

UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 144

SUR L'ESTIMATION QUADRATIQUE DE
LA COVARIANCE D'UN PROCESSUS DANS
LE PLAN.

Xavier GUYON, Bernard PRUM

25.033



INTRODUCTION.

Les plans d'expériences agricoles classiques (blocs randomisés, carrés latins randomisés, etc...) ont été élaborés en vue de supprimer dans l'estimation des effets traitements les effets spécifiques aux parcelles. L'idée qui a conduit à ces plans est que plus 2 parcelles sont proches, plus les effets parcelles correspondant sont proches : s'il n'en était ainsi tout plan diviserait le champ en autant de parcelles qu'il y a de traitement, chaque traitement étant affecté une seule fois. On considère donc qu'en chaque parcelle intervient un effet non contrôlé. Nous modéliserons cet effet comme réalisation d'un processus dans le plan, processus qui sera caractérisé sous hypothèse de normalité par la variance en chaque point et la covariance entre chaque couple de points.

La connaissance des caractéristiques de ce processus permettra (voir [4]) :

- d'estimer la part de la variance des estimateurs des effets traitements due, pour un plan fixé, à la structure du champ (et éventuellement à la randomisation),
- de choisir parmi divers plans celui qui minimise cette variance, en particulier de choisir entre un plan randomisé et un plan non randomisé.

L'objet de cette étude est, dans un cas très particulier, d'estimer le processus plan Z_{ij} à partir d'une réalisation.

Nous supposerons dans tout ce travail que ce processus Z_{ij} est

- normal,
- d'espérance constante $E(Z_{ij}) = m$, m étant a priori inconnue,
- de covariance isotropique, ce qui signifie que la covariance entre 2 parcelles ne dépend que de la distance de celles-ci :

$$\text{cov}(Z(i, j), Z(i', j')) = f(d((i, j), (i', j')))$$

Une première approche est celle des estimateurs de Rao, qui ne présupposent rien sur la forme de cette fonction f (parag. 1 et 2).

Nous comparerons ces estimateurs de Rao à ceux du maximum de vraisemblance obtenus en supposant la décroissance de la corrélation fonction exponentielle de la distance.

1. ESTIMATEURS DE RAO.

Rappelons dans le cas particulier qui nous intéresse ce que sont les estimateurs introduits par Rao (cf. [1] et [2]) et étudiés par Moussa (cf. [3]).

Le modèle linéaire s'écrit

$$Y = X \beta + \xi$$

où β représente les effets fixes (moyenne et tendances éventuelles) et où ξ est le processus étudié, vecteur aléatoire d'espérance nulle et de matrice de covariance V .

$$E Y = X \beta$$

$$\text{cov } Y = \text{cov } \xi = V$$

Supposer que la covariance entre deux composantes de ξ ne dépend que de la distance entre les parcelles correspondantes, c'est supposer que V s'écrit comme combinaison linéaire d'un certain nombre K de matrices V_k connues :

$$V = \sum \gamma_k V_k$$

Il suffit en effet de numéroter $d_1, d_2, \dots, d_k, \dots$ les distances entre parcelles. L'élément $V_k(i, j)$ sera égal à 1 si la distance entre la parcelle i et la parcelle j vaut d_k , sera égal à 0 sinon. γ_k représentera alors la covariance du processus à distance d_k .

On cherche alors pour γ_k un estimateur quadratique en Y repéré par une matrice symétrique A_k :

$$\Gamma_k = Y' A_k Y$$

On veut que cet estimateur soit :

- sans biais,
- invariant par translation sur les paramètres fixes (indépendant de la moyenne inconnue du processus Y)
- de variance minimum.

Sans biais

$$\begin{aligned} E \Gamma_k &= E (Y' A_k Y) = E [(\beta' X' + \xi') A_k (X \beta + \xi)] \\ &= \beta' X' A_k X \beta + \text{Tr} (A_k V) \end{aligned}$$

Ceci vaut γ_k quel que soit β si

$$X' A_k X = 0 \tag{a}$$

et

$$\text{Tr} (A_k V_h) = \delta_{kh} \tag{b}$$

Invariant sur β

$$\Gamma_k = \beta' X' A_k X \beta + 2 \xi' A_k X \beta + \xi' A_k \xi$$

est indépendant de β quel que soit ξ si et seulement si

$$A_k X = 0 \tag{c}$$

Remarquons que cette condition (c) implique la condition (a).

On cherchera donc A_k dans le sous-espace vectoriel \mathfrak{H}

$$\mathfrak{H} = \{ A \mid A X = 0 \}$$

et vérifiant la condition (b) .

De variance minimum

Théorème : Si l'on suppose que Y suit une loi normale $\eta (X \beta , V)$ et si A et B sont deux matrices symétriques vérifiant la condition (c) alors :

$$\text{cov}(Y' A Y, Y' B Y) = 2 \text{Tr}(A V B V) \quad (\text{cf. [3]})$$

En particulier :

$$\text{var } \Gamma_k = 2 \text{Tr}(A_k V A_k V)$$

Cette covariancé définit sur l'espace des matrices symétriques un produit scalaire que nous noterons

$$(A, B) = 2 \text{Tr}(A V B V)$$

et une norme.

La condition (b) peut alors s'interpréter par dualité : $\text{Tr}(A V_h)$ étant linéaire en A , il existe une matrice T_h symétrique telle que :

$$\text{Tr}(A V_h) = (A, T_h)$$

Soit alors T_h^v la projection orthogonale de T_h sur \mathfrak{H} .

A_k s'écrit :

$$A_k = \sum \lambda_{kh} T_h^v + A_{k\perp}^v = A_k^v + A_{k\perp}^v,$$

$A_{k\perp}^v$ étant dans \mathfrak{H} et orthogonal à tous les T_h^v . Si les conditions (b) sont vérifiées, A_k^v est bien déterminé et

$$\|A_k\|^2 = \|A_k^v\|^2 + \|A_{k\perp}^v\|^2$$

est minimum si

$$A_{k\perp}^v = 0$$

On cherche donc A_k sous la forme

$$A_k = \sum \lambda_{kh} T_k^v$$

Estimabilité :

La condition (b) s'écrit alors

$$\begin{aligned} E \Gamma_k &= \text{Tr} (A_k V) \\ &= \text{Tr} (A_k \times \sum \gamma_j V_j) \\ &= \sum \gamma_j (A_k, T_j) \\ &= \sum_h \sum_j \lambda_{kh} \gamma_j \begin{pmatrix} \vee \\ T_h, T_j \end{pmatrix} \\ &= \sum_h \sum_j \lambda_{kh} \gamma_j \begin{pmatrix} \vee & \vee \\ T_h, T_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons γ le vecteur de composantes $\gamma_1, \dots, \gamma_K$, Λ la matrice $(K \times K)$ des λ_{kh} et \mathcal{J} la matrice $(K \times K)$ de terme général

$$t_{hj} = \begin{pmatrix} \vee & \vee \\ T_h, T_j \end{pmatrix}$$

La relation précédente s'écrit :

$$E \Gamma = \Lambda \cdot \mathcal{J} \cdot \gamma$$

On pourra donc estimer ainsi γ sans biais si l'on sait trouver Λ tel que

$$\Lambda \cdot \mathcal{J} = I_d$$

Tous les γ seront estimables dès que \mathcal{J} est inversible. Alors :

$$A_k = \sum \mathcal{J}^{-1}(h, k) \begin{pmatrix} \vee \\ T_h \end{pmatrix}$$

Remarque : Nous avons restreint ici l'étude à l'estimabilité des composantes de la variance $\gamma_1, \gamma_2, \dots$. L'étude est la même si on cherche à estimer une forme linéaire de ces composantes

$$\delta = p_1 \gamma_1 + \dots + p_k \gamma_k$$

ou une famille de formes linéaires. La dimension de l'espace des formes linéaires estimable sera donnée par la dimension de l'image de \mathcal{J} .

MIVQUE et MINQUE.

L'estimateur Γ_k décrit précédemment est appelé MIVQUE par Rao. Il est sans biais et de variance minimum parmi les estimateurs quadratiques mais a peu d'intérêt pratique : la norme dans laquelle on travaille pour le calculer est définie par V qui est précisément ce que l'on cherche à estimer.

En pratique on remplace la norme de V par une norme V^* dont on pense qu'elle est proche de celle de V . C'est dans cette norme que l'on calcule les T_h , leurs projections T_h , la matrice τ et donc $\hat{\Gamma}$. Ce nouvel estimateur, le MINQUE, est sans biais, et d'autant plus variant que V et V^* correspondent à des normes éloignées.

Calcul pratique du MIVQUE (V) ou MINQUE (V^*)

V_h étant connue, on cherche T_h tel que

$$\text{Tr}(AV_h) = (A, T_h) = 2 \text{Tr}(A V T_h V)$$

Il suffit de poser

$$V_h = 2 V T_h V$$

soit

$$T_h = \frac{1}{2} V^{-1} V_h V^{-1}$$

Notons P la projection orthogonale dans \mathbb{R}^n sur $\text{Im } X$ pour la norme définie par V , soit

$$P = X (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1}$$

et

$$Q = I - P$$

Proposition : $A \rightarrow Q' A Q$ est un projecteur orthogonal sur \mathcal{H} pour la norme définie par V . (cf. Moussa [3]).

On aura donc :

$$T_h^V = Q' T_h Q .$$

Matrices de covariance des estimateurs Γ_k .

. Pour le MIVQUE :

La métrique utilisée est celle de la variance vraie inconnue V ; elle définit la matrice

$$\mathcal{J} = \left(\begin{matrix} V & \\ & V \end{matrix} \right)$$

$$\text{cov}(\Gamma_h, \Gamma_{h'}) = \sum_{k, k'} \lambda_{hk} \lambda_{h'k'} \begin{pmatrix} V & \\ & V \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k, k'} \lambda_{hk} \lambda_{h'k'} t_{hh'} = \lambda_{hh'}$$

et donc si $t\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_K)$;

$\text{var}(\Gamma) = \mathcal{J}^{-1}$

.. Pour le MINQUE, le calcul fait intervenir les produits scalaires pour V et V^* .

$$\text{cov}(\Gamma_h, \Gamma_{h'}) = f_{h, h'}(V, V^*)$$

En particulier : $\text{var}(\Gamma_h) = f_{h, h}(V, V^*)$, qui, à V fixée sera minimum pour $V^* = V$.

$$\text{cov}(\Gamma_h, \Gamma_{h'}) = (A_h, A_{h'})_V = 2 \sum_{k, k'} \text{Tr}(A_h V_k A_{h'} V_{k'}) \gamma_k \gamma_{h'}$$

On remarque que si MIVQUE et MINQUE sont homogènes de degré 0 en $\gamma_1^*, \dots, \gamma_K^*$, les variances sont homogènes de degré 2 en $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K$.

2. ETUDE NUMERIQUE DES MIVQUE ET MINQUE DES COVARIANCES D'UN PROCESSUS ISOTROPIQUE PLAN.

On dispose d'un champ carré découpé en 6 × 6 parcelles carrées. La réalisation du champ est celle d'un processus

$$Z = (Z_{i,j} , i \text{ et } j = 1 \text{ à } 6)$$

Si Z est isotropique pour la distance :

$$d^2 ((i, j), (i', j')) = (i - i')^2 + (j - j')^2,$$

il apparait 20 covariances $\text{cov}(Z_{i,j}, Z_{i',j'})$ correspondant aux 20 distances $d(1), \dots, d(20)$ entre centres de parcelles. (Pour simplifier on a assimilé chaque parcelle avec son centre. Il conviendra ultérieurement de revenir sur cette hypothèse, ce qui conduit à des problèmes de déconvolution).

| | | | | | | |
|--------|--------|---|---|----|----|----|
| | j → | | | | | |
| ↓ i | 1 | 2 | 4 | 7 | 10 | 14 |
| | | 3 | 5 | 8 | 11 | 15 |
| | | | 6 | 9 | 13 | 16 |
| | | | | 12 | 14 | 18 |
| | | | | | 17 | 19 |
| | | | | | | 20 |

Numérotation des 20 distances.

Si γ_k est la covariance entre les résultats sur deux parcelles à distance d_k , on aura :

$$\text{cov } Z = \sum_{k=1}^{20} \Sigma_k V_k$$

où V_k est la matrice 36 × 36 de 1 ou de 0 suivant que $d((i, j), (i', j')) = d_k$ ou non. Ainsi on est dans un modèle à au plus 20 composantes de la variance. On supposera que Z est gaussien, de moyenne constante m.

Estimabilité des composantes de la covariance.

Moussa [3] donne une condition nécessaire et suffisante pour l'estimabilité de toutes les composantes de la variance.

Cette condition fait intervenir les matrices V_k ainsi que les matrices

$$S_{i, l} = \frac{1}{2} (C_{i, l} + C'_{i, l})$$

où $C_{i, l}$ est la matrice $n \times n$ qui a des zéros sauf sur la $i^{\text{ème}}$ colonne qui est la $l^{\text{ème}}$ colonne de X.

Ici $t_X = (1, 1, \dots, 1)$ et donc :

$$S_{i, l} = S_i = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{2} & & \\ & 0 & & \vdots & & 0 \\ \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ & 0 & & \vdots & & & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ i^{\text{ème}} \text{ colonne} \end{matrix}$$

Une C.N.S. pour que toutes les composantes soient estimables est que la famille $(V_k, S_{i, l})$ soit libre.

Résultat : Toutes les composantes de la covariance sont estimables dès que le nombre K de composantes de la covariance de Z est strictement inférieur à 20.

Soit en effet une combinaison linéaire :

$$\sum_{i=1}^K \lambda_i V_i + \sum_{j=1}^{36} \mu_j S_j = U$$

Les termes de la diagonale de U sont du type : $\lambda_1 + \mu_j$;

$U = 0$ implique :

$$-\lambda_1 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{36}$$

Un terme en dehors de la diagonale est de la forme :

$\lambda_i + \mu_j/2$ ($i \neq j$). Si ces termes sont nuls on a :

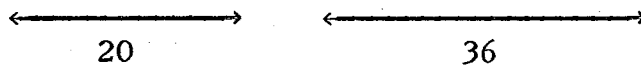
$$\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_K = \frac{\lambda_1}{2}$$

Si $K < 20$, la matrice $\sum_{i=1}^K \lambda_i V_i$ a un terme nul ce qui implique qu'un μ_j est nul et donc tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls.

Remarques :

. Si le modèle sur la covariance est complet (à 20 composantes), on ne peut estimer par la méthode de Rao les 20 composantes.

En effet, le système : $(2\lambda, \lambda, \dots, \lambda, -2\lambda, -2\lambda, \dots, -2\lambda) \quad \lambda \neq 0$



rend nul la combinaison linéaire.

.. Dans la pratique, faisant une hypothèse de décroissance en module de la covariance, on supposera toujours $\gamma_{20} = 0$.

... La distance entre parcelles n'est pas nécessairement définie de façon symétrique en i et j , en particulier dès que l'on pense que lignes et colonnes ne jouent pas le même rôle.

Si on considère une distance d de la forme :

$$d^2((i, j), (i', j')) = (i - i')^2 + k^2 (j - j')^2$$

il faut introduire de nouvelles composantes de la variance puisque le couple $((1, 1), (1, 2))$ n'est pas corrélé comme le couple $((1, 1), (2, 1))$. On étudiera au paragraphe 3 un exemple à 4 composantes de la covariance.

- C (1) = σ^2
- C (2) = cov (I, II)
- C (3) = cov (I, III)
- C (4) = cov (I, IV)

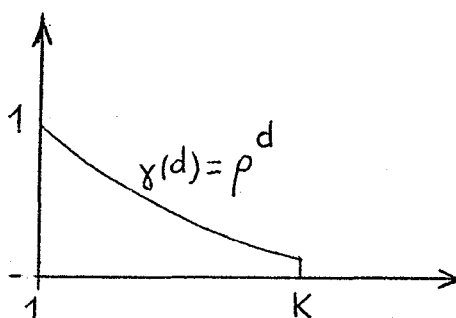
| | | |
|-----|----|--|
| I | II | |
| III | IV | |
| | | |

les quatre composantes étant ici aussi toutes estimables.

A. Etude du MINQUE quand V^* varie.

Si V est la matrice de covariance de Z , la variance du MINQUE pour une métrique V^* sera minimum pour $V^* = V$.

Cherchons à préciser comment varie cette variance dans deux cas particulier : les modèles à $K = 6$ et à $K = 15$ composantes de la variance suivants



a) la variance vraie s'écrit :

$$V = \sum_{i=1}^K \rho^{d(k)} V_k$$

b) la métrique V^* est calculée en remplaçant dans la formule précédente ρ par ρ^* .

Les tableaux 1 et 2 donnent les variances (multipliées par 1 000) des MINQUE de γ_1 et de γ_2 en fonction de ρ et ρ^* (Remarque : la matrice de variance n'est plus définie positive pour $\rho \geq 0,6$ si $K = 6$, pour $\rho \geq 0,7$ pour $K = 15$).

| ρ^* départ ρ vrai | MINQUE de γ_1 | | | | | |
|--------------------------------|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0. | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 0. | 59 | 59 | 59 | 62 | 73 | 139 |
| 0.1 | 63 | 63 | 64 | 66 | 76 | 137 |
| 0.2 | 75 | 74 | 74 | 75 | 83 | 133 |
| 0.3 | 96 | 94 | 92 | 90 | 94 | 128 |
| 0.4 | 127 | 123 | 118 | 113 | 110 | 123 |
| 0.5 | 173 | 166 | 156 | 144 | 131 | 123 |

| ρ^* ρ | MINQUE de γ_2 | | | | | |
|--------------------|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 0. | 20 | 20 | 22 | 26 | 41 | 110 |
| 0.1 | 27 | 26 | 27 | 31 | 44 | 108 |
| 0.2 | 40 | 39 | 38 | 39 | 49 | 101 |
| 0.3 | 62 | 58 | 54 | 53 | 56 | 91 |
| 0.4 | 94 | 86 | 78 | 71 | 67 | 80 |
| 0.5 | 137 | 125 | 110 | 95 | 82 | 74 |

TABLEAUX 1 : K = 6

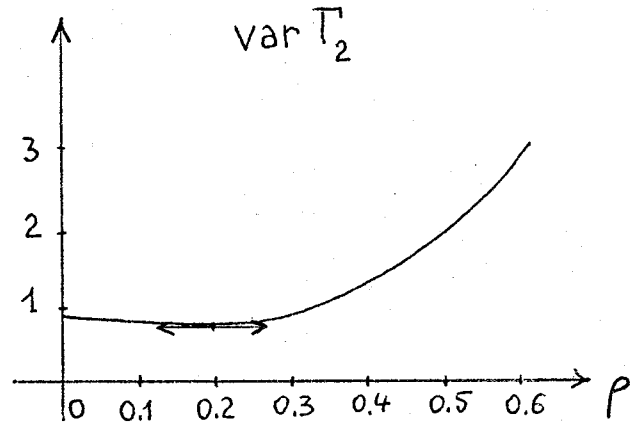
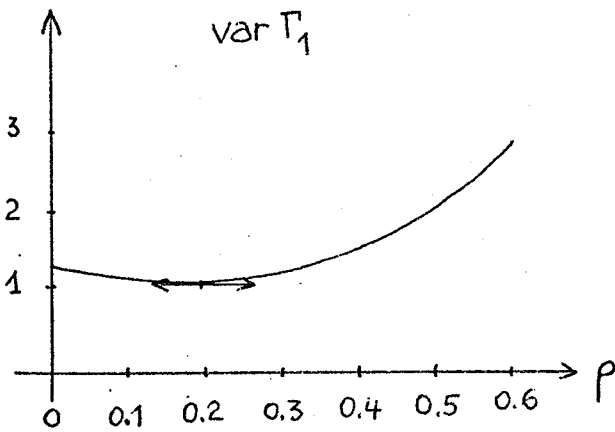
| ρ^* | MINQUE DE γ_1 | | | | | | | |
|----------|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | ρ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
| 0. | | 82 | 83 | 86 | 94 | 108 | 144 | 281 |
| 0.1 | | 95 | 94 | 96 | 101 | 112 | 142 | 256 |
| 0.2 | | 121 | 117 | 115 | 117 | 125 | 147 | 239 |
| 0.3 | | 161 | 153 | 148 | 145 | 148 | 167 | 232 |
| 0.4 | | 219 | 206 | 196 | 189 | 186 | 192 | 237 |
| 0.5 | | 294 | 276 | 260 | 247 | 237 | 231 | 250 |
| 0.6 | | 380 | 358 | 337 | 317 | 298 | 279 | 266 |

| ρ^* | MINQUE DE γ_2 | | | | | | | |
|----------|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | ρ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
| 0. | | 44 | 46 | 50 | 58 | 75 | 113 | 253 |
| 0.1 | | 61 | 59 | 61 | 67 | 80 | 112 | 229 |
| 0.2 | | 90 | 85 | 83 | 85 | 94 | 118 | 212 |
| 0.3 | | 134 | 124 | 117 | 115 | 118 | 134 | 205 |
| 0.4 | | 195 | 179 | 167 | 159 | 155 | 162 | 208 |
| 0.5 | | 273 | 251 | 232 | 217 | 205 | 199 | 218 |
| 0.6 | | 359 | 332 | 307 | 285 | 264 | 244 | 231 |

TABLEAUX 2 : K = 15

Les tableaux sont disymétriques. On constate bien que à V fixé, c'est pour $V = V^*$, c'est-à-dire pour le MIVQUE, que les estimations sont les meilleures.

La variation de cette variance $\text{var}(\Gamma)(V, V^*)$ est donnée par les figures ci-après.



Il est risqué de surestimer ρ dans la métrique V^* alors qu'on ne perd pas beaucoup de précision en prenant $\rho^* < \rho$.

Comme ρ est inconnu, une bonne stratégie consiste à prendre $\rho^* = 0$, donc $V^* = I$

B. Etude du MINQUE pour $V^* = I$.

Les tableaux 3 et 4 donnent les variances (multipliées par 1 000) des MINQUE pour $V^* = I$ des 6 premières composantes de la variance dans les cas $K = 6$ et $K = 15$.

| ρ vrai | γ_1 | γ_2 | γ_3 | γ_4 | γ_5 | γ_6 |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0. | 59 | 20 | 24 | 24 | 17 | 36 |
| 0.1 | 63 | 27 | 29 | 26 | 19 | 36 |
| 0.2 | 75 | 40 | 39 | 30 | 23 | 36 |
| 0.3 | 96 | 62 | 56 | 39 | 31 | 36 |
| 0.4 | 127 | 94 | 82 | 53 | 42 | 38 |
| 0.5 | 173 | 137 | 119 | 74 | 59 | 42 |

TABLEAU 3 : $K = 6$

| ρ vrai | γ_1 | γ_2 | γ_3 | γ_4 | γ_5 | γ_6 |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0. | 82 | 44 | 50 | 48 | 42 | 61 |
| 0.1 | 95 | 61 | 65 | 62 | 57 | 75 |
| 0.2 | 121 | 90 | 92 | 84 | 81 | 96 |
| 0.3 | 161 | 134 | 134 | 118 | 116 | 123 |
| 0.4 | 219 | 195 | 193 | 165 | 163 | 156 |
| 0.5 | 294 | 273 | 267 | 223 | 220 | 195 |
| 0.6 | 380 | 359 | 348 | 289 | 281 | 235 |

TABLEAU 4 : K = 15

C. Comparaison aux estimateurs classiques.

Si on suppose connue la moyenne m du processus ($m = 0$), on sait estimer γ_1 et γ_2

$$\gamma_1 \text{ par } S_1 = \frac{1}{36} \sum_{i,j} Z_{ij}^2 \quad \text{et}$$

$$\gamma_2 \text{ par } S_2 = \frac{1}{60} \sum_{d(I,J)=1} Z_I \cdot Z_J$$



Les tableaux comparatifs des variances des estimateurs de γ_1 et γ_2 sont donnés dans le cas d'un modèle toujours à 6 C.V., $\gamma(d) = \rho^d$ si $d < d(6)$.

| ρ vraie | | 0. | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|--------------|-----------|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| γ_1 | MINQUE Id | 59 | 63 | 75 | 96 | 127 | 173 |
| | MIVQUE | 59 | 63 | 74 | 90 | 110 | 123 |
| | S_1 | 56 | 58 | 65 | 80 | 105 | 146 |
| γ_2 | MINQUE Id | 20 | 27 | 40 | 62 | 94 | 137 |
| | MIVQUE | 20 | 26 | 38 | 53 | 67 | 74 |
| | S_2 | 66 | 82 | 122 | 193 | 308 | 482 |

TABLEAU 5.

- Bien que l'estimateur S_1 soit calculé avec une information supplémentaire très importante (m est supposée connue) sa variance n'est jamais beaucoup plus petite que celle du MIVQUE, et même, pour $\rho = 0,5$ le MIVQUE devient meilleur que S_1 .

- Le comportement de S_2 est en revanche systématiquement moins bon que ceux du MINQUE et du MIVQUE, et dans un bon rapport. La comparaison à l'estimateur $S_3 = \frac{1}{35} \sum (Z_{ij} - \bar{Z})^2$ n'a pas de sens puisque cet estimateur est biaisé dès que le modèle est à plus d'une composante de la variance.

D. Comparaison avec les estimateurs du maximum de vraisemblance.

Pour le processus précédent (variance σ^2 et corrélation en ρ^d) on peut envisager au moins deux démarches pour estimer σ^2 et ρ .

1°/ Estimation par le maximum de vraisemblance (MV). L'étude ci-dessous a été faite en supposant connue la moyenne m du processus.

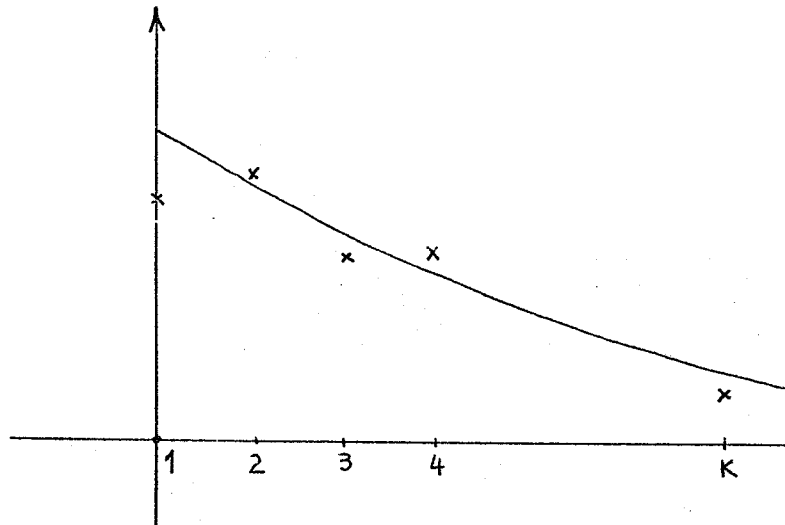
2°/ La méthode du MINQUE ($V^* = I$) permet d'estimer K composantes de la variance $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K$. Sous l'hypothèse

$$\gamma_i = \sigma^2 \rho^i$$

un lissage obtenu en minimisant

$$D^2(\hat{\gamma}, \sigma^2, \rho) = \sum_{i=1}^K \frac{1}{V_i} (\hat{\gamma}_i - \sigma^2 \rho^i)^2$$

(où $V_i = \mathcal{J}^{-1}(i, i) = \widehat{\text{var}} \Gamma_i$) permet d'estimer σ^2 et ρ (Méthode M + L)



Ces deux démarches ne donnant plus des estimateurs quadratiques, on ne peut plus calculer exactement la variance des estimateurs. On ne peut qu'estimer ces variances par simulation. Par ailleurs ces estimateurs n'ont aucune raison d'être sans biais. La simulation permet en même temps d'estimer le biais.

La simulation a été faite en tirant un échantillon de taille 100 pour chaque valeur de ρ .

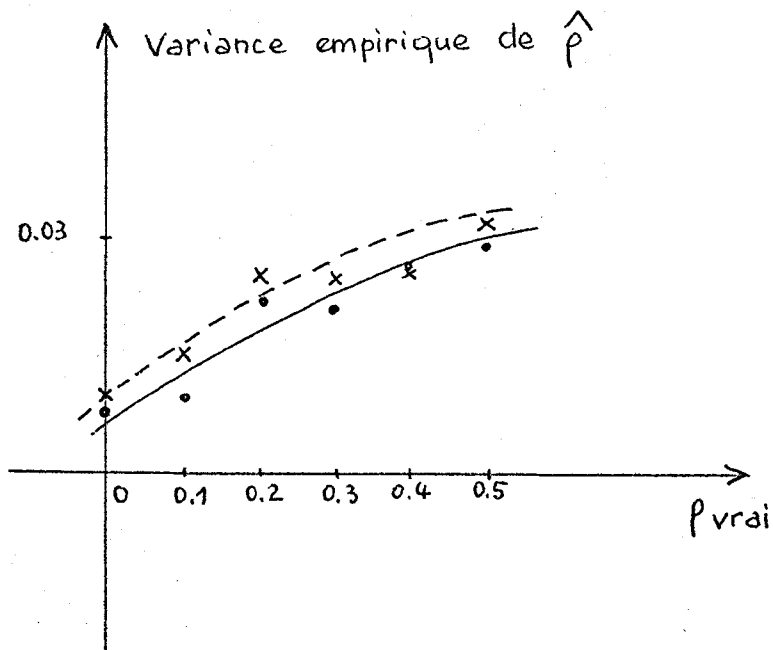
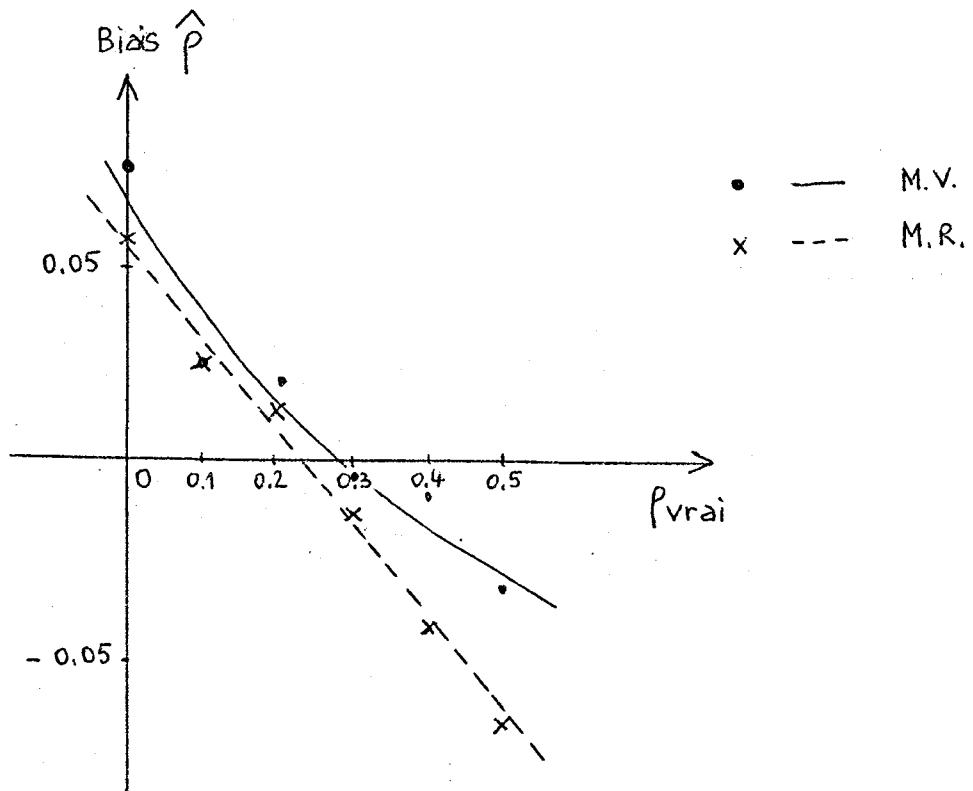
Les tableaux 6 et 7 donnent pour $\sigma^2 = 1$ et diverses valeurs de ρ les estimées (multipliées par 1 000) ainsi obtenues des biais et des variances, ainsi que l'écart quadratique déduit.

| ρ | MV | | | M + L | | |
|--------|-------|----------|---------|-------|----------|---------|
| | Biais | Variance | Ec. Qu. | Biais | Variance | Ec. Qu. |
| 0. | 77 | 6 | 77,2 | 57 | 8 | 57,6 |
| 0,1 | 25 | 9 | 26,6 | 25 | 15 | 29,2 |
| 0,2 | 20 | 22 | 29,7 | 11 | 25 | 27,3 |
| 0,3 | - 5 | 21 | 21,6 | - 14 | 25 | 28,7 |
| 0,4 | - 10 | 26 | 27,9 | - 45 | 25 | 51,5 |
| 0,5 | - 35 | 29 | 45,5 | - 69 | 32 | 76,1 |

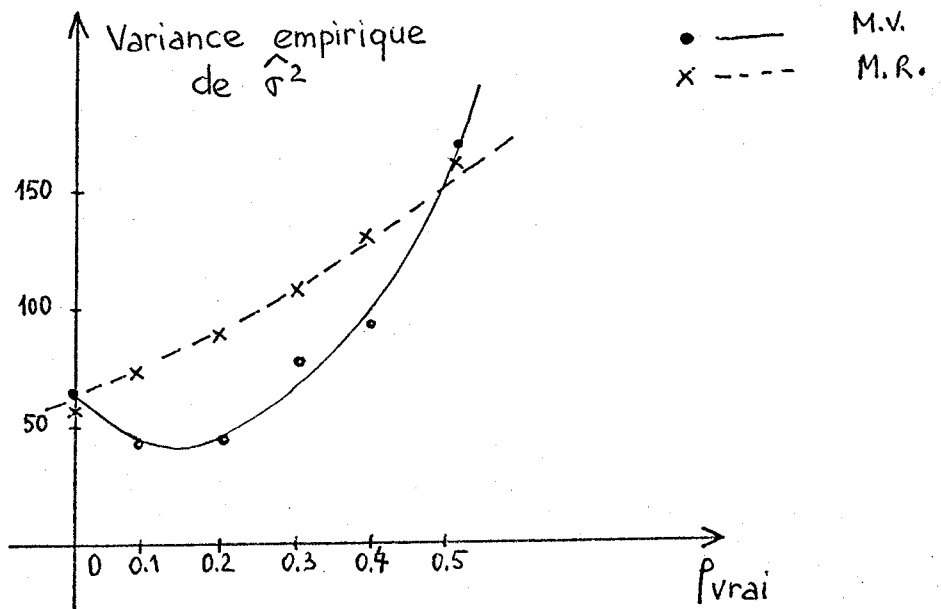
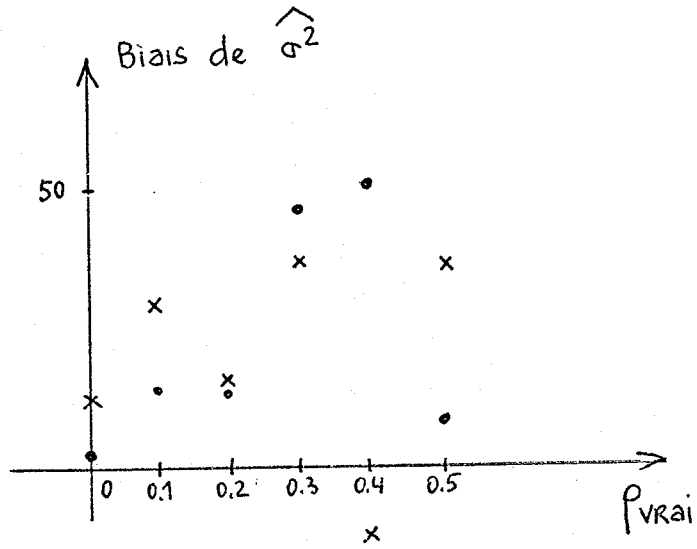
TABLEAU 6 : Comparaison d'estimateurs de ρ

| ρ | MV | | | M + L | | |
|--------|-------|----------|---------|-------|----------|---------|
| | Biais | Variance | Ec. Qu. | Biais | Variance | Ec. Qu. |
| 0. | 1 | 58 | 58,0 | 12 | 59 | 60,2 |
| 0,1 | 13 | 71 | 72,2 | 30 | 43 | 52,4 |
| 0,2 | 12 | 93 | 93,8 | 13 | 48 | 49,7 |
| 0,3 | 47 | 112 | 121,5 | 37 | 75 | 83,6 |
| 0,4 | 53 | 134 | 144,1 | - 11 | 97 | 97,6 |
| 0,5 | 9 | 159 | 159,3 | 34 | 169 | 172,4 |

TABLEAU 7 : Comparaison d'estimateurs de σ^2



Estimation de ρ par les deux méthodes



Estimation de σ^2 par les deux méthodes

On constate encore que malgré la connaissance a priori de m la méthode MV n'est jamais bien meilleure que la méthode M + L et qu'elle lui est même parfois inférieure.

E. Estimations du variogramme du processus.

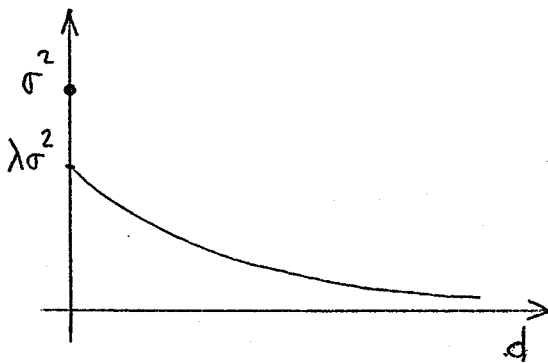
Soit Z un processus stationnaire du second ordre.

$$\begin{aligned} E ((Z (M + d) - Z (M))^2) &= \sigma^2 + m^2 - 2 (C (d) + m^2) + \sigma^2 + m^2 \\ &= 2 (\sigma^2 - C (d)) = 2 (C (0) - C (d)) \end{aligned}$$

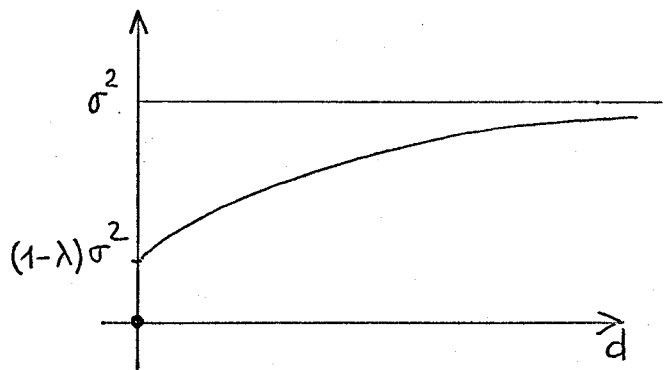
Une estimation couramment faite est celle du variogramme

$$d \mapsto v (d) = C (0) - C (d) = \sigma^2 - C (d)$$

dans lequel σ^2 est confondu avec les différentes covariances



Exemple de covariance isotropique



Variogramme associé

L'estimation est donnée par :
$$v (d) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (Z (M_i + \bar{d}) - Z (M_i))^2$$

C'est une estimation quadratique d'une combinaison linéaire des covariances, non biaisée et invariante par translation sur m moyenne de Z. Aussi est-il intéressant de la comparer au MINQUE et MIVQUE pour différents types de modèle de covariance.

Modèle de covariance :
$$\begin{cases} C(d) = \rho^d & \text{si } d \leq d(6) \\ C(d) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (K = 6 \text{ composantes})$$

Sont estimées $v(1)$, $v(\sqrt{2})$, $v(2)$ et $v(2\sqrt{2})$; le tableau 8 fournit les variances vraies des MINQUE et de l'estimation classique du variogramme (multipliées par 1 000). Le MINQUE pour $V^* = I$ est toujours meilleur que l'estimation classique. Le MINQUE est d'autant meilleur que ρ est important ainsi que d . Mais le gain en moyenne n'est pas énorme. Les estimations classiques du variogramme pour ce type de décroissance de la covariance sont bonnes.

Ce même type de comportement relatif est encore vérifié pour un modèle analogue à $K > 6$ composantes de la variance.

RAO : ρ^* de départ

| ρ vrai | | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | Classique |
|-------------|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $\rho = 0$ | v (1) | 72 | 72 | 73 | 73 | 73 | 73 | 74.4 |
| | v ($\sqrt{2}$) | 76 | 76 | 77 | 77 | 78 | 80 | 84.8 |
| | v (2) | 77 | 77 | 78 | 79 | 79 | 99 | 79.9 |
| | v ($2\sqrt{2}$) | 88 | 89 | 92 | 95 | 100 | 140 | 101.6 |
| $\rho=0.1$ | v (1) | 54 | 54 | 54 | 55 | 55 | 55 | 55.8 |
| | v ($\sqrt{2}$) | 69 | 69 | 69 | 69 | 70 | 71 | 76.5 |
| | v (2) | 76 | 75 | 75 | 76 | 77 | 99 | 79 |
| | v ($2\sqrt{2}$) | 90 | 88 | 89 | 91 | 96 | 140 | 104 |
| $\rho=0.2$ | v (1) | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41 | 41.7 |
| | v ($\sqrt{2}$) | 59 | 58 | 58 | 58 | 59 | 59 | 65.1 |
| | v (2) | 73 | 72 | 71 | 71 | 73 | 93 | 76.4 |
| | v ($2\sqrt{2}$) | 94 | 90 | 90 | 90 | 94 | 130 | 110 |
| $\rho=0.3$ | v (1) | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30.6 |
| | v ($\sqrt{2}$) | 49 | 48 | 47 | 47 | 47 | 48 | 53.5 |
| | v (2) | 69 | 67 | 66 | 66 | 67 | 82 | 72.3 |
| | v ($2\sqrt{2}$) | 100 | 95 | 93 | 92 | 94 | 120 | 117 |
| $\rho=0.4$ | v (1) | 22 | 22 | 21 | 21 | 21 | 21 | 22.1 |
| | v ($\sqrt{2}$) | 40 | 38 | 37 | 37 | 37 | 37 | 43 |
| | v (2) | 64 | 62 | 62 | 62 | 61 | 67 | 67 |
| | v ($2\sqrt{2}$) | 110 | 100 | 98 | 96 | 94 | 110 | 124 |
| $\rho=0.5$ | v (1) | 16 | 16 | 15 | 15 | 15 | 15 | 16.1 |
| | v ($\sqrt{2}$) | 34 | 32 | 31 | 30 | 30 | 30 | 36 |
| | v (2) | 60 | 60 | 60 | 59 | 57 | 53 | 62.4 |
| | v ($2\sqrt{2}$) | 110 | 110 | 110 | 100 | 98 | 91 | 131 |

TABLEAU 8.

Modèle de covariance en $(1, \rho, 0, \dots)$.

$\text{Var } Z = 1, \quad \text{Var } (Z_I, Z_J) = \rho \text{ si } d = 1 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$

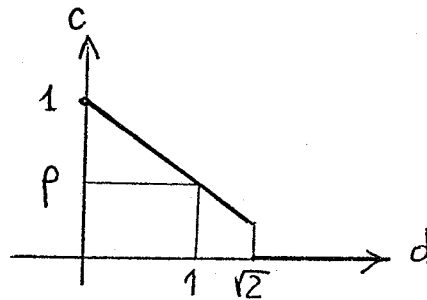
Dans le cas d'un champ carré 6×6 , la matrice de corrélation est définie positive pour $\rho = 0, 0.1, 0.2$.

La seule estimation du variogramme est celle de $v(1) = C(0) - C(1)$

| ρ vrai | MINQUE | | | Est. classique |
|-------------|------------|-----|-----|----------------|
| | $\rho = 0$ | 0.1 | 0.2 | |
| 0 | 72 | 74 | 78 | 74.4 |
| 0.1 | 53 | 52 | 52 | 54.6 |
| 0.2 | 40 | 37 | 37 | 41.4 |

$(\times 10^{-3})$

Modèle de covariance linéaire à 3 composantes.



Dans ce cas, la matrice de variance covariance est définie positive pour $\rho = 0.2, 0.3, 0.4, 0.4, 0.5$.

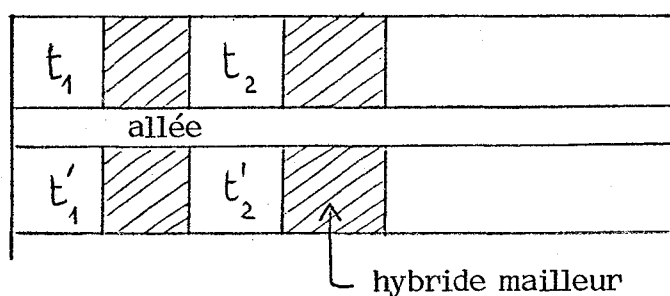
| | ρ vrai | MINQUE pour $V^* = I$ | Est. classique |
|------------------|-------------|--------------------------|----------------|
| V (1) | 0.2 | 47 | 101 |
| | 0.3 | 33 | 73 |
| | 0.4 | 24 | 52 |
| | 0.5 | 20 | 38 |
| V ($\sqrt{2}$) | 0.2 | 110 | 126 |
| | 0.3 | 73 | 82 |
| | 0.4 | 57 | 55 |
| | 0.5 | 49 | 44 |

Ici, le gain en prenant le MINQUE est appréciable.

3. ESTIMATIONS DANS UN CAS REEL.

Un plan maillé d'étude de variété de maïs nous a été communiqué par M. FELIX du Service d'Expérimentation de la Minière (INRA).

Dans les blocs, les variétés à étudier sont réparties au hasard mais les parcelles sont séparées par d'autres parcelles sur lesquelles est cultivé un hybride mailleur peu "agressif".



Ceci peut être considéré comme un essai à blanc de l'hybride mailleur ; les résultats sont les suivants pour les parcelles intermédiaires.

| | | j | | | j' |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 235 | 264 | 259 | 280 | 274 | 245 |
| 218 | 255 | 246 | 248 | 276 | 278 |
| 274 | 272 | 231 | 236 | 238 | 271 |
| 240 | 246 | 212 | 233 | 244 | 254 |
| 235 | 225 | 263 | 256 | 254 | 277 |
| 266 | 261 | 253 | 213 | 217 | 237 |

$$\hat{m} = \bar{Z} = 379$$

On suppose que la distance entre les parcelles de la maille est la distance

$$d((i, j), (i', j')) = (i - i')^2 + (j - j')^2$$

et que le processus est de moyenne constante et isotropique.

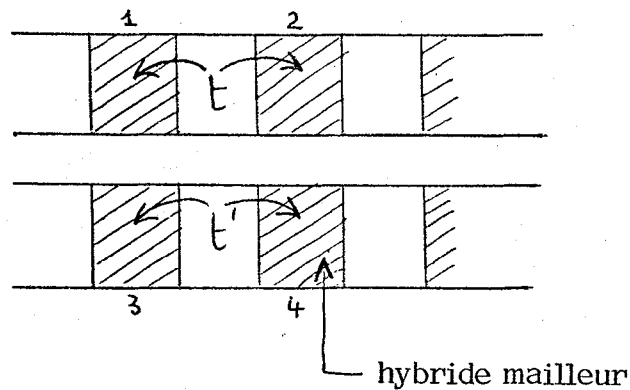
| | Estimations de | γ_1 | γ_2 | γ_3 | γ_4 | γ_5 | γ_6 |
|---------------|----------------|-------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| | Cova-riances | Dans un modèle à 1 composante | 379 | × | × | × | × |
| 2 composantes | | 398 | 96 | × | × | × | × |
| 3 " | | 396 | 93 | - 24 | × | × | × |
| 4 " | | 396 | 94 | - 23 | 2 | × | × |
| 5 " | | 396 | 93 | - 24 | 2 | 0 | × |
| 6 " | | 405 | 103 | - 13 | 12 | 10 | 94 |
| 10 " | | 417 | 117 | 2 | 27 | 27 | 112 |
| Corrélation | | C(1) | C(2) | C(3) | C(4) | C(5) | C(6) |
| | 1 | 1 | × | × | × | × | × |
| | 2 | 1 | . 24 | × | × | × | × |
| | 3 | 1 | . 23 | - . 06 | × | × | × |
| | 4 | 1 | . 23 | - . 06 | . 006 | × | × |
| | 5 | 1 | . 23 | - . 06 | . 006 | - . 001 | × |
| | 6 | 1 | . 25 | - . 03 | . 031 | . 027 | . 23 |
| 10 | 1 | . 28 | . 005 | . 066 | . 066 | . 27 | |

A la vue de ces résultats, il semble qu'un modèle à 3 composantes de la variance est satisfaisant la covariance étant

$$1, \quad . 23, \quad . 06, \quad 0 \dots\dots\dots$$

Cependant, l'hypothèse sur l'isotropie avec la distance choisie est contestable ; les lignes (Blocs), et les colonnes ne jouent pas le même rôle, en particulier si il existe une compétition entre les variétés et l'hybride meilleur peu agressif donc assez agressé : la varitété T agresse l'hybride meilleur en 1 et 2, aussi peut-on penser que la corrélation entre 1 et 2 est relativement importante ;

étant donnée l'existence d'une allée entre 1 et 3 et de bords moins larges, il n'en est pas a priori de même entre 1 et 3.



Sur ces mêmes données, on estime les composantes de la variance dans un nouveau modèle à 4 composantes.

$$C(1) = \sigma^2 = \text{variance des observations}$$

$$C(2) = \text{cov}(Z_1, Z_2)$$

$$C(3) = \text{cov}(Z_1, Z_3)$$

$$C(4) = \text{cov}(Z_1, Z_4)$$

les autres covariances étant supposées nulles.

Les résultats sont les suivants :

$$\widehat{C}(1) = 396$$

$$\rho(1) = 1$$

$$\widehat{C}(2) = 174$$

$$\rho(2) = .44$$

$$\widehat{C}(3) = 11$$

$$\rho(3) = .03$$

$$\widehat{C}(4) = -24$$

$$\rho(4) = -.06$$

L'introduction de C (1) et C (2) comme deux composantes distinctes fait apparaître les rôles disymétriques des lignes et des colonnes.

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] C.R. RAO (1971)
Estimation of variance and covariance components. MINQUE theory
(Journal of Multivariate Analysis 1, pp. 257-275).
- [2] C.R. RAO (1971)
Minimum variance unbiased quadratic estimators (MIVQUE) of
variance components.
(Journal of Multivariate Analysis ; 1, pp. 445-456).
- [3] J. MOUSSA (1974)
L'estimation optimale des composantes de la variance dans les
modèles mixtes : une étude des méthodes de C.R. RAO
(Thèse - Paris XI).
- [4] C. DUBY, X. GUYON, B. PRUM (1974)
Précision des plans d'expérience sur un champ aléatoire
(Publication Paris XI).

