0$.

b) Supposons la δ -cohomologie concentrée en degré $k < k_0$. Si les \bar{M}_k sont localement libres pour $k_0 - n \leq k < k_0$, ils le sont pour tout $k > k_0 - n$. Démontrons par exemple que \bar{M}_{k_0} est localement libre. La suite (de sections au-dessus d'un ouvert Ω de X) :

$$0 \rightarrow \Lambda^n T \otimes \bar{M}_{k_0-n} \xrightarrow{\delta} \Lambda^{n-1} T \otimes \bar{M}_{k_0-n+1} \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta} T \otimes \bar{M}_{k_0-1} \xrightarrow{\delta} \bar{M}_{k_0} \rightarrow 0$$

a une cohomologie nulle en tout point. Les applications δ sont donc de rang constant (du moins les $n-1$ premières, qui sont des morphismes de fibrés) ; la dernière application δ est surjective, donc \bar{M}_{k_0} est localement libre.

Remarque 2 : sur les filtrations possibles de M .

Soit a un E - F opérateur différentiel, de degré $\leq r$;
soit M le conoyau du morphisme

$$a : \mathcal{D}(F) \rightarrow \mathcal{D}(E)$$

Appelons N l'image de ce morphisme.

On peut filtrer N à l'aide de la filtration de $\mathcal{D}(E)$:

$$N_k = N \cap \mathcal{D}_k(E) ,$$

puis filtrer M en posant

$$M_k = \mathcal{D}_k(E) / N_k$$

C'est ce que nous appellerons la bonne filtration de M (cf. chapitre II).

On peut aussi considérer les opérateurs

$$a_{k+r} : \mathcal{D}_k(F) \rightarrow \mathcal{D}_{k+r}(E) \quad k \geq 0 ,$$

et appeler M'_{k+r} le conoyau et N'_{k+r} l'image de a_{k+r} . Il existe alors une application naturelle, i_q , de M'_q dans M'_{q+1} , sans que cette application soit nécessairement une injection ; qu'elle en soit une équivaut à :

$$N'_{q+1} \cap \mathcal{D}_q(E) = N'_q .$$

Nous appellerons alors \overline{M}'_{q+1} le conoyau de i_q .

Avec les M'_k , on peut se livrer à des opérations analogues à celles décrites avec la bonne filtration M_k . On définit en particulier des opérateurs

$$\delta : \Lambda^p T \otimes \overline{M}'_q \rightarrow \Lambda^{p-1} T \otimes \overline{M}'_{q+1}$$

Nous allons les utiliser pour donner un critère pour l'injectivité de i_q :

Théorème :

Supposons remplies les trois hypothèses :

- 1) $\mathcal{D}_1 N'_k = N'_{k+1}$ (le premier membre est toujours inclus dans le second)
- 2) i_{k-1} est une injection
- 3) la suite

$$\Lambda^3 T \otimes M'_{k-2} \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T \otimes M'_{k-1} \xrightarrow{\delta} T \otimes M'_k$$

est exacte.

Alors, i_k est une injection.

Remarque : jusqu'ici, N'_k et M'_k n'étaient définis que pour $k \geq r$. Pour $0 \leq k < r$, on prendra pour N'_k n'importe quel sous-module de $\mathcal{D}_k(E)$, pourvu que soient remplies les conditions :

$$\mathcal{D}_1 N'_k \subset N'_{k+1},$$

et nous poserons $M'_k = \mathcal{D}_k(E)/N'_k$. Pour $k < 0$, nous poserons $M'_k = 0$.

Démonstration du théorème : Par définition de M' , la suite

$$0 \rightarrow N' \rightarrow \mathcal{D}(E) \rightarrow M' \rightarrow 0$$

est exacte. Ecrivant la suite exacte de δ -cohomologie, sachant que la δ -cohomologie de $\mathcal{D}(E)$ est nulle, et tenant compte de l'hypothèse 3), nous déduisons l'exactitude de la suite

$$(2) \quad \Lambda^2 T \otimes N'_{k-1} \xrightarrow{\delta} T \otimes N'_k \xrightarrow{\delta} N'_{k+1}$$

Soit b un élément de $N'_{k+1} \cap \mathcal{D}_k(E)$.

Nous allons montrer qu'il appartient à N'_k :

Puisque $b \in N'_{k+1} = \mathcal{D}_1 N'_k$ (hypothèse 1)), on a :

$$b = c + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} b_i \quad c, b_i \in N'_k$$

Puisque $b \in \mathcal{D}_k(E)$, si \bar{b}_i désigne la partie d'ordre k de b_i , on a :

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{b}_i = 0$$

Ceci exprime que $\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{b}_i \in T \otimes N'_a$ est un cycle pour la δ -cohomologie, donc un bord d'après l'exactitude (2) ; nécessairement :

$$\begin{aligned} \bar{b}_i &= \sum \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{c}_{ij} & C_{ij} &\in N'_{k-1} \\ & & C_{ij} &= - C_{ji} \end{aligned}$$

Alors

$$b'_i = b_i - \sum \frac{\partial}{\partial x_j} c_{ij}$$

est un élément de $N'_k \cap \mathcal{D}_{k-1}(E)$, donc de N'_{k-1} (hypothèse 2) ; $\frac{\partial}{\partial x_i} b'_i$ appartient à N'_k ; donc

$$b = c + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} b'_i$$

est un élément de N'_k ; ceci démontre le théorème.

Remarque 3 : La résolution de M

$$0 \rightarrow \mathcal{D} \otimes \wedge^n T \otimes M_{k-n} \xrightarrow{D} \dots \rightarrow \mathcal{D} \otimes M_k \rightarrow M \rightarrow 0$$

(dans la mesure où c'est une résolution), filtrée grâce à la filtration de \mathcal{D} , n'est pas une bonne résolution : la suite graduée associée est

$$0 \rightarrow \mathcal{D} \otimes \wedge^n T \otimes M_{k-n} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{D} \otimes M_k \rightarrow 0$$

Elle est obtenue à partir de la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{D} \otimes \Lambda^n T \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{D} \rightarrow 0 ,$$

qui est exacte, en tensorisant à droite par des modules de plus en plus grands : elle ne peut donc être exacte. Nous allons construire une deuxième suite de Spencer, qui donnera de bonnes résolutions de M .

§ 5 - Deuxième suite de Spencer.

Nous reprenons un \mathcal{D} -module à gauche M , filtré par des M_k , $k > 0$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} \otimes \Lambda^p T \otimes M_k & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{D} \otimes \Lambda^{p-1} T \otimes M_{k+1} \\ \pi \uparrow & & \pi \uparrow \\ \mathcal{D} \otimes \Lambda^p T \otimes M_k & \xrightarrow{D} & \mathcal{D} \otimes \Lambda^{p-1} T \otimes M_{k+1} \\ i \uparrow & & i \uparrow \\ \mathcal{D} \otimes \Lambda^p T \otimes M_{k-1} & \xrightarrow{D} & \mathcal{D} \otimes \Lambda^{p-1} T \otimes M_k \end{array}$$

où D est le premier opérateur de Spencer (§3), et δ l'opérateur introduit au §4.

Posons

$$\mathcal{E}_{p,k} = \{ \xi \in \Lambda^p T \otimes M_k \mid \delta \xi = \pi D \xi = 0 \}$$

\mathcal{D} étant libre, $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E}_{p,k}$ est le sous-module de $\mathcal{D} \otimes \Lambda^p T \otimes M_k$ formé des éléments dont l'image par D appartient à $i(\mathcal{D} \otimes \Lambda^{p-1} T \otimes M_k)$.

A l'aide de D , on fabrique naturellement un opérateur

$$D' : \mathcal{D} \otimes \mathcal{E}_{p,k} \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{E}_{p-1,k}$$

tel que

$$D' D' = 0$$

D'où le complexe :

$$0 \rightarrow \mathcal{D} \otimes \mathcal{E}_{n,k} \xrightarrow{D'} \mathcal{D} \otimes \mathcal{E}_{n-1,k} \xrightarrow{D'} \dots \xrightarrow{D'} \mathcal{D} \otimes \mathcal{E}_{i,k} \xrightarrow{D'} \mathcal{D} \otimes M_k \rightarrow M \rightarrow 0$$

Si la première suite de Spencer est exacte en $\mathcal{D} \otimes \Lambda^p T \otimes M_k$,

cette deuxième suite de Spencer est exacte en $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E}_{p,k}$: en effet, on a gardé tous les bords de $\mathcal{D} \otimes \wedge^p T \otimes M_k$, mais on a peut-être supprimé des cycles.

Démontrons que cette nouvelle résolution de M (dans la mesure où c'en est une) est bonne, c'est-à-dire asymptotiquement acyclique, après filtration sur le premier facteur : le deuxième complexe de Spencer est filtré par les complexes

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{\ell-n} \otimes \mathcal{E}_{n,k} \xrightarrow{D'} \dots \rightarrow \mathcal{D}_{\ell} \otimes M_k \rightarrow M_{k+\ell} \rightarrow 0$$

Le complexe gradué associé a pour composantes :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D}_{\ell-n} \otimes \mathcal{E}_{n,k} \xrightarrow{d'} \dots \rightarrow \mathcal{D}_{\ell} \otimes M_k \rightarrow M_{k+\ell} \rightarrow 0,$$

où l'opérateur d' est obtenu par passage au quotient à partir de l'opérateur d .

Chaque $\mathcal{E}_{p,k}$ est défini par une petite suite exacte :

$$0 \rightarrow \wedge^p T \otimes M_{k-1} \rightarrow \mathcal{E}_{p,k} \rightarrow Z(\wedge^p T \otimes M_k) \rightarrow 0,$$

la notation $Z(\wedge^p T \otimes M_k)$ désignant l'ensemble des cycles de $\wedge^p T \otimes M_k$ pour la δ -cohomologie. Nous pouvons donc injecter dans le complexe (*) le complexe

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D}_{\ell-n} \otimes \wedge^2 T \otimes M_{k-1} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{D}_{\ell} \otimes M_{k-1} \rightarrow 0,$$

qui est le tensorisé à droite par M_{k-1} d'un complexe de Koszul sur un anneau de polynômes, déjà rencontré ; (*) est donc acyclique si M_{k-1} est libre.

Le quotient de (*) par (x) est le complexe

$$(+)\quad 0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_{\ell-p} \otimes Z(\wedge^p T \otimes M_k) \xrightarrow{d} \mathcal{D}_{\ell-p+1} \otimes Z(\wedge^{p-1} T \otimes M_k) \rightarrow \dots \rightarrow 0$$

Nous avons affaire à un complexe double, borné dans les deux sens :

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots \dashrightarrow \mathcal{D}_\ell \otimes \wedge^p T \otimes M_k & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}_{\ell+1} \otimes \wedge^{p-1} T \otimes M_k & \rightarrow & \dots \\
 \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \\
 \mathcal{D}_\ell \otimes \wedge^{p-1} T \otimes M_{k+1} & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}_{\ell+1} \otimes \wedge^{p-2} T \otimes M_{k+1} & \rightarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Les deux différentiations sont liées par la relation

$$d\delta + \delta d = 0 .$$

Si les M_k sont libres, les lignes sont exactes. Si k est assez grand, et avec quelques hypothèses étudiées au §4, les colonnes sont exactes. Il est alors connu que les complexes de cycles pour la δ -cohomologie forment une suite exacte pour la d -cohomologie. D'où l'exactitude de (+), qui, jointe à celle de (*), donne l'exactitude de (*), et démontre la bonté de la deuxième résolution de Spencer de M .

§ 6 - Relations avec le chapitre I, et la théorie des noyaux.

a) Reprenons, dans le cas trivial, la suite de Spencer du chapitre I

$$\wedge^p T^* \otimes J^k \xrightarrow{D} \wedge^{p+1} T^* \otimes J^{k-1} \rightarrow \dots$$

par composition, on en déduit une application

$$D^* : \mathcal{D}(\wedge^{p+1} T^* \otimes J^{k-1}) \rightarrow \mathcal{D}(\wedge^p T^* \otimes J^k)$$

Mais si E est un fibré vectoriel, $\mathcal{D}(E) = \mathcal{D} \otimes E^*$; et $J^k{}^* = \mathcal{D}_k$, donc $(\wedge^p T^* \otimes J^k)^* = \wedge^p T \otimes \mathcal{D}_k$; on trouve donc une application

$$\mathcal{D} \otimes \wedge^p T \otimes \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{D} \otimes \wedge^{p-1} T \otimes \mathcal{D}_{k+1}$$

que nous noterons désormais D^* , et dont on vérifiera facilement que c'est, dans le cas où $M = \mathcal{D}$, celle qui a été notée D au §3.

Si maintenant nous nous donnons un fibré vectoriel E et

un \mathcal{D} -module M , quotient de $\mathcal{D}(E)$, muni de sa bonne filtration, on posera $\phi^k = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(M_k, \mathcal{O})$ (en particulier, si M_k est localement libre, ϕ^k est le fibré dual de M_k) ; c'est un sous-faisceau de $J^k(E)$ qu'on pourrait appeler "solutions formelles d'ordre k du système d'équations défini par M ". Lorsque les M_k sont localement libres de type fini, les applications $\phi^{k+1} \rightarrow \phi^k$ seront surjectives (puisque l'on a muni M d'une bonne filtration), et les hypothèses de régularité du chapitre I, §6 seront satisfaites ; d'autre part (sous les hypothèses de régularité) on voit facilement que si l'on a $\mathcal{D}_1 M_k = M_{k+1}$, on a $(J^1 \otimes \phi^k) \cap J^{k+1}(E) = \phi^{k+1}$ (utiliser chap. I, §6, exemple I). Les deux points de vue se recollent donc relativement bien, à ceci près que celui développé au chapitre 3 est plus riche : deux systèmes différents peuvent avoir les mêmes solutions formelles, sans coïncider (et même sans avoir, p. ex. les mêmes solutions distributions, exemple : $X = \mathbb{R}$; prendre les équations d'ordre 0 : $xf = 0$ et $f = 0$)

b) Rappelons enfin que nous avons défini au chapitre I la différentielle de Spencer comme provenant de d_x sur un produit $X \times Y$. Nous allons maintenant utiliser cette définition, et la dualité que nous venons d'obtenir, pour interpréter D^* au moyen de la théorie des noyaux.

Soit X une variété orientée, de fibré cotangent T^* ; $\Lambda^n T^*$ est le fibré des formes volumes de X . Désignons par $\mathcal{E}(\Lambda^p T^*)$ l'espace des sections C^∞ sur X du fibré des p -formes. Cet espace, en tant qu'espace vectoriel réel, a pour dual $\mathcal{E}'(\Lambda^p T \otimes \Lambda^n T)$, espace des sections distributions à support compact du fibré $\Lambda^p T \otimes \Lambda^n T$. Précisons quel est l'accouplement entre ces deux espaces : soit $\omega(x)$ une section de $\Lambda^p T^*$, $a(x)$ une section distribution de $\Lambda^p T$, dx une forme volume ; $\omega(x) a(x)$ est un courant de degré 0, $\omega(x) a(x) dx$ est un courant de degré n (à support compact), et nous posons :

$$\langle \omega(x), a(x) dx \rangle = \int_X \omega(x) a(x) dx$$

Remarquons que, grâce au produit intérieur, $\Lambda^p T \otimes \Lambda^n T^*$ est isomorphe à $\Lambda^{n-p} T^*$.

La différentielle extérieure :

$$d : \mathcal{E}(\Lambda^p T^*) \rightarrow \mathcal{E}(\Lambda^{p+1} T^*)$$

admet une opération duale :

$$d^* : \mathcal{E}'(\Lambda^p T \otimes \Lambda^n T^*) \rightarrow \mathcal{E}'(\Lambda^{p-1} T \otimes \Lambda^n T^*)$$

ou
$$d^* : \mathcal{E}'(\Lambda^{n-p} T^*) \rightarrow \mathcal{E}'(\Lambda^{n-p+1} T^*)$$

Sous cette deuxième forme, d^* s'explique par la même formule que d . Dans la première forme, d^* est définie explicitement par :

$$d^*(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p \otimes \Omega) = \sum_i (-1)^{i-1} \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_i \wedge \dots \wedge \xi_p \otimes \theta(\xi_i) \Omega + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} [\xi_i, \xi_j] \wedge \xi_1 \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_i \wedge \dots \wedge \hat{\xi}_j \wedge \dots \wedge \xi_p \otimes \Omega,$$

où $\theta(\xi)$ désigne l'opération dérivée de Lie par rapport au champ ξ . [$\xi_i \in \mathcal{E}(T)$, $\Omega \in \mathcal{E}'(\Lambda^n T^*)$]

Soit Y un deuxième exemplaire de la variété X . Nous associerons à un opérateur K de $\mathcal{E}(Y)$ dans $\mathcal{E}(X)$ un noyau sur $X \times Y$, c'est-à-dire une section distribution du fibré sur $X \times Y$ image réciproque du fibré des formes volumes sur Y (section à support propre en y)

$$Kf(x) = \int_Y f(y) K(x,y) dy$$

Aux opérateurs différentiels, sont associés des noyaux dont le support est la diagonale de $X \times Y$ (ils annulent une puissance de l'idéal de définition de cette diagonale). Plus généralement, $\mathcal{D} \otimes \Lambda^p T$ s'injecte dans l'espace des noyaux $K(x,y) dy$, courants de degré 0 en x , en y , sections distribution de $\Lambda^p T \otimes \Lambda^n T^*$,

$\mathcal{D} \otimes \Lambda^p T \otimes \mathcal{D}$ s'injecte dans l'espace des noyaux $K(x,y,z)$ $dy dz$, courants de degré 0 en x , en y , sections distribution de $\Lambda^p T \otimes \Lambda^n T^*$, et, en z , sections distribution de $\Lambda^n T^*$.

La différentielle d^* par rapport à la seconde variable y nous donne un opérateur :

$$d^* : \mathcal{D} \otimes \Lambda^p T \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \otimes \Lambda^{p-1} T \otimes \mathcal{D},$$

qui n'est autre que l'opérateur de Spencer D^* , dans le cas $M = \mathcal{D}$. Vérifions-le pour $p=1$: soient a et b deux éléments de \mathcal{D} , auxquels sont associés les noyaux $a(x,y) dy$, et $b(y,z) dz$ respectivement. Nous pouvons toujours supposer que la forme dy est invariante par le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i}$. A l'élément $a \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes b$ de $\mathcal{D} \otimes T \otimes \mathcal{D}$, est associé le noyau $\frac{\partial}{\partial y_i} a(x,y) b(y,z) dy dz$. A l'élément $(a \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes b - a \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} b)$ de $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}$, qui n'est autre que $D(a \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes b)$, est associé le noyau

$$\begin{aligned} & \left[- \frac{\partial a}{\partial y_i} (x,y) b(y,z) - a(x,y) \frac{\partial}{\partial y_i} b(y,z) \right] dy dz \\ & = - \frac{\partial}{\partial y_i} [a(x,y) b(y,z)] dy dz, \end{aligned}$$

qui est bien égal à $d_y^* \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \otimes a(x,y) b(y,z) dy dz \right]$.

MALG. 1

