UNIVERSITÉ PARIS XI
U. E. R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

n° 111

Comportement asymptotique des solutions de certaines équations de convolution

Yves Meyer

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DE CERTAINES EQUATIONS DE CONVOLUTION

Yves MEYER

1. Enoncé du problème. Soient $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ m nombres réels $(m \geq 2)$ et $a_1, \ldots, a_m$ m coefficients complexes non nuls. Posons $T = x_m - x_1$.

Nous étudions l'équation

(1) $$\sum_1^m a_k f(x - x_k) = 0$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie sur toute la droite réelle.

Désignons par $\delta(x-a)$ la masse de Dirac placée en a et posons $\mu = \sum_1^m a_k \delta(x-x_k)$. Alors (1) peut être écrite

(2) $$f * \mu = 0$$

et, quitte à remplacer μ par une mesure translatée, on peut supposer que $x_1 = 0$ ce que nous ferons dans tout ce qui suit.

L'objet de ce travail est d'étudier la relation existant entre la régularité locale d'une solution de (1) et sa croissance à l'infini. Plus précisément, pour tout $p \in [1,+\infty]$, posons

(3) $w_p(x,\mu) = \sup\left(\int_x^{x+T} |f|^p \, dt\right)^{1/p}$ lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, solution continue de (1), est normalisée par $\left(\int_0^T |f|^p \, dt\right)^{1/p} \leq 1$; on ne change pas $w_p(x,\mu)$ en calculant cette borne supérieure sur toutes les solutions f de (1) appartenant à $L^p_{loc}(\mathbb{R})$ et

et $w_p(x,\mu)$ détermine la croissance à l'infini des solutions $f \in L^p_{loc}$.

Nous dirons que nous avons estimé une fonction $\varphi : R \to]0,+\infty[$ si nous avons déterminé $\psi : R \to]0,+\infty[$ telle qu'il existe $c_2 > C_1 > 0$ de sorte que, pour tout x réel, on ait $C_1\, \psi(x) \leq \varphi(x) \leq C_2\, \psi(x)$.

Nous nous proposons d'estimer pour tout choix des $x_1, \ldots, x_m$, $a_1, \ldots, a_m$ et pour tout $p \in [1,+\infty]$, la fonction w_p définie par (3).

Une solution de (1) de la forme $f(x) = x^j e^{izx}$, $z = \sigma + i\tau$, $j \in \mathbb{N}$ est appelée une solution élémentaire. Les combinaisons linéaires des solutions élémentaires permettent d'approcher toutes les solutions continues lorsque la topologie est celle de la convergence uniforme sur tout compact et l'on peut espérer estimer $w_p(x,\mu)$ à l'aide de la quantité correspondante calculée sur les solutions élémentaires.

Posons donc

(4) $$W(x,\mu) = \sup \left| x^j e^{-\tau x} \right| \quad \text{et} \quad \tau_o = \inf \tau ,$$

la borne supérieure et la borne inférieure étant étendues à l'ensemble des solutions élémentaires $x^j e^{i(\sigma+i\tau)x}$ de (1).

Cependant, même si $p = 2$, $W(x,\mu)$ n'est pas une estimation de $w_p(x,\mu)$: il existe deux constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ et un entier $N \geq 0$ tels que, pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout $x \geq 1$

(5) $$C_1\, W(x,\mu) \leq w_p(x,\mu) \leq C_2\, W(x,\mu)\, x^N$$

(6) $$C_1 e^{-\tau_o x} \leq w_p(x,\mu) \leq C_2\, e^{-\tau_o x}\, x^N .$$

Les preuves de (5) et (6) sont très simples et ne nécessitent pas l'étude qui suit. Notre but est d'estimer $w_p(x,\mu)$; les inégalités (5) et (6) découleront au § 10 des résultats précis obtenus. Au § 11 seront données des applications numériques où $w_p(x,\mu)$ dépend effectivement de p.

L'estimation de $w_p(x,\mu)$ est facile si $p = 2$ et sera donnée, sans démonstration, au § 2. Si $p \neq 2$, cette estimation nécessite l'étude d'une algèbre de Banach B d'opérateurs sur l'espace E des solutions continues de (1). La description détaillée de B est faite au théorème 3 du § 3 : on obtient alors l'estimation de $w_p(x,\mu)$ si $p = +\infty$. La preuve du théorème 3 est assez longue et occupe les § 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Au § 10 nous appliquerons le théorème 3 au calcul de w_p et en particulier de w_2. Des exemples numériques seront traités au § 11.

2. Le cas $p = 2$; énoncés des résultats.

Nous avons signalé que, même si $p = 2$, $W(x,\mu)$ définie par (4) n'est pas une estimation de $w_2(x,\mu)$. C'est le cas par exemple pour l'équation $f(x+\alpha) - f(x-\alpha) = f(x+1) - f(x-1)$ et pour presque toute valeur du paramètre $\alpha > 1$: $W(x,\mu) = 1$ mais $C_1 x \leq w_2(x,\mu) \leq C_2 x$. Ce paradoxe disparaît dès qu'on associe à l'équation (1) la famille des équations conjuguées que nous allons maintenant définir.

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}$ le $\mathbb{Z}$-module engendré par $x_1, \ldots, x_m$; Γ est libre et l'on désigne par $n \leq m$ le rang de Γ et par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ une base du $\mathbb{Z}$-module Γ. On peut supposer que $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$.

Soient $\mathbb{T}$ le groupe des nombres complexes de module 1 et $\Delta = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T})$ le groupe dual de Γ.

Pour toute mesure atomique ν portée par Γ et tout $\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{T})$ le produit $\chi\nu$ est bien défini ; c'est une mesure atomique portée par Γ.

THEOREME 1. <u>La fonction</u> $\sup_{\chi \in \Delta} W(x,\chi\mu)$ <u>donne une estimation de</u> $w_2(x,\mu)$.

Deux cas se présentent en appliquant le théorème 1. Si $n = 1$, il existe un ensemble fini de nombres complexes et, pour chaque $\lambda \in F$ un entier $k(\lambda) \geq 0$ tels que les fonctions $x^k e^{i\lambda x}$, $0 \leq k \leq k(\lambda)$, $\lambda \in F$, soient solutions de (1) et que toute autre solution continue f de (1) s'écrive $f(x) = \sum f_{k,\lambda}(x)\, x^k e^{i\lambda x}$; les fonctions continues $f_{k,\lambda}$ sont périodiques de période α_1 et la somme est étendue aux $\lambda \in F$ et à $0 \leq k \leq k(\lambda)$. Alors $W(x,\mu) = \sup |x^k e^{i\lambda x}|$, $0 \leq k \leq k(\lambda)$, $\lambda \in F$ et $W(x,\chi\mu) = W(x,\mu)$ pour tout $\chi \in \Delta$. Enfin $w_p(x,\mu)$ peut être estimé par $W(x,\mu)$ pour tout $p \in [1,+\infty]$.

Ce cas étant réglé, le reste de ce travail sera consacré au cas général $n \geq 2$. L'injection $\Gamma \subset \mathbf{R}$ définit une injection continue et d'image dense $\mathrm{Hom}(\mathbf{R},\mathbf{T}) \subset \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})$. Si $f * \mu = 0$ et si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est continue, pour tout $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R},\mathbf{T})$, $(\chi f) * \chi\mu = 0$; donc $W(x,\mu) = W(x,\chi\mu)$.

Appelons équation conjuguée de (1) toute équation

(2) $$f * (\chi\mu) = 0 \quad \text{où} \quad \chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T}).$$

Si χ n'est pas dans $\mathrm{Hom}(\mathbf{R},\mathbf{T})$ les solutions continues de (2) ne s'obtiennent pas immédiatement à partir de celles de (1). Nous montrerons cependant au § 4 que

(3) $$w_p(x\ ,\ \mu) = w_p(x\ ,\ \chi\mu)$$

pour tout x réel, tout $\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})$ et tout $p \in [1,+\infty]$. Le rôle des équations conjuguées est de compléter la collection des solutions élémentaires de (1). La croissance en norme L^2 à l'infini de toutes ces nouvelles solutions élémentaires donne alors la croissance en norme L^2 des solutions de l'équation initiale.

3. Le cas $p = +\infty$ (énoncés des résultats).

Soit E l'espace de Banach des solutions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de $f * \mu = 0$; E est normé par $\|f\|_\infty = \sup_{0 \le t \le T} |f(t)|$.

L'algèbre de convolution $\mathcal{M}$ est composée des mesures σ, à support compact, atomiques et portées par Γ.

Enfin B est l'algèbre des opérateurs $L : E \to E$ définis par convolution par les éléments de $\mathcal{M}$; pour chaque $L \in B$, il existe au moins une $\sigma \in \mathcal{M}$ telle que pour tout $f \in E$, $L(f) = f * \sigma$. La norme de L est par définition celle de l'endomorphisme correspondant de E. Nous montrerons au § 4 que B est une algèbre de Banach.

Appelons $\mathbb{C}^*$ le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls et $G \subset (\mathbb{C}^*)^n$ le sous-groupe d'équation

(1) $$|z_1|^{1/\alpha_1} = \ldots = |z_n|^{1/\alpha_n} \neq 0.$$

Soit $J_1 : \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T}) \times \mathbb{C} \to G$ l'homomorphisme surjectif défini par

(2) $$J_1(\chi, z) = (\chi(\alpha_1)\, e^{-i\alpha_1 z}, \ldots, \chi(\alpha_n)\, e^{-i\alpha_n z}).$$

Le sous-groupe $\Omega \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{T})$ est défini par $\chi(\alpha_n) = 1$ et la restriction J de J_1 à $\Omega \times \mathbb{C}$ est encore un homomorphisme surjectif à valeurs dans G. De plus $J : \Omega \times \mathbb{C} \to G$ est un isomorphisme local.

Soit $A = A(\Omega)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dont la série de Fourier est absolument convergente ; la norme de $f \in A$ est notée $\|f\|_A$ et est égale à la somme des modules des coefficients de Fourier de f.

Le faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ de base G sera un sous-faisceau du faisceau des germes de fonctions continues sur G. De plus, le fait d'appartenir à $\mathcal{A}$ sera invariant par translation sur G. Enfin si $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$, f appartient à la fibre de $\mathcal{A}$ au dessus de $\mathbb{1}$ si et seulement si f est le germe d'une fonction F, définie au voisinage de $\mathbb{1}$, à valeurs complexes et ayant la propriété de régularité suivante : il existe un $\varepsilon > 0$ et une suite γ_k, $k \geq 0$, de fonctions de $A(\Omega)$ tels que $\sum_0^\infty \varepsilon^k \|\gamma_k\|_A < +\infty$ et que $(F \circ J)(\omega, z) = \sum_0^\infty z^k \gamma_k(\omega)$ au voisinage de l'élément neutre de $\Omega \times \mathbf{C}$.

En écrivant $x_k = \sum_1^n q(k,j)\,\alpha_j$, $1 \leq k \leq m$, $q(k,j) \in \mathbb{Z}$, on définit $M : G \to \mathbf{C}$ par $M(z_1, \ldots, z_n) = \sum_1^m a_k \prod_1^m z_j^{q(k,j)}$. On vérifie sans peine que $M \in \mathcal{A}(G)$ de sorte que $M\mathcal{A}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{A}$ défini par la condition que toute section de $M\mathcal{A}$ au dessus d'un ouvert U de G est le produit par M d'une section de $\mathcal{A}$ au-dessus de U (§ 5). Enfin, toute mesure $\nu \in \mathcal{M}$ est une somme absolument convergente $\sum a(p_1, \ldots, p_n)\,\delta(x - p_1\alpha_1 - \ldots - p_n\alpha_n)$ étendue à une partie $P \subset \mathbb{Z}^n$ telle que $\sup_P |p_1\alpha_1 + \ldots + p_n\alpha_n| < +\infty$. Nous poserons alors $\mathcal{G}(\nu) = \sum a(p_1, \ldots, p_n) z_1^{p_1} \ldots z_n^{p_n}$ et l'on vérifie sans peine que $\mathcal{G}$ est un homomorphisme d'algèbres de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{A}(G)$. Deux mesures ν_1 et ν_2 définissent le même opérateur de E si et seulement si $\nu_2 - \nu_1 = \mu * \sigma$, $\sigma \in \mathcal{M}$ de sorte que $\mathcal{G}(\nu_2)$ et $\mathcal{G}(\nu_1)$ sont congrus modulo $M\mathcal{A}(G)$. Soit $\mathfrak{F}$ le faisceau quotient $\mathcal{A}/M\mathcal{A}$, de base G et soit $\mathfrak{F}(G)$ l'algèbre des sections globales de $\mathfrak{F}$. Nous venons de montrer l'existence d'une application $I : B \to \mathfrak{F}(G)$; il est facile de vérifier (§ 4) que I est injective.

Soit $K \subset G$ l'ensemble compact des zéros de M. Le faisceau $\mathfrak{F} = \mathcal{A}/M\mathcal{A}$ est supporté par K si bien que parler des sections globales de ce faisceau revient à décrire ses sections au-dessus de K. Nous conviendrons désormais que I est définie sur B, à valeurs dans $\mathfrak{F}(K)$.

THEOREME 2. *L'algèbre* B *des opérateurs de* E *définis par convolution avec les mesures* $\nu \in \mathcal{M}$ *est isomorphe à l'algèbre des sections au-dessus de* K *du faisceau* $\mathfrak{F} = \mathcal{A}/M\mathcal{A}$.

Nous allons enfin définir une norme sur $\mathfrak{F}(K)$ qui permettra le calcul des normes des éléments de B.

Pour tout $g_o = J(\omega_o, z_o) \in K$, $\omega_o \in \Omega$ et $z_o \in \mathbb{C}$, nous appellerons $q = q(g_o)$ l'ordre du zéro z_o de l'équation $MoJ(\omega_o, z) = (\omega_o \mu)\hat{}\,(z) = 0$. Nous montrerons au § 7 l'existence d'un voisinage compact U de g_o dans G et d'une application linéaire surjective

$$A^q \xrightarrow{\rho} \mathfrak{F}(U) \longrightarrow 0. \tag{3}$$

La semi-norme $\|.\|_U$ sera alors définie sur $\mathfrak{F}(U)$ par $\|s\|_U = \inf(\|f_1\|_A + \dots + \|f_q\|_A)$ lorsque $\rho(f_1, \dots, f_q) = s$.

Le théorème 3 ci-dessous permet de calculer les normes d'opérateurs des éléments $L \in B$ en étudiant localement leurs transformées dans $\mathfrak{F}(K)$.

THEOREME 3. *Pour tout recouvrement ouvert du compact* K, *il existe un sous-recouvrement fini formé par les intérieurs des compacts* $U_1, \dots, U_N$ *de* G *tels que* (3) *ait lieu ainsi que la propriété suivante : la norme d'opérateur d'un élément* L *de* B *et la quantité* $\sup_{1 \leq j \leq N} \|s\|_{U_j}$, *calculée sur la section* $s \in \mathfrak{F}(G)$, *image de* L *par* I, *sont deux normes équivalentes sur* B.

L'étude de $w_\infty(t, \mu)$ revient à calculer la norme de l'opérateur de E défini par convolution avec la masse de Dirac en $-t$. On est réduit à appliquer le théorème 3 à la fonction $e^{itz} : G \to \mathbb{C}$ et à calculer les semi-normes $\|e^{itz}\|_{U_j}$, $1 \leq j \leq N$. Ce sera fait aux § 10 et 11 et nous allons d'abord prouver le théorème 3 ainsi que les remarques faites aux § 2 et 3.

4. Preuve du théorème 3 (description de l'algèbre B).

Désignons par E_p l'espace des solutions de (1) qui appartiennent localement à $L^p(\mathbb{R})$. Deux solutions f_1 et f_2 appartenant à E_p sont identifiées si elles sont égales presque partout. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit $T_a : E_p \to E_p$ l'opérateur de translation défini par $(T_a f)(x) = f(x+a)$. Le lemme ci-dessous montre que E_p est un espace de Banach canoniquement isomorphe à $L^p[0,T]$ de sorte que $(T_a)_{-\infty<a<+\infty}$ devient un groupe d'opérateurs continus sur $L^p[0,T]$ dont il s'agit d'estimer la norme.

LEMME 1. Toute fonction $g \in L^p[0,T]$ est presque partout égale à la restriction à $[0,T]$ d'une et d'une seule solution $f \in E_p$.

La preuve est immédiate. Posons $\ell = x_2 - x_1$. Quitte à modifier $g(T)$, on peut supposer que $\sum_1^n a_k\, g(T - x_k) = 0$. On définit alors f à l'aide de g en utilisant (1) pour $x_m = T \leq x \leq T+\ell$; puis de proche en proche, on définit f sur les intervalles $[T + j\ell\ ,\ T + (j+1)\,\ell]$, $j \geq 0$. La construction de f montre qu'elle appartient localem à L^p. On procède de façon semblable sur $]-\infty\ ,\ 0]$.

Soit a un nombre réel et $T'_a : L^p[0,T] \to L^p[a,a+T]$ l'opérateur obtenu en prolongeant d'abord $g \in L^p[0,T]$ en une solution $f \in E_p$ que l'on restreint ensuite à $[a,a+T]$.

La construction de ce prolongement montre que si $a, x_1, \ldots, x_m$ sont fixés ainsi que $|a_1|, \dots, |a_m|$, supposés non nuls, l'opérateur T'_a et sa norme dépendent continûment des arguments de $a_1, \dots, a_m$.

LEMME 2. Pour tout a réel, tout $\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{T})$ et tout $p \in [1, +\infty]$, $w_p(a, \mu) = w_p(a, \chi\mu)$.

En effet $w_p(a, \mu)$ est la norme de T'_a et donc $w_p(a, \chi\mu)$ est une fonction continue de $\chi \in \Delta$. Si $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{R}, \mathbf{T})$, $w_p(a, \chi\mu) = w_p(a, \mu)$; puisque $\mathrm{Hom}(\mathbf{R}, \mathbf{T})$ est dense dans Δ, cette égalité est vraie pour tout $\chi \in \Delta$.

Appelons pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{M}_k$ l'espace de Banach des mesures atomiques portée par $\Gamma \cap [-k, k]$; la masse de $\nu \in \mathcal{M}_k$ est la somme des modules des masses de ν.

Munissons la réunion $\mathcal{M}$ des $\mathcal{M}_k$, $k \geq 1$, de la topologie de limite inductive ; alors $\mathcal{M}$ est une algèbre topologique où le produit est le produit de convolution.

Appelons $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathbf{C})$ l'ensemble des homomorphismes unitaires et continus de l'algèbre $\mathcal{M}$ dans $\mathbf{C}$.

LEMME 3. L'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathbf{C})$ est isomorphe à G ; plus précisément à tout $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathbf{C})$ on peut associer de façon biunivoque un $a \in G$ de sorte que l'on ait

(1) $$(\mathcal{G}\nu)(a) = \chi(\nu)\cdot$$

pour tout $\nu \in \mathcal{M}$.

Soit en effet $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathbf{C})$. La masse de Dirac placée en α_k est inversible dans $\mathcal{M}$, $1 \leq k \leq n$; donc $\chi(\delta(x - \alpha_k)) = z_k \neq 0$. L'ensemble des masses de Dirac placées en $q_1\alpha_1 + \dots + q_n\alpha_n \in [-1, 1]$ est borné dans $\mathcal{M}$. En posant $|z_k| = e^{y_k}$, on en déduit que $q_1y_1+\ldots+q_ny_n \leq C < +\infty$ lorsque $|q_1\alpha_1 +\ldots+ q_n\alpha_n| \leq 1$. Il en résulte que $y_1 = t\alpha_1, \ldots, y_n = t\alpha_n$, $t\in\mathbb{R}$ et que $(z_1, \ldots, z_n) \in G$. La réciproque est immédiate.

Nous appellerons transformée de Gelfand de la mesure $\nu\in\mathcal{M}$, la fonction $\mathcal{G}\nu : G \to \mathbf{C}$.

Pour tout caractère $\chi\in\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})$ et toute mesure atomique $\nu\in\mathcal{M}$, ν est portée par Γ et le produit $\chi\nu$ appartient à $\mathcal{M}$; c'est encore le cas si $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})$ est remplacé par le sous-groupe $\Omega \subset \mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbf{T})$ défini par $\chi(\alpha_n) = 1$.

La transformée de Fourier complexe de $\nu\in\mathcal{M}$ est la fonction entière $\hat{\nu}(z) = \int e^{-itz}\, d\nu(t)$.

La transformée de Gelfand $\mathcal{G}\nu$ de ν et sa transformée de Fourier complexes sont reliées par

(2) $$[\mathcal{G}\nu \circ J](\omega\nu) = (\omega\nu)^{\wedge}(z).$$

Cela revient à dire que la transformée de Gelfand $\mathcal{G}\nu$ fournit toutes les transformées de Fourier complexes des mesures $\omega\nu$, $\omega \in \Omega$, intervenant au théorème 1.

La vérification de (2) est immédiate et laissée au lecteur.

Rappelons que $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = T$ et que $\mu = \sum_1^m a_k\, \delta(x - x_k)$.

LEMME 4. <u>Toute mesure</u> $\nu\in\mathcal{M}$ <u>peut être écrite, de façon unique</u>

(3) $$\nu = \mu * \rho + \sigma$$

<u>où</u> $\rho\in\mathcal{M}$, $\sigma\in\mathcal{M}$ <u>et où</u> σ <u>est portée par</u> $[0,T[$. <u>L'endomorphisme de</u> $\mathcal{M}$ <u>défini par</u> $\nu \to \sigma$ <u>est continu</u>.

(4) <u>Enfin l'opérateur de</u> E <u>défini par</u> $f \to f * \nu$ <u>et la mesure</u> σ <u>vérifiant (3) sont en correspondance biunivoque et leurs normes sont équivalentes</u>.

La preuve de (3) est élémentaire et laissée au lecteur.

Puisque E est défini par $f * \mu = 0$, ν et σ définissent le même endomorphisme de E. Il reste à prouver que si σ définit l'endomorphisme nul, alors $\sigma = 0$. L'implication $f * \mu = 0 \Longrightarrow f * \sigma = 0$ pour toute fonction continue entraîne, par un théorème de Schwartz ([6]), que pour tout polynôme P l'on puisse trouver une distribution τ à support compact telle que $(P\mu) * \sigma = \mu * \tau$. Par un choix judicieux de P, $P\mu$ est une masse de Dirac, inversible dans $\mathcal{M}$, et l'on a $\sigma = \mu * \tau_1$; puisque σ est portée par $[0,T[$, $\sigma = 0$.

Montrons enfin que la norme de σ dans $\mathcal{M}$ est équivalente à celle de l'endomorphisme de E défini par convolution avec σ. Cela résulte de ce que toute fonction continue $f : [0,T] \to \mathbb{C}$ telle que $\sum_1^m a_k f(T - x_k) = 0$ est la restriction à $[0,T]$ d'une solution continue de $f * \mu = 0$.

A ce stade l'algèbre B des opérateurs de E dans E définis par convolutions par $\nu \in \mathcal{M}$ est devenue une algèbre de Banach et l'espace de Banach sous-jacent est isomorphe à ℓ^1.

Il reste à préciser, grâce au lemme 5 ci-dessous, l'homomorphisme injectif $I : B \to \mathfrak{F}(K)$.

LEMME 5. Soit μ une mesure de Radon complexe dont le support est une partie finie de $\mathbb{R}$. Les trois propriétés suivante d'une mesure $\nu \in \mathcal{M}$ sont alors équivalentes

(5) $\nu = \mu * \rho$, $\rho \in \mathcal{M}$

(6) il existe une fonction entière $E(z)$ telle que $\hat{\nu}(z) = \hat{\mu}(z)\, E(z)$

(7) $\mathcal{G}\nu$ est le produit par $\mathcal{G}\mu$ par une fonction de $\mathcal{A}(G)$.

Comme dans la preuve du lemme 4, l'équivalence entre (5) et (6) est assurée par le théorème de Schwartz et le lien avec (7) se fait à l'aide de (2).

5. Preuve du théorème 3 (extensions algébriques d'une algèbre de Banach).

Ce paragraphe joue un rôle important dans la preuve du théorème 3 ; les notions introduites et les résultats obtenus peuvent cependant avoir un intérêt en eux-mêmes et, pour cette raison, seront présentés dans un cadre plus général.

Soit A une algèbre de Banach unitaire, commutative et semi-simple, de spectre compact Ω ; les éléments de A seront toujours écrits, grâce à la transformation de Gelfand, comme des fonctions continues sur Ω, à valeurs complexes.

Soient $q \geq 1$ un entier et

(1) $$P(\omega,X) = X^q + a_1(\omega)X^{q-1} + \ldots + a_q(\omega)$$

un polynôme unitaire, de degré q, à coefficients dans A.

Appelons $A[X]$ l'anneau des polynômes en X, à coefficients dans A, I l'idéal $PA[X]$ et B l'anneau quotient A/I.

Tout élément de B possède un représentant et un seul de la forme

(2) $$b_1(\omega)\, X^{q-1} + \ldots + b_q(\omega) \quad \text{où} \quad b_j \in A.$$

Cette remarque permet d'identifier A^q et l'espace vectoriel sous-jacent à B ; la norme d'un élément $f \in B$ sera, par définition la norme $\|b_1\|_A + \ldots + \|b_q\|_A$, dans A^q, du représentant (2) de f.

On vérifie sans peine que le spectre K de B est la partie compacte de $\Omega \times \mathbb{C}$ définie par $P(\omega,z) = 0$.

Nous allons maintenant faire l'hypothèse supplémentaire que A est régulière et définir un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ de base $\Omega \times \mathbb{C}$. Ce faisceau $\mathcal{A}$ sera un sous-faisceau de celui des germes de fonctions continues sur $\Omega \times \mathbb{C}$ et sera caractérisé par la propriété suivante.

DEFINITION 1. Soient $u_o = (\omega_o, z_o) \in \Omega \times \mathbb{C}$ et φ un germe en u_o de fonctions continues sur $\Omega \times \mathbb{C}$.

Nous écrirons $\varphi \in \mathcal{A}(u_o)$ pour exprimer l'existence d'un $\varepsilon > 0$ et d'une suite f_k, $k \geq 0$, d'éléments de A tels que

$$\sum_o^\infty \varepsilon^k \|f_k\|_A < +\infty$$

et que $\Phi(\omega, z) = \sum_o^\infty (z-z_o)^k f_k(\omega)$, définie si $|z-z_o| < \varepsilon$, soit un représentant de φ en u_o.

Une seconde façon de définir le faisceau $\mathcal{A}$ utilise la notion d'algèbre de restrictions.

Pour toute partie compacte $V \subset \Omega$, soient I_V l'idéal fermé composé de toutes les fonctions de A nulles sur V et soit $A(V)$ l'algèbre quotient A/I_V munie de la norme quotient. Alors $A(V)$ est semi-simple, son spectre est V et les éléments de $A(V)$ peuvent être identifiés aux fonctions $f : V \to \mathbb{C}$ qui peuvent se prolonger à Ω tout entier en une fonction appartenant à $A(\Omega) = A$.

Si D est une partie du plan complexe, toute application $F : D \to A(V)$ définit canoniquement une fonction $f : V \times D \to \mathbb{C}$ dont la valeur en (ω_o, z_o) est la valeur prise en ω_o par $F(z_o) \in A(V)$. Par abus de langage nous emploierons ci-dessous la même notation pour f et F.

Soit V (resp. D) une partie compacte de Ω (resp. $\mathbb{C}$). Alors $\varphi \in \mathcal{A}(V \times D)$ signifie qu'il existe un ouvert $D_1 \supset D$, un voisinage compact V_1 de V dans Ω et une application holomorphe $F : D_1 \to A(V_1)$ telle que, pour tout $u \in V \times D$, $\varphi(u)$ soit le germe en u de F, regardée comme fonction de deux variables ω et z, $\omega \in V_1$, $z \in D_1$.

PROPOSITION 1. Soient A une algèbre de Banach commutative unitaire, semi-simple et régulière de spectre Ω, $q \geq 1$ un entier, $P(\omega,z) = z^q + a_1(\omega)\, z^{q-1} + \ldots + a_q(\omega)$ un polynôme unitaire, de degré q, à coefficients dans A et $K \subset \Omega \times \mathbb{C}$ l'ensemble compact défini par $P(\omega,z) = 0$. Alors l'algèbre des sections, au-dessus de K, du faisceau quotient $\mathfrak{F} = \mathcal{A}/P\mathcal{A}$ et l'extension algébrique B de A par P sont isomorphes.

Ce résultat sera prouvé dans un instant. Il est incomplet car il ne dit pas comment la norme d'un élément de B peut être calculée lorsque cet élément est regardé comme une section $s \in \mathfrak{F}(K)$. Voici le complément de la proposition 1.

Appelons pavé toute partie compacte $W \subset \Omega \times \mathbb{C}$ qui est le produit $V \times D$ d'une partie compacte V de Ω par une partie compacte D de $\mathbb{C}$.

DEFINITION 2. Pour tout pavé $W = V \times D$, l'algèbre de Banach $\Gamma(W)$ est définie par complétion de $\mathcal{A}(W)$ pour la norme $\sup_{z \in D} \|f(\cdot,z)\|_{A(V)}$ que l'on notera $\|f\|_{\Gamma(W)}$.

Si D est un disque compact de $\mathbb{C}$ le spectre de $\Gamma(W)$ est W. Dans tous les cas, $\Gamma(W)$ peut être identifiée à une algèbre de fonctions sur W.

Les notations de la proposition 2 sont celles de la proposition 1.

PROPOSITION 2. *Soient* $N \geq 1$ *un entier,* $W_1, \ldots, W_N$ N *pavés de* $\Omega \times \mathbb{C}$ *et* $f_1, \ldots, f_N$ N *fonctions à valeurs complexes définies sur ces pavés. Supposons que*

(1) K *soit recouvert par la réunion des intérieurs* $\overset{o}{W}_j$ *des* W_j, $1 \leq j \leq N$.

(2) *chaque* f_j *appartienne à l'algèbre* $\Gamma(W_j)$ *de la définition* 2

(3) *pour tout couple* (j,k), $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq N$ *et* $\overset{o}{W}_j \cap \overset{o}{W}_k \neq \emptyset$ *entraînent l'existence d'une fonction* $g_{j,k} \in \mathcal{A}(\overset{o}{W}_j \cap \overset{o}{W}_k)$ *telle que, sur* $\overset{o}{W}_j \cap \overset{o}{W}_k$, $f_j - f_k = Pg_{j,k}$.

Alors on peut trouver q *éléments* $a_o, \ldots, a_{q-1}$ *de* A *et* N *fonctions* $g_j \in \mathcal{A}(\overset{o}{W}_j)$, $1 \leq j \leq N$, *tels que, sur chaque* $\overset{o}{W}_j$,

(4) $$f_j(\omega,z) = a_o(\omega) + a_1(\omega)\, z + \ldots + a_{q-1}(\omega)\, z^{q-1} + P(\omega,z)\, g_j(z).$$

De plus

(5) $$\|a_k\|_A \leq C \sup_{1 \leq j \leq N} \|f_j\|_{\Gamma(W_j)} \quad \text{pour } k = 0, \ldots, q-1$$

où C *ne dépend que de* A, P, $W_1, \ldots$ *et* W_N *mais pas de* $f_1, \ldots, f_N$.

La partie (4) de la proposition 2 n'est que la paraphrase de la proposition 1.

La preuve de la proposition 2 est simple. Nous en esquisserons les grandes lignes.

Si $N = 1$, K est contenu dans l'intérieur de $W = V \times D$. Cela entraîne $V = \Omega$. Considérons l'élément X de B, extension algébrique de A par P. Le spectre de X est la projection K_1 de K sur $\mathbb{C}$. De sorte que $f \in \Gamma(W)$ définit une application, encore notée f, holomorphe au voisinage de $sp(X)$, à valeurs dans $A(\Omega)$.

Le calcul symbolique peut donc être appliqué et permet de définir $f(X) \in B$. Dès lors on vérifie sans peine que $f(X) = a_o + a_1 X + \ldots + a_{q-1} X^{q-1}$ possède les propriétés requises ; (5) résulte de la continuité du calcul symbolique.

Pour terminer la preuve de la proposition 2, nous allons montrer que tout $\omega_o \in \Omega$ possède un voisinage compact V_o tel que, au dessus de V_o, la situation soit celle décrite si $N = 1$. En recollant, grâce à une partition de l'unité formée de fonctions de A, les solutions locales obtenues, on obtient $a_o(\omega) + \ldots + a_{q-1}(\omega) z^{q-1}$, solution de notre problème.

LEMME 1. <u>Pour tout</u> $\omega_o \in \Omega$, <u>soit</u> F <u>l'ensemble des zéros de</u> $P(\omega_o, z) = 0$. <u>Alors on peut trouver un voisinage compact</u> V_o <u>de</u> ω_o <u>dans</u> Ω <u>et un</u> $\varepsilon > 0$ <u>tels que</u>

(6) <u>les disques</u> $D(\zeta, \varepsilon)$ <u>définis par</u> $|z - \zeta| \leq \varepsilon$, $\zeta \in F$, <u>soient deux à deux disjoints</u>

(7) <u>les pavés</u> $V_o \times D(\zeta, \varepsilon)$, $\zeta \in F$, <u>soient contenus dans tous les</u> $\overset{o}{W}_j$ <u>auxquels</u> (ω_o, ζ) <u>appartient</u>.

(8) <u>si</u> $\omega \in V_o$ <u>et</u> $P(\omega, z) = 0$, <u>il y a un</u> $\zeta \in F$ <u>tel que</u> $|z - \zeta| \leq \varepsilon$.

Le lemme 1 résulte simplement de ce que l'ensemble des racines de $P(\omega, z) = 0$ dépend de façon continue de $\omega \in \Omega$.

Revenant à la preuve de la proposition 2, soit D la réunion des $D(\zeta, \varepsilon)$, $\zeta \in F$, et soit $f \in \mathcal{A}(V_o \times D)$ la fonction définie comme suit : pour tout $\zeta \in F$, choisissons un entier j tel que (ω_o, ζ) appartienne à $\overset{o}{W}_j$ et décidons que f est égale à f_j au voisinage de $V_o \times D(\zeta, \varepsilon)$. Alors pour tout $u = (\omega, z)$ tel que $\omega \in V_o$, $P(\omega, z) = 0$ et $u \in \overset{o}{W}_k$, les germes en u de f et de f_k sont congrus modulo $P\mathcal{A}(u)$. Cela résulte de la définition de f et des relations de compatibilité entre les f_j.

Par le procédé du calcul symbolique du cas $N = 1$, nous formons un polynôme R, de degré $\leq q-1$, à coefficients dans $A(V_o)$; pour tout $u = (\omega, z)$ tel que ω appartienne à l'intérieur de V_o, que $P(\omega,z) = 0$ et $u \in \overset{o}{W}_k$, les germes en u de R et de f_k sont encore congrus modulo $P\mathcal{A}(u)$.

Enfin recouvrons Ω par les intérieurs de voisinages V_s, $1 \leq s \leq S$, de type V_o ; appelons $w_1, \ldots, w_S$ des fonctions de A telles que le support de chaque w_s soit un compact contenu dans l'intérieur de V_s et que $1 = w_1 + \ldots + w_S$; désignons par $R_1, \ldots, R_S$ les polynômes R construits ci-dessus et posons $R = \sum w_s R_s$. On vérifie sans peine que R possède toutes les propriétés désirées..

Dans le même ordre d'idées nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 2. Soient V une partie compacte de Ω, D un disque compact de $\mathbb{C}$, $q \geq 1$ un entier et $a_1, \ldots, a_q$ q éléments de A définissant un polynôme unitaire

$$P(\omega,z) = z^q + a_1(\omega)\, z^{q-1} + \ldots + a_q(\omega).$$

Supposons qu'il existe une partie ouverte W de Ω contenant V et telle que pour tout $\omega \in W$ toutes les racines $z \in \mathbb{C}$ de $P(\omega,z) = 0$ appartiennent à l'intérieur de D.

Alors pour tout $f \in \mathcal{A}(V \times D)$ les deux conditions suivantes sont équivalentes

(9) $f \in P\mathcal{A}(V \times D)$

(10) $z \to f(\omega,z)/P(\omega,z)$ est holomorphe au voisinage de D pour tout ω appartenant à un certain voisinage de V.

L'implication (9) $\Rightarrow$ (10) est immédiate.

En sens inverse, désignons par D_1 un disque compact dont l'intérieur contient D, par V_1 un voisinage de V dans Ω tels que $f \in \mathcal{A}(V_1 \times D_1)$ et que, si $\omega \in V_1$ toutes les racines de $P(\omega , z) = 0$ appartiennent à l'intérieur de D_1.

Posons si $\omega \in V_1$ et $z \in \overset{o}{D}_1$, $g(\omega,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\omega,\zeta)}{(\zeta - z)P(\omega,\zeta)} d\zeta$.

On vérifie sans peine que l'intégrale de Bochner $g \in \mathcal{A}(V\times D)$ et que $f = Pg$ au voisinage de $V \times D$.

6. <u>Preuve du théorème 3</u> : <u>l'algèbre</u> $\mathcal{F}(K)$ <u>est une algèbre de Banach</u>.

Nous revenons aux notations des § 3 et 4. Le groupe G de $(\mathbf{C}^*)^n$ est défini par $|z_1|^{1/\alpha_1} = \ldots + |z_n|^{1/\alpha_n} \neq 0$; Γ est le $\mathbf{Z}$-module libre $\mathbf{Z}\alpha_1 + \ldots + \mathbf{Z}\alpha_n$, $\Omega \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{T})$ est défini par $\chi(\alpha_n) = 1$, $A(\Omega) = A$ est l'algèbre des fonctions continues sur Ω dont la série de Fourier est absolument convergente et $J : \Omega \times \mathbf{C} \to G$ est défini par $J(\omega,z) = (\omega(\alpha_1)\, e^{-i\alpha_1 z}, \ldots, \omega(\alpha_n)\, e^{-i\alpha_n z})$ avec $\omega(\alpha_n) = 1$.

Enfin μ est une mesure complexe dont le support est une partie finie de $\Gamma = \mathbf{Z}\alpha_1 + \ldots + \mathbf{Z}\alpha_n$ et $M : G \to \mathbf{C}$ est la transformée de Gelfand de μ ; pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $z \in \mathbf{C}$, $M(J(\omega,z)) = (\omega\mu)^{\wedge}(z)$. Le faisceau $\mathcal{F}$ est $\mathcal{A}/M\mathcal{A}$ et $K \subset G$ est l'ensemble compact des zéros de M.

Nous allons faire l'étude locale du faisceau $\mathcal{F}(K)$.

Pour tout $\omega_o \in \Omega$ et tout $\varepsilon \in \left]0,2\right[$, $V(\omega_o, \varepsilon)$ est le voisinage compact de ω_o dans Ω défini par $|\omega(\alpha_j) - \omega_o(\alpha_j)| \leq \varepsilon$, $1 \leq j \leq n-1$. De même si $z_o \in \mathbf{C}$, $\eta > 0$, $D(z_o, \eta)$ est le disque compact $|z - z_o| \leq \eta$. S'il n'y a pas d'ambiguité, on écrira V pour $V(\omega_o, \varepsilon)$ et D pour $D(z_o, \eta)$.

DEFINITION 3. <u>Une partie compacte</u> Q <u>de</u> G <u>est un pavé ajusté s'il existe</u> $a \in K$, $\varepsilon \in \left]0,2\right[$, $\eta > 0$, $\omega_o \in \Omega$ <u>et</u> $z_o \in \mathbf{C}$ <u>tels que</u>

(1) $J : V(\omega_o, \varepsilon) \times D(z_o, \eta) \to Q$ soit un homéomorphisme et que $J(\omega_o, z_o) = a$.

(2) il y ait un entier $q \geq 1$, q fonctions $a_1(\omega), \ldots, a_q(\omega)$ de $A(\Omega)$, nulles en ω_o et un élément inversible $H \in \mathcal{A}(V \times D)$ de sorte qu'au voisinage de $V \times D$ on ait $M \circ J = (z^q + a_1(\omega) z^{q-1} + \ldots + a_q(\omega)) H = PH$.

(3) pour tout $\omega \in V$ toutes les racines de $P(\omega, z) = 0$ appartiennent à l'intérieur de D.

L'existence de pavés ajustés résulte de la preuve du théorème de préparation de Weierstrass ([2], Ch. II, sec. D).

Les conditions d'application du théorème de préparation sont remplies : si pour un $\omega_o \in \Omega$, $M(\omega_o, z)$ était identiquement nulle, il en serait de même de la transformée de Fourier complexe de $\omega_o \mu$ et aussi de μ.

Appelons B l'extension algébrique de $A(V)$ par P. Par simple transport de structure, on peut définir une algèbre $B(Q)$, de spectre $K \cap Q$, dont les éléments seront représentés par des fonctions $f : Q \to \mathbb{C}$ telles que $f \circ J = \sum_{o}^{q-1} a_j(\omega) z^j$, $a_j \in A(V)$, $(\omega, z) \in V \times D$. La multiplication dans $B(Q)$ ne coïncide évidemment pas avec celle des fonctions f associées ; il faut réduire modulo M.

Remarquons enfin que si f et $g \in B(Q)$ et si $f-g \in M\mathcal{A}(\overset{o}{Q})$ sur l'intérieur de Q, alors $f = g$.

PROPOSITION 3. <u>Pour tout pavé ajusté</u> Q, <u>on peut définir un homomorphisme d'anneaux</u> $\rho : \mathfrak{F}(K) \to B(Q)$ <u>tel que, pour toute section</u> $s \in \mathfrak{F}(K)$ <u>et tout</u> $x \in K \cap \overset{o}{Q}$, $s(x)$ <u>soit l'image, modulo</u> $M\mathcal{A}(x)$, <u>du germe en</u> x <u>de la fonction</u> $\rho(s)$.

Si nous arrivons à définir un homomorphisme $\rho_1 : \mathfrak{F}(Q) \to B(Q)$ ayant les propriétés décrites dans la proposition 3, ρ sera défini par le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(K) & \simeq & \mathfrak{F}(G) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \pi \\ B(Q) & \xleftarrow{\rho_1} & \mathfrak{F}(Q) \end{array} .$$

Dans ce diagramme, la première identification s'obtient en prolongeant $s \in \mathfrak{F}(K)$ par 0 hors de K et π est la restriction canonique.

Une section $s \in \mathfrak{F}(Q)$ est définie par un recouvrement ouvert $W_1, \ldots, W_N$ de Q et par des fonctions $f_j \in \mathcal{A}(W_j)$ reliées entre elles par les conditions de compatibilité $f_j - f_k \in M\mathcal{A}(W_j \cap W_k)$ sur $W_j \cap W_k$ supposé non vide. On transporte les f_j par J et l'on est ramené aux conditions d'application de la proposition 2.

DEFINITION 4. <u>Un recouvrement ajusté de</u> K <u>est, avec les notations précédentes, la donnée de</u> N <u>pavés ajustés</u> $Q_1, \ldots, Q_N$ <u>tels que</u> K <u>soit contenu dans la réunion des intérieurs des</u> Q_j.

On désignera par $\rho_j : \mathfrak{F}(K) \to B(Q_j)$ les homomorphismes correspondants au ρ de la proposition 3 ; $B(Q_j)$ est isomorphe à l'extension algébrique de $A_j = A(V_j)$ par P_j.

Pour toute section $s \in \mathfrak{F}(K)$, posons $\|s\| = \sup_{1 \le j \le N} \|\rho_j(s)\|_{B(Q_j)}$.

PROPOSITION 4. <u>L'anneau</u> $\mathfrak{F}(K)$ <u>muni de la norme</u> $\sup_{1 \le j \le N} \|\rho_j(s)\|_{B(Q_j)}$ <u>est une algèbre de Banach</u>.

Il s'agit de prouver que $\mathfrak{F}(K)$ est complet.

Pour alléger les notations, écrivons B_j au lieu de $B(Q_j)$ et formons $\rho : \mathfrak{F}(K) \to \prod_1^N B_j$ définie par $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N)$. Cette application est évidemment injective. Son image est l'ensemble des suites $(f_1, \ldots, f_N) \in \prod_1^N B_j$ telles que pour tout couple (j,k) pour lequel $\overset{\circ}{Q}_j \cap \overset{\circ}{Q}_k$ est non vide, on ait, sur cet ensemble ouvert $f_j - f_k \in M\mathcal{A}(\overset{\circ}{Q}_j \cap \overset{\circ}{Q}_k)$.

Cette dernière condition peut être écrite plus simplement en utilisant le lemme 2 du § 5 ; grâce à la représentation paramétrique $J : \Omega \times \mathbb{C} \to G$, f_j et f_k deviennent des polynômes dont les coefficients doivent, pour tout ω appartenant à une certaine partie ouverte de Ω, satisfaire aux relations exprimant la divisibilité par un polynôme fixe $P_j(\omega,z)$. L'image $\rho(\mathfrak{F}(K))$ est donc définie par une famille de formes linéaires continues sur $\prod_1^N B_j$; cette image est fermée et complète.

En utilisant à nouveau la proposition 2, on montre que

PROPOSITION 5. <u>La structure d'algèbre de Banach de</u> $\mathfrak{F}(K)$ <u>ne dépend pas du recouvrement ajusté choisi</u>.

COROLLAIRE. <u>Soit</u> s_k, $k \geq 0$, <u>une suite de sections appartenant à</u> $\mathfrak{F}(K)$. <u>Pour montrer que</u> $s_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, <u>il suffit pour tout</u> $a \in K$, <u>de trouver un voisinage</u> Q <u>de</u> a <u>dans</u> G <u>qui soit un pavé ajusté et tel que les restrictions de</u> s_k <u>à</u> Q <u>tendent vers</u> 0 <u>dans</u> $B(Q)$.

(Ces restrictions sont définies à l'aide de la proposition 3).

7. Preuve du théorème 3 : la structure locale de l'algèbre B.

Soit $Q \subset G$ un pavé ajusté et $\Pi : B \to B(Q)$ l'homomorphisme obtenu en composant l'injection canonique de B dans $\mathfrak{F}(K)$ avec l'opérateur de restriction de $\mathfrak{F}(K)$ dans $B(Q)$.

PROPOSITION 6. *Tout point* $a \in K$ *possède un système fondamental de voisinages compacts* Q *qui sont des pavés ajustés tels que les homomorphismes correspondants* $\Pi : B \to B(Q)$ *soient surjectifs.*

Pour démontrer ce résultat, nous pouvons supposer que $a = \mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$ et nous allons utiliser la représentation paramétrique $J : \Omega \times \mathbb{C} \to G$.

Soient $\varepsilon \in \left]0,2\right[$, $\eta \in \left]0,\frac{\pi}{\alpha_n}\right[$; ils permettent de définir un voisinage compact V de l'origine dans Ω par $|\omega(\alpha_j) - 1| \leq \varepsilon$, $1 \leq j \leq n-1$ et un disque compact $D \subset \mathbb{C}$ par $|z| \leq \eta$. Alors Q sera l'image $J(V \times D)$ et grâce au choix de η, J est un homéomorphisme.

Appelons $q \geq 1$ l'ordre du zéro $z = 0$ de $\hat{\mu}(z) = 0$. Par un choix judidieux de ε et $\eta > 0$, le théorème de préparation de Weierstrass fournit un polynôme

$$P(\omega,z) = z^q + a_1(\omega)\, z^{q-1} + \ldots + a_q(\omega)$$

où les a_j, $1 \leq j \leq q$, sont nuls à l'origine, analytiques au voisinage de V et appartiennent donc à $A(V)$.

Au voisinage de $V \times D$, $M \circ J$ est le produit de $P(\omega,z)$ par un élément inversible de $\mathcal{A}(V \times D)$.

En composant l'homomorphisme canonique de $\mathcal{M}$ sur B et l'application Π, on obtient un homomorphisme que nous allons décrire.

Toute mesure $\nu \in \mathcal{M}$ s'écrit $\nu = \sum_{|q_1\alpha_1+\ldots+q_n\alpha_n| \leq \ell} c(q_1, \ldots, q_n)\, \delta(x-\alpha_1 q_1 - \ldots - \alpha_n q_n)$

et l'on a

(1) $$F(\omega,z) = [\mathcal{G}\nu \circ J](\omega,z) = \sum_{|q_1\alpha_1+\ldots+q_n\alpha_n| \leq \ell} \omega_1^{q_1} \ldots \omega_{n-1}^{q_{n-1}} e^{-i(\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n) z}$$

avec $\omega_1 = \omega(\alpha_1), \ldots, \omega_{n-1} = \omega(\alpha_{n-1})$.

Supposons que l'on sache écrire

(2) $$F(\omega,z) = f_o(\omega) + \ldots + z^{q-1} f_{q-1}(\omega) + P(\omega,z)\, g(\omega,z)$$

avec des $f_k \in A(V)$, $0 \leq k \leq q-1$ et $g \in \mathcal{A}(V \times D)$.

Alors $f_o(\omega) + \ldots + z^{q-1} f_{q-1}(\omega)$ sera l'image par Π de l'opérateur de E défini par convolution avec ν.

Nous allons expliciter la décomposition (2) lorsque Q est un pavé ajusté puis nous prouverons que η étant fixé, l'application de B dans $[A(V)]^q$ définie par (2) devient surjective quand $\varepsilon > 0$ est assez petit.

Appelons, pour alléger les notations B_V l'algèbre extension algébrique de $A(V)$ par P et notons $\| \ \|_V$ la norme des éléments de B_V.

En laissant fixes η et D, nous allons étudier l'influence de ε (et donc de V) sur B_V.

LEMME 1. <u>Pour tout</u> $\alpha > 0$, <u>on peut trouver un voisinage</u> V <u>de l'origine dans</u> Ω <u>assez petit pour que</u>

(3) $$\|z^j\|_V \leq q\, \alpha^{[j/q]} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad j \geq 0$$

($[t]$ <u>désigne la partie entière de</u> t).

Partons d'un V pour lequel le théorème de préparation peut être appliqué et remplaçons V par V_1 pour assurer (3). On opère comme suit. Appelons $S(\omega)$ la matrice $\begin{pmatrix} 0, & \dots, & 0, & -a_q(\omega) \\ 1, & \dots, & 0, & -a_{q-1}(\omega) \\ 0, & \dots, & 1, & -a_1(\omega) \end{pmatrix}$ et considérons la matrice S^q : les 1 ont tous disparu et les coefficients de S^q sont des sommes ou différences de produits des a_j. Appelons norme d'une telle matrice la somme des normes dans $A(V_1)$ de tous ses coefficients. Puisque tous les a_j sont nuls en 0, on peut trouver $V_1 \subset V$ de sorte que $\|S^q\| \leq \alpha$.

Posons maintenant $j = mq + r$, $m \geq 0$, $0 \leq r \leq q-1$. Alors le vecteur $(z^{mq}, \dots, z^{mq+q-1}) \in B^q_{V_1}$ est l'image par S^{qm} du vecteur $(1, \dots, z^{q-1}) \in B^q_{V_1}$. Il s'en suit que

$$\|z^j\|_{V_1} \leq \|z^{mq}\|_{V_1} + \dots + \|z^{mq+q-1}\|_{V_1} \leq \alpha^m(\|1\|_{V_1} + \dots + \|z^{q-1}\|_{V_1}) = q\alpha^m .$$

Dans (1) développons l'exponentielle en série pour obtenir

$F(\omega,z) = F_1(\omega,z) + F_2(\omega,z)$ où

$$F_1(\omega,z) = \sum_{0\leq j\leq q-1} \frac{(-iz)^j}{j!} \sum_{|q_1\alpha_1 + \dots + q_n\alpha_n| \leq \ell} (\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n)^j \, c(q_1, \dots, q_n)\, \omega_1^{q_1} \dots \omega_{n-1}^{q_{n-1}}$$

$$= f_o(\omega) + \dots + z^{q-1} f_{q-1}(\omega)$$

et où $F_2(\omega,z)$ est la somme correspondante étendue aux $j > q$.

Nous allons prouver que, si $\ell = \frac{q\alpha_n}{2}$, $F_1(\omega,z)$ peut, par un choix judicieux des $c(q_1, \dots, q_n) \in \ell^1$, représente n'importe quel élément de B_V. Il y aura alors une constante C telle que l'on puisse satisfaire en outre à

$\sum |c(q_1, \dots, q_n)| \leq C(\|f_o\|_A + \dots + \|f_{q-1}\|_A)$. Le nombre ℓ étant maintenant fixé, nous remplacerons V par V_1 assez petit pour que la norme de $F_2(\omega,z)$ dans

B_{V_1} ne dépasse pas $\frac{1}{2C} \sum |c(q_1,\ldots,q_n)|$. Finalement tout élément de B_{V_1} pourra être écrit $F_1 = F - F_2$ où $F = \mathcal{G}\nu$, ν est portée par $[-\ell, \ell] \cap \Gamma$, $\|\nu\| \leq C\|F_1\|_{V_1}$ et $\|F_2\|_{V_1} \leq \frac{1}{2}\|F_1\|_{V_1}$. Par approximations successives, on obtient alors la proposition 6.

Ecrivons $f_j(\omega) = \sum f_j(q_1, \ldots, q_{n-1})\, \omega_1^{q_1} \ldots \omega_{n-1}^{q_{n-1}}$ et appelons, pour chaque suite $(q_1, \ldots, q_{n-1}) \in \mathbf{Z}^{n-1}$, $F(q_1, \ldots, q_{n-1})$ l'ensemble des $q_n \in \mathbf{Z}$ tels que $|q_1\alpha_1 + \ldots + q_n\alpha_n| \leq \ell$; si $\ell = \frac{\alpha_n q}{2}$, $F(q_1, \ldots, q_{n-1})$ est composé d'au moins q entiers consécutifs. Il s'agit de trouver $c(q_1, \ldots, q_{n-1}) \in \ell^1$ de sorte que, pour $0 \leq j \leq q-1$,

$$(4) \qquad \sum_{q_n \in F(q_1,\ldots,q_{n-1})} (\alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_n q_n)^j\, c(q_1,\ldots,q_n) = (i)^j\, j!\, f_j(q_1,\ldots,q_{n-1}).$$

Si nous décidons que $c(q_1,\ldots,q_n) = 0$ si $q_1 = \ldots = q_{n-1} = 0$, $q = 2q_n$ (seul cas où $\mathrm{Card}\, F(q_1, \ldots, q_{n-1}) = q+1$), (4) est un système de Cramer de q équations à q inconnues, lorsque $q_1, \ldots, q_{n-1}$ sont fixés. Le déterminant du système est un déterminant de Van der Monde ; au signe près il vaut $\alpha_n^q\, 1!\, 2! \ldots (q-1)!$; tous les mineurs de ce déterminant sont bornés car les coefficients de $c(q_1, \ldots, q_n)$ le sont.

Il existe donc une constante C telle que, pour tout

$$(q_1,\ldots,q_{n-1}) \in \mathbf{Z}^{n-1}, \qquad \sum_{q_n \in F(q_1,\ldots,q_{n-1})} |c(q_1,\ldots,q_n)| \leq C \sum_{j=0}^{q-1} |f_j(q_1,\ldots,q_{n-1})|.$$

En ajoutant toutes ces inégalités, on obtient

$$\sum |c(q_1,\ldots,q_n)| \leq C(\|f_o\|_A + \ldots + \|f_{q-1}\|_A).$$

Nous devons maintenant vérifier que la norme de F_2 dans B_{V_1} peut être majorée par $\frac{1}{2C} \sum |c(q_1, \ldots, q_n)|$ grâce à un choix judicieux de V_1. Il suffit de majorer

$\|F_2\|_{V_1}$ par $(\sum_{j\geq q} \frac{\|z^j\|_{V_1}}{j\,!} \rho^j)(\sum |c(q_1, \ldots, q_n)|$

$$\leq \sum |c(q_1,\ldots,q_n)| \sum_{j\geq q} \frac{\alpha^{[J/q]} \rho^j}{j!} \leq \frac{1}{2C} \sum |c(q_1, \ldots, q_n)|$$

si α est assez petit. Grâce au lemme 1 on peut choisir V_1 pour qu'il en soit ainsi.

8. Preuve du théorème 3 : un lemme sur le calcul symbolique.

PROPOSITION 7. *Soient* $m \geq 1$ *un entier,* $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{A}(K)$ m *fonctions définies au voisinage de* K, *à valeurs complexes. Appelons* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *les images canoniques de* $f_1, \ldots, f_m$ *dans* $\mathfrak{F}(K)$. *Supposons que* $\varphi_1,\ldots, \varphi_m \in B$.

Soient $S \subset \mathbb{C}^m$ *l'ensemble image de* K *par* $(f_1, \ldots, f_m)$ *et* $H \in \mathcal{O}(S)$ *une fonction holomorphe au voisinage de* S.

Alors $H(f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{A}(K)$ *et a pour image canonique dans* $\mathfrak{F}(K)$ *l'élément* $H(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ *de l'algèbre de Banach* B *défini par le calcul symbolique holomorphe.*

Soit $U \subset \mathbb{C}^m$ un ouvert contenant S et tel que H soit holomorphe sur U. On peut, grâce au lemme d'Arens et Calderón, compléter $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ en $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m'})$, $m' \geq m$ de sorte que la projection sur $\mathbb{C}^m$ de l'enveloppe polynomialement convexe $\tilde{S}$ de $S' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{m'})(K)$ soit contenue dans U. On définit $\tilde{H} \in \mathcal{O}(\tilde{S})$ par

$$\tilde{H}(z_1, \ldots, z_{m'}) = H(z_1, \ldots, z_m).$$

Le théorème d'Oka-Weil permet de trouver un voisinage compact W de $\tilde{S}$ dans $\mathbb{C}^{m'}$ et une suite H_k de polynômes uniformément convergente sur W vers $\tilde{H}$.

Appelons $f_{m+1}, \ldots, f_{m'}$ $m'-m$ éléments de $\mathcal{A}(G)$ dont les images dans $\mathfrak{F}(K)$ soient $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{m'}$ et soit $Q_1, \ldots, Q_N$ un recouvrement ajusté de K par des pavés assez petits pour que si $1 \leq j \leq m$, f_j appartienne à $\mathcal{A}(Q_1 \cup \ldots \cup Q_N)$ et pour que l'image de chaque Q_r par $(f_1, \ldots, f_{m'})$ soit contenue dans l'intérieur de W $(1 \leq r \leq N)$.

Formons la fonction $Y_k = H_k(f_1, \ldots, f_{m'})$, définie sur $Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$. Le théorème du calcul symbolique holomorphe peut être appliqué à chacune des algèbres $\Gamma(Q_r)$, de spectre Q_r, définies au § 5. Au sens de la norme de $\Gamma(Q_r)$, $Y_k \to Y = \tilde{H}(f_1, \ldots, f_{m'}) = H(f_1, \ldots, f_m)$. Ainsi $Y \in \mathcal{A}(K)$. D'ailleurs, pour chaque k, l'image modulo $M\mathcal{A}(K)$ de Y_k est $Z_k = H_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m'}) \in \mathfrak{F}(K)$ et, pour la topologie de $\mathfrak{F}(K)$, Z_k tend vers l'image Z de Y modulo $M\mathcal{A}(K)$.

Enfin le théorème du calcul symbolique holomorphe peut être appliqué à B elle-même : $Z_k \to H(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ $(k \to +\infty)$ et $H(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, regardé comme élément de $\mathfrak{F}(K)$, appartient à B.

La topologie de B est plus fine que celle de $\mathfrak{F}(K)$ et $H(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est l'image, modulo $M\mathcal{A}(K)$, de $H(f_1, \ldots, f_m)$.

9. Fin de la preuve du théorème 3.

La première étape est de construire un recouvrement de K par des pavés ajustés possédant toutes les propriétés décrites ci-dessus et de former une partition de l'unité, associée à ce recouvrement, à l'aide d'éléments de $\mathfrak{F}(K)$.

Pour tout $a \in K$ soit Q_a un pavé ajusté auquel s'applique la proposition 6.

Il y a un point $\omega_a \in \Omega$, un $z_a \in \mathbb{C}$, un $\varepsilon > 0$ et un $\eta > 0$ tels que Q_a soit l'image par $J : \Omega \times \mathbb{C} \to G$ du produit $V(\omega_a, \varepsilon) \times D(z_a, \eta)$ décrit dans la définition 3 ; pour alléger l'écriture, notons $V_a = V(\omega_a , \varepsilon)$ et $D_a = D(z_a , \eta)$ et appelons $\varphi_a : Q_a \to V_a \times D_a$ l'application inverse de J.

Soit $\alpha_a : \Omega \to [0,1]$ une fonction appartenant à $A(\Omega)$ égale à 1 en ω_a et dont le support est contenu dans l'intérieur de V_a. Définissons $f_a : Q_a \to [0,1]$ par $f_a = \alpha_a \circ \varphi_a$ et prolongeons f_a en une fonction, encore notée $f_a : G \to [0,1]$, égale à 0 sur le complémentaire de Q_a.

LEMME 1. <u>Le germe de</u> f_a <u>au voisinage de</u> K <u>appartient à</u> $\mathcal{A}(K)$.

Il suffit, pour tout $x \in K$, de trouver un voisinage V de x tel que, restreinte à V, f_a appartienne à $\mathcal{A}(V)$.

Trois cas se présentent. Si x appartient à l'intérieur de Q_a, on prend $V = Q_a$ et la définition de f_a montre que $f_a \in \mathcal{A}(V)$.

Si $x \notin Q_a$, il existe un voisinage V de x ne rencontrant pas Q_a et sur lequel f_a est nulle.

Si x est dans l'intersection de K et de la frontière de Q_a, on pose $\varphi_a(x) = (\omega , z)$; grâce à la condition (3) de la définition 3, ω appartient à la frontière de V_a et z à l'intérieur de D_a. Or le support de α_a est contenu dans l'intérieur de V_a ; donc f_a est encore nulle au voisinage de x et le lemme 1 est prouvé.

Appelons Q'_a un voisinage de a assez petit pour que $f_a \geq \frac{1}{2}$ sur Q'_a. Formons un recouvrement de K par $Q'_{a_1}, \ldots, Q'_{a_N}$ et écrivons alors $Q_j = Q_{a_j}$ et

$f_j = f_{a_j}(\sum_1^N f_{a_k})^{-1} \in \mathcal{A}(K)$. Appelons C_j l'adhérence de l'ensemble des $x \in K$ pour lesquels $f_j(x) \neq 0$. De la même manière que nous avons construit les f_a, nous pouvons construire une suite g_j, $1 \leq j \leq N$ d'éléments de $\mathcal{A}(K)$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $g_j = 1$ au voisinage de C_j et que le support de g_j soit contenu dans l'intérieur de Q_j. Soit K_j l'ensemble des $x \in K$ où $g_j = 1$.

LEMME 2. Il existe un entier $N \geq 1$ et N éléments de l'algèbre de Banach B, représentés par des fonctions $h_j \in \mathcal{A}(G)$, $1 \leq j \leq N$, telles que, pour tout $j = 1,\ldots, N$

(1) $h_j - 1 \in (g_j - 1)\mathcal{A}(\overset{o}{Q}_j)$ sur l'intérieur $\overset{o}{Q}_j$ de Q_j

(2) pour tout $x \in K$, on a $|h_j(x)| \leq 1$

(3) $|h_j(x)| = 1$ équivaut à $x \in K_j$ et $h_j(x) = 1$.

Les homomorphismes $\Pi_j : B \to B(Q_j)$ sont surjectifs grâce à la proposition 6 et au choix des Q_j. On peut donc trouver N éléments $u_1, \ldots, u_N$ de B, que nous allons considérer comme des éléments de $\mathcal{A}(G)$, tels que, sur chaque $\overset{o}{Q}_j$, u_j et g_j soient congrus mod $M\mathcal{A}(\overset{o}{Q}_j)$.

Regardée comme fonction sur le spectre K de l'algèbre de Banach B, u_j a un maximum local, égal à 1, sur K_j.. On est amené à utiliser le principe du maximum local de Rossi pour définir les h_j à partir des u_j.

En reprenant mot pour mot la preuve du théorème de Rossi ([2] p. 62, Chap. I, sec. H) et en utilisant la proposition 7 on construit les h_j, $1 \leq j \leq N$, vérifiant (1), (2) et (3).

LEMME 3. <u>Chaque</u> f_j, $1 \leq j \leq N$, <u>est la limite, au sens de la norme de</u> $\mathcal{F}(K)$, <u>d'une suite d'éléments de</u> B.

Soient, en effet, $F_1, \ldots, F_n \in B \subset \mathcal{A}(G)$ tels que $F_j \equiv f_j \mod M\mathcal{A}(\overset{o}{Q}_j)$ sur chaque $\overset{o}{Q}_j$.

Formons $h_j^k F_j = Z_k \in B$. Nous allons prouver que f_j est, au sens de la topologie de $\mathcal{F}(K)$, la limite des Z_k $(k \to +\infty)$. Il suffit de montrer que tout $a \in K$ possède un voisinage Q qui soit un pavé ajusté et tel que, dans $B(Q)$, la restriction de Z_k, définie par la proposition 3 tende vers celle de f_j $(k \to +\infty)$.

Deux cas se présentent.

Si $a \in K$ mais n'appartient pas à l'intérieur $\overset{o}{Q}_j$ de Q_j, alors $|h_j(a)| < 1$ et l'on peut trouver $m \in \left]0,1\right[$ et un voisinage ajusté Q de a tels que $|h_j(x)| \leq m$ sur $K \cap Q$. La formule du rayon spectral montre alors que $h_j^k F_j \to 0$ dans $B(Q)$. Par ailleurs $f_j = 0$ au voisinage de a et par un choix convenable de Q, f_j a pour restriction 0 dans $B(Q)$.

Si, au contraire, $a \in \overset{o}{Q}_j$, on choisit $Q \subset \overset{o}{Q}_j$.

On a $h_j - 1 = (q_j - 1)\ell_j$ où $\ell_j \in \mathcal{A}(\overset{o}{Q}_j)$ et $(h_j^k - 1)F_j = (1 + h_j + \ldots + h_j^{k-1})(h_j - 1)F$

Or, dans l'algèbre $B(Q)$, F_j et f_j ont par hypothèse, même image canonique. Par ailleurs, par construction de f_j et g_j, on a $f_j(g_j - 1) = 0$ dans $\mathcal{A}(K)$ et donc dans $B(Q)$. Il résulte alors de (1) que, pour tout $k \geq 1$, la restriction canonique dans $B(Q)$ de $(h_j^k - 1)F_j$ est identiquement nulle ; il en est de même de la restriction de $h_j^k F_j - f_j$.

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de $\mathcal{F}(K) = B$. Fixons une fois pour toute une partition $f_1, \ldots, f_N$ de l'unité dans l'algèbre $\mathcal{F}(K)$, subordonnée à un recouvrement ajusté $Q_1, \ldots, Q_N$ de K et construite comme il est indiqué ci-dessus. Appelons $\Pi_j : B \to B(Q_j)$ les homomorphismes surjectifs définis par la proposition 6 : il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout j, l'image par Π_j de la boule de rayon C dans B contienne la boule unité de $B(Q_j)$.

Notons $\|s\|$ la norme $\sup\limits_{1 \leq j \leq N} \|s_j\|_{B(Q_j)}$ sur $\mathfrak{F}(K)$ et $\| \ \|_B$ la norme sur B. Il existe une constante C_1 telle que, si $s \in B$, $\|s\| \leq C_1 \|s\|_B$.

Soient alors $Y_1, \ldots, Y_N$ N éléments de B regardés comme des fonctions appartenant à $\mathcal{A}(G)$ et tels que

$$\|f_j - Y_j\| \leq \frac{1}{2CC_1N} .$$

Partons d'une section $s \in \mathfrak{F}(K)$, définie par une suite s_j, $1 \leq j \leq N$, de fonctions de $B(Q_j)$, telles que, si $\overset{\circ}{Q}_j \cap \overset{\circ}{Q}_k$ n'est pas vide, $s_j - s_k \in M\mathcal{A}(\overset{\circ}{Q}_j \cap \overset{\circ}{Q}_k)$. Soient $Z_1, \ldots, Z_N$, N éléments de B tels que $\|Z_j\|_B \leq C\|s_j\|_{B(Q_j)} \leq C\|s\|$ et que, sur $\overset{\circ}{Q}_j$, $Z_j - s_j \in M\mathcal{A}(\overset{\circ}{Q}_j)$.

Une première remarque est que $Z_j f_j$ et $s_j f_j$ sont deux éléments de $\mathcal{A}(K)$ congrus mod $M\mathcal{A}(K)$. Naturellement, $s_j f_j$ est défini en lui donnant la valeur 0 au voisinage de tout $a \in K$, $a \notin \overset{\circ}{Q}_j$. La vérification de la remarque est semblable à celle du lemme 1 et laissée au lecteur.

Ceci fait, on a $s = \sum\limits_1^N s_j f_j$ dans l'algèbre $\mathfrak{F}(K)$; là encore la vérification est immédiate : au voisinage de tout $a \in K$, certains f_j sont identiquement nuls et pour les autres, on utilise les relations de compatibilité entre les s_j car alors $a \in \overset{\circ}{Q}_j$.

Toujours dans l'algèbre $\mathfrak{F}(K)$, on a les égalités

$$s = \sum_1^N s_j f_j = \sum_1^N Z_j f_j = \sum_1^N (f_j - Y_j)\, Z_j + \sum_1^N Y_j\, Z_j = s'' + s' .$$

Posons $C' = \sup_{1\leq j\leq N} \|Y_j\|_B$ et remarquons que $s' \in B$, $\|s'\|_B \leq CC'\|s\|$ et $\|s''\| \leq \sum_1^N \|f_j - Y_j\| \, \|Z_j\| \leq \frac{1}{2}\|s\|$. Il suffit alors d'itérer la décomposition précédente de s pour montrer que tout $s \in \mathfrak{F}(K)$ appartient à B.

10. La théorie L^p des solutions de $f * \mu = 0$.

Les partitions de l'unité que nous venons de construire permettent d'estimer la croissance, en norme L^p, des solutions de $f * \mu = 0$.

Pour tout pavé ajusté Q de la définition 3 du § 6, désignons par V^* l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $|\omega(\alpha_j) - \omega_o(\alpha_j)| \leq 2\varepsilon$ et par D^* le disque $|z - z_o| \leq 2\eta$. on définit $Q^* = J(V^* \times D^*)$ et si ε et η sont convenablement choisis le "pavé double" Q^* est encore ajusté.

Soit alors $Q_1, \ldots, Q_N$ un recouvrement ajusté de K tel que $Q_1^*, \ldots, Q_N^*$ soient encore ajustés et appelons

(1) $$P_j(z) = (z - z_j)^{q(j)} + a_{1,j}(\omega)\,(z-z_j)^{q(j)-1} + \ldots + a_{q(j),j}(\omega)$$

les polynômes correspondants de la définition 3, à coefficients dans $A(V_j^*)$. Pour tout x_o réel, nous définissons $b_{0,j}(\omega), \ldots, b_{q(j)-1,j}(\omega) \in A(V_j^*)$ par

(2) $$e^{izx_o} \equiv b_{0,j}(\omega) + \ldots + b_{q(j)-1,j}(\omega)(z-z_j)^{q(j)-1} \quad (\text{mod } P_j \mathcal{A}(V_j^* \times D_j^*)).$$

Posons, pour tout $f \in A(\Omega)$, $\|\mathfrak{F}(f)\|_p = (\sum |\hat{f}(\gamma)|^p)^{1/p}$, la somme étant étendue à tous les coefficients de Fourier de f. Définissons la norme dans $M_p(\Omega)$ d'un élément $f \in A(\Omega)$ par $\sup \|\mathfrak{F}(fg)\|_p$, $g \in A(\Omega)$, $\|\mathfrak{F}(g)\|_p \leq 1$; cette norme sera notée $\|f\|_{M_p(\Omega)}$. Enfin, pour toute partie compacte V de Ω et toute fonction $f \in A(V)$, nous définirons $\|f\|_{M_p(V)}$ comme la norne inférieure des $\|f\|_{M_p(\Omega)}$ étendue aux prolongements $\tilde{f}$ de f dans $A(\Omega)$.

Avec ces notations, on peut énoncer

THEOREME 4. <u>Pour tout</u> x_o <u>réel, formons la somme</u> $\theta_p(x_o)$ <u>des normes</u> $\|b_{k,j}\|_{M_p(U_j)}$, $0 \leq k \leq q(j)-1$, $1 \leq j \leq N$ <u>de toutes les fonctions</u> $b_{k,j} \in A(V_j^*)$ <u>intervenant dans</u> (2). <u>Alors</u> $\theta_p(x_o)$ <u>est une estimation de la norne supérieure</u> $w_p(x_o) = \sup(\int_{x_o}^{x_o+T} |f|^p\, dt)^{1/p}$ <u>étendue à toutes les solutions</u> f <u>continues (ou dans</u> L^p_{loc}) <u>de</u> $f * \mu = 0$.

Le théorème 4 s'obtient en localisant le problème grâce à la partition de l'unité construite au § 9. Ensuite une banale méthode de perturbation donne le résultat. Nous allons d'abord présenter le matériel utilisé pour ces perturbations.

Soient $q \geq 1$ un entier, $\mu_1, \dots, \mu_q$, q mesures de Radon complexes sur $\mathbb{T}$ définissant, pour tout $z \in \mathbb{C}$ fixé, la mesure $P(z) = \delta(x)\, z^q + \mu_1 z^{q-1} + \dots + \mu_q$ dont les coefficients de Fourier, notés $P_k(z)$, sont $z^q + \hat{\mu}_1(k)\, z^{q-1} + \dots + \hat{\mu}_q(k)$.

A tout $k \in \mathbb{Z}$ associons l'espace vectoriel F_k, de dimension complexe q, engendré par les fonctions $x^j e^{i\lambda x}$ telles que λ soit zéro de $P_k(z) = 0$ avec une multiplicité $\geq j+1$. Si $3\|\mu_1\| + \dots + 3^{q-1}\|\mu_{q-1}\| < 1$, tous ces zéros vérifient $|z| < 1/3$. Formons alors l'espace vectoriel, noté S, des sommes finies

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, e^{ikx}$$

telles que $f_k = 0$ dès que $|k|$ est assez grand et que $f_k \in F_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

L'écriture (3) est unique.

PROPOSITION 8. <u>Pour tout entier</u> $q \geq 1$, <u>il existe un nombre</u> $\alpha(q) > 0$ <u>tel que</u>

si $\|\mu_1\| \le \alpha(q), \ldots, \|\mu_q\| \le \alpha(q)$, les propriétés suivantes aient lieu

(4) pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module 1 la mesure $z^q + \mu_1 z^{q-1} + \ldots + \mu_q$ est inversible ; on notera $d\lambda_z(x)$ son inverse

(5) pour toute fonction $f \in S$ on peut trouver une suite unique $g_o, \ldots, g_{q-1}$ de polynômes trigonométriques 2π-périodiques telle que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left[(g_o + zg_1 + \ldots + z^{q-1} g_{q-1}) * d\lambda_z\right](x)\, e^{ixz}\, dz.$$

De plus,

(6) $$\left(\int_o^{2\pi q} |f|^p\, dx\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|g_o\|_p + \ldots + \|g_{q-1}\|_p$$

sont deux normes équivalentes sur S.

Pour assurer (4), il suffit de supposer que $\|\mu_1\| + \ldots + \|\mu_q\| < 1$. A toute fonction $f_k \in F_k$, on peut associer un polynôme unique $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\le q-1$, tel que $f_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{Q_k(z)}{P_k(z)} e^{izx}\, dz$ comme on le vérifie sans peine grâce à la formule des résidus. On pose alors $g_o(x) + zg_1(x) + \ldots + z^{q-1} g_{q-1}(x) = \sum Q_k(z)\, e^{ikx}$. Finalement, on peut développer $d\lambda_z$ en série de puissances et l'on obtient

$$d\lambda_z(x) = \frac{\delta(x)}{z^q} + \frac{d\tau_1(x)}{z^{q+1}} + \ldots + \frac{d\tau_j(x)}{z^{q+j}} + \ldots \quad \text{où} \quad \sum_1^\infty \|\tau_j\| \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \text{si} \quad \|\mu_1\| + \ldots + \|\mu_q\| \le \varepsilon.$$

Une nouvelle application de la formule des résidus donne

$$f(x) = g_{q-1}(x) + ixg_{q-2}(x) + \ldots + \frac{(ix)^{q-1}}{(q-1)!} g_1(x) + \sum_{j\ge 1} \frac{(ix)^j}{j!} S_j(x)$$

où $S_j(x) = (g_{q-1} * \tau_j)(x) + \ldots + \dfrac{(ix)^{q-1}}{(j+1)\ldots(j+q-1)} (g_1 * \tau_j)(x)$.

On utilise alors la remarque évidente.

LEMME 1. Pour tout entier $q \ge 1$, on peut trouver $\delta(q) > \gamma(q) > 0$ tels que, pour toute suite $h_o(x), \ldots, h_{q-1}(x)$ de fonctions continues 2π-périodiques, on ait

$\gamma(q)(\|h_o\|_p + \ldots + \|h_{q-1}\|_p) \leq (\int_o^{2q\pi} |h_o(x) + xh_1(x) + \ldots + x^{q-1} h_{q-1}(x)|^p dx)^{1/p} \leq$
$\delta(q)(\|h_o\|_p + \ldots + \|h_{q-1}\|_p)$.

Ainsi par un choix assez petit de $\|\mu_1\| + \ldots + \|\mu_{q-1}\|$, $(\int_o^{2q\pi} |f|^p \, dx)^{1/p}$ est équivalent à $\|g_1\|_p + \ldots + \|g_{q-1}\|_p$ et la proposition 8 est démontrée.

Montrons alors l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $w_p(x_o) \leq C\, \theta_p(x_o)$ dans le théorème 4 ; C ne dépend pas de p ni de x_o mais seulement de μ et du recouvrement ajusté $Q_1, \ldots, Q_N$ de K.

La preuve donnée au § 9 permet de construire N mesures atomiques $\nu_1, \ldots, \nu_N$ portées par $\Gamma \cap [0,T[$ et jouissant des propriétés suivantes

(7) $\delta(x) = d\nu_1(x) + \ldots + d\nu_N(x)$.

(8) Si ζ est un zéro d'ordre k de $\hat{\mu}$ et si $(e^{-i\alpha_1\zeta}, \ldots, e^{-i\alpha_n\zeta})$ n'appartient pas à Q_j, ζ est un zéro d'ordre au moins k+1 de $\hat{\nu}_j$.

(8) Si $x^k e^{i\lambda x} = f(x)$ est solution de $f * \mu = 0$, pour tout j,
$f * \nu_j = \hat{\nu}_j(\lambda)\, x^k\, e^{i\lambda x}$.

Ces mesures sont obtenues à l'aide de la partition de l'unité $1 = f_1 + \ldots + f_N$ construite au § 9 ; la transformée $\mathcal{G}\nu_j$ et f_j sont congrues mod $M\mathcal{A}(K)$.
Oubliant ces notations du § 9, nous allons, pour toute solution $f \in E$ de $f * \mu = 0$, poser $f_j = f * \nu_j$.

Il suffit de prouver le théorème 4 si $\alpha_n = 1$. Soit alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e_k \in \Omega$ le caractère défini par $e_k(\alpha_j) = e^{-2k\pi i\alpha_j}$, $1 \leq j \leq n$.

Finalement, prolongeons les fonctions $a_{k,j} \in A(V_j^*)$ de (1) en des fonctions, encore notées $a_{k,j}$, appartenant à $A(\Omega)$. La propriété de Ditkin est vérifiée pour l'algèbre $A(\Omega)$. Elle permet de choisir les pavés ajustés Q_j assez petits pour que les normes, dans $A(\Omega)$, des $a_{k,j}$ ne dépasse pas $\alpha(q_j)$, défini par la proposition 8.

Pour calculer $w_p(x_o)$, il suffit de se limiter aux combinaisons linéaires f de solutions de la forme (9).

Supposons que f soit une telle somme finie et écrivons $f_j = f * \nu_j = e^{iz_j x} \varphi_j(x)$.

Soient $\mu_{1,j}, \ldots, \mu_{q(j),j}$ les mesures portées par $\Gamma/\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et définies par la condition que la masse de $\mu_{k,j}$ en $p_1\alpha_1 + \ldots + p_{n-1}\alpha_{n-1}$ est la somme des coefficients de Fourier de $a_{k,j}$ en tous les points $p_1\alpha_1 + \ldots + p_{n-1}\alpha_{n-1} + r$, $r \in \mathbf{Z}$. Alors $\hat{\mu}_{k,j}(p) = a_{k,j}(e_p)$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$.

On vérifie immédiatement que φ_j appartient à l'espace S_j des sommes (3), défini par $\mu_{1,j}, \ldots, \mu_{q(j),j}$.

Soient $\alpha \in A(\Omega)$ et $N_o \subset \mathbf{Z}$; appelons $I(N_o)$ l'espace des sommes trigonométriques finies $\sum_{\lambda \in N_o} a_\lambda e^{i\lambda x} = s(x)$ et M_α l'endomorphisme de $I(N_o)$ défini par $M_\alpha(a_\lambda e^{i\lambda x}) = a_\lambda \alpha(e_\lambda) e^{i\lambda x}$.

Si $N_o = \mathbf{Z}$, la norme de α dans $M_p(\Omega)$ et la norme de l'endomorphisme de $L^p(\mathbf{T})$ défini par M_α coïncident ([3]). On en déduit aussitôt que si N_o est l'ensemble Λ_j (resp. Λ_j^*) des entiers $r \in \mathbf{Z}$ tels que $e_r \in V_j$ (resp. V_j^*), la norme de α dans $M_p(V_j)$ est supérieure ou égale à celle de l'opérateur M_α de $I(\Lambda_j)$, ce dernier espace étant muni de la norme L^p ; par ailleurs la norme de α dans $M_p(V_j)$ est majorée par C fois celle de M_α opérant sur $I(\Lambda_j^*)$, toujours muni de la norme L^p.

Pour majorer $w_p(x_o)$, on peut supposer que $x_o \in 2\pi\mathbf{Z}$ et il suffit de savoir majorer, pour $1 \leq j \leq N$, $\left(\int_{x_o}^{x_o+T} |f_j|^p \, dx\right)^{1/p}$; en effet $\left(\int_0^T |f|^p \, dx\right)^{1/p} \leq 1$

entraîne successivement $\left(\int_{-T}^{T} |f|^p dx\right)^{1/p} \leq C_1$ et $\left(\int_{0}^{T} |f_j|^p dx\right)^{1/p} \leq C_2$. On peut toujours, en multipliant $f_j(x)$ par $e^{-iz_j x}$ se ramener au cas où $z_j = 0$.

L'effet de la convolution par ν_j de f a été de "tuer tout ce qui se passe en dehors de Q_j". En supprimant pour alléger l'indice j et en écrivant donc f au lieu de f_j et φ au lieu de φ_j, on a

$$f(x) = \varphi(x) = \sum_{k\in\Lambda} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{Q_k(z)}{P_k(z)} e^{izx}\right) e^{ikx}.$$

Pour tout $k\in\Lambda$, $e_k \in V_j \subset V_j^*$ et les congruences (2) peuvent être utilisées. On obtient, toujours si $k\in\Lambda$,

$$e^{izx_o} \equiv \hat{\rho}_o(k) + \ldots + \hat{\rho}_{q-1}(k)\, z^{q-1} \qquad (\mathrm{mod}\ P_k(z))$$

où les mesures ρ_p sont construites à l'aide des fonctions $b_{p,j}$ comme les μ_p à l'aide des $a_{p,j}$.

On a donc, puisque $x_o \in 2\pi\mathbb{Z}$,

$$f(x + x_o) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{Q_k(z)\, R_k(z)}{P_k(z)} e^{izx}\right) e^{ikx}$$

et la proposition 8 montre que $\left(\int_{0}^{2q\pi} |f(x+x_o)|^p dx\right)^{1/p}$ est contrôlé par les normes des endomorphismes de $L^p(\mathbb{T})$ définis par convolution avec $\rho_o, \ldots, \rho_{q-1}$. Ces normes sont elles-mêmes majorées par $\|b_{o,j}\|_{M_p}$.

En sens inverse, on veut minorer $w_p(x_o)$; on se limite donc à des solutions particulières $f\in E$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k\in\Lambda^*} a_k \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{e^{izx}}{P_k(z)} dz\right) e^{ikx}$$

(là encore l'indice j est supprimé et $z_j = 0$). Alors

$$f(x+x_o) = \sum_{k\in\Lambda^*} \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{a_k R_k(z)}{P_k(z)} e^{izx}\right) e^{ikx}$$

et la proposition 8 permet de majorer les normes des opérateurs de convolution sur $I(\Lambda_j^*) \subset L^p(T)$ définis par les mesures ρ_p. Il en résulte que $\|b_{o,j}\|_{M_p(V_j)} + \ldots$ $\ldots + \|b_{q(j)-1,j}\|_{M_p(V_j)} \leq C\, w_p(x_o)$.

11. Applications à la stabilité et exemples numériques.

Notre problème de stabilité sera le suivant : trouver une condition nécessaire et suffisante sur la mesure complexe μ, à support fini, pour que toute solution continue f de $f * \mu = 0$ tende vers 0 quand $x \to +\infty$.

La réponse est très simple. Deux cas sont possibles : ou bien il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout nombre complexe $z = x+iy$, zéro de $\hat{\mu}(z) = 0$, on ait $y \geq \varepsilon$. Alors, il existe un entier $N \geq 1$ tel que toute solution continue de $f * \mu = 0$ soit $O(x^N e^{-\varepsilon x})$ quand $x \to +\infty$; il y a stabilité.

Ou bien, les zéros $z = x+iy$ de $\hat{\mu}(z) = 0$ appartiennent tous au demi-plan $y > 0$ mais O est la borne inférieure des parties imaginaires de ces zéros. On pose dans ce cas

$$d\mu(x) = \sum a(p_1, \ldots, p_n)\, \delta(x - p_1\alpha_1 - \ldots - p_n\alpha_n) \quad \text{et}$$

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}, z) = \sum a(p_1, \ldots, p_n)\, e^{i(p_1x_1+\ldots+p_{n-1}x_{n-1})}\, e^{-i(\alpha_1p_1+\ldots+\alpha_np_n)z}$$

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est alors la suivante. Pour tout $(x_1^o, \ldots, x_{n-1}^o) = x^o \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $z^o \in \mathbb{C}$, la propriété

(1) $F(x^o, z^o) = 0$ et z^o réel

a les deux conséquences (2) et (3) ci-dessous

(2) $\frac{\partial F}{\partial z}(x^o , z^o) \neq 0$

(3) il existe une constante $C > 0$, une boule ouverte $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de centre x^o et un disque ouvert D de centre z^o tels que la fonction analytique $z = \varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ définie sur V par $F(x_1, \dots, x_{n-1},z) = 0$ et $z \in D$ ait la propriété suivante : pour tout $T \geq 1$, $e^{iT\varphi}$ coïncide sur V avec une série de Fourier absolument convergente $\sum a_T(k_1,\dots, k_{n-1})\, e^{i(k_1x_1 +\dots+ k_{n-1}x_{n-1})}$ telle que $\sum |a_T(k_1,\dots,k_{n-1})| \leq C$.

Nous allons d'abord prouver ce résultat pour ensuite en donner trois applications numériques.

Si $\hat{\mu}(z) = 0$ implique $z = x + iy$ et $y \geq \varepsilon > 0$, on utilise le lemme suivant.

LEMME 1. Soient $q \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers, A l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbf{T}^n$ et ayant une série de Fourier absolument convergente et $a_1,\dots, a_q$ q fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{T}^n$. Soient $K \subset \mathbf{T}^n$ une partie compacte et $\varepsilon > 0$ un nombre réel tels que $\omega \in K$ et $P(\omega,z) = z^q + a_1(\omega)\, z^{q-1} +\dots+ a_q(\omega) = 0$ impliquent $\mathfrak{Im}\, z \geq \varepsilon$. Appelons B l'extension algébrique de A par P. Alors, il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\| e^{itz}\|_B = O(t^N e^{-\varepsilon t})$, $t \to +\infty$.

Soit Γ le contour $\left\{-R \leq x \leq R,\ \ y = \varepsilon - \frac{1}{t}\right\} \cup \left\{z = i(\varepsilon-\frac{1}{t})+Re^{i\theta},\ 0\leq \theta\leq\pi\right\}$. Soit Δ le compact dont Γ est la frontière. Appelons $R(\omega,z)$ le polynôme de degré $\leq q-1$ tel que $e^{itz} \equiv R(\omega,z)$ (mod $P(\omega,z)$). Supposons R assez grand pour que Δ contienne en son intérieur toutes les racines de $P(\omega,z) = 0$, $\omega \in K$. Dans ces conditions, pour tout z_o fixé n'appartenant pas à Δ, $R(\omega,z_o)$ est un élément de A donné par l'intégrale de Bochner $\frac{P(\omega,z_o)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{it\zeta}\, d\zeta}{(z_o-\zeta)\, P(\omega,\zeta)}$.

Toute majoration de la norme dans A de $R(\omega, z_o)$ pour q valeurs distinctes de z_o permet de majorer les normes dans A des coefficients de $R(\omega, z)$ et donc la norme de e^{itz} dans B. Sur Γ, $|e^{it\zeta}| \leq C_1 e^{-\varepsilon t}$ tandis que $|P(\omega, \zeta)| \geq C_2 t^{-q}$. On majore la norme dans A de $\frac{1}{P(\omega,\zeta)}$, $\zeta \in \Gamma$ par la norme correspondante dans $\mathscr{C}^n(\mathbf{T}^n)$ c'est-à-dire par $C_3 t^{nq}$. Le lemme en résulte.

La conclusion du lemme 1 serait la même si A était remplacée par n'importe quelle algèbre de Banach de fonctions continues sur $\mathbf{T}^n$ telle que $\mathscr{C}^n(\mathbf{T}^n) \subset A$.

La première partie du théorème de stabilité résulte aussitôt du lemme 1 et du théorème 4.

Dans le second cas, il s'agit de savoir si $w_\infty(t,\mu) = O(1)$ en reprenant les notations du § 1. Or pour tout $\chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{T})$, $w_\infty(t,\mu) = w_\infty(t, \chi\mu)$. En particulier, si $F(x^o, z^o) = 0$, z^o est réel et $\frac{\partial F}{\partial z}(x^o, z^o) = 0$, non seulement e^{itz^o} mais te^{itz^o} sont solutions de $f * \chi_o\mu = 0$. Donc $|\omega_\infty(t, \chi_o\mu)| \geq t$; χ_o est défini par $\chi_o(\alpha_j) = e^{i\alpha_j x_j^o}$, $1 \leq j \leq n$ et $\chi_o(\alpha_n) = 1$. La condition (2) est nécessaire pour assurer $w_\infty(t,\mu) = O(1)$. La condition (2) signifie qu'en tout point $a \in K$, l'entier q vaut 1. Pour calculer $w_\infty(t,\mu)$ il suffit, d'après le théorème 4, de savoir majorer les normes locales de e^{itz} dans les algèbres quotients de $A(\Omega)$. Le lemme 1 montre que l'on peut se restreindre aux $a \in K$ tels que z_o soit réel. Ainsi $w_\infty(t,\mu) = O(1)$ équivaut à (2) et (3) réunis.

Applications numériques. Un premier exemple est fourni par

$$f(x+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(f(x+1) - f(x-1) + f(x)) \tag{4}$$

où $\alpha > 1$ est irrationnel.

On est amené à poser

(5) $$F(z,u) = e^{i(\alpha z+u)} - \frac{1}{\sqrt{5}}(2i\sin z + 1), \qquad u\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \Omega.$$

On vérifie par des calculs très simples qu'en définissant $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, l'équation $F(x,u) = 0$ possède deux séries de solutions réelles

$$x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad \alpha x + u \equiv \varphi \pmod{2\pi}$$

où $$x \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad \alpha x + u \equiv -\varphi \pmod{2\pi}.$$

Il reste à étudier $F(z,u) = 0$ au voisinage de chacun de ces points (x_o, u_o).

Dans la première série, on obtient

$$z - x_o = -\frac{1}{\alpha}(u - u_o) + \left(\frac{2i-1}{5\alpha^3}\right)(u - u_o)^2 + \ldots$$

et dans la seconde

$$z - x_o = -\frac{1}{\alpha}(u - u_o) + \left(\frac{2i+1}{5\alpha^3}\right)(u - u_o)^2 + \ldots$$

En faisant le changement de variables $(u-u_o)\sqrt{t} = x$ on montre sans difficultés que la norme de $e^{itz(u)}$ est bornée dans $A\left[u_o-\varepsilon, u_o+\varepsilon\right]$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Enfin, $F(z,u) = 0$ implique $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Il en résulte que toutes les solutions continues de $f(x+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}(f(x+1) - f(x-1) + f(x))$ sont bornées quand $x \to +\infty$. Pour voir qu'elles tendent toutes vers 0, il suffit de s'assurer qu'il en est ainsi pour les solutions élémentaires. Ce sera le cas si et seulement si

(6) $$\alpha\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \neq \varphi + 2\ell\pi \text{ pour tout } k\in\mathbb{Z} \text{ et tout } \ell \in \mathbb{Z}.$$

Dans notre premier exemple, si la condition (6) est satisfaite, il y a stabilité des solutions de (4) en norme L^p pour $1 \leq p < +\infty$; c'est-à-dire que pour toute solution $f \in L^p_{loc}$ de (4),

(7) $$\int_x^{x+1} |f|^p \, dt \longrightarrow 0 \qquad (x \longrightarrow +\infty).$$

En revanche, si (6) n'est pas satisfaite, il n'y a stabilité en norme L^p pour aucun p.

La situation est tout-à-fait différente pour l'équation

(8) $$\begin{aligned} f(x+\alpha) = {} & \frac{1}{16} f(x-4) + \frac{1}{8} f(x-3) - \frac{1}{4} f(x-2) \\ & - \frac{3}{8} f(x-1) - \frac{5}{8} f(x) + \frac{3}{8} f(x+1) \\ & - \frac{1}{4} f(x+2) - \frac{1}{8} f(x-3) + \frac{1}{16} f(x+4). \end{aligned}$$

Dans ce cas, si α est un nombre irrationnel assez grand, les solutions $f \in L^p_{loc}$, $1 \leq p < +\infty$ ont une croissance en $O(x^{|1/8 - 1/4p|})$ quand $x \to +\infty$ et cette estimation est la meilleure possible ; il n'y a stabilité que si $p = 2$. Les solutions continues de (8) ont une croissance en $O(x^{1/8})$; cependant toutes les solutions élémentaires de type polynôme exceptionnel tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Pour étudier (8), on considère l'équation

(9) $$e^{iz\alpha + iu} = f(z)$$

où $f(z) = \sin^4 z - 1 + i \sin^3 z$.

Posons $\mu(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+iy)|$. Un calcul immédiat donne $\mu(0) = 1$. Par ailleurs $\mu'(y)$ est localement bornée et $\mu(y)$ est équivalent à $e^{4|y|}/16$ quand $y \to \pm\infty$. Il en résulte que si α est assez grand, $e^{-\alpha y} = \mu(y)$ implique $y \geq 0$ et toutes les solutions z de (9) appartiennent au demi-plan supérieur. Il reste à étudier $z(u)$ au voisinage d'une solution réelle (x_o, u_o) de (9). Un calcul immédiat donne

$z - x_o = -\dfrac{u-u_o}{\alpha} \pm \dfrac{(u-u_o)^3}{\alpha^4} + i\dfrac{(u-u_o)^4}{\alpha^5} + \ldots$ et après le changement de variables $t^{1/4}(u-u_o) = v$, e^{itz} s'écrit $e^{i\lambda v}\, e^{\pm it^{1/4}v^3/\alpha^4}\, e^{-v^4/\alpha^5}\, f_t(v)$ où $|f_t(v)| = 1$,

$|f_t'(v)| \leq C(1+|v|)$, les mêmes conditions étant satisfaites par $1/f_t$. On est ramené, par application du théorème 4, à calculer la norme de $e^{it^{1/4}v^3/\alpha^4}$ dans $M_p\left[-\pi,\pi\right]$. On applique les méthodes de [4] pour trouver $t^{\left|\frac{1}{8}-\frac{1}{4p}\right|}$

Un dernier exemple est fourni par l'équation

$$(10) \qquad f(x+\alpha) - f(x-\alpha) = \varepsilon\left[f(x+1) - f(x-1)\right]$$

où $\alpha > 1$ est irrationnel, $\varepsilon \neq 0$ est réel.

Si $|\varepsilon| < 1$, les solutions continues sont $O(|x|^{1/2})$ quand $|x| \to +\infty$. En norme L^p la croissance à l'infini est $O(|x|^{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|})$ et c'est la meilleure estimation possible.

Si $|\varepsilon| = 1$, la croissance à l'infini est $O(|x|)$ et c'est indépendant de la norme L^p choisie.

Si $|\varepsilon| > 1$, on définit $\eta > 0$ par $\operatorname{ch} \alpha\eta = |\varepsilon| \operatorname{ch} \eta$ et la croissance à l'infini, indépendante de la norme L^p choisie est $O(e^{\eta|x|})$.

Le théorème 3 a encore d'autres applications.

Soit μ une mesure complexe dont le support est une partie finie de $[0,T]$. On peut alors montrer l'existence d'un procédé de sommation des séries de Fourier généralisées de $f * \mu = 0$. C'est dire qu'il existe une suite bornée μ_j, $j \geq 1$, de mesures de Radon, portées par $[0,T]$ et telles que, pour toute solution continue f de $f * \mu = 0$, $f * \mu_j$ soit une combinaison linéaire finie de solutions élémentaires de l'équation de convolution et que $f * \mu_j \to f$ $(j \to +\infty)$ uniformément sur tout compact.

Là encore on procède à un découpage de f puis on applique à chaque morceau les techniques de perturbation de la proposition 8 ([4]).

Enfin, les méthodes employées d'adaptent au cas plus général où $\mu = \mu_1 + f\,dx$, μ_1 étant une mesure complexe, à support fini contenu dans $[0,T]$, changeant 0 et T et $f \in L^1[0,T]$, étant nulle hors de cet intervalle.

Bibliographie

[1] DELSARTE, J. Théorie des fonctions moyenne-périodiques en deux variables. Ann. Math. 72 (1960), 121-178.

[2] GUNNING and ROSSI Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall 1965.

[3] LOHOUE, N. Algèbres $A_p(G)$ et convoluteurs de $L^p(G)$. Thèse soutenue à Orsay en 1971.

[4] MEYER, Y. Théorie L^p des sommes trigonométriques apériodiques. Ann. Inst. Fourier, 24, 4 (1974).

[5] ROSSI, H. The local maximum modulus principle. Ann. Math. 72 (1960), 1-11.

[6] SCHWARTZ, L. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques. Ann. Math. 48 (1947), 857-929.

Université Paris-Sud
Centre Scientifique d'Orsay
Mathématiques (Bât. 425)
91405 ORSAY

et

Washington University
Department of Mathematics
ST-LOUIS, MO. 63130