UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE



# Remarques sur un théorème de J. Delsarte

Yves MEYER

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

REMARQUES SUR UN THEOREME DE J. DELSARTE

par Yves Meyer

1. Soient $\delta(0,0)$, $\delta(1,0)$, $\delta(0,1)$ et $\delta(1,1)$ les masses unités placées aux points $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$ de $\mathbf{R}^2$. Désignons par $C$ le carré $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et par $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux fonctions de $L^1(\mathbf{R}^2)$ nulles hors de $C$. Enfin $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ sont huit nombres complexes tels que les mineurs $c_1d_2 - c_2d_1$, $b_1d_2 - b_2d_1$, $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$ soient tous différents de $0$.

On pose alors

(1) $\mu_j = a_j\delta(0,0) + b_j\delta(1,0) + c_j\delta(0,1) + d_j\,\delta(1,1) + \varphi_j\,dx\,dy$

si $j = 1, 2$ et Delsarte étudie dans [1] le système des deux équations

(2) $$f * \mu_1 = 0 \quad , \quad f * \mu_2 = 0$$

où la fonction inconnue $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ appartient localement à $L^2(\mathbf{R}^2)$. Il prouve que si le spectre de (2) est simple, les solutions exponentielles de (2) forment une partie totale dans l'espace de toutes les solutions $f \in L^2_{loc}(R^2)$ de (2) ; la topologie étant celle de la convergence en norme $L^2$ sur tout compact.

Nous allons montrer que l'emploi de méthodes hilbertiennes permet de simplifier la preuve de [1] et de préciser les résultats obtenus.

## 2. Le cas $L^2$ : énoncés des résultats.

Soit $H$ l'espace vectoriel complexe des classes de solutions $f$ de (2) qui appartiennent localement à $L^2(R^2)$ ; deux solutions presque partout égales définissant la même classe.

Soit d'autre part $D$ le rectangle $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

THEOREME 1. L'espace vectoriel $H$, muni du produit scalaire $\langle f_1 , f_2 \rangle = \int_D f_1(x,y)\, \bar{f}_2(x,y)\, dx\, dy$ est un espace de Hilbert. De plus, toute fonction $g \in L^2(D)$ est la restriction à $D$ d'une et d'une seule solution $f \in H$ de (2).

Nous désignerons par $\mathbb{C}^*$ le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls et par $\mathrm{Hom}(R^2 , \mathbb{C}^*)$ le groupe multiplicatif des homomorphismes continus de $R^2$ dans $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire de la forme $\xi(x,y) = \exp i(zx + wy)$, $(z,w) \in \mathbb{C}^2$.

Appelons $\Lambda \subset \mathrm{Hom}(R^2, \mathbb{C}^*)$ l'ensemble des $\xi$ précédents qui sont solutions de (2) et, pour tout $\xi \in \Lambda$, désignons par $H_\xi \subset H$ l'espace vectoriel des solutions de (2) de la forme $P(x,y)\, \xi(x,y)$ où $P$ est un polynôme en $x$ et $y$ à coefficients complexes.

THEOREME 2. Si le système des deux équations

(3) $$a_j + b_j u + c_j v + d_j uv = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

possède deux solutions distinctes $(u,v) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, alors $\dim H_\xi < +\infty$ pour tout $\xi \in \Lambda$ ; de plus $\dim H_\xi = 1$ pour tous les $\xi \in \Lambda$ à l'exception d'au plus une partie finie $F \subset \Lambda$.

La somme hilbertienne directe des $H_\xi$, $\xi \in \Lambda$, et $H$ sont isomorphes : toute solution $f$ de (2), appartenant à $L^2_{loc}$, s'écrit de façon unique

(4) $$f(x,y) = \sum_{\xi \in F} P_\xi(x,y)\,\xi(x,y) + \sum_{\xi \in \Lambda \setminus F} c(\xi)\,\xi(x,y)$$

où

(5) $$P_\xi\, \xi \in H_\xi \quad \text{et} \quad \sum_{\xi \in \Lambda \setminus F} |c(\xi)|^2 < +\infty.$$

Réciproquement, toute série (4) pour laquelle les conditions (5) sont satisfaites converge dans $L^2_{loc}$ vers une solution de (2).

La situation est un peu plus compliquée si le système (3) possède une racine double ; le cas d'une seule racine simple $(u,v) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ est écarté par les conditions $c_1d_2 - c_2d_1 \neq 0$, $b_1d_2 - b_2d_1 \neq 0$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ et $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$.

THEOREME 3. Si le système (3) possède une solution double $(u,v) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, alors $\dim H_\xi < +\infty$ pour tout $\xi \in \Lambda$ ; de plus $\dim H_\xi \leq 2$ pour tous les $\xi \in \Lambda$ à l'exception d'au plus un ensemble fini de $\xi \in \Lambda$.

D'autre part, il existe une suite $E_k$, $k \geq 0$, de sous-espaces de $H$, invariants par translation et de dimension 2 et une partie finie $F$ de $\Lambda$ telles que toute solution $f$ de (2) appartenant à $L^2_{loc}$ s'écrive, de façon unique,

(6) $$f(x,y) = \sum_{\xi \in F} P_\xi(x,y)\,\xi(x,y) + \sum_{k \geq 0} f_k(x,y)$$

où

(7) $$P_\xi \xi \in H_\xi, \quad f_k \in E_k \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 0} \int_D |f_k(x,y)|^2 \, dx\, dy < +\infty.$$

Réciproquement, toute série (6) pour laquelle les conditions (7) sont satisfaites, converge dans $L^2_{loc}$ vers une solution $f$ de (2).

Il résulte des propriétés des $E_k$ que chaque $E_k$ est soit l'un des sous-espaces $H_\xi$ pour lequel $\dim H_\xi = 2$, soit engendré par deux caractères distincts $\xi_k$ et $\xi'_k \in \Lambda$. Nous verrons cependant qu'en général $H$ et la somme hilbertienne directe des $H_\xi$, $\xi \in \Lambda$, ne sont pas isomorphes.

Les théorèmes 2 et 3 impliquent évidemment l'énoncé du § 1. Leur démonstration occupera les § 3 à 5. Au § 6 nous complèterons cette étude en examinant le cas $L^p$, $p \neq 2$, et le cas $d_1 = d_2 = 0$.

## 3. Preuve du théorème 1.

Elle est divisée en trois étapes décrites par trois lemmes.

LEMME 1. *Si* $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, *il existe deux constantes positives* $C$ *et* $T$ *telles que toute fonction* $g \in L^2(D)$ *soit la restriction à* $D$ *d'une et d'une seule fonction* $f : [0,2] \times [0,+\infty] \to \mathbb{C}$ *vérifiant*

(8) $$(f * \mu_j)(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad j = 1, 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y \geq 1.$$

*De plus* $f$ *est telle que*

(9) $$\left(\iint_{0\leq x\leq 2,\, y\geq 0} |f(x,y)|^2 \, e^{-Ty} \, dx\, dy\right)^{1/2} \leq C\|g\|_2.$$

La preuve du lemme 1 est très simple. Nous exprimons $\delta(0,0)$ et $\delta(1,0)$

à l'aide de $\delta(1,0)$, $\delta(1,1)$, $\varphi_j\,dx\,dy$ et $\mu_j$ dans (1) et les relations (2) deviennent

(10) $f(x,y) = A_1 f(x+1\ ,\ y-1) + B_1 f(x\ ,\ y-1) + \iint_C f(x+1-s\ ,\ y-t)\ \psi_1(s,t)\,ds\,dt$

et

(11) $f(x,y) = A_2\ f(x\ ,\ y-1) + B_2\ f(x-1\ ,\ y-1) + \iint_C f(x-s\ ,\ y-t)\ \psi_2(s,t)\,ds\,dt$

où $\psi_1$ et $\psi_2 \in L^1(C)$.

Pour toute partie borélienne $E$ de $R^2$, désignons par $L^2(E)$ le sous-espace de $L^2(R)$ formé des fonctions nulles sur le complémentaire de $E$. Soit $\ell > 0$ un nombre réel qui sera précisé dans un instant. Le rectangle $D_1$ est défini par $0 \leq x \leq 1 \leq y \leq 1+\ell$ tandis que $D_2$ est $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 1+\ell$. Soient $g \in L^2(D)$, $g_1 \in L^2(D_1)$ et $g_2 \in L^2(D_2)$ ; la somme $g + g_1 + g_2$ vérifie (10) sur $D_1$ et (11) sur $D_2$ si et seulement si

(12) $$g_1(x,y) = A_1 g(x+1\ ,\ y-1) + B_1 g(x\ ,\ y-1) + \iint_C g(x+1-s\ ,\ y-t)\ \psi_1(s,t)\,ds\,dt$$

$$+ \iint_C g_1(x+1-s\ ,\ y-t)\ \psi_1(s,t)\,ds\,dt + \iint_C g_2(x+1-s\ ,\ y-t)\ \psi_1(s,t)\,ds\,dt$$

et

(13) $$g_2(x,y) = A_2 g(x\ ,\ y-1) + B_2 g(x-1\ ,\ y-1) + \iint_C g(x-s\ ,\ y-t)\ \psi_2(s,t)\,ds\,dt$$

$$+ \iint_C g_1(x-s\ ,\ y-t)\ \psi_2(s,t)\,ds\,dt + \iint_C g_2(x-s\ ,\ y-t)\ \psi_2(s,t)\,ds\,dt.$$

Appelons $T_1 : L^2(D_1) \to L^2(D_1)$, $T_2 : L^2(D_2) \to L^2(D_1)$, $T_3 : L^2(D_1) \to L^2(D_2)$ et $T_4 : L^2(D_2) \to L^2(D_2)$ les opérateurs respectivement définis par les deux dernières intégrales de (12) et les deux dernières intégrales de (13) ; ces intégrales peuvent toutes quatre être restreintes à $0 \leq t \leq \ell$ car sinon la fonction à intégrer est nulle. Il en résulte que $\|T_j\| \leq 1/3$, si $\ell$ est choisi assez petit, pour $j = 1, 2, 3$ et $4$.

Finalement (12) et (13) s'écrivent $g_1 = Lg + T_1 g_1 + T_2 g_2$ et $g_2 = Mg + T_3 g_1 + T_4 g_2$ qui entraînent $g_1 = L_1 g$ et $g_2 = M_2 g$ où $L_1$ et $M_2$ sont continus.

Nous venons de prolonger $g \in L^2(D)$ en une solution $f$ de (10) et (11), définie sur $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1+\ell$. Les équations (10) et (11) sont invariantes par translation parallèles à $y'0y$ et il suffit d'itérer la construction précédente pour obtenir le prolongement à $[0,2] \times [0,+\infty]$. L'unicité est assurée par la preuve que nous avons donnée.

LEMME 2. Si $c_1 d_2 - c_2 d_1 \neq 0$, toute fonction $g \in L^2(D)$ est la restriction à D d'une et d'une seule fonction $f : [0,2] \times ]-\infty, 1] \to \mathbb{C}$ vérifiant $(f * \mu_j)(x,y) = 0$ si $j = 1, 2$ et $1 \le x \le 2$, $y \le 1$. De plus, on a

$$\left( \iint_{0 \le x \le 2,\ y \le 0} |f(x,y)|^2 e^{Ty}\, dx\, dy \right)^{1/2} \le C \|g\|_2 .$$

La preuve est identique à celle du lemme 1.

Les lemmes 1 et 2 montrent que toute fonction $g \in L^2(D)$ est la restriction à D d'une et d'une seule fonction $f : [0,2] \times ]-\infty,+\infty[ \to \mathbb{C}$ vérifiant $(f * \mu_1)(x,y) = 0$ et $(f * \mu_2)(x,y) = 0$ sur la bande $1 \le x \le 2$, $-\infty < y < +\infty$. De plus $\iint_{0 \le x \le 2} |f(x,y)|^2 \exp(-T|y|)\, dx\, dy < +\infty$. Le lemme 3 permettra d'étendre $f$ à $x \ge 2$ ou $x \le 0$. Puisque $a_1 c_2 - a_2 c_1$ n'est pas nul, on peut résoudre (1) en $\delta(0,0)$ et obtenir

$$(14) \qquad \delta(0,0) = A_3\, \delta(1,0) + B_3\, \delta(1,1) + \psi_3\, dx\, dy + C_3\, \mu_1 + D_3\, \mu_2$$

où $\psi_3 \in L^1(C)$.

Posons $\mu_3 = \delta(0,0) - A_3\, \delta(1,0) - B_3\, \delta(1,1) - \psi_3\, dx\, dy$.

LEMME 3. Soit $T > 0$ un nombre réel. Toute fonction mesurable $f : [0,1] \times ]-\infty,+\infty[ \to \mathbb{C}$ telle que

$$(15) \qquad \iint_{0\leq x\leq 1} |f(x,y)|^2 e^{-T|y|} dx\, dy < +\infty$$

est la restriction à $[0,1] \times ]-\infty,+\infty[$ d'une fonction mesurable $F : [0,+\infty[ \times ]-\infty,+\infty[ \to \mathbb{C}$ telle que

$$(16) \qquad (F * \mu_3)(x,y) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \geq 1$$

et

$$(17) \qquad \iint_{0\leq x\leq x_o} |F(x,y)|^2 e^{-T|y|} dx\, dy < +\infty \quad \text{pour tout} \quad x_o > 0.$$

En outre, soient $x_o > 1$ et $F_j : [0,x_o] \times ]-\infty,+\infty[ \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables vérifiant $(F_j * \mu_3)(x,y) = 0$ pour $1 \leq x \leq x_o$, coincidant avec $f$ sur la bande $0 \leq x \leq 1$, et satisfaisant à la condition (17). Alors $F_1 = F_2$ sur la bande $0 \leq x \leq x_o$.

La preuve est semblable à celle du lemme 1. On appelle $X$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions mesurables $f : [0,1] \times ]-\infty,+\infty[ \to \mathbb{C}$, soumises à la condition de croissance (15). Alors $X$ est invariant par translations parallèles à $y'Oy$ et aussi par convolution avec toute mesure de Radon portée par une partie compacte de $y'Oy$.

On définit de même $Y$ en remplaçant la bande $0 \leq x \leq 1$ par $1 \leq x \leq 1+\ell$ ; $\ell > 0$ sera précisé dans un instant. Convenons que $f \in X$ (resp. $g \in Y$) sont prolongées par $0$ en dehors de $0 \leq x \leq 1$ (resp. $1 \leq x \leq 1+\ell$).

Les fonctions $f$ et $g$ vérifient $(f+g) * \mu_3 = 0$ sur la bande $1 \leq x \leq 1+\ell$ si et seulement si $g + T_1 g = T_2 f$ ; $T_1 : Y \to Y$ est défini par

$(T_1 g)(x,y) = \iint_{0\leq s\leq \ell} g(x-s\,,y-t)\,\psi_3(s,t)\,ds\,dt$ et $T_2 : X \to Y$ est un opérateur linéaire continu. Par un choix approprié de $\ell$, $\|T_1\| < 1$ et $g = (I+T_1)^{-1}T_2 f$. On procède alors de proche en proche pour construire $F$ sur $x \geq 1$ et l'argument utilisé assure l'unicité.

Retournons à la preuve du théorème 1. On commence par construire, à l'aide des lemmes 1 et 2, $f : [0,2] \times ]-\infty,+\infty[ \to \mathbf{C}$ vérifiant $f * \mu_1 = 0$ et $f * \mu_2 = 0$ sur la bande $1 \leq x \leq 2$ et coïncidant avec $g$ sur $D$. Grâce au lemme 3, on prolonge la restriction de $f$ à la bande $0 \leq x \leq 1$ en une fonction $F : [0,+\infty[\,]-\infty,+\infty[ \to \mathbf{C}$ vérifiant $F * \mu_3 = 0$ sur $x \geq 1$. Or $(f * \mu_3)(x,y) = 0$ si $1 \leq x \leq 2$ et donc $F = f$ sur $1 \leq x \leq 2$ comme le montre le lemme 3.

Il reste à vérifier que $F * \mu_1 = 0$ sur $x \geq 1$. Posons, à cet effet, $F_1(x,y) = (F * \mu_1)(x+1,y)$. Alors $(F_1 * \mu_3)(x,y) = 0$ si $x \geq 1$. De plus, $F_1(x,y) = 0$ si $0 \leq x \leq 1$ comme nous venons de le constater. L'unicité établie au lemme 3 entraîne $F_1 = 0$ pour tout $x \geq 1$.

Pour terminer la preuve du théorème 1, il reste à prolonger $f$ à $x \leq 0$. On procède comme au lemme 3 et cette dernière étape est laissée au lecteur.

## 4. Preuve du théorème 2.

Le système $a_j + b_j u + c_j v + d_j uv = 0$ $(j = 1, 2)$ possède deus solutions $(u_o,v_o) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ et $(u_o',v_o') \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$. Nous poserons $u_o = e^{-iz_o}$, $v_o = e^{-iw_o}$, $u_o' = e^{-iz_o'}$, $v_o' = e^{-iw_o'}$ ; les quatre nombres complexes $z_o$, $w_o'$, $z_o'$, $w_o'$ ne sont pas déterminés de façon unique mais cela est sans importance dans la suite et nous les supposerons désormais fixés.

PROPOSITION 1. <u>L'ensemble</u> $M$ <u>des couples</u> $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ <u>tels que</u> $\xi(x,y) = \exp(ixz + yw)$ <u>soit solution de</u> (2) <u>est discret et est la réunion d'un ensemble discret adjacent à</u> $(z_o, w_o) + (2\pi\mathbf{Z}) \times (2\pi\mathbf{Z})$ <u>et d'un ensemble discret adjacent à</u> $(z'_o, w'_o) + (2\pi\mathbf{Z}) \times (2\pi\mathbf{Z})$. <u>De plus, pour tous les</u> $(z,w) \in M$ <u>à l'exception d'un ensemble fini</u>, $\dim H_\xi = 1$.

L'ensemble $M$ est appelé le spectre de (2).

La preuve de la proposition 1 débute par un lemme.

LEMME 1. <u>Soient</u> $F_1(z,w)$ <u>et</u> $F_2(z,w)$ <u>deux fonctions de deux variables complexes, analytiques au voisinage de</u> $(z_o, w_o)$. <u>Supposons que les courbes</u> $F_1(z,w) = 0$ <u>et</u> $F_2(z,w) = 0$ <u>aient une multiplicité d'intersection finie en</u> $(z_o, w_o)$ <u>égale à</u> $p$.

<u>Il existe alors un voisinage compact</u> $\Delta$ <u>de</u> $(z_o, w_o)$ <u>et un nombre</u> $\varepsilon > 0$ <u>tels que, si</u> $f_1(z,w)$ <u>et</u> $f_2(z,w)$, <u>analytiques au voisinage de</u> $\Delta$, <u>vérifient</u> $\sup_\Delta |f_1| \leq \varepsilon$ <u>et</u> $\sup_\Delta |f_2| \leq \varepsilon$, <u>les courbes</u> $\Gamma_1$ <u>et</u> $\Gamma_2$ <u>d'équations</u> $F_1(z,w) + f_1(z,w) = 0$ <u>et</u> $F_2(z,w) + f_2(z,w) = 0$ <u>ont</u> $p$ <u>points d'intersection dans</u> $\Delta$. <u>Soit</u> $\eta$ <u>la borne supérieure des distances de ces</u> $p$ <u>points à</u> $(z_o, w_o)$ ; <u>alors</u> $\eta$ <u>tend vers</u> $0$ <u>avec</u> $\varepsilon$ <u>uniformément par rapport à</u> $f_1$ <u>et</u> $f_2$ <u>lorsque</u> $F_1$, $F_2$ <u>et</u> $\Delta$ <u>sont fixés.</u>

Naturellement, un point d'intersection $(z_1, w_1) \in \Delta$ de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ est compté $m$ fois si la multiplicité d'intersection de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ en $(z_1, w_1)$ est $m$.

Pour démontrer le lemme 1, on peut supposer $z_o = w_o = 0$ et quitte à faire un changement d'axes, que ni $F_1(z,0)$, ni $F_2(z,0)$ n'est identiquement nulle au voisinage de $0$. On peut alors trouver $r > 0$ et $R > 0$ tels que sur $\Delta$, déterminé par

par $|z| \leq R$, $|w| \leq r$, les courbes $F_1(z,w) = 0$ et $F_2(z,w) = 0$ soient définies par deux polynômes de Weierstrass

$$P(z,w) = z^n + a_1(w)\, z^{n-1} + \ldots + a_n(w) = 0 \qquad \text{et}$$

$Q(z,w) = z^m + b_1(w)\, z^{m-1} + \ldots + a_m(w) = 0$ ; les $a_j$ et les $b_j$ sont analytiques au voisinage de $0$ et nulles en $0$. Le discriminant $D(w)$ de $P$ et $Q$ est aussi analytique au voisinage de $0$, nul en $0$ avec une multiplicité égale à la multiplicité d'intersection $p$ de nos deux courbes.

Quitte à remplacer $r$ par un nombre plus petit, on peut supposer que $0$ est le seul zéro de $D(w)$ dans $|w| \leq r$, que $\sup\limits_{|w| \leq r} |a_1(w)| R^{n-1} + \ldots + \sup\limits_{|w| \leq r} |a_n(w)| \leq \frac{1}{3} R^n$ et que la condition analogue sur $Q$ soit satisfaite.

Si $\varepsilon < \frac{1}{3} \inf(R^m, R^n)$ et $\sup\limits_{\Delta} |f_1| \leq \varepsilon$, $\sup\limits_{\Delta} |f_2| \leq \varepsilon$, la preuve du théorème de préparation de Weierstrass (telle qu'elle est exposée dans [4]) montre que les courbes $F_1 + f_1 = 0$ et $F_2 = f_2 = 0$ sont définies sur $\Delta$ par deux polynômes de Weierstrass $P_1(z,w) = z^n + \alpha_1(w)\, z^{n-1} + \ldots + \alpha_n(w) = 0$ et $Q_1(z,w) = z^m + \beta_1(w)\, z^{m-1} + \ldots + \beta_m(w) = 0$ les $\alpha_j$ et $\beta_j$ analytiques au voisinage de $|w| \leq r$, ne sont plus nécessairement nuls en $0$. De plus, $\sup\limits_{|w| \leq r} |\alpha_j(w) - a_j(w)| \leq \eta(\varepsilon)$, fonction de $\varepsilon$ ne dépendant pas des fonctions $f_1$ et $f_2$ et tendant vers $0$ avec $\varepsilon$; la même inégalité relie les $\beta_j(w)$ aux $b_j(w)$. Le théorème de Rouché montre que si $\varepsilon$ est assez petit, le discriminant $d_1(w)$ de $P_1$ et $Q_1$ a le même nombre de zéros, dans $|w| \leq r$, que le discriminant de $P$ et $Q$.

Une preuve différente m'a été indiquée par H. Cartan.

Appelons $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{C}^2$ de frontière $\partial\Omega$ régulière, tel que les fonctions $F_1$ et $F_2$ soient analytiques au voisinage de $\bar{\Omega}$, ne soient pas simultanément nulles sur $\partial\Omega$ et que les courbes $F_1(z,w)=0$ et $F_2(z,w)=0$ n'aient que des points d'intersection isolés dans $\Omega$. Alors le nombre de ces points d'intersection (comptés avec leur multiplicité) est

$$N(F_1,F_2) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{\partial\Omega} \frac{(\bar{F}_1 dF_1 - F_1 d\bar{F}_1) dF_2 \wedge d\bar{F}_2 + (\bar{F}_2 dF_2 - F_2 d\bar{F}_2)\wedge dF_1 \wedge d\bar{F}_1}{(F_1\bar{F}_1 + F_2\bar{F}_2)^2}.$$

Tant que $F_1$ et $F_2$ ne s'annulent pas simultanément sur $\partial\Omega$, cette intégrale est une fonction continue du couple $F_1, F_2$ (normé par $\sup\limits_{\partial\Omega}|F_1| + \sup\limits_{\partial\Omega}|F_2|$). Or $N(F_1,F_2)\in\mathbb{N}$ ; donc $N(F_1,F_2)$ est localement constante.

Nous poserons $F_j(z,w) = a_j + b_j e^{-iz} + c_j e^{-iw} + d_j e^{-i(z+w)}$, $j = 1, 2$ et, en conservant les notations du lemme 1,

$$f_j(z,w) = \iint_C \exp\left[-i(2p\pi x + 2q\pi y)\right] \exp\left[-i(zx+wy)\right] \varphi_j(x,y)\,dx\,dy$$

($j = 1, 2$ et $\varphi_j$ sont définis en (1)).

Le théorème de Riemann-Lebesgue assure que $f_j(z,w)$ tend vers $0$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^2$ lorsque $p^2+q^2$ tend vers l'infini. On peut appliquer le lemme 1 pour compter le nombre de solutions au voisinage de $(z_o, w_o)$ de $\hat{\mu}_j(2p\pi + z\,,\,2q\pi + w) = 0$ $(j = 1, 2)$ ce qui s'écrit aussi $F_j(z,w) + f_j(z,w) = 0$.

Il existe donc quatre suites de nombres complexes $r(p,q)$, $s(p,q)$, $r'(p,q)$ et $s'(p,q)$, définies sur $\mathbb{Z}^2$, tendant vers $0$ à l'infini et un nombre $R > 0$ tels que, si $p^2+q^2 \geq R^2$, $z = z_o + 2p\pi + r(p,q)$, $w = w_o + 2q\pi + s(p,q)$ vérifient $\hat{\mu}_1(z,w) = 0$ et $\hat{\mu}_2(z,w) = 0$ ; il en est de même pour $z = z'_o + 2p\pi + r'(p,q)$, $w = w'_o + 2q\pi + s'(p,q$ Enfin pour tous les $\xi(x,y) = \exp(i(zx+wy))$ correspondants, $\dim H_\xi = 1$.

Désignons par $\Lambda_1$ l'ensemble des $\xi$ que nous venons de construire. Pour montrer que $\Lambda$ est la réunion de $\Lambda_1$ et d'un ensemble fini, nous aurons encore besoin d'un lemme.

Dans le lemme 2 ci-dessous, $\alpha$ désigne un nombre réel positif et $r(p,q)$, $s(p,q)$, $r'(p,q)$, $s'(p,q)$ sont quatre suites complexes arbitraires vérifiant, pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$,

(1) $\quad |r(p,q)| \leq \alpha \quad , \quad |s(p,q)| \leq \alpha \quad , \quad |r'(p,q)| \leq \alpha$ et $|s'(p,q)| \leq \alpha$.

Soient $z_o$, $w_o$, $z'_o$ et $w'_o$ quatre nombres complexes tels que $z_o$ et $z'_o$ ne soient pas congrus $\bmod 2\pi$.

A l'aide de ces quatre suites, on forme deux suites dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^*)$

$$\xi_{p,q}(x,y) = \exp i\left[z_o x + w_o y + 2p\pi x + 2q\pi y + r(p,q)x + s(p,q)y\right]$$

et

$$\chi_{p,q}(x,y) = \exp i\left[z'_o x + w'_o y + 2p\pi x + 2q\pi y + r'(p,q)x + s'(p,q)y\right].$$

LEMME 2. <u>Il existe un nombre</u> $\alpha > 0$ <u>tel que si les conditions</u> (1) <u>sont satisfaites</u>, <u>toute fonction</u> $f \in L^2(D)$ <u>s'écrive</u>, <u>de façon unique</u>,

(2) $$f(x,y) = \sum a(p,q)\, \xi_{p,q}(x,y) + \sum b(p,q)\, \chi_{p,q}(x,y)$$

<u>où</u>

(3) $$\left(\sum |a(p,q)|^2 + \sum |b(p,q)|^2\right)^{1/2} < +\infty.$$

<u>Réciproquement toute série</u> (2) <u>vérifiant</u> (3) <u>converge dans</u> $L^2(D)$ <u>vers un élément</u> $f \in L^2(D)$.

La preuve du lemme 2 est une application très simple de la méthode de perturbation exposée dans [3] p. 205.

On pose $g(x,y) = \exp\left[i(z_o x + w_o y)\right] \sum a(p,q) \exp\left[i(2p\pi x + 2q\pi y)\right] +$ $\exp\left[i(z_o' x + w_o' y)\right] \sum b(p,q) \exp\left[i(2p\pi x + 2q\pi y)\right]$. La condition $z_o' - z_o \notin 2\pi\mathbb{Z}$ entraîne que $\|g\|_{L^2(D)}$ et le premier membre de (3) sont deux normes équivalentes. De plus $g$ représente n'importe quelle fonction de $L^2(D)$ comme on le vérifie immédiatement. Il reste à prouver que, par un choix approprié de $\alpha$, on a

(4) $$\|f - g\|_{L^2(D)} \leq \frac{1}{2} \|g\|_{L^2(D)} \quad ;$$

il en résultera que l'application linéaire transformant $g$ en $f$ est un isomorphisme de $L^2(D)$. Pour obtenir (4), on développe en série chaque $\exp\left[i(r(p,q)\, x + s(p,q)\, y)\right]$ et chaque $\exp\left[i(r'(p,q)\, x + s'(p,q)\, y)\right]$. Il vient

(5) $$f = g + \sum_{k\geq 0,\, \ell \geq 0}' \frac{x^k}{k!} \frac{y^\ell}{\ell!} f_{k,\ell}(x,y)$$

où $\Sigma'$ signifie que le terme $k = \ell = 0$ est omis dans la sommation. Chaque $f_{k,\ell}$ a la même forme que $g(x,y)$ ce qui permet de majorer $\|f_{k,\ell}\|_{L^2(D)}$ par $C_1 \alpha^{k+\ell} (\Sigma |a(p,q)|^2 + \Sigma |b(p,q)|^2)^{1/2} \leq C\, \alpha^{k+\ell} \|g\|_{L^2(D)}$. Alors (4) résulte de (5) si $\alpha$ est choisi convenablement.

Nous revenons maintenant à la preuve de la proposition 1. Les lemmes 1 et 2 réunis montrent qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, si $p^2 + q^2 \geq A^2$, $|r(p,q)| \leq \alpha$, $|s(p,q)| \leq \alpha$, $|r'(p,q)| \leq \alpha$ et $|s'(p,q)| \leq \alpha$ ; $\alpha$ est défini par le lemme 2.

Désignons par $\Lambda_1$ l'ensemble des $\xi_{p,q}$ et des $\chi_{p,q}$ associés $(p^2+q^2 \geq A^2)$ et par $H_1 \subset H$ le sous-espace fermé de $H$ engendré par $\Lambda_1$.

Tout $f \in H_1$ s'écrit de façon unique comme une série (2) où $a(p,q) = b(p,q) = 0$ si $p^2+q^2 < A^2$ et où (3) est vérifiée.

Il en résulte que $H_1$ est de codimension finie $N$ dans $H$.

LEMME 3. L'ensemble $\Lambda$ est la réunion de $\Lambda_1$ et d'une partie finie dont le cardinal ne dépasse pas $N$. De plus, pour tout $\xi \in \Lambda$, $\dim H_\xi < +\infty$.

Soient $\xi_1, \ldots, \xi_m$, $m \geq N+1$, des éléments de $\Lambda$ n'appartenant pas à $\Lambda_1$. Modulo $H_1$, $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sont liés :

(6) $$a_1\xi_1 + \ldots + a_m\xi_m \in H_1.$$

Parmi toutes les relations non triviales de la forme (6), choisissons en une de longueur minimale. Quitte à changer l'ordre des $\xi_j$, cette relation de longueur minimale s'écrit

(7) $$c_1\xi_1 + \ldots + c_r\xi_r \in H_1 \quad \text{où} \quad 1 \leq r \leq m \quad \text{et} \quad c_1 \neq 0, \ldots, c_r \neq 0.$$

Deux cas se présentent alors : $r = 1$ ou $r \geq 2$.

Soit, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $T_{a,b} : H \to H$ l'opérateur de translation défini par $(T_{a,b}f)(x,y) = f(x+a\ ,\ y+b)$.

Le théorème 1 montre que $T_{a,b}$ est défini sur $H$ et est continu.

Si $r = 1$, (7) s'écrit, en posant $\xi = \xi_1$,

(8) $$\xi(x,y) = \Sigma\, a(p,q)\, \xi_{p,q} + \Sigma\, b(p,q)\, \chi_{p,q}.$$

En appliquant $T_{a,b}$ aux deux membres de (8), il vient

$$\xi(x,y)\, \xi(a,b) = \Sigma\, a(p,q)\, \xi_{p,q}(a,b)\, \xi_{p,q}(x,y) + \Sigma\, b(p,q)\, \chi_{p,q}(a,b)\, \chi_{p,q}(x,y).$$

L'unicité du développement (8) de $\xi(x,y)$ entraîne

$$a(p,q)\, \xi_{p,q}(a,b) = a(p,q)\, \xi(a,b) \quad \text{et} \quad b(p,q)\, \chi_{p,q}(a,b) = b(p,q)\, \chi(a,b)$$

pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Tous les $a(p,q)$ et tous les $b(p,q)$ ne pouvant être simultanément nuls, il vient $\xi = \xi_{p,q}$ ou $\xi = \chi_{p,q}$ pour un certain couple $(p,q)$. C'est contradictoire avec $\xi \notin \Lambda_1$.

Si $r \geq 2$, on applique à (7) les opérateurs $T_{a,b}$ : la nouvelle relation obtenue doit être proportionnelle à l'ancienne sinon (7) ne serait pas minimale. Il vient $\xi_1(a,b) = \ldots = \xi_r(a,b)$ en contradiction avec $r \geq 2$.

On prouve de façon analogue que $\dim H_\xi < +\infty$ pour tout $\xi \in \Lambda$.

Soit $H_2$ le sous-espace de $H$ engendré par tous les $H_\xi$ où $\xi \in \Lambda$. Alors $H_1 \subset H_2 \subset H$, $H_2$ est fermé dans $H$, de codimension finie dans $H$ et tout $f \in H_2$ s'écrit de façon unique

(9) $$f(x,y) = \sum_{\xi \in F} P_\xi(x,y)\,\xi(x,y) + \sum_{\xi \in \Lambda \setminus F} c(\xi)\,\xi(x,y)$$

où

(10) $$\sum_{\xi \in \Lambda \setminus F} |c(\xi)|^2 \leq C \int_D |f(x,y)|^2 \,dx\,dy$$

et réciproquement toute série (9) pour laquelle $\sum_{\Lambda \setminus F} |c(\xi)|^2$ est finie converge dans $L^2_{loc}(R^2)$ vers un élément $f \in H_2$.

Prouver le théorème 2 revient à prouver $H = H_2$.

Soit $E$ l'espace quotient $H/H_2$ ; $E$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Supposons (en raisonnant par l'absurde) que $E$ ne soit pas réduit à $\{0\}$. Les opérateurs $T_{a,b} : H \to H$ laissent $H_2$ invariant et définissent, par passage au quotient, un groupe continu, à deux paramètres, d'opérateurs de $E$, notés $r_{a,b}$. Il existe donc un élément $V \neq 0$ de $E$ et un homomorphisme $\chi$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}^*$ tels que

(11) $$r_{a,b}V = \chi(a,b)V \quad \text{pour tout} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Revenant à $H$, $V$ est l'image, modulo $H_2$, d'une fonction $f \in H$ n'appartenant pas à $H_2$. La relation (11) devient

(12) $$f(x+a\ ,\ y+b) - \chi(a,b)\, f(x,y) \in H_2.$$

Soit $g \in L^2(D)$, nulle hors de $D$, orthogonale à $H_2$ et telle que $\int_D f(x,y)\,\bar{g}(x,y)\,dx\,dy = 1$. Multipliant (12) par $\bar{g}(x,y)$ et intégrant sur $D$, il vient $\chi(a,b) = \int_D f(a+x\ ,\ b+y)\,\bar{g}(x,y)\,dx\,dy \in H$. Le lemme suivant permettra de supposer $\chi = 1$.

LEMME 4. <u>Soient</u> $\mu_1$ <u>et</u> $\mu_2$ <u>deux mesures de Radon dont les supports sont des parties compactes de</u> $R^2$ <u>et</u> $\lambda$ <u>un homomorphisme de</u> $R^2$ <u>dans</u> $\mathbb{C}^*$. <u>Pour toute fonction</u> $f \in L^2_{loc}(R^2)$ <u>les conditions</u> (13) et (14) <u>ci-dessous sont équivalentes</u>

(13) $$f * \mu_1 = 0 \quad \text{et} \quad f * \mu_2 = 0$$

(14) $$(\lambda f) * (\lambda \mu_1) = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda f) * (\lambda \mu_2) = 0.$$

La preuve est immédiate et laissée au lecteur.

Un tel changement simultané de $\mu_1$, $\mu_2$ et $f$ n'affecte pas les conclusions du théorème 2. Choisissant $\lambda = \chi^{-1}$, on pourra désormais supposer $\chi = 1$ dans (12) et que $1 \in \Lambda$.

Soit $\varphi_1$, $j \geq 0$, une approximation de l'identité composée de fonctions de $\mathcal{D}(R^2)$. Puisque $f \notin H_2$ et que $H_2$ est fermé, $f * \varphi_j \notin H_2$ dès que $j$ est assez grand. Par ailleurs $f * \varphi_j$ vérifie (12), est indéfiniment dérivable et sera appelée $f$ dans toute la suite. De plus $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{f(x+a,y) - f(x,y)}{a} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ au sens de $\mathcal{C}^\infty(R^2)$ et a fortiori au sens de $L^2_{loc}(R^2)$.

Il vient $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in H_2$ et, de même, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in H_2$.

Nous allons, grâce au lemme suivant, en déduire que $f = P + g$ où $P$ est un polynôme et $g \in H_2$. Mais $f \in H$ entraîne $P \in H$ et donc $P \in H_2$. On a $f \in H_2$ ce qui est la contradiction désirée.

Il reste à trouver $P$ et $g$.

Ecrivons $\frac{\partial f}{\partial x} = Q_o(x,y) + \sum'_{\xi \in F} Q_\xi \, \xi + \sum_{\xi \in \Lambda \setminus F} a(\xi)\xi$

où $\Sigma |a(\xi)|^2 < +\infty$ et $\Sigma'$ signifie que $\xi = 1$ est omis dans la somme.

De même $\frac{\partial f}{\partial y} = R_o(x,y) + \sum'_{\xi \in F} R_\xi \, \xi + \sum_{\xi \in \Lambda \setminus F} b(\xi)\ \xi$.

LEMME 5. Il existe un polynôme $P_o(x,y)$ et une série $g(x,y) = \sum'_{\xi \in F} P_\xi \, \xi + \sum_{\xi \in \Lambda \setminus F} c(\xi)\, \xi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ tels que $\frac{\partial}{\partial x}(P_o + g) = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}(P_o + g) = \frac{\partial f}{\partial y}$.

La disposition géométrique de l'ensemble $M \subset \mathbb{C}^2$ des $(z,w)$ tels que

(15) $$\xi(x,y) = \exp\left[i(zx + wy)\right] \in \Lambda$$

est décrite par la proposition 1. De cette disposition et de (10) résulte qu'une série (9) appartient à $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si les coefficients $c(\xi)$ ont une décroissance rapide à l'infini lorsqu'ils sont indexés par $(z,w) \in \mathbb{C}^2$.

Pour prouver le lemme 5, on écrit d'abord les relations de compatibilité résultant de $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$. Il vient

(16) $\frac{\partial}{\partial y} Q_o = \frac{\partial}{\partial x} P_o$

(17) $\frac{\partial}{\partial y}(Q_\xi \xi) = \frac{\partial}{\partial x}(R_\xi \xi)$ si $\xi \in F$, $\xi \neq 1$

et finalement

(18) $$wa(\xi) = z\, b(\xi) \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \Lambda \setminus F.$$

La relation (16) montre l'existence d'un polynôme $P_o$ tel que $Q_o = \frac{\partial P_o}{\partial x}$ et

$P_o = \frac{\partial P_o}{\partial y}$. Si $z \neq 0$, l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$ définit un automorphisme de $H_\xi$ ; de même si $w \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial y}$ est un automorphisme de $H_\xi$. Pour tout $\xi \in F$, $\xi \neq 1$, ces deux remarques permettent de trouver un polynôme $P_\xi$ tel que $P_\xi\, \xi \in H_\xi$ et que $\frac{\partial}{\partial x}(P_\xi \xi) = Q_\xi \xi$ et $\frac{\partial}{\partial y}(P_\xi \xi) = R_\xi \xi$.

Finalement tout $(z,w) \in M$, différent de $(0,0)$, vérifie soit $|z| \geq \beta > 0$ soit $|w| \geq \beta > 0$ où $\beta$ est une constante. Cette remarque et (18) permettent de trouver $c(\xi)$, à décroissance rapide, telle que $izc(\xi) = a(\xi)$ et $iwc(\xi) = b(\xi)$.

5. Preuve du théorème 3.

La preuve du théorème 3 est semblable à celle du théorème 2 et nous n'en donnerons que le plan. Quitte à multiplier $\mu_1$ et $\mu_2$ par $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^*)$, on peut supposer que la solution double de $a_j + b_j u + c_j v + d_j uv = 0$, $j = 1, 2$, est $(1,1)$. On pose alors $F_j(z,w) = a_j + b_j e^{-iz} + c_j e^{-iw} + d_j e^{-i(z+w)}$ ; les courbes $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont tangentes en $(0,0)$ et l'on vérifie facilement que leur multiplicité d'intersection en $(0,0)$ est $2$.

Donc les courbes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ définies au lemme 1 ont soit deux points d'intersections distincts voisins de $(0,0)$, soit un seul point d'intersection voisin de $(0,0)$ où elles sont tangentes.

Dans le cas de deux points d'intersection distincts $(r(p,q), s(p,q))$ et $(r'(p,q), s'(p,q))$, on pose encore

$$\xi_{p,q}(x,y) = \exp i \left[2\pi(px + qy) + r((p,q)x + s(p,q)y\right]$$

et $\chi_{p,q}(x,y) = \exp i \left[2\pi(px + qy) + r'(p,q)x + s'(p,q)\, y\right]$

et $r(p,q)$ , $s(p,q)$, $r'(p,q)$ et $s'(p,q)$ tendent vers $0$ à l'infini.

On pourra supposer que $r'(p,q) \geq r(p,q)$ et l'on définira alors $\alpha(p,q) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$\sin \alpha(p,q) = \frac{s'(p,q) - s(p,q)}{\left[(r'(p,q) - r(p,q))^2 + (s'(p,q) - s(p,q))^2\right]^{1/2}} .$$

Dans ces conditions $\alpha(p,q)$ tend vers une limite $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ à l'infini et $\operatorname{tg} \alpha$ est la pente de la tangente commune en $(0,0)$ aux courbes $a_j + b_j e^{-iz} + c_j e^{-iw} + d_j e^{-i(z+w)} = 0$ $(j = 1,2)$.

De même si $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont tangentes, on obtient les solutions élémentaires $\xi_{p,q}$ et $(x \cos \alpha(p,q) + y \sin \alpha(p,q))\, \xi_{p,q}$ et $\alpha(p,q)$ tend encore vers $\alpha$ à l'infini.

Dans les deux cas ces solutions élémentaires existent pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p^2 + q^2 \geq R^2$ et nous désignerons par $H_{p,q}$ le sous-espace de $H$, de dimension 2 sur $\mathbb{C}$, engendré par les deux solutions élémentaires d'indice $(p,q)$.

Pour base de $H_{p,q}$ nous choisirons, dans le premier cas,

$$\frac{\chi_{p,q} + \xi_{p,q}}{2} = \sigma_{p,q} \quad \text{et} \quad \frac{\chi_{p,q} - \xi_{p,q}}{\left[(r'(p,q) - r(p,q))^2 + (s'(p,q) - s(p,q))^2\right]^{1/2}} = \tau_{p,q}$$

et, dans le second cas, nous poserons $\sigma_{p,q} = \xi_{p,q}$ et $\tau_{p,q} = (x \cos \alpha(p,q) + y \sin \alpha(p,q))\, \xi_{p,q}$.

Nous reprenons alors la preuve du lemme 2. Il existe une constante $A > 0$ telle que sur l'espace vectoriel des sommes

$$S(x,y) = \sum_{p^2+q^2 \geq A^2} (a(p,q)\, \sigma_{p,q} + b(p,q)\, \tau_{p,q})$$

les normes $\|S\|_{L^2(D)}$ et $(\Sigma\, |a(p,q)|^2 + \Sigma\, |b(p,q)|^2)^{1/2}$ soient équivalentes. La méthode de perturbation consiste à approcher $\sigma_{p,q}$ par $e^{2\pi i(px+qy)}$ et $\tau_{p,q}$ par

$(x \cos \alpha + y \sin \alpha)\, e^{2\pi i(px+qy)}$.

Là encore la fermeture dans $L^2_{loc}(R^2)$ ou dans $H$ des solutions $S(x,y)$ ainsi construites est de codimension finie dans $H$.

Dès lors la dernière partie de la preuve du théorème 3 suit les mêmes pas que celle du théorème 2.

## 6. Compléments.

Que deviennent les énoncés précédents si $L^2$ est remplacé par $L^p$ $1 \leq p \leq +\infty$ ou par l'espace $\mathscr{C}(R^2)$ des fonctions continues sur $R^2$, à valeurs complexes ?

Le théorème 1 reste valable en remplaçant $g \in L^2(D)$ par $g \in L^p(D)$ où $1 \leq p \leq +\infty$. Si l'on s'intéresse aux solutions continues de l'équation (2), il faut (et il suffit) d'ajouter les conditions $(f * \mu_j)(x,1) = 0$ pour $1 \leq x \leq 2$, $j = 1, 2$.

Les théorèmes 2 et 3 ont une version faible et une version forte. Désignons par $B_p \subset L^p_{loc}(R^2)$ l'espace de Banach des solutions de $f * \mu_j = 0$, $j = 1, 2$, normé par $\|f\|_{L^p(D)}$.

Si $1 \leq p < +\infty$, les solutions exponentielle-polynômes forment une partie totale dans $B_p$ (si $p = +\infty$, il en est de même si $L^\infty(R^2)$ est muni de la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$).

Mais on peut préciser comment les solutions élémentaires approchent les fonctions $f \in B_p$. Plaçons nous d'abord dans le cadre du théorème 2. Appelons $A(\mathbb{Z}^2)$ l'algèbre de Banach des coefficients de Fourier $\iint_C \exp(-2p\pi ix - 2q\pi iy)\, f(x,y)\, dx\, dy$ des fonctions $f \in L^1(C) = L^1(R^2/\mathbb{Z}^2)$. On montre sans peine, en appliquant le théorème des fonctions implicites à l'algèbre de Banach $A(\mathbf{Z}^2)$ et aux équations $\hat{\mu}_j(z_o + 2p\pi + r(p,q)$, $w_o + 2q\pi + s(p,q)) = 0$, $j = 1, 2$, que les suites $r(p,q)$ et $s(p,q)$, fournies par la proposition 1, appartiennent à $A(\mathbf{Z}^2)$ ; il en est de même de $r'(p,q)$ et $s'(p,q)$.

On reprend alors la méthode de perturbation du lemme 2 pour étudier l'espace des sommes

$$f(x,y) = \Sigma\, a(p,q)\, \xi_{p,q}(x,y) + \Sigma\, b(p,q)\, \chi_{p,q}(x,y).$$

En utilisant les notations du lemme 2, on montre l'existence d'une constante $A > 0$ telle que, si $a(p,q) = b(p,q) = 0$ pour $p^2 + q^2 \leq A^2$, les normes de $f$ et $g$ dans $L^p(D)$ soient équivalentes ($g$ est obtenue à partir de $f$ en remplaçant $r(p,q)$ et $s(p,q)$ par $0$).

Cette équivalence de normes conduit à deux conclusions.

Il existe une partie finie $\Lambda_o \subset \Lambda$ et une constante $A > 0$ telle que toute conclusion $f \in B_p$ possède une série de Fourier de la forme

(1) $$f(x,y) \sim \sum_{\xi \in \Lambda_o} P_\xi\, \xi + \Sigma\, a(p,q)\, \xi_{p,q}(x,y) + \Sigma b(p,q)\, \chi_{p,q}(x,y) ;$$

$a(p,q) = b(p,q) = 0$ si $p^2 + q^2 \leq A^2$ et la convergence du second membre de (1) vers $f(x,y)$ est assurée par tout procédé de sommation convenant aux séries de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbf{T}^2)$. Par exemple, si nous posons pour $T > A$,

(2) $$f_T(x,y) = \sum_{\xi \in \Lambda_o} P_\xi\, \xi + \sum_{|p| \leq T,\ |q| \leq T} \left(1 - \frac{|p|}{T}\right)\left(1 - \frac{|q|}{T}\right) \left[a_{p,q}\xi_{p,q}(x,y) + b_{p,q}\chi_{p,q}(x,y)\right.$$

alors

(3) $$\|f - f_T\|_{L^p_{loc}} \to 0 \quad (T \to +\infty) ;$$

si $p = +\infty$ cette convergence a lieu dans la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ à moins que $f$ ne soit une solution continue.

La situation est un peu plus compliquée dans le cadre du théorème 3 mais nous obtenons le même type de conclusions. En reprenant les notations du § 5, on montre cette fois que $r(p,q)+r'(p,q) \in A(\mathbf{Z}^2)$, $r(p,q)\,r'(p,q) \in A(\mathbf{Z}^2)$ et $\alpha(p,q)-\alpha \in A(\mathbf{Z}^2)$ ; mais en général, ni $r(p,q)$, ni $r'(p,q)$ n'appartiennent à $A(\mathbf{Z}^2)$. Dès lors on peut utiliser une variante de la méthode de perturbation du lemme 2 du § 4 ([2]) : il existe une constante $A > 0$ telle que $\|S(x,y)\|_{L^p(D)}$,

$\left\|\Sigma\left[a(p,q)+b(p,q)(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\right]e^{2\pi i(px+qy)}\right\|_{L^p(D)}$ et

$\left\|\Sigma\, a(p,q)\,e^{2\pi i(px+qy)}\right\|_{L^p(C)} + \left\|\Sigma\, b(p,q)\,e^{2\pi i(px+qy)}\right\|_{L^p(C)}$ sont trois normes équivalentes quand $a(p,q)=b(p,q)=0$ pour $p^2+q^2 \le A^2$ (les notations sont celles du § 5).

On en déduit que toute solution $f \in B_p$ possède une série de Fourier de la forme

$$f(x,y) \sim \sum_{\xi\in\Lambda_0} P_\xi\,\xi + \Sigma\, a(p,q)\,\sigma_{p,q} + b(p,q)\,\tau_{p,q} \tag{4}$$

et cette série converge vers $f$ au sens suivant. Pour tout $T > A$, posons

$$\begin{aligned} f_T(x,y) = {} & \sum_{\xi\in\Lambda_0} P_\xi\,\xi + \sum_{|p|\le T,\ |q|\le T} a(p,q)\left(1-\frac{|p|}{T}\right)\left(1-\frac{|q|}{T}\right)\sigma_{p,q}(x,y) \\ & + \sum_{|p|\le T,\ |q|\le T} b(p,q)\left(1-\frac{|p|}{T}\right)\left(1-\frac{|q|}{T}\right)\tau_{p,q}(x,y). \end{aligned} \tag{5}$$

Alors

$$\|f-f_T\|_{L^p_{loc}(\mathbb{R}^2)} \longrightarrow 0 \qquad (T \to +\infty)\,. \tag{6}$$

On peut enfin examiner le cas où $d_1 = d_2 = 0$ dans la définition des mesures $\mu_1$ (§ 1). Quitte à multiplier $\mu_1$ et $\mu_2$ par un même $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbf{C}^*)$, on peut supposer que

$$\mu_1 = \delta(1,0) - \delta(0,0) + \varphi_1\,dx\,dy \quad , \quad \mu_2 = \delta(0,1) - \delta(0,0) + \varphi_2\,dx\,dy\,.$$

Il est alors facile de voir que, sans hypothèse supplémentaire sur $\varphi_1$ et $\varphi_2 \in L^1(C)$, le théorème 1 ne subsiste plus. En effet une condition nécessaire à la conclusion du théorème 1 est que le spectre $M$ soit contenu dans un tube de la forme $|\operatorname{Im} z| \leq C$, $|\operatorname{Im} z| \leq C$ et cette condition est par exemple violée si $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ sur $C$, $0$ ailleurs.

En revanche, appelons $T$ le triangle $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$ et supposons que $\varphi_1 \in L^1(T)$, $\varphi_2 \in L^1(T)$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ hors de $T$. Alors les théorèmes 1 et 2 restent vrais à cette différence près que $C$ doit être remplacé par $T$ et $D$ dans $C$ dans tous les énoncés ; de plus l'ensemble $M$, défini dans la proposition 1, est adjacent à $(2\pi\mathbf{Z}) \times (2\pi\mathbf{Z})$ et $z_0 = w_0 = 0$.

Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse faite par Delsarte : "l'enveloppe convexe des deux distributions est la même.... De plus les deux distributions sont formées l'une et l'autre de masses de Dirac placées aux sommets et d'une densité suffisamment régulière épandue à l'intérieur".

[1] DELSARTE, J. Théorie des fonctions moyenne-périodiques de deux variables. Ann. Math. 72 (1960), 121-178.

[2] MEYER, Y. Théorie $L^p$ des sommes trigonométriques apériodiques. Ann. Inst. Fourier 24 (1974).

[3] RIESZ, F. et NAGY, B. Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest 1953 (2nd éd.)

[4] SAKS, S. and ZYGMUND, A. Analytic functions.

Université Paris-Sud
Centre Scientifique d'Orsay
Mathématiques 425
91405 ORSAY