INTRODUCTION A LA THEORIE DES EQUATIONS ELLIPTIQUES

Cours de B. MALGRANGE à l'E.N.S. (1961)

Introduction à la théorie des équations elliptiques

cours de B. MALGRANGE à l'E.N.S. (1961)

CHAPITRE I

Le problème de Dirichlet pour $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

I.1.- Introduction. Problème de Dirichlet.

Soit Ω un ouvert de R^n de frontière $b\Omega$, trouver une fonction f vérifiant $\Delta f = 0$ dans Ω et $f = g$ sur $b\Omega$... On ne précise pas pour l'instant le sens donné à la 2ème condition.

L'idée de Riemann était de prendre, parmi toutes les fonctions vérifiant $f = g$ sur $b\Omega$, celle pour laquelle $\int \cdots \int \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2 dx_1 \ldots dx_n$ est minimum.

En considérant les fonctions $f + \lambda\varphi$ (où $\varphi = 0$ sur $b\Omega$, λ réel), on est conduit, pour rendre $\int \sum \left|\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|^2 dx$ minimum pour $\lambda = 0$, à poser :

$$\int \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx = 0.$$

Soit en appliquant la formule de Stokes :

$$\int \sum_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\overline{\varphi} + \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x_i^2}\varphi\right) dx = 0$$

pour toute fonction φ nulle au bord. On a donc, en prenant parties réelles et imaginaires: $\Delta f = 0$.

Cette méthode qu'il convient de préciser peut se généraliser à d'autres opérateurs (Soboleff, Visik, H. Weyl).

I.2. Espaces $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$.

Soit Ω un ouvert de R^n.

Définition I. $H^1(\Omega)$ est l'espace des distributions qui appartiennent à $L^2(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées du premier ordre.

On a donc : $f \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow (f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\exists g \in L^2(\Omega)$, $\exists g_i \in L^2(\Omega)$ $1 \leq i \leq n$ telles que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle f , \varphi \rangle = \int_\Omega g \varphi dx$ et $\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} , \varphi \rangle = -\langle f , \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \int_\Omega g_i \varphi dx)$.

Remarquons que g est absolument continue sur presque toutes les droites parallèles aux axes de coordonnées et admet les g_i comme dérivées au sens usuel presque partout. (voir Schwartz : Théorie des distributions. Tome I page 54, th. III et tome II page 41 th.XV).

Munissons $H^1(\Omega)$ du produit scalaire : $(f/g)_1 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} dx + \int_\Omega f\bar{g}\, dx$ d'où la norme : $\|f\|_1 = \sqrt{(f/f)_1}$.

<u>Théorème</u> I. $H^1(\Omega)$ <u>muni de la norme</u> $\| \quad \|_1$ <u>est un espace de Hilbert</u>.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de démontrer qu'il est complet.

Soit f_p une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Les f_p et les $(\frac{\partial f_p}{x_i})$ forment des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. $L^2(\Omega)$ étant complet, il existe $n+1$ fonctions : f, g_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ telles que : $\lim_{p \to \infty} f_p = f$ (dans L^2) $\lim_{p \to \infty} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} = g_i$ (dans L^2).

De plus on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad - \int_\Omega f_p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \varphi\, dx \; .$$

Soit en passant à la limite

$$- \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega g_i \varphi\, dx \; .$$

Ce qui exprime que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$ (au sens des distributions). Les f_p convergent donc dans $H^1(\Omega)$ vers f. C.Q.F.D.

Définissons un sous-espace du précédent qu'on appellera sous-espace des éléments "nuls au bord" de $H^1(\Omega)$.

<u>Définition</u> II. $H^1_o(\Omega)$ <u>est l'adhérence de</u> $\mathcal{D}(\Omega)$ <u>dans</u> $H^1(\Omega)$ <u>muni de la norme</u> $\| \quad \|_1$.

<u>Définition</u> III. $H^1_o(\Omega)$ <u>est l'adhérence de</u> $\mathcal{E}'(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ <u>dans</u> $H^1(\Omega)$ <u>muni de la norme</u> $\| \quad \|_1$.

Montrons que ces deux définitions sont équivalentes. Démontrons pour cela que : $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = \overline{\mathcal{E}'(\Omega) \cap H^1(\Omega)}$.

Nous avons évidemment : $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \overline{\mathcal{E}'(\Omega) \cap H^1(\Omega)}$.

Montrons, par régularisation, que :

$$\mathcal{E}'(\Omega) \cap H^1(\Omega) \subset \overline{\mathcal{D}(\Omega)} \; .$$

Soit φ_p une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ nulles en dehors des boules $\|x\| \leqslant \frac{1}{p}$, positives, et telles que $\int_{R^n} \varphi_p \, dx = 1$. Si $g \in L^2$, $\lim\limits_{p \to \infty} \varphi_p * g = g$ (dans L^2).

En effet, cette convergence a lieu pour $g \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ est partout dense dans L^2 et l'ensemble des applications $g \longrightarrow \varphi_p * g$ est équicontinu dans L^2 puisque $\|\varphi_p * g\|_{L^2} \leqslant \|\varphi_p\|_{L^1} \|g\|_{L^2}$.

Soit $f \in \mathcal{E}'(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, pour p assez grand, le support de $\varphi_p * f$ reste dans Ω donc $\varphi_p * f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on a :

$$\lim_{p \to \infty} \varphi_p * f = f \qquad \text{(dans } L^2(\Omega))$$

et

$$\lim_{p \to \infty} \varphi_p * \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{(dans } L^2(\Omega))$$

on a donc

$$\lim_{p \to \infty} \varphi_p * f = f \qquad \text{(dans } H^1(\Omega)).$$

On a bien $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ce qui démontre l'équivalence des définitions II et III.

Etudions les relations entre $H^1(\Omega)$ et $H^1_o(\Omega)$. On a :

Théorème II. $H^1(R^n) = H^1_o(R^n)$.

Soit $f \in H^1(R^n)$, démontrons que f est la limite d'une suite d'éléments de $H^1_o(R^n)$ qui est fermé dans $H^1(R^n)$, ce qui démontre que $f \in H^1_o(R^n)$.

Considérons une suite de fonctions α_p telles que :

$$\alpha_p \in \mathcal{D}$$

$$\alpha_p = 1 \text{ sur la boule } \|x\| \leqslant p$$

$$\alpha_p \text{ et } \frac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} \text{ sont des fonctions bornées.}$$

(Prendre par exemple : $\alpha_p(x) = \alpha_1(\frac{x}{p})$).

Si $f \in H^1(R^n)$ $\alpha_p f \in H^1_o(R^n)$ (définition III) et $\lim\limits_{p \to \infty} \alpha_p f = f$ (dans $H^1(R^n)$).

En effet :

$$\alpha_p f \longrightarrow f \quad \text{(dans } L^2).$$

(On peut appliquer par exemple le théorème de Lebesgue à la suite $|\alpha_p f - f|^2$).

De même

$$\frac{\partial(\alpha_p f)}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{(dans } L^2)$$

puisque $\dfrac{\partial(\alpha_p f)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial\alpha_p}{\partial x_i} f + \alpha_p \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\dfrac{\partial\alpha_p}{\partial x_i} f \longrightarrow 0$ (dans L^2) $\alpha_p \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ (dans L^2) (théorème de Lebesgue) C. Q. F. D.

Mais, <u>en général</u> $H_o^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.

Posons $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \complement\Omega \end{cases}$

Nous avons :

<u>Théorème</u> III. <u>Si</u> f <u>est dans</u> $H_o^1(\Omega)$, $\tilde{f}$ <u>est dans</u> $H^1(R^n)$.

En effet, f est limite dans $H^1(\Omega)$ d'une suite f_p de $\mathcal{D}(\Omega)$. $\tilde{f}_p$ est une suite de Cauchy dans $H^1(R^n)$, elle converge donc vers $g \in H^1(R^n)$. En particulier $\tilde{f}_p$ converge dans L^2 vers $\tilde{f}$ et g. On a donc

$$g = \tilde{f} \quad \text{(au sens des distributions).}$$

Remarquons, que nous avons en plus $\dfrac{\partial\tilde{f}_p}{\partial x_i} = (\dfrac{\partial f_p}{\partial x_i})^{\sim}$ et en passant à la limite : $\dfrac{\partial g}{\partial x_i} = (\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i})$.

On démontre que la réciproque de ce théorème est vraie si le bord de Ω est assez régulier.

Grâce à ce théorème nous pouvons citer un exemple pour lequel $H^1(\Omega) \neq H_o^1(\Omega)$. Il suffit de prendre pour Ω une boule de R^n. On a bien $1 \in H^1(\Omega)$ et $1 \notin H_o^1(\Omega)$.

I.3. <u>Problème de Dirichlet pour</u> $\Delta - \lambda$ $(\lambda > 0)$.

Nous cherchons $f \in H_o^1(\Omega)$ telle que $(\Delta - \lambda)f = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et "f = g sur $b\Omega$ où g est une fonction donnée sur $b\Omega$". Nous poserons ainsi le problème : Supposons qu'il existe $h \in H^1(\Omega)$ prolongeable en un certain sens sur $\bar{\Omega}$ et telle que $h/b\Omega = g$. Alors, <u>par définition</u>, $f - h \in H_o^1(\Omega)$ signifie que $f/b\Omega = g$.

Nous pouvons donc poser le problème en termes d'espaces déjà étudiés et avoir le

<u>Théorème</u> IV. <u>Etant donnée</u> $h \in H^1(\Omega)$, <u>il existe une distribution</u> f_o <u>et une seule appartenant à</u> $H^1(\Omega)$ <u>et telle que</u> 1º) $(\Delta - \lambda)f_o = 0$ <u>dans</u> $\mathcal{D}'(\Omega)$

2º) $h - f \in H^1(\Omega)$.

Démonstration. Prenons sur $H^1(\Omega)$ la norme suivante, équivalente à la norme initiale :

$$|||f|||^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2 + \lambda \int_\Omega |f|^2 .$$

Elle est associée au produit scalaire

$$((f/g)) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i} + \lambda \int_\Omega f\bar{g} \qquad f,g \in H^1(\Omega)$$

et, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$-\langle (\Delta - \lambda)f , \bar{\varphi} \rangle = ((f , \varphi)).$$

Les f de $H^1(\Omega)$ qui vérifient $f - h \in H^1_0(\Omega)$ forment un sous espace affine fermé et complet. Nous cherchons donc une f_0 orthogonale à $H^1_0(\Omega)$ et contenue dans $h + H^1_0(\Omega)$. $H^1(\Omega)$ étant un espace de Hilbert, il existe une telle solution unique à savoir : la projection de l'origine (dans $H^1(\Omega)$) sur le sous espace affine $h + H^1_0(\Omega)$. On a $f_0 = h - f_1$ avec $f_1 \in H^1_0(\Omega)$. C.Q.F.D.

Problème de Dirichlet homogène.

Nous avons, en fait, résolu le problème suivant :

Etant donnée $h \in H^1(\Omega)$, trouver $f_1 \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$(\Delta - \lambda)f_1 = (\Delta - \lambda)h$$

f_1 est obtenue en projetant h sur $H^1_0(\Omega)$.

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous espace dense de $H^1_0(\Omega)$, avec une topologie plus fine que la topologie induite, le dual de $H^1_0(\Omega)$ s'identifie canoniquement à un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (l'image de l'application transposée de l'injection $\mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow H^1_0(\Omega)$).

Remarquons alors que la distribution $(\Delta - \lambda)h$ appartient au dual de $H^1_0(\Omega)$:

$\forall g \in H^1_0(\Omega) \qquad -\langle (\Delta - \lambda)h, \bar{g} \rangle = ((h/g))$. Plus généralement on a :

Théorème V. Etant donné φ appartenant au dual de $H^1_0(\Omega)$, il existe une distribution unique f_1 appartenant à $H^1_0(\Omega)$ telle que :

$$(\Delta - \lambda)f_1 = \varphi.$$

Démonstration. On va déterminer f_1 par la condition suivante :

$$\forall g \in H_0^1(\Omega) : -\langle (\Delta - \lambda) f_1 , \bar{g} \rangle = ((f_1, g)) = \langle -\varphi, \bar{g} \rangle .$$

Toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert est représentable par un élément unique. Ce qui prouve l'existence et l'unicité de f_1. C.Q.F.D.

Ce théorème, plus général que le théorème IV peut être énoncé aussi sous la forme :

L'opérateur $\Delta - \lambda$ définit un isomorphisme entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual.

I.4. Problème de Dirichlet pour Δ $(\lambda = 0)$.

Posons $\| f \|'^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2$. $\| f \|'$ est une semi-norme sur $H_0^1(\Omega)$. Soit pr_i l'opérateur de projection sur le ième axe de coordonnées.

Théorème VI. Si Ω est borné dans une direction (c'est à dire $pr_i(\Omega)$ bornée pour un i au moins) alors :

1º) $\| \ \|'$ est une norme équivalente à $\| \ \|$ sur $H_0^1(\Omega)$

2º) l'opérateur Δ définit un isomorphisme entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual.

Démonstration.

1º) Supposons $pr_1(\Omega) \subset [-a , +a]$. Il faut démontrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de Ω telle que pour toute f de $H_0^1(\Omega)$, on ait :

$$\| f \| \leqslant C \| f \|'$$

Pour $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $f(x_1 \ldots x_n) = \int_{-a}^{x} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} (t, x_2, \ldots x_n) \right|^2 dt$. En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|f(x_1 \ldots x_n)|^2 \leqslant 2a \int_{-a}^{+a} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 dx_1$$

soit

$$\int |f|^2 \, dx_1 \leqslant 4 a^2 \int \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 dx_1 .$$

En intégrant par rapport à $x_2, \ldots, x_n$ on a :

$$\int_\Omega |f|^2 \, dx \leqslant 4 a^2 \int \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 dx$$

soit : $\| f \|_{L^2} \leqslant 2a \| f \|'$ d'où $\| f \| \leqslant (2a + 1) \| f \|'$. Cette dernière inégalité est valable dans $H_0^1(\Omega)$ puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ y est dense. C.Q.F.D.

2º) $H_o^1(\Omega)$ muni de la norme $\| \quad \|'$ et du produit scalaire associé $(\quad , \quad)'$ est un espace de Hilbert et on a :

$$-\langle \Delta f , \bar{g} \rangle = (f \mid g)' \qquad \forall f \in H_o^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall g \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il n'y a plus qu'à reprendre la démonstration du théorème V pour démontrer, dans ce cas, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour Δ.

CHAPITRE II

Opérateurs fortement elliptiques : Problème de Dirichlet

II.1. Espaces $H^m(\Omega)$, $H^m_o(\Omega)$.

Notations : si $p = (p_1, \ldots, p_n) \in N^n$; $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$, on note :

$|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ ordre de p

$$\xi^p = \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}$$

$$D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}}$$

Définition I. Etant donnés un ouvert Ω de R^n (extension facile aux variétés), m un entier positif, $H^m(\Omega)$ est l'espace des distributions $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que :

$(\forall m' \in N^n) \quad (|m'| \leqslant m) \Longrightarrow D^{m'} f \in L^2(\Omega)$.

Pour $m = 1$ on retrouve la définition de $H^1(\Omega)$. On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire

$$(f/g)_m = \sum_{|p| \leqslant m} \int D^p f \, \overline{D^p g} \, dx$$

La norme correspondante est notée : $\|f\|_m$.

Définition II. a) $H^m_o(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ muni de la norme $\| \ \|_m$

b) $H^m_o(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{E}'(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

De l'équivalence des définitions II et III du chapitre I, on déduit aisément l'équivalence de ces deux définitions.

Nous avons les résultats suivants, dont les démonstrations sont immédiates à partir de celles des théorèmes I, II et III du chapitre I.

- $H^m(\Omega)$ muni de la norme $\| \ \|_m$ est complet (c'est donc un Hilbert)
- $H^m_o(\Omega) = H^m(R^n)$
- si $f \in H^m_o(\Omega)$, $\tilde{f} \in H^m(R^n)$ (Réciproque vraie si $b\Omega$ est régulier)

Définition III. Soit m un entier positif, $H^{-m}(\Omega)$ désigne le dual topologique de $H^m_o(\Omega)$ muni de la norme $\| \ \|_m$:

$$\left[H^m_o(\Omega)\right]' = H^{-m}(\Omega).$$

Cette définition est convenable pour $m = 0$. On a $H_o^o(\Omega) = H^o(\Omega) = L^2(\Omega)$ et $\| \ \|_{L^2} = \| \ \|_o$.

Signalons les deux injections continues et denses

$$\mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow H^{-m}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

obtenues par transposition des injections continues et denses $\mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow H_o^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

<u>Théorème</u> I. $H^{-m}(\Omega)$ <u>est l'espace des distributions</u> f <u>qui s'écrivent</u> :
$f = \sum_{|p| \leqslant m} D^p g_p$ <u>avec</u> $g_p \in L^2(\Omega)$. (La décomposition n'est pas unique).

<u>Démonstration</u>. $D^p g_p$ avec $g_p \in L^2(\Omega)$ définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la norme $\| \ \|_n$, puisque

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad |\langle D^p g_p , \varphi \rangle| = |\langle g_p , D^p \varphi \rangle| \leqslant \|g_p\|_o \ \|\varphi\|_m .$$

Elle est donc prolongeable en une forme continue sur $H_o^m(\Omega)$.

Récirpoquement, soit T une forme linéaire continue sur $H_o^m(\Omega)$. Démontrons qu'elle est de la forme indiquée. Soit M l'ensemble des multi-entiers $p \in N^n$ tels que $|p| \leqslant m$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} H_o^m(\Omega) &\longrightarrow \left[L^2(\Omega)\right]^M \\ f &\longrightarrow (D^p f)_{p \in M} \end{aligned}$$

Elle est continue et injective. L'image de $H_o^m(\Omega)$ par cette application est fermée, elle lui est donc isomorphe (théorème de Banach !). T est donc prolongeable en $\widetilde{T}$ sur $\left[L^2(\Omega)\right]^M$ (théorème de Hahn-Banach). L^2 étant identique à son dual, il existe M fonctions θ_p appartenant à $L^2(\Omega)$ telles que :

$$\forall (\varphi_p) \in \left[L^2(\Omega)\right]^M \quad \langle \widetilde{T} , (\varphi_p) \rangle = \sum_{|p| \leqslant m} \langle \theta_p , \varphi_p \rangle .$$

On a donc pour $f \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle T , f \rangle = \sum_{|p| \leqslant m} \langle \theta_p , D^p f \rangle = \sum_{|p| \leqslant m} (-1)^{p} \langle D^p \theta_p , f \rangle .$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_o^m(\Omega)$, T est bien de la forme enoncée. C.Q.F.D.

Pour $f \in H^m(\Omega)$, posons $\|f\|'^2_m = \int \sum_{|p|=m} |D^p f|^2 \, dx$. C'est une semi-norme. Nous avons :

<u>Théorème</u> II. 1º) <u>Si</u> Ω <u>est borné</u> $\| \ \|'_m$ <u>est une norme sur</u> $H^m_o(\Omega)$ <u>équivalente à</u> $\| \ \|_m$

2º) <u>Si</u> Ω <u>est un cube de côté</u> ε : $\forall f \in H^m_o(\Omega)$ <u>on a</u> :

$$\|f\|'_{m-k} \leqslant \varepsilon^k \|f\|'_m \quad \underline{\text{et}} \quad \|f\|_{m-k} \leqslant \varepsilon^k \|f\|_m$$

<u>pour tout entier positif</u> $k \leqslant m$.

<u>Démonstration</u>. 1º) La première partie a été démontrée pour $m = 1$ (th. VI, ch. I). La démonstration pour m positif quelconque, s'en déduit aisément par récurrence sur m.

2º) On a déjà démontré (th. VI chap. I) :

$$\forall f \in H^1_o(\Omega) \qquad \|f\|_{L^2} \leqslant \varepsilon \left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{L^2}.$$

On a de même, pour tout p, tel que $|p| \leqslant m$ et $f \in H^m_o(\Omega)$

$$\left\| \frac{\partial^{|p|-1} f}{\partial x_1^{p_1-1} \partial x_2^{p_2} \cdots \partial x_n^{p_n}} \right\|_{L^2} \leqslant \varepsilon \left\| \frac{\partial^{|p|} f}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}} \right\|_{L^2}$$

On en déduit tout de suite :

$$\|f\|'_{m-1} \leqslant \varepsilon \|f\|'_m \qquad \text{et} \qquad \|f\|_{m-1} \leqslant \varepsilon \|f\|_m$$

De proche en proche, on a le résultat énoncé. C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> 1. Il aurait suffit de supposer dans la première partie du théorème précédent Ω borné dans une direction ; dans la 2e partie Ω d'épaisseur ε dans une direction.

<u>Remarque</u> 2. Si φ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$, on peut la prolonger par 0 en une fonction de $\mathcal{D}(R^n)$, on pourra alors faire subir à φ la transformation de Fourier :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int \varphi(x) \, e^{-i \xi . x} \, dx$$

et on aura la formule de Planchevel :

$$\|\varphi\|^2_o = \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

En appliquant cette formule aux dérivées partielles d'ordre m, on obtient :

$$\|\varphi\|'^2_m = \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\sum_{p=m} \xi^{2p}\right) |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

II.2. Opérateurs fortement elliptiques : inégalité de Gårding.

Soit $L = \sum_{|p| \leqslant m} a_p(x) D^p$, un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables, et d'ordre pair $(m = 2\mu)$.

Définition IV. L est fortement elliptique au point x si :

$$\forall \xi \in R^n - \{o\} \qquad \mathcal{R}(-1)^{\mu} \sum_{|p|=m} a_p(x)\, \xi^p > 0$$

Exemple : $-\Delta$

Supposons L fortement elliptique en x et soit C_x le minimum $(C_x > 0)$ de $\mathcal{R}(-1)^{\mu} \sum_{|p|=m} a_p(x)\, \xi^p$ sur la variété $\sum_{|p|=\mu} \xi^{2p} = 1$. On obtient aussitôt l'inégalité

$$\mathcal{R}(-1)^{\mu} \sum_{p=m} a_p(x) \xi^p \geqslant C_x \sum_{|p|=\mu} \xi^{2p} .$$

Théorème III. Si L est fortement elliptique dans Ω, (i.e. en tout point de Ω), on peut associer, à tout point α de Ω, un voisinage ouvert O_α et une constante K_α positive tels que pour toute distribution φ de $H_o^{\mu}(O_\alpha)$ on ait :

$$\mathcal{R} < L\varphi, \bar{\varphi} > \geqslant K_\alpha \|\varphi\|_{\mu}^{2} .$$

Démonstration. Elle se fera en deux étapes :

1º) Supposons d'abord que les coefficients a_p soient constants et nuls sauf pour $|p| = m$. Il existe alors, une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \xi \in R^n - \{o\} \qquad \mathcal{R}(-1)^{\mu} \sum_{|p|=m} a_p\, \xi^p \geqslant C \sum_{|p|=\mu} \xi^{2p} .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ on a :

$$\mathcal{R}< L\varphi, \bar{\varphi} > = \mathcal{R}\int L\varphi\bar{\varphi}\,dx = \mathcal{R}\int \sum_{|p|=m} a_p D^p \varphi\bar{\varphi}\,dx = \mathcal{R}(-1)^{\mu} \frac{1}{(2\pi)^n} \int (\sum_{|p|=m} a_p \xi^p)\, \hat{\varphi}(\xi)\hat{\bar{\varphi}}(\xi) d\xi$$

Soit

$$\mathcal{R}< L\varphi, \bar{\varphi} > \geqslant \frac{C}{(2\pi)^n} \int \sum_{|p|=\mu} \xi^{2p}\, |\hat{\varphi}|^2\, d\xi = C\, \|\varphi\|_{\mu}^{\prime 2} .$$

2º) Plaçons nous maintenant dans le cas général. Soit $\alpha \in \Omega$. Utilisons le "Truc de Korn" en posant :

$$L_\alpha = \sum_{|p|=m} a_p(\alpha) D^p \qquad L' = \sum_{|p|=m} (a_p(x) - a_p(\alpha)) D^p \qquad L'' = \sum_{|p|<m} a_p(x) D^p .$$

On a : $L = L_\alpha + L' + L''$.

Il existe une constante C, dépendant de α, telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^n) \qquad \mathcal{R}\langle L_\alpha \varphi, \bar{\varphi}\rangle \geqslant c \ \|\varphi\|'^2_\mu$$

(application de la 1ère étape).

Soit $V_1 \subset \Omega$ un voisinage ouvert relativement compact de α. Il existe une constante C' telle que : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_1)$: $\|\varphi\|'^2_\mu \geqslant C' \ \|\varphi\|^2_\mu$ (th. II). Posons $CC' = C_1$.

On a donc :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_1) \qquad \mathcal{R}\langle L_\alpha \varphi, \bar{\varphi}\rangle \geqslant C_1 \ \|\varphi\|^2_\mu.$$

On a pour $\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_1)$:

$$\langle L'\varphi, \bar{\varphi}\rangle = \sum_{|p|=m} \langle (a_p(x)-a_p(\alpha))D^p, \bar{\varphi}\rangle = \sum \langle (a_p(x)-a_p(\alpha))D^p.D^{p_2}\varphi, \bar{\varphi}\rangle$$

avec $|p_1| = |p_2| = \mu$. $p_1 + p_2 = p$

Soit : $\langle L'\varphi, \bar{\varphi}\rangle = (-1)^\mu \sum_{|p|=m} \langle (a_p(x)-a_p(\alpha))D^{p_2}\varphi, D^{p_1}\bar{\varphi}\rangle + \sum_{i,j} \langle L_i \varphi, L_j \bar{\varphi}\rangle$.

Le 2ème terme de droite est une somme finie, les opérateurs L_i sont d'ordre au plus μ et L_j d'ordre au plus $\mu - 1$. Il existe une constante C_2 ne dépendant que de L et de V_1 telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_1) \qquad \left|\sum \langle L_i \varphi, L_j \bar{\varphi}\rangle\right| \leqslant C_2 \ \|\varphi\|_\mu \|\varphi\|_{\mu-1}$$

On traitera de même L''

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_1) \qquad |\langle L''\varphi, \bar{\varphi}\rangle| \leqslant C_3 \ \|\varphi\|_\mu \|\varphi\|_{\mu-1}$$

Soit δ un nombre réel positif, il existe un voisinage ouvert V_2 de α contenu dans Ω tel que :

$$\sum_{|p|=m} \sup_{x \in V_2} |a_p(x) - a_p(\alpha)| \leqslant \delta.$$

Finalement on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(V_1 \cap V_2)$

$$\mathcal{R}\langle L\varphi, \bar{\varphi}\rangle \geqslant C_1 \ \|\varphi\|^2_\mu - \delta\|\varphi\|^2_\mu - (C_2 + C_3) \ \|\varphi\|_\mu \|\varphi\|_{\mu-1}.$$

Prenons $\delta = \frac{C_1}{3}$ et soit V_3 le cube de centre α et de côté : $\frac{C_1}{3(C_2+C_3)}$. D'après le théorème II ch. II on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(V_3) \qquad \|\varphi\|_{\mu-1} \leqslant \frac{C_1}{3(C_2+C_3)} \ \|\varphi\|_\mu.$$

Posons $K_\alpha = \frac{C_1}{3}$ et $O_\alpha = V_1 \cap V_2 \cap V_3$. On a alors : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(O_\alpha)$ $\mathcal{R}\langle L\varphi, \bar{\varphi}\rangle \geqslant K_\alpha \|\varphi\|^2_\mu$. Cette inégalité se généralise à $H^\mu_o(O_\alpha)$ puisque $\mathcal{D}(O_\alpha)$ y est dense. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> IV. (<u>Inégalité de Gårding</u>). <u>Soit</u> L <u>fortement elliptique, d'ordre</u> $m = 2\mu$, <u>dans un ouvert</u> Ω <u>de</u> R^n. <u>Pour tout ouvert</u> O <u>relativement compact de</u> Ω, <u>il existe deux constantes réelles positives</u> λ <u>et</u> A <u>telles que l'on ait</u> : $\forall \varphi \in H^\mu_o(O)$ $\mathcal{R}\langle L\varphi + \lambda\varphi, \bar{\varphi}\rangle \geqslant A \|\varphi\|^2_\mu$.

Démontrons d'abord le lemme :

<u>Lemme</u>. <u>Soit</u> O <u>un ouvert de</u> R^n; <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe une constante</u> $\eta(\varepsilon) \geqslant 0$ <u>telle que</u> : $\forall \varphi \in H^\mu_o(O)$, $\|\varphi\|_{\mu-1} \leqslant \varepsilon\|\varphi\|_\mu + \eta(\varepsilon)\|\varphi\|_o$.

<u>Démonstration du lemme</u> : Nous avons

$$\forall \varepsilon, \exists \eta \geqslant 0 \text{ tel que } \forall \xi \in R^n \sum_{|p| \leqslant \mu-1} \xi^{2p} \leqslant \varepsilon^2 \sum_{|p|\leqslant\mu} \xi^{2p} + \eta^2.$$

En effet, il n'y a qu'à considérer le polynôme :

$$P(\xi) = \sum_{|p|\leqslant \mu-1} \xi^{2p}(1-\varepsilon^2) - \varepsilon^2 \sum_{|p|=\mu} \xi^{2p}.$$

Il tend vers $-\infty$ quand $|\xi|$ tend vers $+\infty$. Donc pour $|\xi| \geqslant K$, $P(\xi) \leqslant 0$. Soit $\eta^2 \geqslant \sup_{|\xi|\leqslant K} P(\xi)$. Nous avons l'inégalité annoncée pour tout $\xi \in R^n$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(O)$, on a :

$$\sum_{|p|\leqslant\mu-1} \xi^{2p}|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \leqslant \varepsilon^2 \sum_{|p|\leqslant\mu} \xi^{2p}|\hat{\varphi}(\xi)|^2 + \eta^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2$$

et en intégrant, on obtient :

$$\|\varphi\|_{\mu-1} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2\|\varphi\|^2_\mu + \eta^2\|\varphi\|^2_o} \leqslant \varepsilon\|\varphi\|_\mu + \eta\|\varphi\|_o \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Démonstration du théorème</u> IV. Soit O_i un recouvrement fini de $\bar{O}$ extrait du recouvrement par les O_α du théorème précédent (th. III ch. II). Soit β_i une partition de l'unité indéfiniment différentiable, subordonnée à ce recouvrement. Posons $\gamma_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\sum \beta_i^2}}$, de sorte que β_i^2 définit une autre partition de l'unité subordonnée au même recouvrement. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(O)$, on a :

$$\langle L\varphi,\bar\varphi\rangle = \sum_i \langle \gamma_i L\varphi, \gamma_i\bar\varphi\rangle = \sum_i \langle L(\gamma_i\varphi), \gamma_i\bar\varphi\rangle + \sum_i \langle D_i\varphi, \gamma_i\bar\varphi\rangle$$

avec $\gamma_i L\varphi = L\gamma_i\varphi + D_i\varphi$. D_i est donc d'ordre m-1. Soit $C_1 = \inf_i K_{\alpha_i}$ (K_{α_i} constantes définies par le théorème III pour le nombre fini d'ouverts 0_i). On a

$$\mathrm{Re} \sum_i \langle L(\gamma_i\varphi), \gamma_i\bar\varphi\rangle \geqslant C_1 \sum_i \|\gamma_i\varphi\|_\mu^2 .$$

La formule de Leibnitz montre que :

$$\sum_i \|\gamma_i\varphi\|_\mu^2 \geqslant \|\varphi\|_\mu^2 - C_2 \|\varphi\|_\mu \|\varphi\|_{\mu-1}$$

C_2 ne dépendant que de 0 et de la partition de l'unité β_i. On a aussi

$$\langle D_i\varphi, \gamma_i\bar\varphi\rangle = \sum \langle D_k\varphi, D_\ell\bar\varphi\rangle \quad \text{avec } k \leqslant \mu \quad \ell \leqslant \mu-1.$$

Il existe donc une constante C_3 ne dépendant pas de φ telle que :

$$\left|\sum_i \langle D_i\varphi, \gamma_\ell\bar\varphi\rangle\right| \leqslant C_3 \|\varphi\|_\mu \|\varphi\|_{\mu-1} .$$

Finalement on a :

$$\mathcal{R}\langle L\varphi, \bar\varphi\rangle \geqslant C_1 \|\varphi\|^2 - C_4 \|\varphi\|_\mu \|\varphi\|_{\mu-1}$$

avec $C_4 = C_1 C_2 + C_3$.

En prenant dans le lemme précédent $\varepsilon = \frac{C_1}{2C_4}$, il vient :

$$\mathcal{R}\langle L\varphi, \bar\varphi\rangle \geqslant \frac{C_1}{2} \|\varphi\|_\mu^2 - C_4 \eta \|\varphi\|_\mu \|\varphi\|_0$$

Or pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\|\varphi\|_\mu \|\varphi\|_0 \leqslant \frac{\alpha}{2} \|\varphi\|_\mu^2 + \frac{1}{2\alpha} \|\varphi\|_0^2$$

Prenons $\alpha = \frac{C_1}{2C_4\eta}$ $A = \frac{C_1}{4}$ $\lambda = \frac{C_4^2\eta^2}{C_1}$. On obtient :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(0) \qquad \mathcal{R}\langle L\varphi, \bar\varphi\rangle \geqslant A \|\varphi\|_\mu^2 - \lambda \|\varphi\|_0^2 .$$

Cette inégalité se généralise à $H_0^\mu(0)$. C.Q.F.D.

Corollaire. Application au problème de Dirichlet. $L + \lambda$ est un isomorphisme de $H_0^\mu(0)$ sur $H_0^{-\mu}(0)$ (avec les hypothèses du théorème précédent).

Démonstration. Si l'expression $\langle L\varphi, \bar{\varphi}\rangle$ est réelle, $\langle L\varphi + \lambda\varphi, \bar{\varphi}\rangle$ est une norme sur $H_o^m(O)$ équivalente à $\|\varphi\|_m$ et il suffit de considérer $H_o^m(O)$ muni du produit scalaire $\|f,g\| = \langle Lf + \lambda f, \bar{g}\rangle$ et d'appliquer le théorème de représentation d'une forme linéaire continue dans un espace de Hilbert (même démonstration que celles des th. 5 et 6 du ch. I pour Δ). Exemple : $L = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}) + C$ avec (a_{ij}) matrice hermitienne positive.

Plus généralement on utilise :

Lemme. Soit B un espace de Banach réflexif muni d'une involution isométrique $x \longrightarrow \bar{x}$. Soit u une application linéaire fortement continue de B dans son dual B' telle qu'il existe une constante C donnant lieu à l'inégalité :

$$\mathcal{R}\langle u(x), \bar{x}\rangle \geqslant C\|x\|^2$$

Alors u est un isomorphisme de B sur B'.

Démonstration du lemme. On a :

$$C\|x\|^2 \leqslant \mathcal{R}\langle u(x), \bar{x}\rangle \leqslant \|u(x)\| \, \|\bar{x}\|$$

d'où :

$$\|u(x)\| \geqslant C\|x\| .$$

Ce qui montre que u est injective et que $u(B)$ est une partie complète donc fermée dans B'.

Supposons que $u(B)$ soit distinct de B', l'hypothèse que B est réflexif permet de trouver dans B un x non nul orthogonal à $u(B)$, alors :

$$0 = \mathcal{R}\langle u(\bar{x}), x\rangle \geqslant C\|x\|^2 \qquad \text{soit} \qquad \|x\| = 0$$

ce qui est absurde. C.Q.F.D.

Ce lemme est en particulier applicable dans un espace de Hilbert. $L + \lambda$ est une application continue de $H_o^{\mu}(O)$ dans $H^{-\mu}(O)$ (voir th. I Ch. II). Elle vérifie : $\mathcal{R}\langle (L + \lambda)(\varphi), \bar{\varphi}\rangle \geqslant A\|\varphi\|_{\mu}^2$. Nous sommes dans les conditions d'applications du lemme précédent d'où le corollaire. C.Q.F.D.

II.3. Application de la théorie des opérateurs compacts.

Nous avons entièrement résolu le problème de Dirichlet pour l'opérateur $L+\lambda$ (L fortement elliptique, λ suffisamment grand pour vérifier l'inégalité de Gårding). Nous allons voir maintenant ce qui se passe pour l'opérateur L et plus généralement pour $L+\lambda'$ (λ' complexe quelconque). Nous utiliserons pour cela des résultats de la "théorie des opérateurs compacts" (voir appendice).

Théorème V. Soit O un ouvert borné de R^n; pour tout entier m positif ou nul, l'injection canonique de $H_o^{m+1}(O)$ dans $H_o^m(O)$ est compacte.

Démontrons d'abord les deux lemmes.

Lemme I (Weil). Pour qu'un ensemble Φ de fonctions appartenant à $L^2(R^n)$ et de support dans un compact fixe K, soit relativement compact dans L^2, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées

1º) Φ borné dans $L^2(R^n)$ (c'est à dire qu'il existe une constante M telle que pour tout φ de Φ $\|\varphi\|_o \leqslant M$).

2º) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta$ telle que $|h| \leqslant \eta \Longrightarrow \|\tau_h\varphi-\varphi\|_o \leqslant \varepsilon \quad \forall \varphi \in \Phi$, avec $h=(h_1, \dots, h_n)$ $h_i \in R$

$$\tau_h \varphi(x) = \varphi(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n).$$

Démonstration du lemme I.

Conditions nécessaires. Φ est relativement compact, il est donc borné dans L^2. Considérons les applications de L^2 dans L^2 : $\varphi \longrightarrow \tau_h\varphi - \varphi$. Elles sont équicontinues ($\|\tau_h\varphi - \varphi\|_o \leqslant 2\,\|\varphi\|_o$) et convergent simplement vers 0, quand h tend vers 0, dans l'ensemble des fonctions continues à support compact, qui est dense dans $L^2(R^n)$. Elles convergent donc simplement vers 0 dans $L^2(R^n)$. Par conséquent, elles convergent uniformément vers 0, sur tout ensemble relativement compact de L^2, et, en particulier sur Φ. Ce qui démontre 2º).

Conditions suffisantes. Montrons que l'on peut recouvrir Φ dans L^2 par un nombre fini de boules de rayon ε arbitraire, ce qui démontre que Φ est relativement compact.

Soit θ_p une suite de fonctions de $\mathcal{D}(R^n)$ telles que : $\int \theta_p = 1$ et $\theta_p(x) = 0$ pour $\|x\| \geqslant \frac{1}{p}$. Supposons p_o assez grand pour que :

$$\forall \varphi \in \Phi \qquad |t| \leqslant \frac{1}{p_o} \Longrightarrow \|\tau_t \varphi - \varphi\|_o \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Alors on a :

$$(\theta_{p_o} * \varphi - \varphi)(x) = \int \theta_{p_o}(t)(\varphi(x-t) - \varphi(x))dt$$

et pour tout $\psi \in L^2(R^n)$:

$$(\theta_{p_o} * \varphi - \varphi / \bar{\psi}) = \int \theta_{p_o}(t)dt \int (\varphi(x-t) - \varphi(x))\, \psi(x)dx$$

$$\leqslant \|\tau_t \varphi - \varphi\|_o \, \|\psi\|_o \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|\psi\|_o$$

(en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwar~~t~~z).

Soit : $\|\theta_{p_o} * \varphi - \varphi\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Considérons les fonctions $\theta_{p_o} * \varphi$ (p_o fixe, $\varphi \in \Phi$), elles gardent leur support dans un compact fixe K_o et elles sont uniformément équicontinues, en effet :

$$|\tau_h(\theta_{p_o} * \varphi) - \theta_{p_o} * \varphi| = |(\tau_h \theta_{p_o} - \theta_{p_o}) * \varphi| \leqslant \|\tau_h \theta_{p_o} - \theta_{p_o}\|_o \, \|\varphi\|_o$$

$$\leqslant \|\tau_h \theta_{p_o} - \theta_{p_o}\|_o \, M .$$

Enfin, elles sont bornées dans L^∞, puisque :

$$\|\theta_{p_o} * \varphi\|_\infty = \sup_x |\theta_{p_o} * \varphi| \leqslant \|\theta_{p_o}\|_o \, \|\varphi\|_o \leqslant \|\theta_{p_o}\|_o \, M.$$

Elles forment donc, d'après le théorème d'Ascoli, une famille relativement compacte dans $L^\infty(K_o)$. Il existe donc, un nombre fini de fonctions φ_i de $L^\infty(K_o)$ telles que :

$$\forall \varphi \in \Phi \quad \exists i \quad \text{tel que : } \|\theta_{p_o} * \varphi - \varphi_i\|_{L^\infty} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{2v(K_o)}}$$

$v(K_o)$ désignant le volume de K_o

On aura alors : $\|\theta_{p_o} \varphi * \varphi_i\|_o \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ d'où :

$$\forall \varepsilon, \ \forall \varphi \in \Phi, \ \exists_i \ \text{tel que} \ \|\varphi - \varphi_i\|_o \leqslant \|\varphi - \theta_{p_o} * \varphi\|_o + \|\theta_{p_o} * \varphi - \varphi_i\|_o \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

C.Q.F.D.

<u>Lemme</u> II. <u>Pour qu'un ensemble Φ de fonctions appartenant à $H^m(R^n)$ ($m \geqslant 0$) et de support dans un compact fixe soit relativement compact dans $H^m(R^n)$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :</u>

1º) Φ borné dans $H^m(R^n)$

2º) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta$, tel que $|h| \leqslant \eta \Longrightarrow \|\tau_h \varphi - \varphi_m\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varphi \in \Phi$.

Ce lemme découle du précédent en considérant $H^m(R^n)$ comme sous espace fermé de $\left[L^2(R^n)\right]^M$, M étant le nombre des multi entiers $p = (p_1, \ldots, p_n)$ avec $|p| \leqslant m$ (voir démonstration du th. I ch. II). C.Q.F.D.

Démonstration du théorème V. Appliquons le lemme précédent et montrons que l'ensemble Φ des φ de $H_o^{m+1}(0)$ telles que $\|\varphi\|_{m+1} \leqslant 1$ vérifient les conditions 1º) et 2º) de ce lemme dans $H^m(R^n)$. En effet, de telles fonctions peuvent être prolongées par 0 en dehors de leur support et appartiennent alors à $H^m(R^n)$. Elles gardent leur support dans un compact fixe $\bar{0}$.

Le 1º) est immédiatement vérifié.

Vérifions le 2º). Prenons $h = (h_1, 0, \ldots, 0)$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(0)$, on a :

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = \int_o^{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x + t)dt$$

d'où : $|\varphi(x + h) - \varphi(x)|^2 \leqslant h \int \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right|^2 dx_1$ (Cauchy-Schwarz).

Soit A le diamètre de 0 :

$$\int |\varphi(x + h) - \varphi(x)|^2 \, dx_1 \leqslant Ah \int \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right|^2 dx_1$$

et

$$\int |\varphi(x + h) - \varphi(x)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n \leqslant A\, h \int \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right|^2 dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

soit

$$\|\tau_h \varphi - \varphi\|_o \leqslant \sqrt{A|h|} \, \|\varphi\|_1$$

et pour m et h quelconques, on démontre de même :

$$\|\tau_h \varphi - \varphi\|_m \leqslant \sqrt{2\, A|h|} \, \|\varphi\|_{m+1}$$

Par passage à la limite, cette inégalité est vraie aussi pour $\varphi \in H_o^m(0)$.

Pour $\varphi \in \Phi$, on a donc

$$\|\tau_h \varphi - \varphi\|_m \leqslant C \, \sqrt{|h|} \quad \text{avec} \quad C = \sqrt{2\, A}$$

Le 2º) est donc vérifié. C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>. <u>L'injection de</u> $H_o^{\mu}(0)$ <u>dans</u> $H^{-\mu}(0)$ <u>est compacte</u> $(\mu \geqslant 1)$.

En effet, elle est la composée des deux injections $H_o^{\mu}(0) \longrightarrow H_o^{\mu-1}(0) \longrightarrow H^{-\mu}(0)$. La première est compacte d'après le théorème précédent. La 2ème est fortement continue, puisque si $\varphi \in H_o^{\mu-1}$ et $\psi \in H_o^{\mu}$: $\left|\int \varphi \cdot \psi\right| \leqslant \|\varphi\|_o \|\psi\|_o \leqslant \|\varphi\|_{\mu-1} \|\psi\|_{\mu}$ d'où $\|\varphi\|_{-\mu} \leqslant \|\varphi\|_{\mu-1}$.

La composée de ces deux injections est donc compacte. C.Q.F.D.

Appliquons ces résultats, dans les hypothèses de l'inégalité de Gårding, en utilisant le théorème suivant de la théorie des opérateurs compacts (cf. appendice).

Soient E_1 et E_2 deux espaces de Banach, u une application compacte de E_1 dans E_2 et v un isomorphisme de E_1 sur E_2. Alors $W_{\lambda} = \lambda u + v$ $(\lambda \in C)$ est un homomorphisme de E_1 dans E_2 tel que : dim(noyau W_{λ}) = codim(image W_{λ}) $= d_{\lambda}$; d_{λ} est toujours fini et $d_{\lambda} = 0$ sauf pour un ensemble discret de valeurs de λ.

<u>Théorème</u> VI. <u>Soient</u> L <u>un opérateur fortement elliptique dans</u> Ω, <u>d'ordre</u> $m = 2\mu$, <u>et</u>, O <u>un ouvert relativement compact dans</u> Ω. <u>Pour tout nombre complexe</u> λ', $L + \lambda'$ <u>est un homomorphisme de</u> $H_o^{\mu}(0)$ <u>dans</u> $H^{-\mu}(0)$, <u>ayant un noyau de dimension finie</u>, <u>une image de codimension finie et ces deux nombres sont égaux</u> ; <u>ils sont nuls sauf pour un ensemble discret de valeurs de</u> λ'.

Le théorème est immédiat en appliquant les corollaires des théorèmes 4 et 6 (ch. II) et en écrivant : $L + \lambda' = L + \lambda + (\lambda' - \lambda)$ (λ donné par l'inégalité de Gårding).

Ce résultat est, en particulier, applicable pour résoudre le problème de Dirichlet pour L.

Appendice. Opérateurs compacts

Nous ne démontrerons pas ici les résultats les plus généraux sur les opérateurs compacts, mais seulement ceux que nous avons eu à utiliser.

Commençons par un lemme algébrique.

Soit E un espace vectoriel, et v un endomorphisme de E. Soit E_n le noyau de v^n, et F_n son image. Alors :

a) ou bien la suite des sous espaces E_n est strictement croissante, ou bien cette suite est strictement croissante jusqu'à un certain rang μ à partir duquel elle est stationnaire.

b) ou bien la suite F_n est strictement décroissante ou bien elle est strictement décroissante jusqu'à un certain rang ν à partir duquel elle est stationnaire.

c) Si μ et ν existent, $\mu = \nu$: E est somme directe de E_μ et F_μ ; v est nilpotent dans E_μ et c'est un automorphisme de F_μ.

En effet, la suite E_n est visiblement croissante, et on a $E_{n+1} = v^{-1}(E_n)$; si donc $E_n = E_{n+1}$, on a $E_{n+2} = v^{-1}(E_{n+1}) = v^{-1}(E_n) = E_{n+1}$; d'où $E_p = E_n$ pour $p \geqslant n$, ce qui démontre a).

On démontre b) de la même manière, en remarquant que $F_{n+1} = v(F_n)$.

Supposons maintenant les deux suites stationnaires. Montrons d'abord qu'on a $\mu \leqslant \nu$. Sinon, on aurait

$$\begin{cases} E_{\mu-1} \neq E_\mu = E_{\mu+1} \\ F_{\mu-1} = F_\mu \end{cases}$$

Par suite, $\forall x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $v^{\mu-1} x = v^\mu y$, d'où $x - vy \in E_{\mu-1}$.

Prenons $x \in E_\mu$, $x \notin E_{\mu-1}$; on a : $v^\mu x = v^{\mu+1} y = 0$ d'où $v^\mu y = 0$ et $vy \in E_{\mu-1}$; donc $x \in E_{\mu-1}$, ce qui est absurde.

D'une manière analogue, si l'on avait $\mu < \nu$, on aurait

$$\begin{cases} E_{\nu-1} = E_\nu \\ F_{\nu-1} \neq F_\nu = F_{\nu+1} \end{cases}$$

Soit $x \in F_{\nu-1}$, $x \notin F_\nu$; il existe y tel que $x = v^{\nu-1}y$; on a $vx \in F_\nu = F_{\nu+1}$, donc il existe z tel que $vx = v^\nu y = v^{\nu+1}z$; donc $y - vz \in E_\nu = E_{\nu-1}$, et $x = v^{\nu-1} y = v^\nu z$; donc $x \in F_\nu$, ce qui est absurde. On a donc $\mu = \nu$.

Montrons enfin c) ; il suffit d'établir que E est somme directe de E_μ et de F_μ. Posons $v^\mu = w$; $\forall x \in E$, $\exists y \in E$ vérifiant $wx = w^2y$, d'où $x - wy \in E_\mu$; donc E_μ et F_μ engendrent E ; soit maintenant $x \in E_\mu \cap F_\mu$; on a $x = wy$ et $wx = 0$; donc $w^2y = 0$; d'où $wy = x = 0$ et $E_\mu \cap F_\mu = \{0\}$. C.Q.F.D.

<u>Définition</u>. <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach</u> ; <u>une application linéaire continue de</u> E <u>dans</u> F <u>est dite compacte si l'usage de la boule unité</u> B <u>de</u> E <u>est relativement compacte dans</u> F.

Remarque. Si E est réflexif, il revient au même de dire que u est continue de B faible dans F fort ; en effet, si $u(B)$ est relativement compact dans F, la topologie faible et la topologie forte coincident sur $u(B)$: comme u est continue de E faible dans F faible, u est continue de B faible dans F fort (ceci ne suppose pas la reflexivité de E) ; réciproquement, si u est continue de B faible dans F fort, et si E est réflexif, B est faiblement compact, donc $u(B)$ est compact ; u est une application compacte.

Dans toute la suite, les termes "continu", compact", etc... sont entendus au sens de la topologie forte.

<u>Théorème</u> 1. <u>Soit</u> u <u>un endomorphisme compact d'un espace de Banach</u> E ; <u>l'endomorphisme</u> $v = I + u$ <u>est un homomorphisme et son noyau est de dimension finie</u>.

Soit E_1 le noyau de v, pour $x \in E_1$, on a $x = -u(x)$; donc $B \cap E_1$ est compact E_1 étant un espace de Banach, est de dimension finie.

Soit H un supplémentaire de E_1 dans E ; E est isomorphe à $E_1 \oplus H$; pour démontrer le théorème, il suffit donc d'établir ceci : si une suite x_p de points de $B \cap H$ vérifie $v(x_p) \longrightarrow 0$, on a $x_p \longrightarrow 0$. Comme $x_p = v(x_p) - u(x_p)$, il suffit de démontrer que $u(x_p) \longrightarrow 0$; si cette assertion était fausse, il existerait une suite extraite x_{p_q} telle que la suite $u(x_{p_q})$ converge vers $y \neq 0$; comme $x_p + u(x_p) \longrightarrow 0$, les x_{p_q} convergeraient vers $-y$; et l'on aurait $v(y) = y + u(y) = 0$, $y \in H$; d'où $y = 0$, ce qui est absurde.

Dans l'énoncé suivant, nous gardons les hypothèses du théorème 1. Remarquons que ce théorème s'applique à $v^n = (I + u)^n$ puisque (formule du binôme) $v^n = I + u_n$, u_n étant compact.

<u>Théorème 2. Les notations étant celles du lemme algébrique, les suites</u> E_n <u>et</u> F_n <u>sont stationnaires.</u>

Supposons d'abord que la suite E_n ne soit pas stationnaire ; on a alors, $\forall n$: $E_{n-1} \neq E_n$. Comme E_n est trivialement fermé, il existe $x_n \in E_n \cap B$ véfifiant $d(x_n , E_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$.

Pour $m < n$, on a $u(x_n) - u(x_m) = x_n + v(x_n) - x_m - v(x_m) \in x_n + E_{n-1}$, donc $\|u(x_n) - u(x_m)\| \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde puisque la suite x_n a un point d'accumulation.

Montrons maintenant que la suite F_n est stationnaire. D'après le théorème 1 appliqué à v^n, F_n est fermé. Si la suite F_n n'était pas stationnaire, on aurait $\forall n$: $F_n \neq F_{n+1}$; il existerait alors $x_n \in F_n \cap B$ vérifiant $d(x_n , F_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}$.

Pour $m > n$, on aurait $u(x_n) - u(x_m) = x_n + v(x_n) - x_m - v(x_m) \in x_n + F_{n+1}$ donc $\|u(x_n) - u(x_m)\| \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.

Des théorèmes précédents, et du lemme algébrique, on déduit aussitôt que $E_\infty = \bigcup E_n$ est de dimension finie, et que $F_\infty = \bigcap F_n$ est fermé ; en outre, E_∞ et F_∞ sont stables par u et v induit un isomorphisme de F_∞ sur lui-même. On en déduit trivialement les résultats que nous avons utilisés au chapitre II, théorème VI (aux notations près).

a) $\dim v^{-1}(0) = \operatorname{codim} v(E)$ (puisque $v(E) = F_{\infty} \oplus v(E_{\infty})$, on est ramené à établir ce résultat dans E_{∞}, qui est un espace de dimension finie !).

b) Si $\lambda' \in C$ est assez voisin de 1, et si $\lambda' \neq 1$, l'endomorphisme $I + \lambda' u$ est un isomorphisme $E \longrightarrow E$ (en effet, il induit un isomorphisme sur E_{∞} puisque E_{∞} est de dimension finie, et il induit un isomorphisme sur F_{∞}, puisqu'il est "assez voisin" d'un isomorphisme). En appliquant ce résultat à λu au lieu de u $(\lambda \in C)$, on voit que l'ensemble des λ' pour lesquels $I + \lambda' u$ n'est pas un isomorphisme est <u>discret</u>.

CHAPITRE III

Opérateurs elliptiques - Régularité à l'intérieur

III - 1 - Espaces $H^m_c(\Omega)$, $H^m_\ell(\Omega)$.

Distinguons les deux cas : m entier positif et m entier négatif.

1er cas : $m \geqslant 0$

Définition I : $H^m_c(\Omega)$ est l'espace des distributions à support compact et appartenant à $H^m(\Omega)$.

On a donc : $H^m_c(\Omega) = \mathcal{E}'(\Omega) \cap H^m(\Omega) = \mathcal{E}'(\Omega) \cap H^m_o(\Omega) = \mathcal{E}'(\Omega) \cap H^m(R^n)$.

Si $\Omega \subset \Omega'$, on a évidem-ment $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\Omega')$, on en déduit $H^m_c(\Omega) \subset H^m_c(\Omega')$.

Si K désigne un compact de Ω, $H^m_c(K)$ est l'espace des distributions de $H^m_c(\Omega)$ à support dans K. $H^m_c(K)$ est un espace de Banach, sa norme étant $\| \quad \|_m$ (il est fermé dans $H^m(\Omega)$). Nous dirons qu'une suite (φ_p) d'éléments de $H^m_c(\Omega)$, à support dans un compact fixe K, converge vers 0, si elle converge vers 0 dans $H^m_c(K)$. (On munit, en fait, $H^m_c(\Omega)$ de la topologie limite inductive des Banach $H^m_c(K)$ en prenant une suite exaustive de compacts K).

Remarque 1. Dans $H^m(R^n)$, la norme $\|\varphi\|_m$ est équivalente à $\|\hat{\varphi}(\xi)(1+|\xi|^2)^{m/2}\|_{L^2}$ puisque :

$$\|\varphi\|^2_m = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k| \leqslant m} \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 |\xi^k|^2 \, d\xi .$$

On peut donc avoir la caractérisation :

$$(\varphi \in H^m(R^n)) \Longleftrightarrow (\varphi \in \mathcal{S}' \text{ et } \hat{\varphi}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \in L^2).$$

On en déduit :

$$(\varphi \in H^m_c(R^n)) \Longleftrightarrow (\varphi \in \mathcal{E}' \text{ et } \hat{\varphi}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \in L^2).$$

Définition II : $H^m_\ell(\Omega)$ est l'espace des distributions qui appartiennent localement à $L^2(\Omega)$, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m.

On a donc :

$$(\varphi \in H^m_\ell(\Omega)) \Longleftrightarrow (\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega) \; ; \; \forall \alpha \in \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \alpha\varphi \in H^m_c(\Omega)).$$

Si (θ_i) désigne un recouvrement localement fini de Ω par des ouverts relativement compacts, et (α_i) une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à ce recouvrement, on a évidemment :

$$(\varphi \in H^m_\ell(\Omega)) \Longleftrightarrow (\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ \forall i \quad \alpha_i f \in H^m_c(\Omega)).$$

Une suite (φ_p) de $H^m_\ell(\Omega)$ converge vers 0 si pour tout ouvert relativement compact $\mathcal{O}$ de Ω, $(\varphi_p \restriction \mathcal{O})$ convergent vers 0 dans $H^m(\mathcal{O})$. (En fait, on peut considérer une suite d'ouverts relativement compact $\mathcal{O}_\gamma$ tels que $\overline{\mathcal{O}_{\gamma-1}} \subset \mathcal{O}$ et tels que tout compact de Ω soit contenu, à partir de γ assez grand, dans $\mathcal{O}_\gamma$. On peut alors munir $H^m_\ell(\Omega)$ des semi normes : $\| \varphi \restriction \mathcal{O}_\gamma \|_m$. $H^m_\ell(\Omega)$ devient ainsi un espace de Fréchet).

Etudions les relations de ces espaces avec les espaces ordinaires de fonctions différentiables : on a évidemment :

$$\mathcal{D}^m(\Omega) \subset H^m_c(\Omega) \qquad\qquad \mathcal{E}^m(\Omega) \subset H^m_\ell(\Omega).$$

Théorème I : (Cas particulier du lemme de Sobolev).

1º) Si λ est un entier positif tel que $\lambda > \frac{n}{2}$, on a : $H^{m+\lambda}_c(\Omega) \subset \mathcal{D}^m(\Omega)$ et $H^{m+\lambda}_\ell(\Omega) \subset \mathcal{E}^m(\Omega)$ pour tout entier m positif.

2º) On a : $H^\infty_c(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ et $H^\infty_\ell(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$. [On pose $H^\infty_c(\Omega) = \bigcap\limits_{m \geqslant 0} H^m_c(\Omega)$, et $H^\infty_\ell(\Omega) = \bigcap\limits_{m \geqslant 0} H^m(\Omega)$].

Démonstration :

1º) Soit $\varphi \in H^{m+\lambda}_c(\Omega)$ pour $|\ell| \leqslant m$, démontrons que $D^\ell \varphi$ est continue. On a :

$$\xi^\ell \hat{\varphi} = \frac{\xi^\ell}{(1+|\xi|^2)^{m+\lambda/2}} \hat{\varphi}(1+|\xi|^2)^{\frac{m+\lambda}{2}}$$

or $\dfrac{\xi^\ell}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m+\lambda}{2}}} \leqslant \dfrac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\lambda}{2}}} \in L^2 \quad (\lambda > \frac{n}{2})$ et $\hat{\varphi}(1+|\xi|^2)^{\frac{m+\lambda}{2}} \in L^2$ (voir remarque I)

$\xi^\ell \hat{\varphi}$ est donc intégrable ;

$$D^\ell \varphi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int (-i\xi)^\ell e^{ix.\xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

est donc continue.

On en déduit sans difficulté la démonstration pour $H^{m+\lambda}_\ell(\Omega)$.

2º) Application directe du 1º.

<u>2ème cas</u> : $m < 0$

<u>Définition</u> III : $H_c^m(\Omega)$ <u>est l'espace des distributions à support compact appartenant à</u> $H^m(\Omega)$.

On a donc : $$H_c^m(\Omega) = H^m(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega).$$

$H_c^m(\Omega)$ est un sous espace de $H^m(R^n) = [H^{-m}(R^n)]'$. En effet, si $\varphi \in H_c^m(\Omega)$, $f \in H^{-m}(R^n)$, prenant $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 sur le support de φ et en posant :

$$\langle \varphi , f \rangle = \langle \varphi , \alpha f \rangle$$

on définit une forme linéaire continue sur $H^{-m}(R^n)$ indépendante de α.

On en déduit : $$H_c^m(\Omega) = \mathcal{E}'(\Omega) \cap H^m(R^n)$$

et, par suite, si $\Omega \subset \Omega'$; on a :

$$H_c^m(\Omega) \subset H_c^m(\Omega').$$

De la caractérisation de $H^{-m}(R^n)$ par la transformation de Fourier (Remarque 1), on déduit :

$$(\psi \in H^m(R^n)) \Longleftrightarrow (\varphi \in \mathcal{S}' \text{ et } \hat{\varphi}(1+|\xi|^2)^{m/2} \in L^2) \quad (m < 0)$$

puisque si $\varphi \in H^{-m}(R^n)$, on a :

$$\langle \hat{\varphi} , \bar{\hat{\varphi}} \rangle = \int \hat{\varphi} . \bar{\hat{\varphi}} d\xi = \int \hat{\varphi}(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \bar{\hat{\psi}}(1+|\xi|^2)^{-\frac{m}{2}} d\xi$$

et, on en déduit les deux caractérisations :

$$(\varphi \in H_c^m(R^n)) \Longleftrightarrow \{\varphi \in \mathcal{E}' \text{ et } \hat{\varphi}(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \in L^2)$$

$$(\varphi \in H_c^m(\Omega)) \Longleftrightarrow (\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega) \text{ et } \hat{\varphi}(1+|\xi|^2)^{m/2} \in L^2)$$

Nous pouvons définir aussi $H_c^m(K)$ (K compact) comme étant égal à $\mathcal{E}'(K) \cap H^m(\Omega)$ où Ω est un ouvert quelconque contenant K. $H_c^m(K)$ est un espace de Banach. On peut, en effet, définir dans cet espace deux normes équivalentes :

a) norme induite par $H^m(\Omega)$

($H_c^m(K)$ est alors fermée dans $H^m(\Omega)$)

b) norme définie par la transformation de Fourier, en prenant :

$$\| \hat{\varphi}(1+|\xi|^2)^{m/2} \|_{L^2}$$

$H_c^m(\Omega)$ peut être muni de la topologie limite inductive des $H_c^m(K)$.

Remarque 2 : Si $f \in H_c^m(\Omega)$, elle peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{|\ell| \leqslant -m} D^\ell g_\ell$$

où les g_ℓ sont des distributions appartenant à $L^2(\Omega)$ à support dans un voisinage arbitraire du support de f.

En effet, nous savons que f s'écrit : (théorème I ch. II)

$$f = \sum_{|\ell| \leqslant -m} D^\ell h_\ell \qquad h_\ell \in L^2(\Omega)$$

Soit $\beta \in \mathcal{D}(\Omega)$, valant 1 sur le support de f (qui est compact). On a : $\beta f = f = \sum \beta D^\ell h_\ell$. En utilisant la formule de Leibnitz, on peut écrire :

$$\beta D^\ell h_\ell = \sum \lambda_{r,s} D^r((D^s \beta) h_\ell) \qquad (\lambda_{r,s} \text{ des constantes})$$

les $(D^s \beta) h_\ell$ sont bien à support compact contenu dans le support de β.

Par ailleurs, on vérifie facilement ceci : si $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $f \in H_c^m(\Omega)$ alors $\alpha f \in H_c^m(\Omega)$.

Cela justifie la définition suivante :

Définition IV : $H_\ell^m(\Omega)$ est l'espace des distributions f appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ et telles que pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\alpha f \in H_c^m(\Omega)$ $(m < 0)$.

Définition IV bis : $H_\ell^m(\Omega)$ est l'espace des distributions de la forme

$$\sum_{|\ell| \leqslant -m} D^\ell g_\ell \quad \text{avec} \quad g_\ell \in L_\ell^2(\Omega) \ (= H_\ell^0(\Omega))$$

La définition IV entraine IV bis. Considérons en effet une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement localement fini de Ω. $f = \sum_i \alpha_i f_i$ $\quad \alpha_i f \in H_c^m(\Omega)$; donc

$$\alpha_i f = \sum_{|\ell| \leqslant -m} D^\ell g_{i\ell}$$

les $g_{i\ell}$ appartenant à L^2 et ayant un support arbitrairement voisin du support de α_i (Remarque 2). En posant $\quad g_\ell = \sum_i g_{i\ell}$, on a :

$$f = \sum_{|\ell| \leqslant -m} D^\ell g_\ell \quad \text{avec} \quad g_\ell \in H_\ell^0(\Omega).$$

Il est facile de voir que la définition IV bis entraine IV (raisonner comme à la remarque 2). Indiquons enfin, que $H^m_\ell(\Omega)$ $(m < 0)$ peut être muni d'une topologie de Fréchet. Il est le dual de $H^{-m}_c(\Omega)$.

Comme dans le cas $m > 0$, indiquons brièvement quelques relations entre ces espaces et les espaces de distributions ordinaires.

Nous avons évidemment : $\mathcal{D}'^{-m} \supset H^m_\ell(\Omega)$ $(m < 0)$

(puisque $\mathcal{D}'^{-m}$ est l'espace des sommes finies de dérivées d'ordre $\leqslant -m$ de mesures).

On a de même : $H^m_\ell(\Omega) \supset \left\{ \sum\limits_{\text{fini}} \text{dérivées d'ordre } \leqslant -m \text{ de fonctions continues} \right\}$.

D'après ces deux inclusions, et, ce qu'on connait sur les distributions d'ordre fini, on déduit : $\bigcup\limits_{m<0} H^m_\ell(\Omega) = \underline{H^{-\infty}_\ell(\Omega) = \mathcal{D}'^F(\Omega)}$ (distributions d'ordre fini)

En appliquant le théorème I (lemme de Sobolev) et en utilisant la dualité de $H^m_\ell(\Omega)$ et $H^{-m}_c(\Omega)$ on obtient :

$$\underline{\mathcal{D}'^{-m}(\Omega) \subset H^{m-\lambda}_\ell(\Omega) \quad \text{si} \quad \lambda > \frac{n}{2}.}$$

Signalons enfin, que les définitions données pour $m \geqslant 0$ et $m < 0$ sont convenables pour $m = 0$ et coïncident (cela résulte imméidatement du fait que $L^2(\Omega)$ est son propre dual).

III - 2 - <u>Régularité à l'intérieur pour</u> $\Delta - 1$.

<u>Théorème</u> II : <u>Si</u> f <u>est une distribution appartenant à</u> $\mathcal{D}'(\Omega)$ <u>telle que</u> $(\Delta - 1)f \in H^k_\ell(\Omega)$, <u>alors</u>, $f \in H^{k+2}_\ell(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : Elle se fait en deux étapes.

<u>1ère étape</u>. Ajoutons l'hypothèse : f à support compact. On a : $(\Delta - 1)f \in H^k_c(\Omega)$

soit : (voir III - 1) $$(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \widehat{(\Delta - 1)f} \in L^2$$

ou encore : $$(1 + |\xi|^2)^{k/2}(1+|\xi|^2)\hat{f} \in L^2$$

et on a bien $$f \in H^{k+2}_c(\Omega).$$

Le théorème est démontré dans ce cas.

<u>2ème étape</u>. Démontrons d'abord le :

<u>Lemme</u> : <u>Soit</u> Θ <u>un ouvert de</u> R^n, $f \in \mathcal{D}'(0)$ <u>telle que</u>

$$\exists\, s \in Z \qquad f \in H_\ell^s(\Theta)$$

$$\exists\, k \in Z \qquad (\Delta - 1)f \in H_\ell^k(\Theta)$$

<u>alors</u> $f \in H_\ell^{k+2}(\Theta)$.

<u>Démonstration du lemme</u> :

Si $s \geqslant k+2$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $s-1 \leqslant k$. Pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(\Theta)$ on a :

$$(\Delta - 1)(\alpha f) = \alpha(\Delta - 1)f + g$$

avec

$$g = 2 \sum_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i^2} f$$

$g \in H_c^{s-1}(\Theta)$; $\alpha(\Delta - 1)f \in H_c^k(\Theta)$: On en déduit $(\Delta - 1)(\alpha f) \in H_c^{s-1}(0)$ et d'après la 1ère étape :

$$\alpha f \in H_c^{s+1}(\Theta), \qquad \text{soit} \qquad f \in H^{s+1}(\Theta).$$

Si $s + 1 = k + 2$, le lemme est démontré. Sinon, on applique de nouveau le résultat obtenu. Le lemme est donc démontré par récurrence. C.Q.F.D.

<u>Démonstration du théorème</u> II.

Démontrons que pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\alpha f \in H_c^{k+2}(\Omega)$. Soit donc un tel α et Θ un voisinage du support de α, relativement compact dans Ω. f considérée comme distribution dans Θ est d'ordre fini. Il existe donc s, tek que $f \in H_\ell^s(\Theta)$, on a $(\Delta - 1)f \in H_\ell^k(\Theta)$ (puisque $\Theta \subset \Omega$). Nous sommes donc dans les conditions d'application du lemme précédent ; soit : $f \in H_\ell^{k+2}(\Theta)$ et $\alpha f \in H_c^{k+2}(\Theta) \subset H_c^{k+2}(\Omega)$ (voir III - 1) α étant quelconque dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a bien $f \in H_\ell^{k+2}(\Omega)$. C.Q.F.D.

<u>Théorème II bis</u>. <u>Le théorème</u> II <u>reste vrai en remplaçant</u> Δ <u>par un opérateur</u> L <u>de la forme</u> :

$$L = \Delta + D$$

<u>où</u> D <u>est un opérateur du premier ordre à coefficients indéfiniment dérivables</u>.

<u>Démonstration</u> :

On a :

$$Lf = (\Delta - 1)f + (D + 1)f.$$

Soient $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$ et θ un ouvert relativement compact dans Ω, contenant le support de α. Il existe s, tel que $f \in H^s_\ell(\theta)$. Supposons $s-1 \leqslant k$. On a :

$$Lf \in H^k_\ell(\theta) \qquad , \qquad (D+1)f \quad H^{s-1}(0)$$

d'où : $(\Delta - 1)f \in H^{s-1}_\ell(0)$ et, d'après le théorème II $f \in H^{s+1}_\ell(\theta)$. Le raisonnement peut être continué par récurrence ; on a : $f \in H^{k+2}_\ell(\theta)$. D'où :

$$\alpha f \in H^{k+2}_c(\theta) \subset H^{k+2}_c(\Omega)$$

$$\text{et} \qquad f \in H^{k+2}_\ell(\Omega). \qquad\qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Application : En appliquant les théorèmes précédents nous pouvons énoncer :

Toute distribution harmonique est indéfiniment dérivable : c'est donc une fonction harmonique ordinaire.

Toute distribution S vérifiant $\frac{\partial S}{\partial x} + i \frac{\partial S}{\partial y} = 0$ est une fonction holomorphe au sens ordinaire.

III - 3. Régularité à l'intérieur pour un opérateur elliptique.

Soient Ω un ouvert de R^n et L un opérateur différentiel

$$L = \sum_{|k| \leqslant m} a_k(x) D^k \qquad \text{avec} \qquad a_k \in \mathcal{E}(\Omega)$$

Définition V : L est appelé opérateur elliptique si : $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in R^n$ $(\xi \neq 0)$ on a :

$$\sum_{|k|=m} a_k(x) \xi^k \neq 0.$$

On voit que tout opérateur fortement elliptique (ch. II définition IV) est elliptique. La réciproque est fausse : par exemple, les opérateurs $i\Delta$ et $\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$ sont elliptiques et ne sont pas fortement elliptiques.

Si L est un opérateur différentiel on définit l'opérateur L^*, qu'on appelle opérateur adjoint de Lagrange de L, par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \langle L^*\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \overline{L\psi} \rangle .$$

Si L est elliptique, l'opérateur L^*L est fortement elliptique. En effet, si $Lf = a(x)D^k f$, $L^*(f(x)) = (-1)^k D^k(\bar{a}(x) f(x))$; donc, pour L quelconque

$$L^* = \sum_{|k|=m} (-1)^m \overline{a_k(x)}\, D^k + H \qquad (\text{ordre } H < m)$$

et,
$$L^*L = (-1)^m \sum_{\substack{|k'|=m \\ |k''|=m}} a_{k'}\, \overline{a_{k''}}\, D^{k'+k''} + M$$

(ordre $M < 2m$). Le polynome qui lui est associé est donc :

$$(-1)^m \Big|\sum_{|k|=m} a_k \xi^k\Big|^2$$

Ce qui prouve qu'il est bien fortement elliptique.

D'après le théorème III du ch. II on a : $\forall \alpha \in \Omega$, $\exists\, \theta_\alpha$ (voisinage de α) $\exists\, C_\alpha$ tels que $\forall \varphi \in H_0^m(\theta_\alpha)$ on ait : $\langle L^*L\varphi, \bar{\varphi}\rangle \geqslant C_\alpha \|\varphi\|_m^2$

soit
$$\|L\varphi\|_0^2 \geqslant C_\alpha \|\varphi\|_m^2 .$$

Nous pouvons donc énoncer.

<u>Théorème</u> III (<u>Friedrichs</u>). <u>Si</u> L <u>est un opérateur elliptique d'ordre</u> m <u>dans</u> Ω, <u>pour tout</u> $\alpha \in \Omega$, <u>il existe un voisinage</u> θ_α <u>de</u> α <u>et une constante</u> C_α <u>tels que, pour tout</u> $\varphi \in H_0^m(O_\alpha)$ <u>on ait</u> :

$$\|L\varphi\|_0 \geqslant C_\alpha \|\varphi\|_m .$$

(Ce théorème a été démontré historiquement avant l'inégalité de G̊arding).

N ous arrivons maintenant au théorème fondamental de régularité à l'intérieur :

<u>Théorème</u> IV. <u>Si</u> L <u>est un opérateur elliptique d'ordre</u> m <u>dans</u> Ω, <u>et</u> f <u>une distribution dans</u> Ω <u>telle que</u> $g = Lf \in H_\ell^k(\Omega)$, <u>alors</u> $f \in H_\ell^{m+k}(\Omega)$.

<u>Démonstration</u>. Elle se fera en deux étapes.

<u>1ère étape</u>. Démonstration du théorème avec les hypothèses supplémentaires : $f \in H_\ell^m(\Omega)$ et k entier > 0. Nous distinguerons, au cours de cette étape, les trois cas suivants :

a) $k = 1$, f à support compact petit

b) $k = 1$, f à support quelconque

c $k > 0$ quelconque

a) Lemme I : En ajoutant les hypothèses suivantes, à celle du théorème IV : $k = 1$, $f \in H_c^m(\mathcal{O}_\alpha)$ on a : $f \in H_c^{m+1}(\mathcal{O}_\alpha)$.

($\mathcal{O}_\alpha$ étant l'un des ouverts donnés par le théorème III).

Démonstration du lemme I.

Démontrons que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in H_o^m(\mathcal{O}_\alpha)$ $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit $i = 1$, par exemple.

Posons : $(\tau_h f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 + h, x_2, \dots, x_n)$.

On a : $\tau_h(Lf) - Lf = (\tau_h L)(\tau_h f) - Lf$

$$= (\tau_h L - L)(\tau_h f) + L(\tau_h f - f).$$

Soit :
$$L\left(\frac{\tau_h f - f}{h}\right) = \frac{\tau_h g - g}{h} - \left(\frac{\tau_h L - L}{h}\right)\tau_h f$$

$g \in H_c^1(\mathcal{O}_\alpha)$, on en déduit que $\dfrac{\tau_h g - g}{h}$ est borné dans $H^0(\mathcal{O}_\alpha)$ quand h varie et reste assez petit. [On pourra d'abord le montrer pour une fonction φ de $\mathcal{D}(\mathcal{O}_\alpha)$:

$$\frac{\varphi(x_1+h, x_2 \dots x_n) - \varphi(x_1 \dots x_n)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1+t, x_2 \dots x_n)dt$$

si $\psi \in H^0(\mathcal{O}_\alpha)$ on a, en appliquant Fubini :

$$\left\langle \frac{\tau_h \varphi - \varphi}{h}, \bar{\psi} \right\rangle = \frac{1}{h}\int_0^h dt \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1+t, x_2, \dots, x_n)\,\bar{\psi}(x)dx$$

$$\leqslant \|\varphi\|_1 \, \|\psi\|_0.$$

On en déduit $\left\| \dfrac{\tau_h \varphi - \varphi}{h} \right\|_0 \leqslant \|\varphi\|_1$.

Il suffit de prendre, alors, une suite (φ_p) tendant vers g dans $H_o^1(\mathcal{O}_\alpha)$].

$$\left(\frac{\tau_h L - L}{h}\right)\tau_h f = \sum_{|k| \leqslant m} \frac{\tau_h a_k - a_k}{h}\,\tau_h D^k f$$

est aussi borné dans $H^0(\mathcal{O}_\alpha)$, puisque les a_k sont indéfiniment dérivables. Si h est suffisamment petit, on en déduit, d'après le théorème III que $\dfrac{\tau_h f - f}{h}$ reste borné dans $H_o^m(\mathcal{O}_\alpha)$. Or $\dfrac{\tau_h f - f}{h} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O}_\alpha)$ quand $h \longrightarrow 0$. Toute boule dans $H_o^m(\mathcal{O}_\alpha)$ étant faiblement relativement compacte, on en déduit que $\dfrac{\tau_h f - f}{h}$ converge faiblement dans $H_o^m(\mathcal{O}_\alpha)$ vers $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, et, par suite : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \in H_c^m(\mathcal{O}_\alpha)$. C.Q.F.D.

b) <u>Lemme</u> II : <u>En ajoutant les hypothèses suivantes à celles du théorème</u> IV : $k = 1$, $f \in H^m_\ell(\Omega)$ <u>on a</u> $f \in H^{m+1}_\ell(\Omega)$.

<u>Démonstration du lemme</u> II.

On considère un recouvrement de Ω localement fini plus fin que celui des $(\mathcal{O}_\alpha)$ donné par le theorème III. Soit (φ_i) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. On a

$$L(\varphi_i f) = \varphi_i Lf + Df \qquad (\text{ordre } D \leqslant m - 1).$$

On a :

$$\varphi_i Lf \in H^1_c(\mathcal{O}_{\alpha_i}) \qquad Df \in H^1_c(\mathcal{O}_{\alpha_i}).$$

On en déduit :

$$L(\varphi_i f) \in H^1_c(\mathcal{O}_{\alpha_i})$$

et, d'après le lemme I : $\varphi_i f \in H^{m+1}_c(\mathcal{O}_{\alpha_i}) \subset H^{m+1}_c(\Omega)$. Cela suffit pour démontrer que $f \in H^{m+1}_\ell(\Omega)$ (voir paragraphe 1). C.Q.F.D.

c) <u>Lemme</u> III : <u>En ajoutant les hypothèses suivantes à celles du théorème</u> IV : $f \in H^m_\ell(\Omega)$, $k \geqslant 1$. <u>On a</u> : $f \in H^{m+k}_\ell(\Omega)$.

<u>Démonstration du lemme</u> III.

Démontrons ce lemme par récurrence sur k. Supposons $k \geqslant 2$ (pour $k = 1$, voir lemme II). Admettons le lemme pour $k-1$, et, démontrons le pour k. Montrons, alors, que $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ appartient à $H^{m+k-1}_\ell(\Omega)$. On a :

$$Lf_i = L\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} Lf + Df \qquad (\text{ordre } D \leqslant m).$$

Par hypothèse de récurrence :

$$Lf \in H^k_\ell(\Omega) \subset H^{k-1}_\ell(\Omega) \Longrightarrow f \in H^{m+k-1}_\ell(\Omega)$$

d'où $$f_i \in H^{m+k-2}_\ell(\Omega) \subset H^m_\ell(\Omega) \qquad (\text{puisque } k-2 \geqslant 0)$$

et $$Df \in H^{k-1}_\ell(\Omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Lf \in H^{k-1}_\ell(\Omega) \qquad (\text{puisque } Lf \in H^k_\ell(\Omega)).$$

On a donc :

$$Lf_i \in H_\rho^{k-1}(\Omega) \quad \text{et} \quad f_i \in H_\rho^m(\Omega).$$

En appliquant de nouveau l'hypothèse de récurrence, on a : $f_i \in H_\rho^{m+k-1}(\Omega)$, on en déduit donc $f \in H_\rho^{m+k}(\Omega)$. C.Q.F.D.

<u>2ème étape</u>. On se débarasse des deux restrictions $k \geqslant 1$ et $f \in H_\rho^m(\Omega)$.

Il suffit de démontrer que tout point de Ω est contenu dans un ouvert Θ relativement compact dans Ω et tel que $f \in H_\rho^{m+k}(\Theta)$.

Soit Θ un ouvert relativement compact de Ω. f considérée comme distribution dans Θ est d'ordre fini. Il existe donc un s tel que $f \in H^s(\Theta)$. Supposons $s+1 \leqslant k+m$ (sinon, on n'a rien à démontrer !). Soit h un entier positif tel que

$$h \geqslant m \qquad h \geqslant |s| \qquad (\text{donc, on a } m \leqslant s + 2h).$$

Par un procédé analogue à celui utilisé dans le chapitre I, on démontre que Δ^h est un isomorphisme entre $H_0^h(\Theta)$ et $H^{-h}(\Theta)$. Comme $H^s(\Theta) \subset H^{-h}(\Theta)$, on a :

$$f = \Delta^h f_1 \qquad f_1 \in H_0^h(\Theta).$$

D'après le théorème II bis, on a :

$$f_1 \in H_\rho^{s+2h}(\Theta) \subset H_\rho^m(\Theta).$$

On a d'autre part : $\Delta^h L f_1 = L\Delta^h f_1 + Df_1$ (ordre $D \leqslant 2h+m-1$)

$$\text{soit} \qquad \Delta^h L f_1 = Lf + Df_1$$

$Lf \in H_\rho^{s-m+1}(\Theta)$ (puisque $s-m+1 \leqslant k$)

$Df_1 \in H_\rho^{s-m+1}(\Theta)$ (puisque $f_1 \in H_\rho^{s+2h}(\Theta)$).

D'après le théorème de régularité pour Δ (th. II bis) on a $Lf_1 \in H_\rho^{s+2h+1-m}(\Theta)$.

Nous sommes dans les conditions d'application des résultats de la 1ère étape (lemme III) puisque $s + 2h + 1 - m \geqslant 1$ et $f_1 \in H_\rho^m(\Theta)$. On a donc $f_1 \in H_\rho^{s+2k+1}(\Theta)$ et par suite $f \in H_\rho^{s+1}(O)$.

Si $s + 1 = k + m$, le théorème est démontré, sinon on recommence le même raisonnement pour un ouvert plus petit que O. Le théorème est ainsi démontré par récurrence.

C.Q.F.D.

Remarque : Indiquons rapidement quelques variantes des théorèmes de régularité (sans démonstration).

1. On peut utiliser L^p $(1 < p < +\infty)$ à la place de L^2 (cf. séminaire Schwartz 59-60), ou aussi $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, mais non $\mathcal{C}^0$, L^1, L^∞ !

2. Si les coefficients de L sont analytiques et si Lf est analytique alors f est analytique (Analycité à l'intérieur).

3. Régularité au bord. Soient L un opérateur fortement elliptique d'ordre $m = 2m'$, $\mathcal{O}$ relativement compact avec un bord suffisamment différentiable, alors on a $f \in H_0^{m'}(\mathcal{O})$ et $Lf \in H^k(\mathcal{O}) \Longrightarrow f \in H^{k+m}(\mathcal{O})$ $(-m' < k)$. On peut utiliser pour cela l'inégalité d'Arouszajn : $f \in H^m \cap H_0^{m'}$ $\|Lf\|_{L^2} + \mathrm{cte}\,\|f\|_{L^2} \geqslant C\,\|f\|_m$.

4. Il y a aussi des théorèmes d'analyticité au bord.