PUBLICATIONS MATHEMATIQUES D'ORSAY

ÉTUDE LOCALE DES SINGULARITÉS

Jean GIRAUD

Cours de 3ème Cycle 1971-1972

(réimpression 1980)

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

ÉTUDE LOCALE DES SINGULARITÉS

Jean GIRAUD

Cours de 3ème Cycle 1971-1972

(réimpression 1980)

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

TABLE DES MATIERES

UNIVERSITE DE PARIS XI

CENTRE D'ORSAY

1971-72

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

DE

SAINT-CLOUD

ETUDE LOCALE DES SINGULARITES

par Jean GIRAUD

=+=+=+=+=

INTRODUCTION

=+=+=+=+=

Ce texte reproduit les notes d'un cours de 3ème cycle professé à Orsay au premier semestre de l'année scolaire 1971-72. Outre les mémoires originaux publiés à ce jour, en particulier ceux de Hironaka et la thèse de Bennett, il s'inspire d'un preprint de Hironaka : "Bimeromorphic smoothing of a complex-analytic space" et d'une partie du manuscrit d'un ouvrage en préparation de M. Lejeune, H. Hironaka et B. Teissier sur la résolution des singularités d'un espace analytique. Cette édition a été révisée à l'automne 1972 après que j'ai eu connaissance d'un preprint de Tadao Oda sur le groupe que Hironaka attache à tout point d'un espace projectif pour tenter d'apréhender les phénomènes spéciaux à la caractéristique positive.

Le sujet du cours est l'étude du comportement par éclatements permis (II 2.1) des invariants introduits par Hironaka et Bennett. On n'y trouvera pas de résultats nouveaux mais des démonstrations nouvelles et par certains cotés plus simples du critère de platitude normale de Hironaka et surtout du critère numérique de Bennett. La démonstration de Bennett est mélangée avec l'étude du comportement par éclatement permis de la fonction de Hilbert-Samuel; nous en donnons une très simple s'appuyant sur des considérations très élémentaires sur les modules munis de deux bonnes filtrations. La démonstration du critère de Hironaka traitait le cas de deux idéaux $P \subset Q$ d'un anneau local régulier R tel que R/P et R/Q soient réguliers, nous nous limitons au cas où Q est l'idéal maximal. Cela est sans inconvénients, car le cas général n'est autre que le théorème de propagation de la platitude normale le long d'un sous-schéma permis (II 3.3) qui résulte immédiatement du critère numérique de Bennett. Pour terminer sur ce point, rappelons que Bennett lui-même a remarqué que, lorsque l'on dispose d'un corps de base parfait, son critère s'obtient très simplement par des considérations de calcul différentiel.

Le chapitre II s'achève par le théorème de stabilité établi en caractéristique 0 par Hironaka dans son mémoire de 1964. La démonstration donnée ici est valable en toute généralité. Le chapitre III n'a pu, faute de temps, être traité en cours. On y trouvera un compte rendu abrégé de deux articles de Hironaka "Additive groups associated with points of a projective space", Annals of Math., et "Certain numerical characters of singularities", J. Math. Kyoto Univ., (1970).

Pour terminer, il reste à signaler au novice que ce cours est loin d'épuiser le sujet. Pour aboutir à la résolution des singularités en géométrie algébrique en caractéristique 0, il resterait à construire les "stable standard base" et " stable frame" de Hironaka [Annals 64] sur lesquelles il édifie sa récurrence et dont la version globale en géométrie analytique a pris le nom de théorie du contact maximal [Séminaire Lejeune-Teissier, Ecole Polytechnique 1972] et sert de base au jardinage de Hironaka. De plus, même l'étude locale entreprise ici ne me semble pas achevée en caractéristique positive.

CHAPITRE I. RAPPELS D'ALGEBRE LOCALE

Dans ce chapitre, nous rappelons un certain nombre de faits bien connus (Bourbaki, Algèbre Commutative, cité [BAC] et J-P. SERRE, Algèbre locale et Multiplicité, Lectures Notes in Mathematics, vol. 11, Springer Verlag, cité [ALM]. Au lieu du classique polynôme de Hilbert-Samuel, nous utilisons systématiquement la fonction du même nom, moins pour les quelques simplifications que cela apporte dans ce chapitre que pour habituer le lecteur à cet outil dont Hironaka a montré toute la puissance dans ce genre de questions. La connaissance de "Introduction to Commutative Algebra" d'Atiyah et Mac Donald et du chapitre 5 de "Théorie des Faisceaux" de Godement, consacré aux Tor, est plus que suffisante pour la compréhension de ce chapitre si l'on y ajoute les rudiments classiques sur le complexe de Koszul et les suites régulières. Par ailleurs, il est vivement recommandé au lecteur débutant de s'initier à [BAC] et [ALM] en y recherchant les passages qui traitent les mêmes questions.

§ 1. Filtrations

1.1. Un anneau filtré est un anneau A muni d'une suite décroissante d'idéaux A_i, $i \in \underline{\underline{Z}}$, telle que $A_i = A$ pour $i \leqslant 0$ et $A_i A_j \subset A_{i+j}$. Nous supposerons toujours que A est noethérien, que A_1 est contenu dans le radical de A et que la sous-A-algèbre

$$(1) \qquad A^* = \bigoplus_{i \in \underline{\underline{Z}}} A_i T^i$$

de $A[T,T^{-1}]$ est une A-algèbre de type fini. Pour rappeler ces hypothèses; nous dirons parfois que A est un <u>anneau bien filtré</u>. L'exemple le plus important s'obtient en posant $A_i = \underline{p}^i$, où A est un anneau noethérien et où $\underline{p}$ est un idéal de A contenu dans son radical, auquel cas l'algèbre A^* est bien de type fini car elle est engendrée par T^{-1} et $A_1 = \underline{p}T$. Dans ce cas, on dit que la filtration de A est sa <u>filtration p-adique</u>.

1.2. <u>Un module filtré</u> est un A-module E muni d'une suite décroissante de sous-modules E_i, $i \in \mathbb{Z}$, telle que $A_iE_j \subset E_{i+j}$ et $E = \cup E_j$ (filtration exhaustive). On lui associe le A-module gradué

(2) $$E^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E_iT^i.$$

<u>Proposition 1.3.</u> Soient A un anneau bien filtré et E un A-module filtré. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E est un A-module de type fini et il existe un entier s tel que $E_n = \sum_{i \leqslant s} A_{n-i}E_i$ pour $n \geqslant s$, (dans le cas $\underline{p}$-adique, ceci signifie que $E_n = \underline{p}^{n-s}E_s$, $s \leqslant n$).

(ii) E^* est un A^*-module de type fini.

1.3.1. (i) $\Rightarrow$ (ii). Puisque E admet un système fini de générateurs $x_1,\dots,x_r$ et que la filtration est exhaustive, ils appartiennent tous à un même E_e et donc $E_e = E = E_n$ pour $n \leqslant e$. Donc $E_nT^n = (T^{-1})^{e-n}(E_eT^e)$ pour $n \leqslant e$. Par ailleurs, on a aussi $E_n = \sum_{e \leqslant i \leqslant s} A_{n-i}E_i$, pour $n \geqslant s$, Comme $T^{-1} \in A^*$, il en résulte que E^* est engendré par ses éléments homogènes de degré compris entre e et s, donc est de type fini puisque les E_i sont des A-modules de type fini.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Si on a (ii), il existe des éléments homogènes $x_1T^{n_1},\ldots,x_rT^{n_r}$ de E^* tels que, pour tout $n \in \underline{\underline{Z}}$, on ait

$$E_nT^n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} A_{n-n_i}T^{n-n_i} \quad x_iT^{n_i}$$

On en déduit (i) immédiatement, avec $s = \sup(n_i)$.

1.3.2. Si ces conditions sont satisfaites, on dira que E est un module <u>bien filtré</u>, ou encore, dans le cas $\underline{p}$-adique, que la filtration de E est <u>p-bonne</u>. Si E est un A-module de type fini, la filtration <u>déduite</u> $E_n = A_nE$ est évidemment bonne; dans le cas $\underline{p}$-adique, on l'appelle la <u>filtration p-adique</u> de E. Si E est un module filtré (ou bien filtré), il en est évidemment de même du module $E(n)$ dont la filtration est $E(n)_i = E_{n+i}$. On appelle <u>module filtré libre</u> un module qui est somme directe de modules filtrés de la forme $A(n)$, auquel cas E^* est somme directe de modules libres de la forme $A^*(n)$. Il nous sera utile d'expliciter (i).

<u>Corollaire 1.3.3.</u> : Les conditions ci-dessous sont équivalentes à celle de (1.3)

(iii) Il existe des éléments $x_1,\ldots,x_r$ de E et des entiers $n_1,\ldots,n_r$ tels que $x_i \in E_{n_i}$ et tels que, pour tout $n \in \underline{\underline{Z}}$, on ait

$$E_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} A_{n-n_i}\, x_i .$$

(iv) E est quotient (avec filtration quotient) d'un module filtré libre de type fini.

1.4. Si F est un sous-module d'un module bien filtré E et si F est muni d'une filtration telle que $F_n \subset E_n$, alors F^* est un sous-module de E^* et comme A^* est noethérien, il en résulte que la filtration de F est bonne (lemme d'Artin-Rees). En particulier, la filtration <u>induite</u> sur F définie par $F_n = F \cap E_n$ est bonne. Il en résulte que <u>toute bonne filtration</u> de E <u>est séparée</u>, c'est-à-dire $\{0\} = \cap E_i$. En effet, munissons $F = \cap E_i$ de la filtration induite. D'après (1.3.(i)), on a $F = F_n = \sum_{i \leqslant s} A_{n-i}F_i \subset \sum A_1 F_i = A_1 F$, donc $F = 0$ d'après le lemme de Nakayama, puisque A_1 est contenu dans le radical de A. Soit maintenant F un module quotient d'un module bien filtré E, la <u>filtration quotient</u> F_n = image de E_n est bonne, car F^* est un quotient de E^*.

1.5. Un morphisme de modules filtrés est un morphisme de modules $u : E \longrightarrow F$ tel que, pour tout n, $u(E_n) \subset F_n$; on dit qu'il est <u>strict</u> si $u(E) \cap F_n = u(E_n)$ pour tout n, c'est à dire si les filtrations induite et quotient sur l'image $u(E)$ sont les mêmes.

1.6. Si n est un entier et E un module bien filtré, on note $E(n)$ le module filtré défini par $E(n)_i = E_{n+i}$ et on appelle module filtré libre un module filtré qui est somme directe de modules filtrés de la forme $A(n)$. Tout module bien filtré admet une résolution.

$$(1) \qquad \dots L_{i+1} \longrightarrow L_i \dots\dots L_1 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{e} E \longrightarrow 0$$

par des modules filtrés libres de type fini L_i, les <u>différentielles et l'augmentation étant strictes</u>. En effet, E est quotient d'un module filtré libre de type fini L_o, le noyau I_o de $e : L_o \longrightarrow E$, muni de la filtration induite est quotient d'un module filtré libre de type fini L_1 etc... On dit que (1) est une <u>résolution filtrée libre</u> de E

§ 2. <u>Graduations</u>

Si A est un anneau bien filtré, l'anneau gradué $grA = \bigoplus A_n/A_{n+1}$ est une (A/A_1)-algèbre de type fini et, pour tout

A-module bien filtré E, on a un grA-module gradué de type fini $grE = \bigoplus E_n/E_{n+1}$, appelé gradué associé à E. Le passage de E à grE est fonctoriel par rapport aux morphismes de modules filtrés, qui sont les morphismes de A-modules $u : E \longrightarrow F$ tels que $u(F_n) \subset E_n$. L'observation fondamentale et triviale est la suivante :

Proposition 2.1. Soit $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules telle que F soit muni d'une bonne filtration. Munissons E(resp. G) de la filtration induite (resp. quotient). [On dit alors que la suite ci-dessus est une suite exacte stricte]. Alors la suite $0 \longrightarrow grE \longrightarrow grF \longrightarrow grG \longrightarrow 0$ est exacte.

2.2. Pour étudier un morphisme de modules bien filtrés $u : E \longrightarrow F$, on introduira donc le noyau K muni de la filtration induite, le conoyau C muni de la filtration quotient et l'image I muni de la filtration I'_n quotient de celle de E et de la filtration I''_n induite par celle de F, ce qui donne naissance à des suites exactes :

$0 \longrightarrow grK \longrightarrow grE \longrightarrow grI' \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow grI'' \longrightarrow grF \longrightarrow grC \longrightarrow 0$.

On rappelle que le morphisme est strict si les deux filtrations de I sont égales.

Corollaire 2.3. Soit $u : E \longrightarrow F$ un morphisme de modules bien filtrés

(i) si gru est surjectif il en est de même de u et u est strict

(ii) si gru est injectif il en est de même de u et u est strict

(iii) si gru est isomorphisme, il en est de même de u.

Prouvons (i). Soit $v : F \longrightarrow C$ le conoyau de u, où C est muni de la filtration quotient. Puisque $vu = 0$, on a $grv \,.\, gru = 0$ donc $grv = 0$

car gru est surjectif, donc grC = 0 car grv est surjectif, donc $C = 0$ car la filtration de C est séparée. Donc gru surjectif implique u surjectif. En appliquant ceci au morphisme de modules filtrés $u_n : E_n \longrightarrow F_n$ induit par u (filtations induites). On voit que u_n est surjectif, donc u est strict. On prouve (ii) de façon duale et (iii) résulte de (i) et (ii).

Corollaire 2.4. Soit E un module bien filtré. Si $\mathrm{gr}E = 0$, alors $E = 0$. Si $(\mathrm{gr}E)_n = 0$ pour $n \geqslant n_o$, il existe un entier r tel que $(A_1)^r E = 0$.

Pour la première assertion, appliquer (2.3(iii)) au morphisme nul $0 \longrightarrow E$, pour la seconde, considérons le module E_{n_o} muni de la filtration induite, il est nul, car son gradué l'est. Si maintenant e est un entier tel que $E = E_e$, on peut prendre $r = n_o - e$, car $(A_1)^r E = (A_1)^r E_e \subset E_{n_o} = 0$.

§ 3. Fonction de Hilbert-Samuel, multiplicité, dimension :

3.1. Soit $\underline{q}$ un idéal d'un anneau local noethérien A tel que $A/\underline{q}$ soit de longueur finie. Toutes les composantes homogènes de $G = \mathrm{gr}_{\underline{q}}^A$ sont alors de longueur finie et, plus généralement, pour tout A-module E muni d'une filtration $\underline{q}$-bonne, on peut former la série de Hilbert-Samuel de E

(1) $$H(E;T) = \sum_{n \in \underline{\underline{Z}}} \ell(E_n/E_{n+1})T^n$$

et l'on notera aussi $H(E)$. Sa connaissance équivaut à celle de la fonction de Hilbert-Samuel

(2) $$H(E)(n) = \ell(E_n/E_{n+1}),\ n \in \underline{\underline{Z}}$$

Toutes deux ne dépendent que du gradué associé $\underline{E} = gr(E)$ et nous emploierons les mêmes notations pour tout G-module gradué de type fini $\underline{E}$. Si E est muni de sa filtration q-adique, on écrira :

(3) $\quad H_{\underline{q}}(E;T)$, $H_{\underline{q}}(E)$ ou $H_{\underline{q}}(E)(n)$.

De même, pour tout point x d'un schéma noethérien X et tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{E}$, on notera

(4) $\quad H_x(\mathcal{E},T)$ ou $H_x(\mathcal{E})$ (resp. $H_x(\mathcal{E})(n)$)

la série (resp. la fonction) de Hilbert-Samuel du $\mathcal{O}_{X,x}$-module $\mathcal{E}_x$ muni de sa filtration $m_{X,x}$-adique,

On a :

(5) $\quad H(E(n)) = T^{-n}H(E)$

et si $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte <u>stricte</u> de modules bien filtrés, on a évidemment :

(6) $\quad H(E) = H(E') + H(E'')$.

<u>Remarque 3.2.</u> Si $\underline{p}$ est un idéal de A et si E est un A-module de type fini tel que $E/\underline{p}E$ soit de longueur finie, on peut appliquer ce qui précède et ce qui suit en remplaçant $\underline{p}$ par $\underline{q} = \underline{p} + \underline{a}$, où $\underline{a}$ est l'annulateur de E. En effet, $A/\underline{q}$ est de longueur finie, et, puisque $\underline{p}^nE = \underline{q}^nE$, la filtration $\underline{p}$-adique de E est sa filtration $\underline{q}$-adique et toute filtration $\underline{p}$-bonne de E est $\underline{q}$-bonne et réciproquement.

<u>Lemme 3.3.</u> (Hilbert, cf. [ALM] p. II-22). Soit $\underline{q}$ un idéal d'un anneau local noethérien A et soit E un A-module muni d'une filtration $\underline{q}$-bonne. On suppose que $E/\underline{q}E$ est de longueur finie. Soit e un entier tel que $E = E_{-e}$. On a

(1) $\quad H(E;T) = T^{-e}t(E;T)/(1-T)^d$

où $t(E;T)$ est un polynome à coefficients entiers rationnels et où d est un entier moindre que le nombre de générateurs de l'idéal $\underline{q}$.

3.3.1. En divisant $t(E)$ par une puissance convenable de $(1-T)$, on peut supposer que $t(E;1) \neq 0$, ce qui détermine l'entier d. On l'appelle <u>l'ordre</u> de la série $H(E;T)$ et nous verrons plus bas qu'il est égal à la dimension du module E. Nous verrons aussi que l'entier $t(E;1)$ ne dépend pas de la filtration $\underline{q}$-bonne; on l'appelle la <u>$\underline{q}$-multiplicité</u> de E.

3.3.2. D'après (3.1(5)), en remplaçant E par $E(-e)$, on peut supposer que $E = E_o$, auquel cas $\underline{E} = \mathrm{gr}E$ est un G-module gradué engendré par ses éléments de degré positif. De plus, $G = \mathrm{gr}_{\underline{q}}(A)$ est une B-algèbre graduée, où $B = A/\underline{q}$, engendré par des éléments de degré 1, à savoir les classes $X_1,\ldots,X_r$ d'un système de générateurs $x_1,\ldots,x_r$ de $\underline{q}$. C'est donc un quotient de l'algèbre de polynomes $S = B[X_1,\ldots,X_r]$ et l'on peut considérer $\underline{E}$ comme un S-module dont toutes les composantes homogènes sont de longueur finie, ce qui ne change évidemment pas $H(\underline{E})$. Raisonnons par récurrence sur le nombre r de variables. Si $r = 0$, alors $\underline{E}$ est un B-module gradué de longueur finie et $H(\underline{E})$ est un polynome car $\underline{E}_i = 0$ pour $i < e = 0$. Sinon, on a une suite exacte de S-modules gradués.

(2) $$0 \longrightarrow \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}(-1) \xrightarrow{u} \underline{E} \longrightarrow \underline{E}'' \longrightarrow 0$$

où u est la multiplication par X_r. Les composantes homogènes de $\underline{E}'$ et $\underline{E}''$ sont aussi de longueur finie et l'on a :

(3) $$(1-T)H(\underline{E}) = H(\underline{E}'') - H(\underline{E}')$$

ce qui donne la conclusion, puisque $\underline{E}'$ et $\underline{E}''$ sont des modules sur

$B[X_1,\ldots,X_{r-1}]$.

Proposition 3.4. : Sous les hypothèses de (3.3), soit $E_n \subset E'_n$ une autre filtration $\underline{q}$-bonne de E. Il existe des entiers naturels $0 \leqslant e \leqslant s$ tels que $E_n \subset E'_{n+e}$, $n \in \underline{\underline{Z}}$, $E'_n \subset E_{n-s}$, $n \in \underline{\underline{Z}}$ et l'on a :

(1) $$H^{(1)}(E') \leqslant T^{-e}H^{(1)}(E') \leqslant H^{(1)}(E) \leqslant T^{-s}H^{(1)}(E').$$

3.4.1. Pour expliquer (1), disons que pour toute série formelle $H(T)$ et tout entier n, on pose :

(2) $$H^{(n)}(T) = H(t)/(1-T)^n$$

en sorte que si $H(T) = \sum H_i T^i$ on a $H^{(1)}(T) = \sum_i T^i \sum_{q \geqslant 0} H_{i-q}$ et

(3) $$H^{(1)}(E;T) = \sum_{n \in \underline{\underline{Z}}} \ell(E/E_{n+1})T^n.$$

Par ailleurs, si H et G sont deux séries formelles à coefficients réels, on écrit $H \leqslant G$ si l'on a $H_i \leqslant G_i$, $i \in \underline{\underline{Z}}$, avec $H = \sum H_i T^i$ et $G = \sum G_i T^i$.

On notera que $H \leqslant G$ implique $H^{(1)} \leqslant G^{(1)}$, la réciproque étant inexacte, car, par exemple, on a $(1-T)^{(1)} \geqslant 0$. Dans la même veine, on a trivialement la première inégalité de (1).

3.4.2. Par l'hypothèse, il existe e tel que $E_n \subset E'_{n+e}$, pour tout $n \in \underline{\underline{Z}}$ et l'on peut même prendre $e = 0$, mais l'on ne peut prendre $e = \infty$ que si $E = 0$ car la filtration E' est séparée. On a ainsi

$$H^{(1)}(E) = \sum \ell(E/E_{n+1})T^n \geqslant \sum \ell(E/E'_{n+1+e})T^n = T^{-e}H^{(1)}(E'),$$

d'où la seconde inégalité. Pour prouver la troisième, il suffit de prouver l'existence d'un entier s tel que $E'_n \subset E_{n-s}$. Puisque la filtration E' est $\underline{q}$-bonne, il existe des générateurs $x_1,\ldots,x_t$ du module filtré E' et des entiers $n(i)$ tels que $x_i \in E'_{n(i)}$ et $E'_n = \sum_i \underline{q}^{n-n(i)}x_i$. Puisque la filtration E_k est exhaustive, il existe un entier $s \geqslant 0$ tel que, pour tout i, on ait $x_i \in E_{n(i)-s}$, ce qui assure que $E'_n \subset \sum_i \underline{q}^{n-n(i)} E_{n(i)-s} \subset E_{n-s}$, d'où la conclusion. Nous n'avons pas prouvé que $e \leqslant s$, mais ceci est une conséquence de (1). En effet, si $e > s$ on a :

$$0 \geqslant T^{-e}(1 - T^{e-s})H^{(1)}(E') = T^{-e}(1 + T + T^2 + \ldots + T^{e-s-1})H(E')$$

ce qui est absurde, puisque les coefficients de $H(E')$ sont positifs. Si l'on préfère, cette remarque revient à dire que, pour tout entier $r > 0$, on a :

(4) $\qquad (1-T^r)H^{(1)}(E') \geqslant H(E') \geqslant 0$

car les coefficients de $H(E')$ sont positifs.

Corollaire 3.5. Sous les hypothèses de (3.4), posons

(1) $\qquad H(E;T) = T^{-e}t(E;T)/(1-T)^d$ avec $t(E,1) = a \neq 0$.

Alors les entiers a et d ne dépendent pas de la filtration $\underline{q}$-bonne de E, on a $a > 0$ et $H^{(1)}(E)(n)$ est équivalent à an^d/d .

En remplaçant E par $E(-e)$, on peut supposer que $e = 0$ et $E = E_o$. En ordonnant $t(E;T)$ suivant les puissances de $(1-T)$, on a :

(2) $\qquad H(E;T) = a/(1-T)^d + \ldots + a_{d-1}/(1-T) + a_1 + P(T)$ où $P(T)$ est un polynôme avec $P(1) = 0$, d'où une formule analogue évidente pour $H^{(1)}(E)$. Or on a $1/(1-T)^{d+1} = \sum \binom{n+d}{d} T^n$, d'où il résulte que $H^{(1)}(E)(n) \sim an^d/d!$, ce qui assure déjà que $a > 0$. Par ailleurs, en appliquant (3.4(1)) à la filtration $\underline{q}$-adique $E''_n = \underline{q}^n E$ et à la filtration donnée, on voit que $H^{(1)}(E)(n)$ est équivalent à $H^{(1)}(E'')(n)$, d'où la conclusion.

Corollaire 3.6. L'entier d est le même pour tous les idéaux $\underline{q}$ tels que $E/\underline{q}E$ soit de longueur finie et toutes les filtrations $\underline{q}$-bonnes de E.

Comme dans (3.2), on peut remplacer $\underline{q}$ par $\underline{q} + \underline{a}$ où $\underline{a}$ est l'annulateur de E et supposer que $\underline{q}$ est $\underline{m}$-primaire, ce qui assure l'existence d'un entier s tel que $\underline{m}^s \subset \underline{q} \subset \underline{m}$. On a donc :

$$H^{(1)}_{\underline{m}}(E)((n+1)s) \geqslant H^{(1)}_{\underline{q}}(E)(n) \geqslant H^{(1)}_{\underline{m}}(E)(n),$$

d'où la conclusion, par la dernière assertion de (3.5).

3.7. Soit E un module de type fini sur un anneau local noethérien A. On note $\dim(E)$ la borne supérieure (finie ou infinie) des longueurs des suites strictement croissantes $\underline{p}_0 \subset \underline{p}_1 \dots \subset \underline{p}_r$ d'idéaux premiers de A telles que le localisé $E_{\underline{p}_0}$ soit non nul. On note $d(E)$ l'entier de (3.6) et $s(E)$ la borne inférieure des entiers s tels qu'il existe une suite $(x_1,\dots,x_s)$ d'éléments du radical de A telle que $E/(x_1,\dots,x_s)E$ soit de longueur finie.

<u>Théorème 3.8.</u> On a $s(E) = d(E) = \dim(E)$

<u>Lemme 3.9.</u> (Bennett) Soit $\underline{q}$ un idéal tel que $E/\underline{q}E$ soit de longueur finie et soit (E_n) une filtration $\underline{q}$-bonne de E. Si $x \in \underline{q}^e$, en munissant E/xE de la filtration quotient, on a :

(i) $H^{(1)}(E/xE) \geqslant (1-T^e)H^{(1)}(E)$ et $d(E) \leqslant d(E/xE) + 1$

(ii) Si x est non diviseur de zéro dans E, on a $d(E) = d(E/xE)+1$

(iii) Soit X la classe de x dans $gr^e_{\underline{q}}(A)$. Pour que X soit non diviseur de zéro dans grE, il faut et il suffit que

(1) $$H^{(1)}(E/xE) = (1-T^e)H^{(1)}(E).$$

De plus, s'il en est ainsi, le morphisme naturel

(2) $$grE/XgrE \longrightarrow gr(E/xE)$$

est un isomorphisme.

La multiplication par x est un morphisme de modules filtrés $u:E(-e) \longrightarrow E$ qui donne naissance à des suites exactes de modules filtrés

(3) $$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E(-e) \longrightarrow I \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow I' \longrightarrow E \longrightarrow E/xE \longrightarrow 0$$

où I (resp. I') est l'image de u munie de la filtration quotient(resp. induite).

On a donc :

(4) $\quad H^{(1)}(E/xE) = (1-T^e)H^{(1)}(E) + [H^{(1)}(I) - H^{(1)}(I')] + H^{(1)}(E')$.

D'après(3.4(1)), on a $H^{(1)}(I) - H^{(1)}(I') \geqslant 0$, d'où la première inégalité de (i), qui implique la seconde. Si x est non diviseur de zéro dans E, alors $E' = 0$. Par ailleurs, d'après (3.5), l'ordre de $H^{(1)}(I) - H^{(1)}(I')$ est strictement inférieur à celui de $H^{(1)}(I')$, lui-même inférieur à celui de $H^{(1)}(E)$ car gr(I')est contenu dans gr(E). Comme l'ordre de $(1-T^e)H^{(1)}(E)$ est d(E), on en déduit (ii). Si X est non diviseur de zéro dans grE, on a $I = I' = E(-e)$ par passage au gradué associé à partir des suites exactes de (3) car gr(u) est la multiplication par X, donc $H^{(1)}(E/xE) = (1-T^e)H^{(1)}(E)$ et (2) est un isomorphisme. Réciproquement, puisque les deux derniers termes de (4) sont positifs, l'égalité (1) implique que $E' = 0$ et $I = I'$, d'où la conclusion. [Démonstration suggérée par J.J. Risler].

Prouvons (3.8) (en copiant servilement [ALM]) <u>on a</u> : $s(E) \geqslant d(E)$ car, d'après (i), si $E' = E/(x_1,\dots,x_s)E$ est de longueur finie, on a $d(E) \leqslant s+d(E') = s$. <u>On a</u> $d(E) \geqslant \dim(E)$. En effet, cela est clair si $d(E) = 0$, c'est à dire si E est de longueur finie. Raisonnons par récurrence sur d(E). S'il existe une chaine strictement croissante d'idéaux premiers $\underline{p}_0 \subset \underline{p}_1 \subset \dots \subset \underline{p}_r$ avec $r > d(E)$ et $E_{\underline{p}_0} \neq 0$, on peut supposer que $\underline{p}_0$ est un idéal minimal (ou point maximal) du support V(E) de E, donc aussi un idéal associé à E. Il existe donc un sous-module F de E isomorphe à $A/\underline{p}_0$. On a donc $\dim(F) \geqslant r$ et munissant F de la filtration induite, en sorte que gr(F) est contenu dans gr(E), on voit que $d(F) \leqslant d(E)$, donc $\dim(F) > d(F)$. Soit $x \in \underline{p}_1$, $x \notin \underline{p}_0$. Alors x est non diviseur de zéro dans F et l'on a donc $d(F) = d(F/xF) + 1$ et évidemment $\dim(F/xF) \geq r-1$, d'où $\dim(F/xF) > d(F/xF)$, ce qui est absurde par l'hypothèse de récurrence. <u>On a</u> $\dim(E) \geq s(E)$. Raisonnons par récurrence sur $n = \dim(E)$, qui est fini puisque $\dim(E) \leq d(E)$. Si $n = 0$, alors E est de longueur finie et $d(E) = 0$. Si $n > 1$, les idéaux premiers minimaux $\underline{p}_i$ du support de E tels que $\dim(A/\underline{p}_i) = n$ sont en nombre fini et aucun n'est l'idéal maximal $\underline{m}$. Il existe donc $x \in \underline{m}$ qui n'appartient à aucun d'eux. Pour chacun d'eux, on a donc $(E/xE)_{\underline{p}_i} = 0$, donc $\dim(E/xE) < \dim(E)$, de plus, par l'hypothèse de récurrence, on a $s(E/xE) \leq \dim(E/xE)$ et enfin, on a trivialement $s(E) - 1 \leq s(E/xE)$, d'où la conclusion.

§ 4. Dimension homologique; Anneaux réguliers

4.1. Si E est un A-module, on note $dp_A E$ et on appelle <u>dimension homologique</u> [ou projective] de E la borne inférieure (finie ou infinie) des longueurs des résolutions libres de E. Si G est un anneau gradué et si $\underline{E}$ est un G-module gradué, on note $dph_G \underline{E}$ et on appelle dimension projective <u>homogène</u> de $\underline{E}$ la borne inférieure des résolutions de $\underline{E}$ par des G-modules gradués libres. Dans ces définitions, si A(resp G_o) n'est pas un anneau local noethérien, remplacer "libre" par "projectif". Notons que si $\underline{F}$ est un G-module gradué, alors $\underline{E} \otimes_G \underline{F}$ est quotient du G-module gradué $\underline{E} \otimes_{G_o} \underline{F}$ par un sous-module gradué, donc est un G-module gradué. Par le raisonnement habituel, il en résulte que les $\mathrm{Tor}_i^G(\underline{E},\underline{F})$ sont eux-mêmes des G-modules gradués. Dans ce qui suit, on note G_+ l'idéal gradué de G engendré par ses éléments homogènes de degré non nul, en sorte que $G/G_+ = G_o$.

<u>Proposition 4.2</u>. (résolution graduée minimale). Soit k un corps et soit G une k-algèbre graduée de type fini telle que $G_o = k$. Tout G-module gradué de type fini $\underline{E}$ admet une résolution par des $\underline{G}$-modules gradués libres de type fini

$$(1) \qquad \underline{L}_i \xrightarrow{d} \underline{L}_{i-1} \cdots \underline{L}_1 \xrightarrow{d} \underline{L}_o \xrightarrow{e} \underline{E} \longrightarrow 0$$

telle que, modulo G_+, les différentielles d soient nulles et l'augmentation e soit un isomorphisme. Une telle résolution est unique à isomorphisme près.

4.2.1. Puisque $\underline{E}/G_+\underline{E}$ est un G-module gradué de type fini annulé par G_+, c'est un k-espace vectoriel gradué de rang fini, dont on peut choisir une base formée d'éléments homogènes $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r$ de degré $n_1,\ldots,n_r$ que l'on peut relever en des éléments homogènes $e_1,\ldots,e_r$ de même degré de $\underline{E}$, ce qui permet de définir un module gradué libre $\underline{L}_o = G(-n_1)\oplus\ldots\oplus G(-n_r)$ et un morphisme de modules gradués $e : \underline{L}_o \to \underline{E}$. Il est immédiat que e est un isormorphisme modulo G_+, d'où il résulte que e est surjectif (forme homogène du lemme de Nakayama : si $\underline{F}/G_+\underline{F} = 0$, alors $F = 0$). On introduit le noyau $\underline{K}_0$ de e et on répète l'opération, ce qui donne une résolution telle que (1). L'unicité n'est pas plus difficile à établir.

4.2.2. Puisque $G_o = k$ est un corps, on peut former la série de Poincaré de tout G-module de type fini, en particulier

(2) $$t_i(T) = H(\underline{L}_i/G_+\underline{L}_i\,;T)$$

est un polynôme et, avec les notations ci-dessus, on a :

(3) $$t_0(T) = T^{n_1} + \ldots + T^{n_r}$$

et bien sûr,

(4) $$H(\underline{L}_i;T) = t_i(T)H(G;T).$$

De plus, si l'on note $\underline{K}_i$ le noyau $d : \underline{L}_i \longrightarrow \underline{L}_{i-1}$, alors $\underline{K}_i \subset G_+\underline{L}_i$ en sorte que la composante homogène non nulle de plus bas degré de $\underline{K}_i$ a un degré strictement supérieur à $v(t_i(T))$, où $v(t_i(T))$ est <u>le degré des termes de plus bas degré de</u> $t_i(T)$. Par construction de $\underline{L}_{i+1}$, on a donc

(5) $$v(t_{i+1}(T)) > v(t_i(T));$$

en sorte que l'on peut former la série

(6) $$t(T) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i t_i(T).$$

On prouve maintenant facilement ce qui suit.

<u>Corollaire 4.3.</u> Sous les hypothèses de (4.2), on a, pour toute résolution minimale

(i) $v(t_{i+1}(T)) > v(t_i(T))$, $i \geqslant 0$,

(ii) $H(E) = H(G) \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i t_i(T)$,

(iii) $\mathrm{Tor}_i^G(\underline{E},k) = \underline{L}_i/G_+\underline{L}_i$

(iv) $\mathrm{dph}_G\underline{E} = \inf\{r \mid \mathrm{Tor}^G_{r+1}(\underline{E},k) = 0\}$

(v) $\mathrm{Tor}_i^G(\underline{E},k) = 0$ implique $\mathrm{Tor}^G_{i+1}(\underline{E},k) = 0$, $i \geqslant 0$.

<u>Corollaire 4.4.</u> Si G est une algèbre de polynômes à r indéterminées sur un corps k, (graduée en donnant des degrés arbitraires aux variables), alors, pour tout G-module gradué $\underline{E}$, on a $\mathrm{dph}_G \underline{E} \leqslant r$.

En effet, si $G = k[X_1,\ldots,X_r]$, le complexe de Koszul $K.(\underline{X})$, gradué de manière évidente, est une résolution graduée libre de k de longueur r, d'où il résutlte que $\mathrm{Tor}^G_{r+1}(\underline{E},k) = 0$ pour tout G-module gradué $\underline{E}$. Notons que (4.3(iv)) implique que si $\mathrm{dph}_G\underline{E}$ est fini, alors $\mathrm{dp}_G\underline{H}$ lui est égal, car on a toujours $\mathrm{dph}_G\underline{E} \geqslant \mathrm{dp}_G\underline{E}$, mais le corollaire (4.4) ne montre pas que $\mathrm{dp}_G E \leqslant r$ pour tout G-module de type fini, gradué ou non, ce qui est pourtant vrai comme chacun sait.

<u>Corollaire 4.5.</u> Sous les hypothèses de (4.2) si $\mathrm{dph}_G k$ est fini et si G est engendrée par G_1, alors G est une algèbre de polynômes.

En considérant une résolution graduée minimale $L.$ de k, on a, avec les notations de (4.2)

(1) $$1 = H(k) = H(G)t(T),\ t(T) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} (-1)^i\ t_i(T),$$

où $r = \mathrm{dph}_G k$. Par ailleurs, d'après le lemme de Hilbert (3.3), il existe un polynôme à coefficients entiers $P(T)$ tel que $H(G) = P(T)/(1-T)^N$, où $N = \mathrm{rang}_k(G_1)$, écrire G comme quotient de l'algèbre de polynômes $S = k[G_1])$. On en déduit que $(1-T)^N = t(T)P(T)$, ce qui assure, par le lemme de Gauss, que $P(T) = (1-T)^d$ avec $0 \leqslant d \leqslant N$, d'où $1/(1-T)^{N-d} = H(G) = 1 + NT + \ldots$, ce qui assure que $d = 0$, ce qui assure que le morphisme surjectif $S \longrightarrow G$ est bijectif puisque $H(S) = H(G)$.

<u>Proposition 4.6.</u> Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\underline{m}$ et de corps résiduel $k = A/\underline{m}$ tel que $G = \mathrm{gr}_{\underline{m}}(A)$ soit une algèbre de polynômes (on dit que R est <u>régulier</u>). Alors, tout A-module E est de dimension projective finie.

En effet, d'après (4.4), le G-module gradué $\underline{E} = gr_{\underline{m}}(E)$ admet une résolution graduée libre de longueur finie $\underline{L}. \longrightarrow E$ que l'on relève grâce à (2.3) en une résolution $L. \longrightarrow E$ de E par des modules filtrés libres telle que les différentielles et l'augmentation soient strictes; mais peu importe ici cette dernière propriété, car on a de toutes façons une résolution libre de longueur finie. <u>Nous admettrons la réciproque</u> de cette proposition [ALM p. IV-37] . Le point délicat étant admis, il est maintenant facile de prouver le théorème suivant que nous utiliserons constamment.

<u>Théorème 4.7.</u> Soit A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\underline{m}$ et de corps résiduel k. Posons $G = gr_{\underline{m}}(A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) G est une algèbre de polynômes

(ii) $\dim A = rang_k(\underline{m}/\underline{m}^2)$

(iii) il existe un entier d tel que $H_{\underline{m}}(A) = 1/(1-T)^d$

(iv) le morphisme $k[m/m^2] \longrightarrow G$ est bijectif

(v) tout A-module E est de dimension projective finie

(vi) le A-module k est de dimension projective finie.

4.7.1. Puisque l'on sait que $\dim A$ est l'ordre de la série $H_{\underline{m}}(A) = H(G)$, (3.8), les quatre premières conditions ne portent que sur G. On a évidemment (iv) $\Rightarrow$ (iii). Puisque $H_{\underline{m}}(A) = 1 + NT + \ldots, N = rang_k(\underline{m}/\underline{m}^2)$, on a (iii) $\Rightarrow$ (ii). De plus (ii) $\Rightarrow$ (iv), sinon le noyau K de $S \rightarrow G$, $S = k[\underline{m}/\underline{m}^2]$ est non nul et contient donc un élément F homogène de degré $n > 0$, ce qui assure que G est un quotient de S/FS, donc $H(G) \leqslant H(S/FS) = (1-T^n)H(S)$, donc l'ordre de G est inférieur ou égal à celui de S/FS qui vaut $N-1$, ce qui contredit (ii). Enfin (i) $\Leftrightarrow$ (iv) car G est engendré par G_1. D'après (4.6), (i) $\Rightarrow$ (v) et nous avons admis la réciproque. Il reste à voir que (vi) $\Rightarrow$ (v), ce qui résulte, comme dans le cas gradué, de l'existence de résolutions minimales, cf. (4.8).

4.7.2. On notera que si $\underline{p}$ est un idéal premier d'un anneau local régulier A, une résolution libre finie de $A/\underline{p}$ comme A-module donne, par localisation en $\underline{p}$, une résolution finie du corps résiduel de l'anneau local $A_{\underline{p}}$, celui-ci satisfait donc à la condition (vi). Par suite, <u>un localisé d'un anneau local régulier est régulier</u>. Historiquement, la démonstration par Serre de ce résultat est l'un des premiers succès des méthodes homologiques en algèbre commutative. Un anneau noethérien est dit <u>régulier</u> si tous ses localisés le sont; ceci revient à dire que A est de dimension projective finie [ALM] .

<u>Proposition 4.8.</u> Soit E un module de type fini sur un anneau local noethérien A d'idéal maximal $\underline{m}$ et de corps résiduel $k = A/\underline{m}$. Il existe une résolution $L. \xrightarrow{e} E$ de E par des modules libres (de type fini si E est de type fini) telle que, modulo $\underline{m}$, les différentielles soient nulles et l'augmentation e un isomorphisme. Deux telles résolutions sont isomorphes. On a des isomorphismes canoniques $L_i/\underline{m}L_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^A(E,k)$ et de plus, on a

(1) $\mathrm{dp}_A E = \inf \{i \text{ tels que } L_{i+1} = 0\} = \inf \{i \text{ tels que } \mathrm{Tor}_{i+1}^A(E,k) = 0\}$.

En relevant dans E une base du k-espace vectoriel $E/\underline{m}E$, on peut construire un module libre L_0 et un morphisme $e : L_0 \longrightarrow E$ qui est un isomorphisme modulo $\underline{m}$; le lemme de Nakayama assure alors que e est surjectif. De plus, le noyau K_0 de $e : L_0 \longrightarrow E$ est contenu dans $\underline{m}L_0$, ce qui permet, en itérant la construction, de construire une résolution libre ayant les propriétés souhaitées. En calculant les $\mathrm{Tor}_i^A(E,k)$ grâce à cette résolution, on trouve qu'ils sont égaux aux $L_i/\underline{m}L_i$ car les différentielles sont nulles modulo $\underline{m}$, ce qui implique également (1). Enfin, si $M. \longrightarrow E$ est une résolution libre de E dont <u>les différentielles</u>

sont nulles modulo $\underline{m}$, n'importe quel morphisme de résolutions $M. \longrightarrow L.$ est un isomorphisme car le morphisme qu'il induit $M_i/\underline{m}M_i \longrightarrow L_i/\underline{m}L_i$ s'interprète comme l'identité de $\mathrm{Tor}_i^A(E,k)$, donc est un isomorphisme, il en est donc de même de $M_i \longrightarrow L_i$ car M_i et L_i sont libres.

Corollaire 4.9. Sous les hypothèses de (4.8), on a $H_{\underline{m}}(E) \leqslant \ell(E/\underline{m}E)H_{\underline{m}}(A)$ et si l'on a égalité, alors E est libre.

En effet, en choisissant un système minimal de générateurs de on a une suite exacte $0 \longrightarrow K \longrightarrow L_0 \longrightarrow E \longrightarrow 0$, où L_0 est libre de rang $\ell(E/\underline{m}E)$, d'où $H(L_0) = \ell(E/\underline{m}E)H_{\underline{m}}(A) = H_{\underline{m}}(E) + H(K)$, où K est muni de la filtration induite par celle de L_0, d'où la conclusion.

Corollaire 4.10. Sous les hypothèses de (4.8), si A intègre et si l'on note $r(E)$ le rang de l'espace vectoriel $E \otimes_A \mathrm{Fr}(A)$, on a $r(E) \leqslant \ell(E/\underline{m}E)$ et si l'on a égalité, alors E est libre.

En effet, reprenant la suite exacte ci-dessus, on voit que $r(E) = r(L_0) - r(K) = \ell(E/mE) - r(K)$, d'où l'inégalité. Si l'on a égalité, alors $r(K) = 0$, donc $K \otimes_A \mathrm{Fr}(A) = 0$, donc $K = 0$, car K est sans torsion.

Définition 4.11. Un système régulier de paramètres d'un anneau local noethérien A est une suite $(x_1,\ldots,x_r)$ d'éléments de $\underline{m}$ dont les classes modulo $\underline{m}^2$ forment une base de $\underline{m}/\underline{m}^2$ et où $r = \dim A$.

Il est immédiat que l'existence d'un système régulier de paramètres assure que A est régulier, et réciproquement.

Proposition 4.12. Soit R un anneau local régulier et $\underline{p}$ un idéal. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $R/\underline{p}$ est régulier

(ii) il existe un système régulier de paramètres $(x_1,\ldots,x_{t+s})$ de R tel que $\underline{p} = (x_1,\ldots,x_t)$.

De plus, danc ces conditions, les classes de $(x_{t+1},\dots,x_{t+s})$ forment un système régulier de paramètres de $R/\underline{p}$ et les images des $(x_1,\dots,x_s)$ dans $R_{\underline{p}}$ forment un système régulier de paramètres de $R_{\underline{p}}$.

Notons $\underline{n} = \underline{m}/\underline{p}$ l'idéal maximal de $S = R/\underline{p}$; on a une suite exacte de k-espaces vectoriels

(1) $$0 \longrightarrow \underline{p}(\underline{p} \cap \underline{m}^2) \longrightarrow \underline{m}/\underline{m}^2 \longrightarrow \underline{n}/\underline{n}^2 \longrightarrow 0.$$

Si on a (ii), les classes X_i des x_i dans $\underline{m}/\underline{m}^2$ forment une base et l'on a $x_i \in \underline{p}/(\underline{p} \cap m^2)$ pour $1 \leqslant i \leqslant t$, donc $\mathrm{rang}(\underline{n}/n^2) \leqslant s = \dim R - t \leqslant \dim S$, la dernière inégalité résultant de (3.8) et (3.9.(i)). Comme, de toutes façons, on a $\dim S \leqslant \mathrm{rang}\ (\underline{n}/\underline{n}^2)$, on a égalité et S est régulier. De plus, les X_i pour $i > t$ forment une base de $\underline{n}/\underline{n}^2$ donc les classes dans S des x_i pour $i > t$ forment un système régulier de paramètres de S. Notons de plus, que, puisque $\underline{p} = (x_1,\dots,x_t)$, on a $t \geqslant \mathrm{rang}\ \underline{p}/\underline{mp}$ et comme $\underline{mp} \subset \underline{p} \cap \underline{m}^2$, on a $t \geqslant \mathrm{rang}\ \underline{p}/\underline{mp} \geqslant \mathrm{rang}\ \underline{p}/(\underline{p} \cap \underline{m}^2) = t$, donc

(2) $$\underline{mp} = \underline{p} \cap \underline{m}^2 \quad ;$$

en fait, on a même :

(3) $$\underline{p}^i\underline{m}^j = \underline{p}^i \cap \underline{m}^{i+j} \quad , i \geqslant 0,\ j \geqslant 0,$$

mais nous laissons cet exercice au lecteur. Il est clair que $(X_1,\dots,X_t)$ est une suite régulière dans $\mathrm{gr}_{\underline{m}}R = k[X_1,\dots,X_{t+s}]$, d'où il résulte aisément que $(x_1,\dots,x_t)$ est une suite régulière dans R, d'où il résulte par [EGA 0_{IV} 15.1.9.] que <u>le morphisme naturel</u>

(4) $$S[U_1,\dots,U_t] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\underline{p}}R$$

est un <u>isomorphisme</u>, où l'image de U_i est la classe de x_i dans $\underline{p}/\underline{p}^2$

En localisant en l'idéal premier $\underline{p}$, on conclut que :

(5) $$S_{\underline{p}}[U_1,\dots,U_t] \longrightarrow gr_{\underline{p}}(R_{\underline{p}})$$

est un isomorphisme, où, cette fois-ci, l'image de U_i est la classe dans $\underline{m}'/\underline{m}'^2$ de x_i', avec $\underline{m}' = \underline{p}R_{\underline{p}}$ et x_i' l'image de x_i dans $R_{\underline{p}}$. C'est plus qu'il n'en faut pour savoir si les x_i', $1 \leqslant i \leqslant t$, forment un système régulier de paramètres du localisé $R_{\underline{p}}$. Il nous reste à prouver que (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $x_1,\dots,x_t$ une suite d'éléments de $\underline{p}$ dont les images dans $\underline{p}/(\underline{p} \cap \underline{m}^2)$ forment une base de cet espace. D'après ce que nous venons de voir, l'anneau $S' = R/(x_1,\dots,x_t)$ est régulier et de dimension dim R-t, ce nombre est égal au rang de $\underline{n}/\underline{n}^2$ d'après la suite exacte (1), c'est à dire à la dimension de S puisque S est supposé régulier. On a donc une application surjective $S' \longrightarrow S$ entre deux anneaux réguliers de même dimension, elle est donc bijective car elle induit une bijection entre les espaces cotangents, donc entre les gradués associés. On en déduit que $\underline{p} = (x_1,\dots,x_t)$, d'où (ii) en complétant $(x_1,\dots,x_t)$ en un système régulier de paramètres de R.

<u>Propositon 4.13.</u> Soit $(x_1,\dots,x_t)$ une suite régulière d'éléments de l'idéal maximal $\underline{m}$ d'un anneau local noethérien A. Si $A' = A/(x_1,\dots,x_t)$ est régulier, il en est de même de A.

Par récurrence, on peut supposer que $t = 1$, auquel cas, on a $\dim A' = \dim A - 1$ et, si $\underline{m}'$ est l'idéal maximal de A', on a $\dim A' = \text{rang } \underline{m}'/\underline{m}'^2 - 1 \geqslant \text{rang } \underline{m}/\underline{m}^2 - 1$, donc $\dim A = \text{rang } \underline{m}/\underline{m}^2$ et A est régulier et l'on peut même affirmer que $x_1 \notin m^2$.

§ 5. Faîte d'un cone.

Naïvement, un cone C est une partie d'un espace vectoriel V qui est stable par homothéties, son faîte (terminologie aimablement proposée par P. Gabriel) est l'ensemble F des translations qui appliquent C dans C. C'est un sous-espace vectoriel de V contenu dans C. S'il n'est pas nul, alors C est un cylindre. En géométrie algébrique, si a est un élément d'un corps de caractéristique $p > 0$ qui n'est pas une puissance p-ième, le cone d'équation $X^p + aY^p = 0$ dans un espace vectoriel de dimension 2 est égal à son faîte mais n'est pas un espace vectoriel, ni même un espace vectoriel "compté plusieurs fois", car l'origine est son seul point rationel Par ailleurs, Bennett dans sa thèse et Hironaka dans sa théorie du polyèdre de Newton considérant un anneau régulier R filtré de telle façon que le gradué associé soit une algèbre de polynomes $k[X_1,\ldots,X_n]$ graduée en donnant aux X_i des degrés $a_i > 0$, certains des a_i pouvant être différents de 1, géométriquement, cette graduation définit une représentation du monoïde multiplicatif k dans V, donnée par $\lambda(X_1,\ldots,X_n) = (\lambda^{a_1}X_1,\ldots, \lambda^{a_n}X_n)$, et le gradué associé à un anneau quotient de R correspondant à une partie C de V stable par ces nouvelles opérations ("cone tangent anisotrope"), ce qui explique que nous acceptions quelques complications pour traiter le cas de ces graduations inhabituelles.

Définition 5.1. Soit B un schéma. On appelle cone de sommet B le spectre C d'une $\underline{O}_B$-algèbre graduée, quasi-cohérente et localement de présentation finie G telle que $G_0 = \underline{O}_B$.

5.1.1. La droite affine

(1) $$\alpha_B = \mathrm{Spec}(\underline{O}_B[T])$$

qui représente le foncteur (contravariant) en anneaux

(2) $$\alpha_B(B') = \mathrm{Sch}_B(B',\alpha_B) = \underline{O}_B(B'),$$

où B' désigne un B-schéma quelconque,

opère sur C grâce au morphisme $\alpha_B \times C \to C$ défini par le morphisme d'algèbres

(3) $\qquad G \to G \otimes_{\underline{O}_B} \underline{O}_B [T] = G[T]\ ,\ f \mapsto \sum f_n T^n,$

où les f_n sont les composantes homogènes de f. On rappelle que si E est un $\underline{O}_B$-module cohérent, le <u>fibré vectoriel</u> (EGA II 1.7)

(4) $\qquad V(E) = \mathrm{Spec}(\underline{O}_B [E])$

représente le foncteur en modules sur l'anneau α_B

(5) $\qquad V(E)(B') = \mathrm{Sch}_B(B', V(E)) = \mathrm{Mod}_{\underline{O}_B}(E, \underline{O}_{B'}).$

La graduation de $\underline{O}_B[E]$ qui définit les opérations de α_B sur $V(E)$ est appelée graduation naturelle (ou isotrope); elle s'obtient en donnant le degré 1 aux éléments de E. On appelle <u>fibré vectoriel à opérateurs</u> un fibré vectoriel $V(E)$ muni d'opérations supplémentaires du monoïde multiplicatif α_B qui commutent aux précédentes et à la loi de groupe additif $V(E)$; on dit parfois que le fibré est <u>isotrope</u> si les deux opérations de α_B coïncident et <u>anisotrope</u> dans le cas contraire. Ces opérations supplémentaires correspondant à une seconde graduation de $\underline{O}_B[E]$ qui est compatible avec la première et telle que l'application diagonale soit bi-homogène. Cette seconde graduation induit donc une graduation $E = \bigoplus E_i$ qui permet de la reconstituer de façon évidente. Un <u>espace numérique</u> est un fibré vectoriel $V(E)$ où E est libre de type fini sur $\underline{O}_B$. Si c'est en plus un fibré vectoriel à opérateurs, alors les E_i sont localement libres et, au moins localement , $V(E)$ est le spectre d'une algèbre de polynômes $\underline{O}_B [X_1, \ldots, X_n]$, gradués en donnant aux X_i des degrés $a_i \geqslant 0$, et dire que le sommet du cone $V(E)$ ainsi obtenu est B revient à dire que l'on a $a_i > 0$.

5.1.2. Un idéal homogène localement de type fini d'une algèbre symétrique $\underline{O}_B [E]$ munie d'une graduation héritée d'une graduation de E définit un sous-cone fermé C du fibré vectoriel à opérateurs $V(E)$. Inversement, si $C = \mathrm{Spec}(G)$ est un cone de base B, alors, localement sur B, il existe un entier n tel que

G soit engendrée par les G_p, $p \leqslant n$, et C est un sous-cone fermé de $V(\bigoplus_{p\leqslant n} G_p)$; quitte à localiser encore pour que B soit affine, on peut choisir des générateurs de G et décrire C comme un sous-cone fermé d'un espace numérique à opérateurs.

<u>Définition 5.2.</u> Soit C un sous-cone fermé d'un fibré vectoriel à opérateurs $V = V(E)$. Pour tout B-schéma B', on note $F(B')$ l'ensemble des $v \in V(B')$ tels que la translation d'amplitude v

(1) $$C \times_B B' \longrightarrow V \times_B B'$$

applique $C \times_B B'$ dans lui-même. On appelle <u>faîte</u> de C <u>dans</u> E le sous-foncteur F de V ainsi défini.

5.2.1. Puisque la section nulle de V se factorise par C, on a $F \subset C$ et par suite l'assertion « F ne dépend pas du plongement $i : C \longrightarrow V$ de C dans l'espace numérique V » a un sens. On la démontre aisément dans le cas d'un second plongement $i' : C \longrightarrow V'$ tel qu'il existe un morphisme $j : V \longrightarrow V'$ avec $i' = ji$. Le cas général s'en déduit en notant que l'on a toujours un morphisme $V(E) \longrightarrow V(\bigoplus_{p\leqslant n} G_n)$ pour n convenable. Bien entendu, F est un sous-foncteur en groupes de $V(E)$ mais n'est pas nécessairement un fibré vectoriel, comme le montre l'exemple cité dans l'introduction.

<u>Proposition 5.3.</u> Soit C un cône de sommet B <u>plat</u> sur B. Alors le faîte F de C est représentable par un sous-schéma fermé de C.

5.3.1. Bien entendu, F n'est pas nécessairement plat sur B comme on voit en faisant dégénérer deux droites concourrantes en une droite double. L'énoncé étant local sur B, car F est évidemment un faisceau pour la topologie de Zariski sur $Sch_{/B}$, on peut supposer que B est affine d'anneau A et que C est le spectre d'une A-algèbre gradué de présentation finie G, autrement dit que G est le quotient d'une algèbre de polynômes graduée S, par un idéal homogène de type fini J. Soit N la borne supérieure des degrés des générateurs de S et J. Comme les composantes homogènes de G sont des B-modules plats de présentation finie, quitte à localiser sur B, on peut supposer que les G_p, $p \leqslant N$

sont libres sur B et choisir une base homogène e_i, $i \in I$, du B-module gradué $H = \bigoplus_{p \leqslant N} G_p$.

Considérons alors le morphisme composé q

(1) $$S \xrightarrow{\Delta} S \otimes_A S \longrightarrow S \otimes_A G$$

où Δ est l'application diagonale, c'est à dire le morphisme qui définit la structure de groupe de Spec(S). Pour tout $f \in J_p$, $p \leqslant N$, $q(f)$ est homogène de degré p, donc appartient à $S \otimes_A H$, donc s'écrit de façon unique

(2) $$q(f) = \sum_{i \in I} s_i(f) \otimes e_i, \quad s_i(f) \in S_{p-\deg(e_i)},$$

car $S \otimes_A H$ est un S-module libre de base les $1 \otimes e_i$. <u>Je dis que le sous-schéma fermé</u> F' <u>de</u> $V = \mathrm{Spec}(S)$ <u>défini par l'idéal</u> (de type fini) <u>engendré par</u> les $s_i(f)$, $i \in I$, $f \in J_p$, $p \leqslant N$, <u>représente le faîte</u> de C <u>dans</u> V. Il suffit de prouver que, pour tout B-schéma affine B' d'anneau A', on a $F(B') = F'(B')$. Soit $\bar{v} \in V(B')$, défini par un morphisme de B-algèbres $v : S \longrightarrow A'$. La condition $\bar{v} \in F(B')$, (5.2(1)), signifie que le composé

$$B' \times_B C \xrightarrow{(\bar{v}, id)} V \times_B C \xrightarrow{(id, j)} V \times_B V \xrightarrow{m} V$$

où $j : C \longrightarrow V$ est l'inclusion et m la loi de groupe de V, se factorise par C, ce qui signifie que le composé ci-dessous annule J

$$A' \otimes_A G \xleftarrow{v \otimes 1} S \otimes_A G \longleftarrow S \otimes_A S \xleftarrow{\Delta} S.$$

Il suffit de vérifier cette assertion pour les $f \in J_p, p \leqslant N$, or on a

(3) $$(v \otimes 1)(q(f)) = \sum_{i \in I} v(s_i(f)) \otimes e_i$$

et, de plus, l'élément (3) appartient à $A' \otimes_A H$ qui est libre sur A' de base les $1 \otimes e_i$. La condition $v \in F(B')$ signifie donc que les $v(s_i(f))$ sont nuls, ce qui signifie que $v \in F'(B')$.

5.3.2. Les cones que nous aurons à considérer seront obtenus en considérant un sous-schéma fermé Y d'un schéma localement noethérien X défini par un faisceau d'idéaux P et en formant le <u>cone normal</u> de X <u>le long</u> de Y

(4) $$C_Y(X) = \mathrm{Spec}(\mathrm{gr}_Y(X)), \quad \mathrm{gr}_Y(X) = \bigoplus_{n \geqslant 0} P^n/P^{n+1},$$

qui a pour sommet Y, et le <u>cone tangent</u> à X en un point x de Y

(5) $\quad C_x(X) = \mathrm{Spec}(gr_x(X)),\ gr_x(X) = gr_{\underline{m}_{X,x}}(\underline{O}_{X,x}).$

Le faîte

(6) $\quad F_x(X)$

de $C_x(X)$ est un schéma algébrique sur le corps résiduel $k(x)$, ce qui permet d'attacher à x un autre invariant que la série de Hilbert-Samuel $H_x(X)$ de $C_x(X)$, à savoir

(7) $\quad f_x(X) = \dim F_x(X).$

Hironaka appelle $F_x(X)$ <u>l'espace tangent strict</u> de X en x, par opposition à son <u>espace tangent de Zariski</u>

(8) $\quad T_x(X) = V(\underline{m}_{X,x}/\underline{m}^2_{X,x}).$

5.3.3. Anticipant un peu, supposons que Y soit régulier et $gr_Y(X)$ plat sur Y, ce qu'on exprime en disant que Y <u>est permis pour</u> X. Alors le faîte $F_Y(X)$ de $C_Y(X)$ est représentable et la dimension de sa fibre $F_Y(X)(x)$ en $x \in Y$ est donc une fonction semi-continue supérieurement de x. Par le critère de Hironaka (II.2.2) on sait que, pour tout $x \in Y$ l'espace tangent $T_x(Y) = C_x(Y) = F_x(Y)$ est contenu dans le faîte de $C_x(X)$ ce qui permet comme on verra en (5.4(iv)) de former le quotient $C_x(X)/C_x(Y)$ et celui-ci est isomorphe naturellement à la fibre $C_Y(X)(x)$ de $C_Y(X)$ au point x. Comme la formation du faîte commute par définition à tout changement de base, on en déduit un isomorphisme entre la fibre $F_Y(X)(x)$ de $F_Y(X)$ et le faîte de $C_Y(X)(x)$ d'où l'on déduit un isomorphisme

(9) $\quad F_x(X)/T_x(Y) = F_Y(X)(x),$

d'où il résulte que la fonction $F_x(X) - \dim(\underline{O}_{Y,x})$ est <u>semi-continue supérieurement</u> pour $x \in Y$, si Y est permis pour X.

Nous allons rassembler maintenant quelques résultats élémentaires sur les cones ayant pour sommet le spectre d'un corps.

<u>Proposition 5.4.</u> Soient k un corps et $V = \mathrm{Spec}(k[\underline{X}])$, le spectre d'une algèbre de polynomes graduée en donnant aux X_i, $1 \leq i \leq n$, des degrés $a_i > 0$. Soit J un idéal homogène de S tel que $F = \mathrm{Spec}(S/J)$ soit un sous-groupe de V. Il existe des polynomes additifs homogènes $s_1,\ldots,s_e$ tels que, quitte à réordonner les X_i, on ait

(i) $s_i = X_i^{q_i} + t_i(X_{i+1},\ldots,X_n)$, $1 \leq i \leq e$,

(ii) les s_i sont algébriquement indépendants sur k et le morphisme $p : V \to W$ défini par l'inclusion $k[\underline{s}] \to S$ est un quotient V/F

(iii) $J = (\underline{s})S$

(iv) les sous-cones de V dont le faîte contient F sont ceux dont l'idéal I satisfait à $I = (I \cap k[\underline{s}]).S$; ils correspondent bijectivement aux sous-cones de W.

5.4.1. Si $A \in \underline{\underline{N}}^n$, on pose $|A| = \Sigma\, a_i A_i$. On rappelle qu'un polynome $f \in S$ est dit <u>additif</u> si

(1) $$f(\underline{X} + \underline{X}') = f(\underline{X}) + f(\underline{X}').$$

ce qui revient à dire que le sous-schéma fermé de V d'équation $f = 0$ est un sous-groupe. Si on pose

(2) $$f(\underline{X} + \underline{X}') = \sum_{B,C} c_{B,C}\underline{X}^B\underline{X}'^C$$

on a

(3) $$c_{B,C} = f_{B+C}\binom{B+C}{C}, \text{ où } f = \sum_A f_A \underline{X}^A,$$

et, pour que f soit additif, il faut et il suffit que $c_{B,C} = 0$ dès que B et C sont tous deux non nuls. Il résulte de (3) que ceci revient à dire que f_A n'est non nul que si $\underline{X}^A = X_i^q$ où q est une puissance de l'exposant caractéristique p de k. En particulier, un polynome additif homogène de degré d est de la forme

(4) $$f = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i X_i^{q_i}, \; c_i \in k, \; q_i = d/a_i, \; 1 \leq i \leq n,$$

où q_i est une puissance de p, ce qui impose que a_i/a_j soit une puissance de p si $c_i c_j \neq 0$.

5.4.2. On définit des applications k-linéaires $D_A : S \to S$, $A \in \underline{\underline{N}}^n$, grâce à la formule

(1) $$f(\underline{X} + \underline{X}') = \sum_A (D_A f)(\underline{X})\underline{X}'^A,$$

qui assure que $D_A \underline{X}^B = 0$ si $B - A \notin \underline{\underline{N}}^n$ et $D_A \underline{X}^B = \binom{B}{A} \underline{X}^{B-A}$ dans le cas contraire; si f est homogène de degré p, on a

(2) $$D_0 f = f \quad \text{et} \quad \sum_{|A| = p} (D_A f)\underline{X}'^A = f(\underline{X}')$$

et par suite

(3) $$f(\underline{X}+\underline{X}') - f(\underline{X}) - f(\underline{X}') = \sum_{0 \neq |A| \neq p} (D_A f)(\underline{X})\underline{X}'^A.$$

Considérons

(4) $$H = \{f \in S \mid f(\underline{X}+\underline{X}') - f(\underline{X}') \in J \otimes_k k[X']\}.$$

Comme l'application diagonale Δ de S n'est autre que $f(\underline{X}) \mapsto f(\underline{X}+\underline{X}')$, (en identifiant $S \otimes_k S$ à $k[\underline{X}, \underline{X}']$), on voit que H n'est autre que l'algèbre des fonctions f sur V telles que $f(u+v) = f(v)$, pour tout point (u,v) de $F \times V$ à valeurs dans un k-schéma quelconque, c'est pourquoi on l'appelle <u>l'algèbre des invariants de</u> F <u>dans</u> V; c'est le noyau du couple de flèches $(\Delta, p_2) : S \rightrightarrows (S/J) \otimes_k S$ et si l'on pose $W = \mathrm{Spec}(H)$, on a des morphismes

(5) $$W \xleftarrow{p} V \overset{m}{\underset{p_2}{\leftleftarrows}} F \times V, \quad pm = pp_2,$$

où p est induit par l'inclusion $H \subset S$ et m par l'addition de V. Nous montrerons plus bas que p est conoyau de (m, p_2) dans la catégorie des schémas et est fidèlement plat, après avoir vu que H est l'algèbre $k[\underline{s}]$ de l'énoncé, ce qui précise le sens de (ii). En attendant, notons que la description de H comme conoyau montre que c'est une sous-algèbre graduée de S et que l'on déduit de (3) et (4) que

(6) $$H_p = \{f \in J_p \mid D_A f \in J, \ |A| \neq p\}.$$

<u>Lemme 5.4.3.</u> Soit H une sous-algèbre graduée de S telle que, pour tout $f \in H_p$ et tout multi-indice A on ait $D_A f \in H$ ($D_A f \in k$, si $|A| \geq p$). Alors il existe des polynomes additifs homogènes $s_1, \ldots, s_e$ tels que $H = k[\underline{s}]$.

Soit K la sous-algèbre de H engendrée par les polynomes additifs qui appartiennent à H. Supposons que $K_p = H_p$, $p < N$, et soit $f \in H_N$. Pour tout $g = \sum g_A \underline{X}^A$, désignons par $ex(g)$ le plus grand multiindice A, pour l'ordre lexicographique, tel que $g_A \neq 0$; on l'appelle l'exposant de A. Pour prouver que $f \in K_N$, on peut supposer que $f_A = 0$ pour tout A tel qu'il existe $g \in K_N$ tel que $ex(g) = A$, et il reste à prouver que f est additif. Soit $A = \varepsilon(f)$ le plus grand multi-indice tel que $f_A \neq 0$ et tel que $\underline{X}^A$ ne soit pas un polynome additif. Alors il existe des multi-indices B et C tous deux non nuls tels que $D_B\underline{X}^A \neq 0$ et $D_C\underline{X}^A \neq 0$, avec $B+C = A$, et par suite, $D_B\underline{X}^A . D_C\underline{X}^A = a\underline{X}^A$, $a \neq 0$. Par hypothèse, D_Bf et D_Cf appartiennent à H, donc à K car leur degré est $< N$. De plus, $ex(D_Bf) = ex(D_B\underline{X}^A)$ par définition de A, donc $ex(D_Bf.D_Cf) = ex(D_B\underline{X}^A.D_C\underline{X}^A) = ex(a\underline{X}^A) = A$, donc $f_A = 0$ puisque $D_Bf.D_Cf \in K$, donc f est additif, donc $f \in K_N$.

5.4.4. Il existe donc des polynomes additifs homogènes $s_1,\dots,s_f$ de degré $d_1,\dots,d_f$ avec $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots \leqslant d_f$ tels que $H = k[\underline{s}]$ (jusqu'ici, on n'exclut pas que les s_i soient en nombre infini). On a donc

$$(1) \qquad s_a = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_{ai}(X_i)^{d_a/a_i}, \quad 1 \leqslant a \leqslant f.$$

Quitte à changer l'ordre des X_i, on peut supposer que $c_{1,1} \neq 0$ et, en multipliant s_1 par une constante, on peut supposer que $c_{1,1} = 1$. Pour $a > 1$, si $c_{a1} \neq 0$, alors $r = d_a/d_1$ est une puissance de p, donc un entier car $d_a \geqslant d_1$, donc $s'_a = s_a - c_{a1}(s_1)^r$ est un polynome additif homogène et l'on peut remplacer s_a par s'_a en sorte que $c_{a1} = 0$ si $a > 1$. Par récurrence en s'arrêtant dès que $H = k[\underline{s}]$, et en tous cas dès que $e = n$, ce qui montre que H est de type fini, on obtient des polynomes additifs $s_1,\dots,s_e$ qui satisfont à (i) et engendrent H. Pour montrer qu'ils sont algébriquement indépendants, considérons un polynome

$$f(s) = \sum_{A \in \underline{\underline{N}}^e} f_A \underline{s}^A = \sum_{B \in \underline{\underline{N}}^e} c_B \underline{X}^B.$$

Pour tout $A \in \underline{\underline{N}}$, si $B = (A_1 d_1/a_1, \ldots, A_e d_e/a_e, 0, 0, \ldots, 0)$ on a $c_B = f_A$ en vertu de (i) donc si $f(\underline{s}) = 0$, tous les f_A sont nuls. Notons maintenant que le morphisme $p : V \to W$ de (5.4.2(5)) est plat, car en fait S <u>est libre</u> sur H <u>de base</u> les $\underline{X}^A$, où

(2) $\qquad A \in \underline{A} = \{B \in \underline{\underline{N}}^n \,\big|\, 0 \leqslant B_i < d_i/a_i,\ 1 \leqslant i \leqslant e,\ \ d_i = \deg(s_i),\ \ a_i = \deg(X_i)\}$

En fait, $p : V \to W$ est surjectif, donc <u>fidèlement plat</u>, car si k' est une clôture algébrique de k, l'application $p(k') : V(k') \to W(k')$ est surjective, comme on voit en notant que le système (i) qui donne les X en fonction des s est triangulaire. Puisque p est un morphisme de groupes fidèlement plat, c'est un quotient V/F', où $F' = p^{-1}(0)$, et pour achever de prouver (ii), il nous suffit de montrer que $F = F'$, c'est à dire (iii). Par descente fidèlement plate, on en déduira (iv), avec ce complément évident que le sous-cone de W qui correspond à un sous-cone C de V d'idéal I a pour idéal $I \cap H$.

5.4.5. Prouvons (iii), c'est à dire $J = (\underline{s})S$. Soit N un entier tel que $J_p \subset (\underline{s})S$ pour $p < N$. Pour prouver que tout $f \in J_N$ appartient à $(\underline{s})S$, on peut supposer que $f = \sum_{A \in \underline{A}} f_A \underline{X}^A$, $f_A \in K$, et il suffit de prouver que f est additif qui implique $f \in K_+ \subset (\underline{s})S$. Puisque J est l'idéal d'un sous-groupe de V, hypothèse que nous n'avions pas encore utilisée, on a $\Delta f \in J\otimes S + S\otimes J$; pour des raisons d'homogénéité et parce que $J_p \subset (\underline{s})S$ pour $p < N$, on a

(1) $\qquad F = \Delta f - f\otimes 1 - 1\otimes f \in (\underline{s})S\otimes S + S\otimes(\underline{s})S.$

En vertu de (5.4.4(2)), S est libre sur k de base des $\underline{s}^A \underline{X}^B$, $A \in \underline{\underline{N}}^e$, $B \in \underline{A}$, et par suite, les $\underline{s}^A \underline{X}^B \underline{s}'^C \underline{X}'^D$, $(A,B,C,D) \in \underline{\underline{N}}^e \times \underline{A} \times \underline{\underline{N}}^e \times \underline{A}$ forment une base de $S\otimes S = k[\underline{X}, \underline{X}']$ sur k. Vu l'hypothèse faite sur f, on a $F = \sum_{(A,B) \in \underline{A} \times \underline{A}} F_{AB} \underline{X}^A \underline{X}'^B$. Or tout élément $c = \sum c_{ABCD} \underline{s}^A \underline{X}^B \underline{s}'^C \underline{X}'^D$ de $(\underline{s})S\otimes S + S\otimes(\underline{s})S$ satisfait évidemment à $c_{OBOD} = 0$, donc (1) assure que $F = 0$, donc F est additif.

5.4.6. Nous aurions pu faire l'économie de cette démonstration en citant Demazure et Gabriel, Groupes Algébriques, North Holland Pub. Cy., 1970 qui nous assure que $W = V/F$ existe et est affine (III 3.5.6) puis, par le théorème de structure des groupes unipotents, que W est un espace numérique, autrement dit, avec nos notations, que l'algèbre H est une algèbre de polynomes $H = k[\underline{s}]$ telle que $W = \mathrm{Spec}(H)$. Mais il nous a semblé instructif pour le lecteur débutant de traiter ce cas particulier avec les moyens du bord. Notons qu'inversement, si l'on considère une sous-algèbre H de S satisfaisant à l'hypothèse de (5.4.3), elle correspond à un morphisme de groupes $p : V \to W$, $W = \mathrm{Spec}(H)$, qui est fidèlement plat (5.4.4(1)), ce qui assure que W est le quotient V/F, où $F = p^{-1}(0)$ est défini par l'idéal $(\underline{s})S$. On en déduit que H est bien l'algèbre des invariants de F, ce qui démontre le corollaire que voici :

<u>Corollaire 5.5</u> Soit $V = \mathrm{Spec}(S)$ un espace numérique à opérateurs sur un corps k. Les sous-groupes fermés F de V qui sont des cones pour l'opération de α correspondent bijectivement aux sous-algèbres graduées de S qui satisfont à la condition de (5.4.3), bijection qui est obtenue en attachant à un sous-groupe F son algèbre des invariants (5.4.2) et à une sous-algèbre H le sous-groupe d'idéal H_+S.

<u>Corollaire 5.6.</u> Soit V un espace numérique isotrope sur un corps k, soit C un sous-cone fermé de V et soit F son faîte. Il existe un sous espace numérique D_k de V tel que $D_k(k) = F(k)$. C'est le plus grand sous-espace numérique de V qui soit contenu dans F(i.e. qui laisse C invariant). Si k est parfait, on a $D_k = F_{réd}$, si la caractéristique de k est nulle, on a $D_k = F$.

On dit que D_k est la <u>directrice</u> de C. Contrairement à F, sa formation ne commute pas à l'extension du corps de base (cf. l'exemple donné dans l'introduction). Puisque V est isotrope, $F(k)$ est un sous-espace vectoriel de $V(k)$, ce qui nous assure de l'existence de D_k tel que $D_k(k) = F(k)$. Si k' est une clôture algébrique de k, on a $D_k(k') = D_k(k) \otimes_k k' \subset F(k')$ d'où l'on conclut, puisque D_k est réduit, que $D_k \subset F$. Si k est parfait, puisque V est isotrope, chaque s_i est une puissance d'une forme linéaire Y_i, $1 \leqslant i \leqslant e$, et l'on a $S = k[Y_1,\dots,Y_e, X_{e+1},\dots,X_n]$ en vertu de (5.4(ii))(changement de variables triangulaires) et $J = (Y_1^{d_1},\dots,Y_e^{d_e})S$, donc l'idéal de D_k est $(Y_1,\dots,Y_e)$, donc $D_k = F_{réd}$. Si la caractéristique est nulle, les s_i sont des formes linéaires, donc F est un espace numérique, donc $F = D_k$. En général, il existe une extension finie purement inséparable k'/k telle que chaque s_i soit une puissance d'une forme linéaire et l'on a ainsi $D_{k'} = (F\times_k k')_{red}$. On notera que l'algèbre des invariants de D_k, notée K, est la plus petite sous-algèbre de polynomes de S engendrée par K_1 et telle que l'on ait $I = (I \cap K)S$, où I est l'idéal de C, puisque D_k est le plus grand sous-espace numérique de V contenu dans le faîte de C. La dimension de K est donc le nombre minimum de variables nécessaires pour écrire des équations de C. Notons aussi que l'on a un isomorphisme non canonique $V = (V/D_k) \times D_k$, donc $C = (C/D_k) \times D_k$, mais C n'est pas toujours isomorphe au produit $(C/F) \times F$. Pour terminer, sous les hypothèses et avec les notations de (5.4), lorsque F est contenu dans le faîte d'un cone C, on a

$$(1) \qquad H(V) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} (1-T^{a_i})^{-1}, \quad H(W) = \prod_{1\leqslant i\leqslant e} (1-T^{d_i})^{-1},$$

$$(2) \qquad H(F) = H(V)/H(W); \quad H(C) = H(C/F)H(V)/H(W),$$

les deux premières formules étant triviales et les deux suivantes résultant du fait que S est plat sur H, ce qui assure qu'une résolution graduée libre de l'algèbre de C/W considéré comme H-module donne, par extension des scalaires de H à S, une résolution graduée libre de l'algèbre de C considérée comme S-module.

§ 6. Transversalité.

Définition 6.1. Soient E et F deux modules bien filtrés sur un anneau bien filtré A. On dit que E et F sont *transverses* si $\mathrm{Tor}_i^{\underline{A}}(\underline{E},\underline{F}) = 0$, $i \geq 1$, où $\underline{A}$, $\underline{E}$ et $\underline{F}$ désignent les gradués associés à A, E et F.

6.1.1. Cette notion dépend donc des filtrations considérées. On dit que deux modules E et F sur un anneau local noethérien A sont *transverses* s'ils le deviennent lorsque l'on munit E, F et A de leurs filtrations $\underline{m}$-adiques, où $\underline{m}$ est l'idéal maximal de A.

6.1.2. On définit sur $G = E \otimes_A F$ une filtration en prenant pour G_p le sous-module engendré par les images de $E_a \otimes F_b$, avec $a, b \in \underline{\underline{Z}}$ et $a + b = p$, C'est une bonne filtration, et si E et F sont munis de leurs filtrations $\underline{m}$-adiques, il en est de même de G; on le voit en considérant un morphisme surjectif et strict $f : L \to E$, où L est un module filtré libre et en notant que $f \otimes 1 : L \otimes F \to E \otimes F$ est encore surjectif et strict. En notant $\underline{G}$ le gradué associé à G, on a par définition un morphisme de $\underline{A}$-modules gradués

$$(1) \qquad \underline{E} \otimes_{\underline{A}} \underline{F} \longrightarrow \underline{G}.$$

Proposition 6.2. Avec les notations de (6.1), si E et F sont transverses, le morphisme (1) est un isomorphisme et l'on a $\mathrm{Tor}_i^A(E,F) = 0$, $i \geq 1$. [L'hypothèse que $\mathrm{Tor}_i^A(E,F) = 0$, $i > 0$, n'implique pas que E et F sont transverses : considérer deux courbes planes sans composantes commune mais tangentes en un point et considérer les anneaux locaux du plan et de ces courbes en ce point].

6.2.1. Considérons une résolution graduées libre $\underline{E}_{\bullet} \longrightarrow \underline{E}$ du $\underline{A}$-module gradué $\underline{E}$ et relevons-la en une résolution filtrée libre $E_{\bullet} \longrightarrow E$ de E. Par produit tensoriel avec F, on trouve un complexe augmenté de modules bien filtrés

(1) $\qquad E.\otimes_A F \xrightarrow{e} E\otimes_A F = G$

et par passage aux gradués, un complexe augmenté de modules gradués

(2) $\qquad \underline{E}.\otimes_{\underline{A}} \underline{F} \xrightarrow{\underline{e}} \underline{G}.$

Par construction, l'augmentation e est surjective et stricte et par suite, $\underline{e}$ est surjective. Par hypothèse, le complexe $\underline{E}.\otimes_{\underline{A}}\underline{F}$ est acyclique en degrés $\geqslant 1$, d'où il résulte par le lemme ci-dessous que le complexe $E.\otimes_A F$ est acyclique en degrés $\geqslant 1$ et que toutes ses différentielles sont strictes. Par exactitude du produit tensoriel, la suite $E_1\otimes_A F \longrightarrow E_0\otimes_A F \xrightarrow{e} E\otimes_A F \longrightarrow 0$ est exacte et comme les morphismes qui y figurent sont stricts ainsi qu'on l'a vu, il en résulte par passage au gradué associé que la suite $\underline{E}_1\otimes_{\underline{A}}\underline{F} \longrightarrow \underline{E}_0\otimes_{\underline{A}}\underline{F} \longrightarrow \underline{G} \longrightarrow 0$ est exacte, d'où il résulte que le morphisme (6.1.2(1)) est un isomorphisme. Quant à la seconde assertion de la proposition, elle résulte du fait déjà vu que $E.\otimes_A F$ est acyclique.

<u>Lemme 6.2.2.</u> Soit M un complexe de modules bien filtrés sur un anneau bien filtré A et soit $\underline{M}.$ le complexe fermé par les gradués associés. Si p est un entier tel que $H_p(\underline{M}.) = 0$, alors $H_p(M.) = 0$ et les différentielles $M_{p+1} \longrightarrow M_p \longrightarrow M_{p-1}$ sont strictes.

Introduisons les modules bien filtrés

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} Z^i_p = \text{noyau de } d_{p-1}: M_p \longrightarrow M_{p-1} & \text{avec la filtration induite} \\ B^i_p = \text{image de } d_p : M_{p+1} \longrightarrow M_p & \text{avec la filtration induite} \\ B^q_p = \text{image de } d_p : M_{p+1} \longrightarrow M_p & \text{avec la filtration quotient} \end{cases}$$

et désignons par les mêmes symboles soulignés leurs gradués. Introduisons le noyau $\underline{N}_p$, l'image $\underline{I}_p$ et le conoyau $\underline{C}_p$ du morphisme $\underline{b}_p : \underline{B}^q_p \longrightarrow \underline{B}^i_p$ obtenu par passage aux gradués à partir de l'inclusion $B^q_p \subset B^i_p$. Avec les notations habituelles pour les cycles, les bords et l'homologie $\underline{M}.$,

(2) $B_p(\underline{M}.) = \underline{I}_p$; $\underline{Z}_p(\underline{M}.)$ = noyau de $\underline{M}_p \longrightarrow \underline{I}_{p-1}$.

Comme $\underline{Z}_p^i$ = noyau de $\underline{M}_p \longrightarrow \underline{B}_{p-1}^q$, on en déduit des suites exactes

(3) $0 \longrightarrow \underline{Z}_p^i \longrightarrow Z_p(\underline{M}.) \longrightarrow \underline{N}_{p-1} \longrightarrow 0$

(4) $0 \longrightarrow B_p(\underline{M}.) \longrightarrow \underline{B}_p^i \longrightarrow \underline{C}_p \longrightarrow 0$

et en particulier des inclusions

(5) $B_p(\underline{M}.) \subset \underline{B}_p^i \subset \underline{Z}_p^i \subset Z_p(\underline{M}.)$.

Par suite, si $H_p(\underline{M}.) = 0$, on en déduit que $\underline{B}_p^i = \underline{Z}_p^i$, donc $B_p = Z_p$; donc $H_p(M.) = 0$ et aussi que $\underline{N}_{p-1} = \underline{C}_p = 0$, de ce dernier résultat on déduit que les deux différentielles considérées sont strictes grâce au lemme suivant.

Lemme 6.2.3. Soient $B'_n \subset B''_n$, $n \in \underline{\underline{Z}}$, deux bonnes filtrations sur un même A-module B. Supposons que le morphisme $\underline{b} : \underline{B}' \longrightarrow \underline{B}''$ déduit de l'inclusion par passage aux gradués soit injectif (resp. surjectif) alors les deux filtrations sont égales.

Si $\underline{b}$ est surjectif, il en est de même de l'inclusion (ce que l'on sait déjà) et celle-ci est stricte (2.3), donc $B' = B''$. Par ailleurs, notons que, de toutes façons, on a $B = B'_n = B''_n$ pour n assez petit. Soit n un entier tel que $B'_p = B''_p$ pour $p \leqslant n$, on a $\mathrm{Ker}(\underline{b})_n = B''_{n+1}/B'_{n+1}$ qui est nul si $\underline{b}$ est injectif, d'où la conclusion.

Remarque 6.2.4. On peut munir $H_p(M.)$ de la filtration quotient de la filtration induite sur $Z_p(M.)$, auquel cas son gradué est $\underline{H}_p(M.) = \underline{Z}_p^i/\underline{B}_p^i$ et les formules (3) et (4) donnent des suites exactes

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow H_p(\underline{M}.) \longrightarrow \underline{N}_{p-1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \underline{C}_p \longrightarrow X \longrightarrow \underline{H}_p(M.) \longrightarrow 0$$

avec $X = \underline{Z}_p^i/B_p(\underline{M}.)$, d'où des conséquences évidentes en utilisant (6.2.3) qui dit que la différentielle d_{p-1} (resp. d_p) est stricte si et seulement si $\underline{N}_{p-1} = 0$ (resp. $\underline{C}_p = 0$).

<u>Corollaire 6.3.</u> Sous les hypothèses de (6.1), si $\mathrm{Tor}_1^{\underline{A}}(\underline{E},\underline{F}) = 0$, alors la morphisme $\underline{E} \otimes_{\underline{A}} \underline{F} \longrightarrow \mathrm{gr}(E \otimes_A F) = \underline{G}$ est un isomorphisme et $\mathrm{Tor}_1^A(E,F) = 0$.

C'est en effet ce qu'assure la démonstration. J'ignore si la nullité de $\mathrm{Tor}_1^{\underline{A}}(\underline{E},\underline{F})$ implique que celle des $\mathrm{Tor}_i^{\underline{A}}(\underline{E},\underline{F})$, $i \geqslant 2$, mais, en fait, si A est filtré de telle façon que <u>le gradué</u> A <u>soit une algèbre de polynomes sur un corps</u> (éventuellement graduée de façon inhabituelle), alors $\mathrm{Tor}_1^{\underline{A}}(\underline{E},\underline{F}) = 0$ implique que E et F sont transverses. En effet, par réduction à la diagonale (ALM p. V-5), on a $\mathrm{Tor}_i^{\underline{A}}(\underline{E},\underline{F}) = H_i((\underline{x}),\underline{E} \otimes_k \underline{F})$, où $\underline{A} = k[X_1,\dots,X_r]$ et où $x_i = X_i \otimes 1 - 1 \otimes X_i$, et la nullité de H_1 assure celle des H_i, $i \geqslant 1$, par les vertus bien connues de complexe de Koszul. L'hypothèse sur la filtration de A assure que $\underline{A}$ est de dimension projective finie donc aussi A (4.6), donc A est régulier.

<u>Proposition 6.4.</u> Soient J et $(x_1,\dots,x_d)$ deux idéaux d'un anneau bien filtré A, soit $n(i)$ le plus grand entier tel que $x_i \in A_{n(i)}$ et soit X_i la classe de x_i dans $\underline{A}_{n(i)}$. On suppose que la suite $(\underline{X})$ est régulière dans $\underline{A}$, on pose $A/J = B$ et on note $\underline{J}$ le noyau de $\underline{A} \to \underline{B}$, c'est à dire le gradué de J pour la filtration induite. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $B = A/J$ et $S = A/(\underline{x})$ sont transverses (pour les filtrations quotient de celle de A).

(ii) $H_1((\underline{X}),\underline{B}) = 0$

(iii) $\underline{J}(\underline{X}) = \underline{J} \cap (\underline{X})$

(iv) pour tout $n \geqslant 0$, on a $\underline{J} \cap (\underline{X})^n = \underline{J}(\underline{X})^n$.

<u>Lemme 6.4.1.</u> Puisque $(\underline{X})$ est régulière dans $\underline{A}$, le morphisme surjectif $\underline{A}/(\underline{X}) \longrightarrow \underline{S} = \mathrm{gr}(A/(\underline{x}))$ est un isomorphisme.

En effet, le complexe de Koszul $K.(\underline{x})$, filtré de façon évidente, est un complexe de modules filtrés augemnté vers S avec augmentation stricte. Le gradué associé à $K.(\underline{x})$ est exact car il est égal à $K.(\underline{X})$, donc $K.(\underline{x})$

est exact à différentielles strictes (6.2.2), donc $gr(A/(\underline{x})) = gr(H_0(\underline{x})) =$ $= H_0(\underline{X})$ d'après (6.2.4).

6.4.2. Puisque $\underline{B} = \underline{A}/(\underline{X})$, on a $Tor_i^{\underline{A}}(\underline{S},\underline{B}) = H_i((\underline{X}),\underline{B})$ et la transversalité de B et S équivaut à (ii) comme chacun sait. La suite exacte des $Tor_i^{\underline{A}}(\underline{A}/(\underline{X}),*)$ déduite de la suite exacte $0 \longrightarrow \underline{J} \longrightarrow \underline{A} \longrightarrow \underline{B} \longrightarrow 0$ montre que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) et l'on déduit (iv) de (ii) en notant que $(\underline{X})^n/(\underline{X})^{n+1}$ est libre sur $\underline{A}/(\underline{X})$, car ceci montre que (ii) implique $Tor_1^{\underline{A}}((\underline{X})^n/(\underline{X})^{n+1};B) = 0$, $n \geqslant 0$, qui, par récurrence, assure que $Tor_1^{\underline{A}}(\underline{A}/(\underline{X})^n,\underline{B}) = 0$, $n \geqslant 0$, qui, par la suite exacte des Tor, montre que $\underline{J}/(\underline{X})^n J \longrightarrow \underline{A}/(\underline{X})^n$ est injectif, qui n'est autre que (iv).

<u>Proposition 6.5.</u> Sous les hypothèses de (6.1), supposons que A/A_1 soit de longueur finie, en sorte que pour tout A-module bien filtré M on peut former la série de Poincaré $H(M)$. Alors si E et F sont des modules bien filtrés transverses, on a

(1) $$H(E\otimes_A F) = H(E)H(F)/H(A)$$

pourvu que $\underline{E}$ ou $\underline{F}$ soit de dimension projective finie sur $\underline{A}$ ou encore pourvu que A/A_1 soit un corps.

Avec les notations de (6.2.1), puisque la suite

(2) $$\ldots\ \underline{E}_1\otimes_{\underline{A}}\underline{F} \longrightarrow \underline{E}_0\otimes_{\underline{A}}\underline{F} \longrightarrow \underline{G} \longrightarrow 0,\quad \underline{G} = gr(E\otimes_A F),$$

est exacte, on peut, si $\underline{E}$ est de dimension projective finie et si l'on a choisi $\underline{E}.$ de longueur finie, former la somme alternée des séries de Poincaré et prouver (1). Si A/A_1 est un corps, on peut prendre pour $\underline{E}.$ une solution minimale de $\underline{E}$ ce qui assure que, en chaque degré, la suite exacte infinie (2) n'a qu'un nombre fini de termes non nuls (4.2.2), ce qui permet encore de conclure.

Nous allons maintenant donner un <u>critère numérique de transversalité</u> qui n'est en somme qu'une autre formulation du lemme de Hironaka (3.9); hormis ce cas particulier, j'ignore si la réciproque de (6.5) est exacte.

Proposition 6.6. Soit A un anneau bien filtré tel que $'A/A_1$ soit de longueur finie et soit $(x_1,\ldots,x_d)$ une suite d'éléments de A_1. On note $n(i)$ le plus grand entier tel que $x_1 \in A_{n(i)}$ et X_i la classe des x_i dans $\underline{A}_{n(i)}$. Soit E un A-module bien filtré et soit F le module filtré quotient $F = A/(\underline{x})$

(i) $H^{(d)}(E/(\underline{x})E) \geqslant H(E). \prod_{1\leqslant i\leqslant d} (1-T^{n(i)})/(1-T)$

(ii) Si la suite $(\underline{X})$ est régulière dans $\underline{A}$, pour que E et F soient transverses, il faut et il suffit que (i) soit une égalité.

Par récurrence, (i) résulte immédiatement de (3.9). De même, pour que (i) soit une égalité, il faut et il suffit que $(\underline{X})$ soit une suite $\underline{E}$-régulière, ce qui équivaut à $\mathrm{Tor}_i^{\underline{A}}(\underline{A}/(\underline{X}),\underline{E}) = 0$, $i \geqslant 1$, lorsque la suite $(\underline{X})$ est $\underline{A}$-régulière, ce qui équivaut à la transversalité de E et F (6.4).

Scholie 6.7. Soient R un anneau local noethérien, $\underline{m}$ son idéal maximal, $k = R/\underline{m}$ son corps résiduel et E un R-module muni d'une filtration $\underline{m}$-bonne. On note $\underline{E}$ le gradué de E et l'on pose $\underline{E}(k) = \underline{E}/\underline{R}_+\underline{E}$, où $\underline{R}_+$ est l'idéal de l'anneau gradué $\underline{R}$ engendré par ses composantes homogènes de degré > 0.

Un système minimal de générateurs du module filtré E est aussi une suite $(f_1,\ldots,f_m)$ d'éléments de E dont les formes initiales $\underline{f}_i$ forment un système minimal de générateurs du $\underline{A}$-module gradué $\underline{E}$, ce qui signifie que les classes $\underline{f}_i(k)$ des $\underline{f}_i$ dans $\underline{E}(k)$ forment une base (homogène) de ce k-espace vectoriel gradué. Lorsque E est un idéal de A muni de la filtration induite, on dit que les f_i forment une base standard de l'idéal E de R, si de plus, les $v_{\underline{m}}(f_i) = v_E(f_i) = \sup\{n, f_i \in \underline{m}^n\}$ vont en croissant. Soit encore P un idéal de R et soient $R' = R/P$ et $E' = E/PE$. Si E et R/P sont transverses, une résolution filtrée libre minimale E. de E donne, par réduction modulo P, une résolution filtrée libre minimale du R'-module E' et par suite, les images dans E' d'un système minimal de générateurs du module filtré E forment un système minimal de générateurs du module filtré E'. Supposons maintenant que $E = R/J$, où J est un idéal de R muni de la filtration induite. Puisque la suite $0 \longrightarrow \underline{J} \longrightarrow \underline{R} \longrightarrow \underline{E} \longrightarrow 0$ est exacte, J est transverse à R' et par suite les *images* f'_i *dans* R' *d'une base standard de* J *forment une base standard de l'idéal* J' *de* R' *image de* J. Inversement, supposons encore que R/J et R' soient transverses et considérons une suite $(f_1,\dots,f_m)$ d'éléments de J, leurs formes initiales $\underline{f}_i \in \underline{J} \subset \underline{R}$ et les images $\underline{f}'_i$ des $\underline{f}_i$ dans $\underline{R}' = \underline{R}/\underline{P}$. Si les $\underline{f}'_i$ forment une base standard de $\underline{J}'$ (resp. de l'idéal de $\underline{R}'$ qu'ils engendrent) alors les f_i forment une base standard de J (resp. les $\underline{f}_i$ forment une base standard de l'idéal de $\underline{R}$ qu'ils engendrent). Pour le voir, il suffit de noter que le morphisme naturel $\underline{J}(k) \longrightarrow \underline{J}'(k)$ est un isomorphisme car J et R' sont transverses, donc $\underline{J}' = \underline{J}/\underline{PJ}$ et $\underline{P} \subset \underline{R}_+$, et que l'image de $\underline{f}_i(k)$ par cet isomorphisme est $\underline{f}'_i(k)$. Notons encore que si $(f_1,\dots,f_m)$ est une suite d'éléments de J, dont les images f'_i dans R' forment une base standard de J' *et si* $v_R(f_i) = v_{R'}(f'_i)$, alors les f_i forment une base standard de J; en effet, la seconde hypothèse assure que les $\underline{f}'_i(k)$ sont les images des $\underline{f}_i(k)$. La seconde hypothèse est indispensable : prendre pour R un anneau de séries formelles à trois variables (x,y,z), prendre $J = (x,y^3)$ [qui est une base standard car (X,Y^3) est une suite régulière dans $\underline{R}$] et $P = (z)$; alors $(x, xz + y^3)$ n'est pas une base standard de J mais son image dans J' est une base standard de J'.

Proposition 6.8. Soient X et Y deux sous-schémas fermés d'un schéma noethérien Z et soit x un point de $X \cap Y$. Si X et Y sont transverses dans Z au point x, alors $C_x(X \cap Y) = C_x(X) \cap C_x(Y)$. (5.3.2).

6.8.1. L'hypothèse signifie évidemment que les anneaux locaux $\underline{O}_{X,x}$ et $\underline{O}_{Y,y}$ sont transverses comme modules sur $\underline{O}_{Z,x}$ (6.1.1) et la conclusion est la traduction de la première assertion de (6.2).

6.8.2. D'après (6.5), si X et Y sont transverses, on a :

(1) $$H_x(X \cap Y) = H_x(X)H_x(Y)/H_x(Z)$$

la réciproque étant vraie si les hypothèses de (6.6) sont satisfaites, en particulier si Z et Y sont réguliers, auquel cas (1) s'écrit

(2) $$H_x^{(d)}(X \cap Y) = H_x(X),\ d = \operatorname{codim}_x(Y,Z).$$

Nous aurons besoin d'un résultat plus fin où l'on suppose seulement que l'égalité (1) entre séries formelles est remplacée par l'égalité des coefficients de T^n pour $n \leqslant N$. Pour le formuler, nous considèrerons les cones $C_x(X)(N)$, avec

(3) $$C_x(X) \subset C_x(X)(N) \subset C_x(X)(1) = T_x(X),\quad N \geqslant 1,$$

définis comme suit. Soit G une algèbre graduée sur un corps k, engendrée par G_1 et soit H l'idéal de G dans $k[G_1]$. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on note $H(N)$ l'idéal de $k[G_1]$ engendré par les H_p, $p \leqslant N$, et on pose $G(N) = k[G_1]/H(N)$. Au cone $C = \operatorname{Spec}(G)$ on associe ainsi canoniquement une suite infinie (stationnaire pour N grand) de cones $C_1 \supset C_2 \supset \dots\ C_N \supset \dots \supset C$, où C_1 est le plus petit espace numérique dans lequel on peut plonger C.

<u>Proposition 6.9.</u> Soit x un point commun à deux sous-schémas fermés X et Z' d'un schéma noethérien Z, posons $R = \underline{O}_{Z,x}$; $A = \underline{O}_{X,x}$ et $R' = \underline{O}_{Z',x}$. Supposons que $R' = R/(x_1,\dots,x_d)$ où les formes initiales X_i des x_i forment une suite régulière dans $\underline{R} = \operatorname{gr}_{\underline{m}}(R)$, $\underline{m} = \underline{m}_{Z,x}$, avec $\deg(X_i) = n(i)$. Considérons les séries $F(T) = H_x^{(d)}(X \cap Z')$ et $G(T) = H_x^{(d)}(X)H_x(Z')/H_x(Z) = H_x(X).\Pi\frac{(1-T^{n(i)})}{(1-T)}$. On a $F(T) \geqslant G(T)$. Si N est un entier tel que les coefficients de T^p dans F et G soient égaux pour $p \leqslant N$, alors on a :

(1) $$C_x(Z') \cap C_x(X \cap Z')(N) = C_x(X)(N) \cap C_x(Z').$$

6.9.1. On note J l'idéal de A dans R, J' son image dans R' on pose $A' = R'/J'$ et l'on considère les gradués $\underline{R} = \operatorname{gr}_{\underline{m}}(R)$, $\underline{A} = \operatorname{gr}_{\underline{m}}(A)$, $\underline{R}' = \operatorname{gr}_{\underline{m}}(R')$

et $\underline{J} = gr_{\underline{m}}(J,R)$, ce dernier symbole désignant le gradué associé à J pour la filtration induite par la filtration $\underline{m}$-adique de R. L'inégalité $F \geqslant G$ a déjà été démontrée (6.6) ou (3.9) et la relation (1) signifie simplement que $\underline{J}'(N) = \underline{J}(N)/(\underline{J}(N) \cap (\underline{X}))$, où $\underline{J}' = gr_{\underline{m}}(J',R')$ et où $\underline{J}(N)$ et $\underline{J}'(N)$ sont les idéaux engendrés par les composantes homogènes de degré $p \leqslant N$ de $\underline{J}$ et $\underline{J}'$. On raisonne par récurrence sur d. Si $d = 1$, on pose $n(1) = n$, $x = x_1$, $X = X_1$, et l'on considère comme dans (3.9) le complexe de modules filtrés $A(-n) \xrightarrow{x} A$ et ses modules Z^i, B^q, B^i de cycles et de bords avec filtration induite, quotient et induite, qui donne l'égalité (cf. 6.2.2) $H_{\underline{m}}(A/xA) = (1-T^n)H_{\underline{m}}(A) + H(B^q) - H(B^i) + H(Z^i)$.
En multipliant par $1/(1 - T)$, on en tire

$$F(T) - G(T) = \sum_{p \geqslant 0} (\gamma(B^i_{p+1}/B^q_{p+1}) + \gamma(Z^i/Z^i_{p+1}))T^p$$

qui montre que, sous l'hypothèse de l'énoncé, le morphisme de modules gradués $\underline{A}/X\underline{A} \longrightarrow \underline{A}'$, où $A' = A/xA$ et $\underline{A}' = gr_{\underline{m}}(A')$, est un isomorphisme en degré $\leqslant N$, et qu'un élément homogène de $\underline{A}$ qui est annulé par X est de degré $> N$, ceci signifie que $(X\underline{J})_p = (\underline{J} \cap (X))_p$ pour $p \leqslant N$ et que les idéaux homogènes $\underline{J}'$ et $\underline{J}/(\underline{J} \cap (X))$ coïncident en degré $\leqslant N$, ce qu'il fallait démontrer. Si $d \geqslant 1$, on introduit $R'' = R/(x_1,\dots,x_{d-1})$ et l'idéal J'' image de J dans R''. Soient (F'', G'') et (F', G') les deux paires de séries attachées à (R,A,R'') et (R'',A'',R') comme (F,G) l'est à (R,A,R'). On a encore $F'' \geqslant G''$ et $F' \geqslant G'$ et en fait

$$F = F'^{(d-1)} \geqslant G'^{(d-1)} = F''.\frac{(1-T^{n(d)})}{1-T} \geqslant G''\frac{(1-T^{n(d)})}{1-T} = G.$$

L'égalité des coefficients de T^p, $p \leqslant N$, pour les termes extrêmes implique donc la même propriété pour les termes intermédiaires et aussi pour les paires (F', G') et (F'', G''), d'où la conclusion par l'hypothèse de récurrence.

Corollaire 6.9.2. Sous les hypothèses de (6.9), supposons que Z et Z' soient réguliers et soient D et D' les directrices de $C_x(X)(N)$ et

$C_x(X')(N)$, où $X' = X \cap Z'$. Si l'on a $C_x(X)(N) \cap C_x(Z') = C_x(X')(N)$, alors on a

(1) $\dim(D) - d \leqslant \dim(D')$

et si (1) est une égalité, alors $D' = D \cap C_x(Z')$ et le morphisme naturel

(2) $C_x(X')(N)/D' \longrightarrow C_x(X)(N)/D$

est un isomorphisme et on a un isomorphisme non canonique

(3) $C_x(X)(N) = C_x(X')(N) \times (D/D')$.

6.9.3. Puisque Z et Z' sont réguliers, tous les $n(i)$ valent 1 et $C_x(Z') = T_x(Z')$ noté T' est un sous-espace numérique de codimension d de $C_x(Z) = T_x(Z)$ noté T. De plus, $D \cap T'$ est un sous-espace numérique de T' qui est contenu dans le faîte de $C' = C_x(X')(N)$, donc aussi dans la directrice D' de C' et l'on a donc $\dim(D)-d \leqslant \dim(D \cap T') \leqslant \dim(D')$ qui implique (1). Si (1) est une égalité, on a donc $D' = D \cap T' = D \cap C'$ (au sens des schémas!).

L'inclusion $C' \longrightarrow C$, avec $C = C_x(X)(N)$, induit un morphisme $C'/D' \longrightarrow C/D$ qui est ici une immersion fermée car $D' = D \cap C'$. De plus, d'après l'inégalité qui figure dans (6.9), où l'on remplace (Z,X,Z') par (T,C,T') et le point x par l'origine, on sait que $H^{(d)}(C') \geqslant H(C)$, ce qui s'écrit aussi $H^{(d+d')}(C'/D') \geqslant H^{(d+d')}(C/D)$, avec $d' = \dim(D')$; or on a l'inégalité en sens inverse car C'/D' est un sous-cone de C/D, on a donc égalité et par suite, (2) est un isomorphisme. On en déduit (3) car on a des isomorphismes non canoniques

$C \approx (C/D) \times D \approx (C/D) \times (D/D') \times D'$ et $C' \approx (C'/D') \times D'$.

6.9.4. Si (6.9.2(1)) est une égalité, on a d'après (3)

(4) $H^{(d)}(C_x(X')(N)) = H(C_x(X)(N))$

mais si l'on fait seulement l'hypothèse de (6.9), on a seulement l'inégalité évidente et l'égalité des coefficients de T^p pour $p \leqslant N$.

Chapitre II. Modification d'une singularité.

§ 1. Eclatements

<u>Définition 1.1.</u> Soient X un schéma et Y un sous-schéma défini par un (faisceau d') idéal quasi-cohérent P et soit $S = \bigoplus_{n \geqslant 0} P^n T^n$ la sous-algèbre de $\underline{O}_X[T]$. On pose $X' = \mathrm{Proj}(S)$ et on l'appelle le schéma obtenu en éclatant Y dans X.

1.1.1. La formation de Proj(S) à partir de S, et de S à partir de P commutent à la restriction à un ouvert et si l'on pose $U = X - Y$ la projection $p : X' \longrightarrow X$ induit un isomorphisme

(1) $\quad p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$

En effet, $Y \cap U$ est le schéma vide donc $P|U = \underline{O}_U$, donc l'inclusion $S|U \longrightarrow \underline{O}_U[T]$ est un isomorphisme. Plus généralement, si Y est un <u>diviseur</u>, c'est-à-dire si P est <u>inversible</u>, c'est-à-dire <u>localement libre de rang</u> 1 comme $\underline{O}_X$-module, alors la projection $p : X' \longrightarrow X$ est un isomorphisme. En effet, la condition est locale sur X et l'on peut supposer que P est libre de base f ce qui assure que $\underline{O}_X[T] \longrightarrow S$, $T \longmapsto fT$, est un isomorphisme.

1.1.2. La formation du schéma projectif attaché à une algèbre graduée commute au changement de base. On a donc

(2) $\quad E = \mathrm{Proj} \bigoplus_{n \geqslant 0} (P^n/P^{n+1})\, T^n$, $E = X' \times_X Y$.

On dit que E est le <u>diviseur exceptionnel</u> de X'. Pour voir que E est un diviseur, le plus simple est de noter d'abord que tout S-module gradué M définit un $\underline{O}_{X'}$-module quasi-cohérent $\mathrm{Proj}(M)$ et que le foncteur $M \longmapsto \mathrm{Proj}(M)$ est exact. Or on a des morphismes de S-modules gradués :

$$(3)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \bigoplus\limits_{n\geq 0} P^{n+1}T^n \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"] & \bigoplus\limits_{n\geq 0} P^nT^n \arrow[r, "b"] & \bigoplus\limits_{n\geq 0} (P^n/P^{n+1})T^n \arrow[r] & 0 \\ & \bigoplus\limits_{n\geq -1} P^{n+1}T^n & & & \end{tikzcd}$$

où la ligne est exacte et où c devient un isomorphisme par passage aux Proj. Comme $S(1) = \bigoplus\limits_{n\geq -1} P^{n+1}T^n$, on en déduit une suite exacte de $\underline{O}_{X'}$-modules

$$(4)\qquad 0 \longrightarrow \underline{O}_{X'}(1) \longrightarrow \underline{O}_{X'} \longrightarrow \underline{O}_E \longrightarrow 0$$

qui montre bien que l'idéal qui définit $\underline{O}_E$ et qui, par définition, n'est autre que $P\underline{O}_{X'}$ est inversible et égal à $\underline{O}_{X'}(1)$:

$$(5)\qquad P\underline{O}_{X'} = \underline{O}_{X'}(1).$$

Ceci montre que <u>si</u> $X' \longrightarrow X$ <u>admet une section</u>, <u>alors</u> p <u>est un isomorphisme</u>; en effet, on a alors $(P\underline{O}_{X'})\underline{O}_X = P$, donc P est localement monogène, donc localement, on a une surjection $A[T] \longrightarrow \bigoplus P^nT^n$, $T \longmapsto fT$, donc p est une immersion fermée qui a une section. A l'opposé, si P est nilpotent, il en est de même de $P\underline{O}_{X'}$, ce qui assure que $\underline{O}_{X'} = 0$, donc X' est vide dans ce cas.

1.1.3. Si $u : Z \longmapsto X$ est un morphisme de schémas et si $T = T\times_X Y$, alors on a une diagramme commutatif

$$(6)\qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[d] & Z' \arrow[l] \arrow[d] \\ X & Z \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où Z' s'obtient en éclatant T dans Z, qui provient du morphisme évident d'algèbres graduées

$$(7)\qquad \bigoplus_{n\geq 0} P^nT^n \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} Q^nT^n, \quad Q = P\underline{O}_{Z'}.$$

Si u est <u>plat</u>, alors, pour tout $n\geq 0$, on a $P^n\otimes_{\underline{O}_X}\underline{O}_Z = Q^n$, ce qui assure que (6) est un carré cartésien, autrement dit, <u>l'éclatement commute au changement de base plat</u>. Nous utiliserons souvent ce résultat pour remplacer un schéma par le spectre d'un de ses anneaux locaux ou même par le spectre du complété d'un de ses anneaux locaux.

1.1.4. L'algèbre graduée S est de toutes façons un quotient de l'algèbre symétrique $\underline{O}_X[P]$ du $\underline{O}_X$-module P. Celle-ci est de type fini dès que le module P l'est, par exemple, si X est <u>localement noethérien</u>. Il en sera toujours ainsi dans les cas que nous considèrerons et par suite, le morphisme $p : X' \longrightarrow X$ sera toujours <u>projectif</u>.

1.2. Pour décrire plus explicitement X', supposons que X soit le spectre d'un anneau A, auquel cas, P provient d'un idéal de A encore noté P. Comme $S = \bigoplus_{n \geqslant 0} P^n T^n$ est engendré par $S_1 = PT$, le schéma $X' = \mathrm{Proj}(S)$ est recouvert par les ouverts affines

(1) $$X'(f) = \mathrm{Spec}(S_{(fT)}),\ f \in P\ ,$$

où $S_{(fT)}$ est la composante homogène de degré zéro de l'algèbre graduée S_{fT} obtenue en localisant par rapport à l'élément fT qui est homogène de degré un. Il est clair que

(2) $$PS_{(fT)} = f.S_{(fT)}$$

car si $g \in P$, alors on a $g = f.(gT)/(fT)$ dans $S_{(fT)}$. Par suite, dans <u>l'ouvert affine</u> $X'(f)$, $f \in P$, l'idéal <u>inversible</u> $P\underline{O}_{X'} = \underline{O}_{X'}(1)$ <u>est engendré par l'image de</u> f. On sait également comment se recollent les ouverts $X'(f)$: l'intersection $X'(f) \cap X'(g)$ est affine d'anneau $S_{(fgT^2)}$. Lorsque A est <u>intègre</u> et que K désigne son corps de fractions, on voit facilement que l'on a un isomorphisme de A-algèbres

(3) $$A[P/f] \longmapsto S_{(fT)},\ p/f \longmapsto pT/fT,$$

où $A[P/f]$ désigne la sous-algèbre de K engendrée par les p/f, $p \in P$. L'algèbre $S_{(fgT^2)}$ qui décrit l'intersection de $X'(f)$ et $X'(g)$ se trouve alors identifiée à la sous-algèbre de K engendrée par

$A[P/f]$ et $A[P/g]$. On en déduit la proposition suivante qui dit comment on doit recoller les $X'(f)$ pour obtenir X'.

<u>Proposition 1.3.</u> Si X est le spectre d'un anneau intègre A de corps des fractions K, alors X' est recouvert par les ouverts affines $X'(f)$, $f \in P$, d'anneaux $A[P/f]$ et $X'(f) \cap X'(g)$ est affine d'anneau l'algèbre engendrée par $A[P/f]$ et $A[P/g]$. En particulier, $p : X' \longrightarrow X$ est birationnel, si $P \neq 0$.

1.3.1. Si k est un corps, si $A = k[x_0,\ldots,x_s]$ et si $P = (x_0,\ldots,x_s)$ autrement dit, si on fait éclater l'origine dans l'espace affine type de dimension $s+1$, alors on trouve que X' est recouvert par les ouverts affines $X'(x_i) = \mathrm{Spec}(k[X_0^i,\ldots,X_{i-1}^i,\ x_i,\ X_{i+1}^i,\ldots,X_s^i]$, où les X_j^i sont des indéterminées la projection $X'(x_i) \longrightarrow$ étant décrite par le "changement de variables"
$x_j = x_i X_j^i$, $0 \leqslant j \leqslant s$, $i \neq j$. Cela résulte aisément de (1.3), mais il est également instructif de le déduire de la proposition suivante.

<u>Proposition 1.4.</u> Soit $(x_0,x_1,\ldots,x_s)$ une suite régulière d'éléments d'un anneau noethérien A. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$, soit P l'idéal engendré par les x_i. Le X-schéma X' obtenu en éclatant P dans X est canoniquement isomorphe à

(1) $$X'' = \mathrm{Proj}(A[X_0,\ldots,X_s]/I)$$

où I est l'idéal engendré par les $x_iX_j - x_jX_i$, $0 \leqslant i < j \leqslant s$.

1.4.1. Le morphisme naturel

(2) $$A[\underline{X}] \longrightarrow \bigoplus_{n \geqslant 0} P^nT^n,\ X_i \longmapsto x_iT,$$

est évidemment surjectif et nul sur I, ce qui donne un X-morphisme $u : X' \longrightarrow X''$ qui est une immersion fermée. Nous allons montrer que u

est un isomorphisme. Notons déjà qu'en tout point du complémentaire U de $V(P)$, l'un des x_i est inversible, ce qui assure que $p'' : X'' \longrightarrow X$ est un isomorphisme au dessus de U, comme il en est de même de $X' \longrightarrow X$ on a $X' \supset p''^{-1}(U)$ et il suffit de prouver que $p''^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans X''; d'après (1.7.1(ii)) il suffit de prouver que $X'' - p''^{-1}(U) = V(P\underline{O}_{X''})$ est un diviseur, autrement dit, que $P\underline{O}_{X''}$ est inversible. Or X'' est recouvert par les ouverts affines

(3) $$X'' = \mathrm{Spec}(A[\underline{X}]_{(X_i)}/I_{(X_i)}),\ 0 \leqslant i \leqslant s,$$

et si l'on suppose pour simplifier que $i = 0$, on a

(4) $$B = A[\underline{X}]_{(X_0)} = A[u_1,\dots,u_s]\ ,\ u_i = X_i/X_0,$$

(5) $$J = I_{(X_0)} = (x_1-u_0u_1,\dots,x_s-x_0u_s),\quad P(B/J) = x_0(B/J),$$

et d'après la dernière égalité, il suffit de prouver que x_0 est non diviseur de zéro dans B/J. Pour cela, on peut localiser en tous les idéaux premiers de A et on peut même supposer que l'idéal P est contenu dans le radical de A, sinon $P = \underline{O}_X$ et $P\underline{O}_{X''}$ est principal. La suite $(\underline{y}) = (x_0,x_1-x_0u_1,\dots,x_s-x_0u_s)$ est régulière dans B, car $B/x_0 = (A/x_0)[u_1,\dots,u_s]$ et la suite $(x_1,\dots,x_s)$ est régulière dans A/x_0A, donc aussi dans B/x_0B qui est libre sur le précédent. De plus, puisque A est séparé pour la topologie P-adique, il en est de même de B; or dans B, cette topologie coïncide avec la topologie P'-adique, où $P' = (x_0,x_1-x_0u_1,\dots,x_s-x_0u_s) = PB$. Il en résulte que la suite $(\underline{y})$ reste régulière quand on y échange l'ordre des facteurs, ce qui implique, en faisant passer x_0 en dernier que x_0 est régulier dans B/J, d'où la conclusion.

1.4.2. On peut en fait démontrer un résultat un peu plus précis, à savoir que la suite

$$(6) \qquad 0 \longrightarrow I \longrightarrow A[\underline{X}] \longrightarrow S \longrightarrow 0\ , \quad S \bigoplus_{n \geqslant 0} P^n T^n ,$$

est exacte, (cf. SGA 6 p. 426); le lecteur qui trouverait trop compliquée la démonstration de SGA 6 en batira une en prouvant que la suite déduite de (6) par passage aux gradués P-adiques (avec, sur I, la filtration induite) est exacte, ce que prouve que (6) est exacte car les composantes homogènes de (6) sont de type fini. Bien entendu, cet exercice un peu calculatoire mais amusant donne une nouvelle démonstration de (1.4).

<u>Corollaire 1.4.3.</u> Sous les hypothèse de (1.4), $X'' = X'$ est localement une intersection complète dans $P^s \times X$.(P^s = espace projectif de dimension s).

En effet, nous avons vu chemin faisant que, dans le complémentaire de l'hyperplan $X_i = 0$, l'idéal de X'' est engendré par la suite régulière (1.4(5)).

<u>Proposition 1.5</u>. (Hironaka). Soit X un schéma et soit Y un sous-schéma fermé défini par un faisceau quasi-cohérent d'idéaux P. Soit $p : X' \longrightarrow X$ le X-schéma obtenu en faisant éclater P dans X et soit $u : Z \longrightarrow X$ un morphisme de schémas tel que $P\underline{O}_Z = Q$ soit inversible. Il existe un unique X-morphisme $h : Z \longrightarrow X'$.

Puisque Q est inversible, dans le diagramme commutatif (1.1.3(6)), le morphisme $Z' \longrightarrow Z$ est un isomorphisme, ce qui définit un X-morphisme $h : Z \longrightarrow X'$. Soit $v : Z \longrightarrow X'$ un autre X-morphisme; il coïncide avec h sur un fermé car X' est séparé sur X. De plus, si $U = X - Y$, $U' = p^{-1}(U)$ et $U'' = u^{-1}(U) = h^{-1}(U') = v^{-1}(U')$, alors h et v coïncident sur U" car p induit un isomorphisme $U' \xrightarrow{\sim} U$. D'où la conclusion, car U" est schématiquement dense puisque son complémentaire est le diviseur défini par l'idéal inversible de Q.

Proposition 1.6. (Transformé strict). Sous les hypothèses de (1.5), soit Z un sous-schéma fermé de X défini par un idéal quasi-cohérent J et soit Z' le schéma obtenu en éclatant dans X le sous-schéma fermé $D = Z \times_X Y$. Alors le morphisme naturel $Z' \longrightarrow X'$ de (1.1.3(6)) est une immersion fermée. Supposons que X soit affine d'anneau A et que $(f_1,\ldots,f_m)$ soit un système de générateurs du module filtré obtenu en munissant J de la filtration induite par la filtration P-adique de A. Alors, pour tout $t \in P$, l'idéal définissant $Z' \cap X'(t)$ dans $X'(t)$, (cf.(1.2(1))), est engendré par les

(1) $$f_i' = f_i/t^{n(i)}$$

où $f_i \in P^{n(i)}$, $f_i \notin P^{n(i)+1}$.

1.6.1. La première assertion est évidente, car le morphisme $Z' \longrightarrow X'$ est induit par le morphisme surjectif d'algèbres graduées

(2) $$\bigoplus_{n \geqslant 0} P^n T^n \longrightarrow \bigoplus_{n \geqslant 0} (P/J \cap P)^n T^n .$$

Le noyau de celui-ci n'est autre que $K = \bigoplus_{n \geqslant 0} (P^n \cap J)T^n$ et l'hypothèse que les f_i engendrent J signifie que, pour tout $n \geqslant 0$, on a :

(3) $$P^n \cap J = \sum_i P^{n-n(i)} f_i \, ,$$

ce qui assure que le module gradué K est engendré par les $f_i T^{n(i)}$.

Chacun d'eux donne, dans la composante homogène de degré zéro $S_{(tT)}$ de S_{tT} un élément $f_i T^{n(i)}/(tT)^{n(i)} = f_i'$ et l'on a donc $t^{n(i)} f_i' = f_i$ dans $S_{(tT)}$, en désignant encore par t l'image de t dans $S_{(tT)}$, ce qui prouve la seconde assertion. Notons que l'on pouvait prévoir a priori que la formule (1) a un sens car on a $f_i \in P^{n(i)}$, ce qui assure que l'image de f_i dans $S_{(tT)}$ appartient à $P^{n(i)} S_{(tT)} = t^{n(i)} S_{(tT)}$ et car t est non diviseur de zéro dans $S_{(tT)}$. Pour terminer, rappelons que l'on obtient un système de générateurs du module J, filtré par les $J \cap P^n$, en relevant un système de générateurs du $gr_P(A)$-module gradué $gr_P(J,A) = \bigoplus_{n \geqslant 0} (P^n \cap J)/(P^{n+1} \cap J)$, du moins lorsque J est séparé, ce qui est vrai lorsque A est local noethérien et P contenu dans le radical.

1.6.2. Sous les hypothèses de (1.6), on dit que Z' est le <u>transformé strict</u> de Z par l'éclatement de Y dans X, par opposition au <u>transformé faible</u> que l'on définit comme suit. Soit n le plus grand entier tel que $J \subset P^n$, alors l'idéal inversible $P^n \underline{O}_{X'} = \underline{O}_{X'}(n)$ divise $J' = J\underline{O}_{X'}$ et l'on appelle transformé faible de Z le sous-schéma fermé de X' défini par l'idéal $J'(-n)$. D'après la description donnée plus haut, il est clair que le <u>transformé strict est un sous-schéma fermé du transformé faible</u>. Ils ne coïncident que dans certains cas, par exemple lorsque X et Y sont réguliers et Z un diviseur de X. Ces deux objets ne jouent pas le même rôle : pour résoudre les singularités de Z, on remplace Z par son transformé strict (plusieurs fois de suite et pour des éclatements bien choisis), pour "simplifier Z considéré comme frontière de son complémentaire dans X" c'est-à-dire pour en faire un diviseur à croissements normaux dans X', on le remplace par son transformé faible (plusieurs fois etc...). Le premier est défini indépendamment du plongement $Z \to X$, le second y réfère explicitement.

<u>Proposition 1.7.</u> Sous les hypothèses de (1.6), le transformé strict Z' de Z est l'adhérence schématique dans X' de $Z' \cap p^{-1}(X - Y)$, où $p : X' \longrightarrow X$ est la projection.

La proposition résulte du lemme suivant en y remplaçant X,Z,E par $X', Z', p^{-1}(Y)$.

<u>Lemme 1.7.1.</u> Soient Z et E deux sous-schémas fermés d'un schéma X tel que $F = E\times_X Z$ soit un diviseur de Z. Alors

(i) l'ouvert $Z - F$ de Z est schématiquement dense dans Z

(ii) Z est l'adhérence schématique de $Z - F$ dans X.

L'assertion (ii) signifie que tout sous-schéma fermé D de X qui majore le sous-schéma $Z - F$ majore Z. En remplaçant D par $D\times_X Z$, il revient au même de dire que tout sous-schéma fermé D de Z qui majore le sous-schéma ouvert $Z-F$ est égal à Z, qui par définition n'est autre que (i). Soit J le faisceau d'idéaux qui définit D dans Z; l'hypothèse que D majore $V = Z - F$ signifie que $J|V = 0$ et l'hypothèse que F est un diviseur de Z signifie que tout point de Z admet un voisinage ouvert affine $W = \mathrm{Spec}(B)$ tel que $P \mid W$ soit défini par l'idéal tB où t est un élément non diviseur de zéro de B. Alors $W \cap V = \mathrm{Spec}(B_t)$ et comme $J \mid V = 0$, on a $0 = J(W \cap V) = J(W)_t$, donc $J(W) = 0$, car $J(W) \subset \underline{O}_Z(W) = B$ et t est non diviseur de zéro dans B.

1.7.2. Supposons que X soit affine d'anneau A et soit W un ouvert affine d'anneau B de l'éclaté X' tel que $PB = tB$. Alors l'idéal J' de $Z' \cap W$ dans W est formé des $x \in B$ tels qu'il existe un entier n tel que $t^n x \in JB$, où J est l'idéal de A définissant Z. Cela est immédiat.

<u>Exemple 1.8.</u> Considérons dans l'espace projectif Z de dimension $r+s$ un système de coordonnées homogènes $(x_o,\dots,x_{r+s})$, le fermé Y d'équations homogènes $x_o = \dots = x_r = 0$ et l'ouvert complémentaire $U = X - Y$. On a un morphisme de schémas $f : U \longrightarrow S$, $f(\underline{x}) = (x_o,\dots,x_r)$, où S est l'espace projectif de coordonnées homogènes $(u_o,\dots,u_r)$, qui ne se prolonge pas à Z. Soit $p : Z' \longrightarrow Z$ le Z-schéma obtenu en éclatant Y dans Z. Soit Z'' le sous-schéma fermé de $Z \times S$ d'équations

$x_i u_j - x_j u_i = 0$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant r$. D'après (1.4), on a un isomorphisme canonique entre Z'' et Z' tel que la projection $p : Z' \longrightarrow Z$ s'identifie au morphisme $Z'' \longrightarrow Z$ induit par la première projection $p_1 : Z \times S \longrightarrow Z$. Par ailleurs, l'ouvert $U = Z - Y$ s'identifie à l'ouvert $U'' = p_1^{-1}(U) \cap Z''$ de Z'' et par cet isomorphisme, le morphisme $f : U \longrightarrow S$ s'identifie à celui qu'induit la seconde projection $p_2 : Z \times S \longrightarrow S$. En effet, si $a = (x_o,\dots,x_{r+s},u_o,\dots,u_r)$ est un point de $Z \times S$, l'un des u_i n'est pas nul et si ce point appartient à U'', on a $(x_o,\dots,x_s) = (x_i/u_i)(u_o,\dots,u_s)$, ce qui s'écrit également $f(p_1(a)) = p_2(a)$. Le lecteur peu averti que ces calculs inquièteraient les rendra parfaitement rigoureux en considérant les foncteurs représentés par Z et S [EGA IV 2.4.3.]. Il en résulte que le morphisme $f' : Z'' \longrightarrow S$ induit par p_2 prolonge le morphisme $fp_1 : U'' \longrightarrow S$; autrement dit, puisque nous avons identifié Z'' et Z', en remplaçant Z par l'éclaté Z', nous avons pu prolonger f : on dit que l'on a <u>éliminé les points d'indétermination</u> de f. L'un des résultats de Hironaka est précisément une généralisation de ceci : Si X et S sont deux schémas de type fini sur un corps de caractéristique nulle avec S propre, si U est un ouvert dense de X et si $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme, alors il existe un X-schéma $p : X' \longrightarrow X$, se déduisant de X par une suite d'éclatements convenables, tel que le morphisme $p^{-1}(U) \longrightarrow U$ induit par p soit un isomorphisme et tel que le morphisme $fp : p^{-1}(U) \longrightarrow S$ se prolonge. Notons qu'il existe un X-schéma $G \longrightarrow X$ auquel f se prolonge toujours à savoir le graphe de f et tout revient donc à majorer G par un X'. Bien entendu, en général, ceci ne peut se faire comme dans l'exemple ci-dessus en éclatant simplement le schéma réduit $Y = X - U$.

<u>Exercice 1.8.1.</u> Décrire à l'aide d'éclatements convenables le graphe de le correspondance birationnelle entre P_2 et $P_1 \times P_1$ décrite par

$(x_o,x_1,x_2) \longmapsto ((x_o,x_1),(x_o,x_2))$ et de la transformation birationnelle entre P_2 et lui-même décrite par $x_o x'_o = x_1 x'_1 = x_2 x'_2$ (Transformation de Crémona).

1.9. <u>Désingularisation d'une courbe</u>. Soit X un schéma noethérien intègre de dimension 1 tel que le normalisé X' de X soit fini sur X. Alors X' est noethérien et tous ses anneaux locaux sont réguliers; en effet, si $x \in X'$ est un point fermé, alors le schéma obtenu en éclatant x dans X' est fini sur X' et a même corps de fractions, donc c'est X', donc l'idéal maximal $\underline{m}_{X',x}$ est principal (propriété universelle de l'éclaté); soit t un générateur de l'idéal maximal de $A = \underline{O}_{X',x}$ alors on sait que $H^{(1)}(A/tA) \geqslant H(A)$, donc $H(A) \leqslant 1/(1-T)$, car A/tA est un corps, donc A est régulier. Puisque $p : X' \longrightarrow X$ est fini, donc affine, et birationnel le faisceau quotient $C = \underline{O}_{X'}/\underline{O}_X$ est un $\underline{O}_X$-module de longueur finie et son support est donc composé d'un nombre fini de points fermés. Puisque X' est régulier, ce sont les seuls points de X qui peuvent être singuliers (c'est-à-dire $\underline{O}_{X,x}$ non régulier) et ils le sont effectivement, sinon $\underline{O}_{X,x}$ serait intégralement clos et par suite la fibre de C en x serait nulle car le passage à la cloture intégrale commute à la localisation (cf. Samuel et Zariski).

Considérons $p_1 : X_1 \longrightarrow X$ obtenu en éclatant le sous-schéma fermé réduit de X dont l'ensemble sous-jacent est formé des points singuliers de X. Alors X_1 est fini sur X car la fibre de p_1 en un point singulier est le schéma projectif attaché à une algèbre graduée dont la série de Poincaré a un pole d'ordre 1 au point $T = 1$, car $\underline{O}_{X,x}$ est de dimension 1. Il en résulte des inclusions $\underline{O}_X \subset \underline{O}_{X_1} \subset \underline{O}_{X'}$; en chaque point singulier de X, le quotient $\underline{O}_{X_1,x}/\underline{O}_{X,x}$ est non nul car autrement $\underline{O}_{X,x}$ serait principal, donc $\underline{O}_{X,x}$ régulier comme on a vu. Par suite la longueur de $\underline{O}_{X'}/\underline{O}_{X_1}$ est strictement inférieure à celle de $\underline{O}_{X'}/\underline{O}_X$. Comme X' est évidemment le normalisé de X_1, en répétant la même opération pour X_1, ce qui donne un X_1-schéma X_2 , puis pour X_2 etc... on trouve $X_n = X'$ pour n assez grand ce qui assure que X_n est régulier. En conclusion :

<u>Proposition 1.10</u>. Soit X un schéma noethérien intègre de dimension 1 tel que le normalisé X' de X soit fini sur X.

(i) le lieu singulier de X se compose d'un nombre fini de points fermés. Soit X_s le sous-schéma fermé réduit de X correspondant et soit $X^\wedge$ le schéma obtenu en éclatant X_s dans X.

(ii) $X^\wedge$ satisfait aux mêmes hypothèses que X et si l'on définit X_n par récurrence par $X_0 = X$, $X_{n+1} = X_n^\wedge$, alors pour n assez grand, on a $X_n = X_{n+1}$ et X_n est régulier et c'est le normalisé de X.

<u>Remarque 1.11.</u> On peut obtenir X' à partir de X en éclatant le conducteur, c'est à dire l'annulateur de $\underline{O}_{X'}/\underline{O}_X$; c'est un exercice facile laissé au lecteur qui prendra garde toutefois que l'hypothèse que X' est fini sur X est ici encore essentielle car autrement le conducteur est nul. Elle est satisfaite si X est de type fini sur un corps ou encore si X est le spectre d'un anneau local complet. Sur ce sujet, voir [EGA IV 7.6.] et les bons auteurs.

§ 2. Critère de platitude normale de Hironaka.

Définition 2.1. Soit Y un sous-schéma fermé d'un schéma localement noethérien X. On dit que X est normalement plat le long de Y au point $\xi \in Y$ si le cone normal $C_Y(X)$ est plat sur Y au point ξ. On dit que Y est permis pour X au point $\xi \in Y$ si, de plus, Y est régulier au point ξ, c'est à dire si l'anneau local $\underline{O}_{Y,\xi}$ est régulier.

Théorème 2.2. Soit ξ un point d'un sous-schéma fermé Y d'un schéma localement noethérien X. On suppose que Y est régulier au point ξ. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est normalement plat sur Y au point ξ,

(ii) $T_\xi(Y)$ est contenu dans le faîte $F_\xi(X)$ de $C_\xi(X)$ et le morphisme naturel $C_\xi(X) \longrightarrow C_Y(X)(\xi)$ dont le but est la fibre en ξ de $C_Y(X)$ induit un isomorphisme

(1) $$C_\xi(X)/T_\xi(Y) \longrightarrow C_Y(X)(\xi).$$

2.2.1. Supposons que X soit régulier au point ξ, alors les deux conditions sont satisfaites, nous laissons au lecteur le soin de le vérifier en choisissant convenablement un système régulier de paramètres. Par ailleurs, chacune des trois conditions se vérifie après passage à l'anneau local $\underline{O}_{X,\xi}$, on peut donc supposer que X est le spectre d'un anneau local noethérien A et que $Y = \mathrm{Spec}(A/P)$, où $A/P = B$ est régulier. En remplaçant A par son complété $\hat{A}$, B est remplacé par le sien $\hat{B}$, qui est encore régulier. Par platitude de $\hat{A}$ sur A et de $\hat{B}$ sur B, la condition (ii) n'est pas affectée par le passage de A à $\hat{A}$; par fidèle platitude de $\hat{B}$ sur B, il en est de même de la condition (i). Autrement dit, on peut supposer que A est le spectre d'un anneau local complet, lequel, par le théorème de structure de Cohen est quotient d'un anneau local complet régulier et pour prouver le théorème, on peut donc supposer que X est un sous-schéma fermé d'un schéma régulier Z. On a alors deux carrés commutatifs dont celui de droite est cartésien par construction :

$$\begin{tikzcd} C_\xi(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_Y(X)(\xi) \arrow[r] \arrow[d] & C_Y(X) \arrow[d] \\ T_\xi(Z) \arrow[r, "p"'] & T_Y(Z)(\xi) \arrow[r] & T_Y(Z). \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, il est immédiat que la flèche p induit un isomorphisme $T_\xi(Z)/T_\xi(Y) \longrightarrow T_Y(Z)(\xi)$, c'est d'ailleurs la condition (ii) pour Z. En conséquence, la condition (ii) pour X signifie que le carré de gauche est cartésien d'où le corollaire suivant.

<u>Corollaire 2.2.2.</u> Sous les hypothèses du théorème, si X est un sous-schéma fermé d'un schéma régulier Z, la condition (ii) équivaut à

(ii bis) le carré

$$\begin{tikzcd} C_\xi(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_Y(X) \arrow[d] \\ T_\xi(Z) \arrow[r] & T_Y(Z) \end{tikzcd}$$

est cartésien.

2.2.3. Pour voir que la condition (ii bis) est bien celle qui figure dans le mémoire de Hironaka de 1964, supposons que $Z = \mathrm{Spec}(R)$, avec R local régulier, que P soit l'idéal définissant Y, J celui qui définit X et M l'idéal maximal. Alors le carré ci-dessus correspond à un carré de morphismes d'algèbres graduées

$$\begin{tikzcd} gr_M(A) & gr_P(A) \arrow[l] \\ gr_M(R) \arrow[u, "m"] & gr_P(R) \arrow[l, "u"'] \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

et le noyau $gr_M(J,R)$ (resp. $gr_P(J,R)$) de m (resp. p) n'est autre que le gradué associé à J pour la filtration induite par la filtration M-adique (resp. P-adique) de R. Comme m et p sont surjectifs, la condition (ii bis) signifie donc que $gr_M(J,R)$ est engendré par $u(gr_P(J,R))$. Or, il est immédiat que $u(gr_P(J,R))$ est formé des M-formes initiales des $f \in J$ tels que $v_P(f) = v_M(f)$, où $v_M(f) = \sup\{n \mid f \in M^n\}$. Donc (ii bis) signifie qu'il existe un système de générateurs $\phi_1,\ldots,\phi_m$ de $gr_M(J,R)$, minimal et ordonné par degrés croissants si on y tient, tel que, pour chaque i, il existe $f_i \in J$ avec $in_M(f_i) = \phi_i$ et $v_P(f_i) = v_M(f_i)$, autrement dit (ii bis) équivaut à

(ii ter) il existe une base standard $(f_1,\ldots,f_m)$ de J telle que $v_M(f_i) = v_P(f_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Pour démontrer le théorème, il nous sera commode d'en donner une version un peu plus générale (2.4) précédée de quelques préliminaires.

2.3. Modules bifiltrés. Soit R un anneau local noethérien, M son idéal maximal et $P \subset M$ un idéal. Un R-module bifiltré E est un R-module muni d'une filtration P-bonne (E'_n) et d'une filtration M-bonne (E''_n) telles que $E'_n \subset E''_n$. On dit que $E = (E',E'')$ est harmonieux si, pour tout n, on a $E''_n = \sum_i M^{n-i}E'_i$. Par exemple, si E' et E'' sont les filtrations P-adique et M-adique, alors E est harmonieux. Un module bifiltré est dit libre s'il existe une base $e_1,\ldots,e_p$ et des entiers $n(1),\ldots,n(p)$ tels que $E'_n = \sum P^{n-n(i)}e_i$ et $E''_n = \sum M^{n-n(i)}e_i$. On a un morphisme naturel

(1) $\quad gr(E') = \underline{E}' \longrightarrow \underline{E}'' = gr(E'')$

compatible avec le morphisme

(2) $\quad gr_P(R) = \underline{R}' \longrightarrow \underline{R}'' = gr_M(R)$,

et l'on prouve aisément le lemme suivant :

<u>Lemme 2.3.1.</u> Si $E = (E', E'')$ est un R-module bifiltré, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) E est harmonieux

(ii) le morphisme $\underline{E}' \otimes_{\underline{R}'} \underline{R}'' \longrightarrow \underline{E}''$ induit par (1) est surjectif

(iii) il existe un module bifiltré libre L et un morphisme surjectif $p : L \longrightarrow E$ tels que les deux filtrations de E soient quotient de celles de L.

2.3.2. Avec les notations de (iii), le noyau K de p est alors muni des deux filtrations (K', K'') induites par celles de L, ce qui donne deux suites exactes pour les gradués correspondants

(3) $$0 \longrightarrow \underline{K}' \longrightarrow \underline{L}' \longrightarrow \underline{E}' \longrightarrow 0$$

(4) $$0 \longrightarrow \underline{K}'' \longrightarrow \underline{L}'' \longrightarrow \underline{E}'' \longrightarrow 0 ,$$

mais on prendra garde que K n'est pas nécessairement harmonieux. Notons enfin que si E est muni d'une filtration P-bonne E', il existe une unique filtration M-bonne E'' telle que (E', E'') soit harmonieux.

2.3.3. Si P est premier, par localisation en P, le module P-filtré E' donne un module PR_P-filtré noté E'_P, ce qui permet, puisque PR_P est l'idéal maximal de R_P, de former la série de Poincaré

(5) $$H(E'_P) = \Sigma\, T^n \quad \mathrm{rang}(\underline{E}'_{P,n})$$

où conformément à nos conventions, $\underline{E}'_{P,n} = E'_{P,n}/E'_{P,n+1}$ est aussi le localisé en P de $\underline{E}'_n = E'_n/E'_{n+1}$. Par ailleurs, puisque E'' est muni d'une filtration M-bonne, on peut également former la série de Poincaré

(6) $$H(E'') = \Sigma\, T^n \,\mathrm{rang}(\underline{E}''_n), \quad \underline{E}'' = \mathrm{gr}(E'').$$

<u>Lemme 2.3.4.</u> Si $E = (E', E'')$ est un R-module bifiltré, avec P premier, on a :

(1) $\qquad H^{(1)}(E'') \leqslant \Sigma\, T^n\, H_M^{(1)}(\underline{E}'_n).$

Il suffira de prouver que, pour chaque n, il existe une filtration M-bonne $(\underline{E}'_n)''_p$, $p \geqslant 0$, sur $\underline{E}'_n$ telle que l'on ait

(2) $\qquad H(E'') = \Sigma\, T^n H(gr((\underline{E}'_n)''))$

car on a pour chaque n, $H_M^{(1)}(\underline{E}'_n) \geqslant H^{(1)}(gr((\underline{E}'_n)''))$. On pose

(3) $\qquad (\underline{E}'_n)''_p$ = image de $E'_n \cap E''_{n+p}$, $p \geqslant 0$.

On obtient bien une filtration exhaustive car $E'_n \subset E''_n$, de plus, c'est une filtration M-bonne, car c'est la filtration quotient de la filtration induite par E'' sur E'_n, décalée de n. Pour prouver (2), il suffit de montrer que les deux séries sont congrues modulo T^{N+1} pour tout $N \geqslant 0$. Or, par exactitude du passage au gradué associé, on a

(4) $\qquad H(E'') = H((E'_{N+1})'') + \sum\limits_{n \leqslant N} T^n\, H((\underline{E}'_n)''),$

où $(E'_{N+1})''$ désigne le module E'_{N+1} muni de la filtration induite par E''. Comme $(E'_{N+1})''_{N+1} = E'_{N+1}$, on a $H((E'_{N+1})'') = 0 \mod T^{N+1}$, d'où la conclusion.

2.3.5. Sous les hypothèses de (2.3.4), si $\underline{E}'$ est <u>plat</u> sur R/P, en sorte que chaque $\underline{E}'_n$ est plat de type fini, donc libre, on a $H_M(\underline{E}'_n) = \mathrm{rang}(\underline{E}'_{P,n}).H_M(R/P)$ et (2.3.4(1)) s'écrit donc

(1) $\qquad H^{(1)}(E'') \leqslant H(E'_P).H_M^{(1)}(R/P)$

ou encore, si R/P est <u>régulier</u>

(2) $\qquad H^{(1)}(E'') \leqslant H^{(d+1)}(E'_P)$, (si $\underline{E}'$ est plat).

<u>Lemme 2.3.6.</u>(Semi-continuité faible). Si R est régulier, si R/P est régulier de dimension d et si $E = (E',E'')$ est harmonieux, alors

(1) $\qquad H^{(1)}(E'') \geqslant H^{(d+1)}(E'_P)$

2.3.7. On raisonne par récurrence sur d et l'on introduit un idéal Q tel que $P \subset Q \subset M$ et R/Q régulier de dimension 1. On introduit la filtration Q-bonne E''' telle que (E',E''') soit harmonieux. Par localisation en Q, on trouve ainsi un module bifiltré harmonieux (E'_Q,E'''_Q) sur R_Q et par l'hypothèse de récurrence, on a ainsi $H^{(1)}(E'''_Q) \geqslant H^{(d)}(E'_P)$ et il reste à prouver que $H^{(2)}(E'''_Q) \leqslant H^{(1)}(E'')$, c'est à dire à traiter le cas où $d = 1$. On introduit alors une suite exacte de modules bifiltrés $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow 0$ où L est bifiltré libre, comme dans (2.3.2). Comme $\underline{L}'$ est plat sur R/P, c'est à dire sans torsion puisque R/P est régulier de dimension 1, il en est de même de $\underline{K}'$ et en vertu de (2.3.5(2)) (qui ne suppose pas que le module soit harmonieux), on a $H^{(1)}(K'') \leqslant H^{(2)}(K'_P)$ et puisque l'on a évidemment $H^{(1)}(L'') = H^{(2)}(L'_P)$ [par calcul direct lorsque $L = R$ avec ses filtrations P-adiques et M-adiques], on en déduit

$$H^{(1)}(E'') = H^{(1)}(L'') - H^{(1)}(K'')$$
$$\geqslant H^{(2)}(L'_P) - H^{(2)}(K'_P) = H^{(2)}(E'_P)$$

qui donne la conclusion.

<u>Théorème 2.4.</u> Soit R un anneau local régulier, soit P un idéal premier tel que R/P soit régulier de dimension d, soit M l'idéal maximal de R et soit $E = (E',E'')$ un R-module bifiltré harmonieux. Les conditons suivantes sont équivalentes

(i) le gradué $\underline{E}' = gr(E')$ est plat sur R/P

(ii) le morphisme naturel $\underline{E}' \otimes_{\underline{R}'} \underline{R}'' \longrightarrow \underline{E}''$ est un isomorphisme

2.4.1. Il est clair que (2.2) résulte de (2.4). En effet, on a vu que l'on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ où A est local complet, on représente A comme quotient d'un anneau régulier R et l'on applique l'énoncé en prenant pour E l'anneau A muni de ses filtrations P-adique et M-adique.

2.4.2. En conjuguant (2.3.5(2)) et (2.3.6(1)); on voit que si $\underline{E}'$ est plat sur R/P, on a

(1) $$H(E'') = H^{(d)}(E_P)$$

Prouvons que (i) ⇒ (ii). Puisque E est harmonieux, $\underline{E}'\otimes_{\underline{R}'}\underline{R}'' \longrightarrow \underline{E}''$ est surjectif et pour voir qu'il est bijectif, il suffit de montrer que ces deux modules ont même série de Poincaré, c'est à dire, d'après (1), que $H(\underline{E}'\otimes_{\underline{R}'}\underline{R}'') = H^{(d)}(E_P')$. En choisissant un système régulier de paramètres $(z_1,\ldots,z_r,\ x_1,\ldots,x_d)$ de R tel que $P = (z_1,\ldots,z_r)$, le morphisme $\underline{R}' \longrightarrow \underline{R}''$ s'explicite comme le composé

(2) $$\underline{R}' = (R/P)[Z_1,\ldots,Z_r] \to (R/M)[Z_1,\ldots,Z_r] \to (R/M)[Z_1,\ldots,Z_r,X_1,\ldots,X_d] = \underline{R}''$$

d'où il résulte que

(3) $$H(\underline{E}'\otimes_{\underline{R}'}\underline{R}'') = H^{(d)}(\underline{E}'/M\underline{E}')$$

Puisque l'on suppose (i), c'est à dire que chaque $\underline{E}_n'$ est libre, on a $H(\underline{E}'/M\underline{E}') = H(E_P')$ et par suite $H(\underline{E}'\otimes_{\underline{R}'}\underline{R}'') = H^{(d)}(E_P')$, d'où la conclusion.

2.4.3. Prouvons que (ii) ⇒ (i). Par hypothèse, on a $H(E'') = H(\underline{E}'\otimes_{\underline{R}'}\underline{R}'')$ et au vu de (3), on a évidemment

(4) $$H(\underline{E}'\otimes_{\underline{R}'}\underline{R}'') = (1 - T)^{-d}\ \Sigma\ T^n\ \mathrm{rang}(\underline{E}_n'/M\underline{E}_n').$$

En vertu du lemme ci-dessous, on a pour chaque n

(5) $$(1 - T)^{-d-1}\mathrm{rang}(\underline{E}_n'/M\underline{E}_n') \geqslant H_M^{(1)}(\underline{E}_n'),$$

d'où, en multipliant par T^n et en faisant la somme :

(6) $$H^{(1)}(E'') \geqslant \Sigma\ T^n H_M^{(1)}(\underline{E}_n')$$

et comme (2.3.1) fournit l'inégalité en sens inverse, (6) est une égalité, donc aussi (5) pour chaque n; d'après la seconde assertion du lemme ci-dessous, ceci assure que chaque $\underline{E}'_n$ est libre, donc (ii) ⇒ (i).

<u>Lemme 2.4.4.</u> Soit F un module de type fini sur un anneau local noethérien R d'idéal maximal M. Si $r = \mathrm{rang}(F/MF)$, on a

(1) $$H_M(F) \leqslant H_M(R).r$$

et si l'égalité a lieu, alors F est libre.

Un système minimal de générateurs de F fournit une suite exacte $0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow 0$, où L est libre de rang r, donc $H_M(F) = H_M(L) - H(K') = r.H_M(R) - H(K')$ où K' s'obtient en munissant K de la filtration induite, d'où la conclusion, car $H(K')$ est positif et n'est nul que si $K = 0$.

2.4.5. Notons que l'on peut toujours représenter E comme quotient d'un module bifiltré libre L et s'il en est ainsi, avec les notations de (2.3.2), la <u>condition</u> (ii) <u>équivaut</u> à

(ii bis) (K', K'') est harmonieux.

En effet, on a un diagramme commutatif de $\underline{R}''$-modules dont les lignes sont exactes

(1)
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \underline{K}'\otimes_{\underline{R}'}\underline{R}'' & \longrightarrow & \underline{L}'\otimes_{\underline{R}'}\underline{R}'' & \longrightarrow & \underline{E}'\otimes_{\underline{R}'}\underline{R}'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle a} & & \Big\downarrow{\scriptstyle b} & & \Big\downarrow{\scriptstyle c} & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{K}'' & \longrightarrow & \underline{L}'' & \longrightarrow & \underline{E}'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où b est évidemment bijectif, où c est surjectif parceque E est harmonieux. La condition (ii bis) signifie que a est surjectif, ce qui signifie que c est bijectif, qui n'est autre que (ii).

<u>Corollaire 2.5.</u> Si les conditions de (2.4) sont satisfaites, alors E admet une résolution finie par des modules bifiltrés libres telles que les différentielles et l'augmentation soient bi-strictes.

L'existence d'une telle résolution, non nécessairement finie est évidente : E est harmonieux, donc quotient d'un module bifiltré libre; le noyau R est harmonieux, d'après (2.4.5) et K' est plat sur R/P car $\underline{L}'$ et $\underline{E}'$ le sont, et l'on recommence. Pour obtenir une telle résolution qui soit finie, on prend un système <u>minimal</u> de générateurs du module P-filtré E', ce qui revient à prendre un système minimal de générateurs du $\underline{R}'$-module gradué $\underline{E}'$; le morphisme $P : L \longrightarrow E$ ainsi obtenu a la propriété que $\underline{L}'/D\underline{L}' \longrightarrow \underline{E}'/D\underline{E}'$ est un isomorphisme, où D est l'idéal $\underline{R}'_+ + M\underline{R}'$ du gradué $\underline{R}'$. On procède de même avec le noyau de $p : L \longrightarrow E$ etc; une telle résolution est nécessairement finie. En effet, si on la note $L.$, par passage aux gradués $\underline{L}'_i$ des L_i, on trouve une résolution $\underline{L}'$ de $\underline{E}'$ dont les différentielles sont nulles mod. D, en sorte que $\underline{L}'_i/D\underline{L}'_i = \mathrm{Tor}_i^{\underline{R}'}(\underline{E}', R/D)$, donc $\underline{L}_i = 0$ si $i > \dim R$, car D est engendré par une suite régulière ayant dimR éléments.

<u>Corollaire 2.6.</u> Soient V un espace numérique sur un corps k, (I 5.1.1), C un sous-cone fermé de V et Y un sous-espace numérique de V contenu dans C. Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) C est noramlement plat le long de Y à l'origine ω de V;

(b) Y est contenu dans le faîte de C

(c) C est normalement plat le long Y en tout point de Y.

On a des identifications naturelles et compatibles avec les inclusions : $V = C_\omega(V) = T_\omega(V)$, $C = C_\omega(C)$, $Y = C_\omega(Y) = T_\omega(Y)$. Par suite (a) $\Rightarrow$ (b) en vertu de (2.2). Si Y est contenu dans le faîte de C, alors $C = p^{-1}(C/Y)$, au sens des schémas, où $p : V \longrightarrow V/Y$ est la projection. Comme le morphisme p est plat, et que $Y = p^{-1}(O')$, où O' est l'origine de V/Y, on a $C_Y(C) = p^{-1}(C_{O'}(C/Y))$, donc (b) $\Rightarrow$ (c) et il est clair que (c) $\Rightarrow$ (a).

§ 3. Critère de Bennett. Croissance de $H_x(X)$

Théorème 3.1. Soient x et y deux points d'un schéma localement noethérien X tel que $x \in \overline{\{y\}} = Y$ et tels que $\underline{O}_{Y,x}$ soit régulier de dimension d. Alors

$$(1) \qquad H_y^{(d+1)}(X) \leqslant H_x^{(1)}(X)$$

et pour que (1) soit une égalité il faut et il suffit que X soit normalement plat le long de Y au point x.

3.1.1. L'énoncé ne dépend que de $\underline{O}_{X,x}$ et l'on peut donc supposer que X est le spectre d'un anneau local noethérien A. Comme dans (2.2.1), on peut supposer que A est complet, donc quotient d'un anneau local régulier R et en introduisant les filtrations P-adique et M-adique de A (où P définit Y et M est l'idéal maximal), on voit que le théorème est un cas particulier de l'énoncé que voici.

Proposition 3.2. Soit P un idéal d'un anneau local régulier R tel que R/P soit régulier de dimension d, soit M l'idéal maximal de R et soit $E = (E', E'')$ un module bifiltré harmonieux. On a

$$(1) \qquad H^{(d+1)}(E'_P) \leqslant H^{(1)}(\underline{E}'')$$

et pour que (1) soit une égalité, il faut et il suffit que $\underline{E}' = gr(E')$ soit plat sur R/P.

3.2.1. L'inégalité (1) a déjà été démontrée (2.3.6). De plus, si $\underline{E}'_P$ est plat sur R/P, on a l'inégalité en sens inverse (2.3.5(2)). Il reste à voir que si (1) est une égalité, alors $\underline{E}'$ est plat sur R/P. Introduisons une suite exacte de modules bifiltrés

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où L est bifiltré libre (2.3.2) et les filtrations M-bonnes de $\underline{K}'$, $\underline{L}'$ et $\underline{E}'$ données par :

(3) $\qquad (\underline{K}'_p)''_q$ = image de $K'_p \cap K''_{q+p}$ etc (2.3.4(3)).

On a évidemment pour chaque p

(4) $\qquad M^q\underline{K}'_p \subset (\underline{K}'_p)''_q \subset (\underline{L}'_p)''_q,\ q \geqslant 0$

La seconde inclusion tenant au fait que les filtrations K' et K'' de K sont induites par les filtrations L' et L'' de L. De plus, on a pour chaque p

(5) $\qquad M^q\underline{L}'_p = (\underline{L}'_p)''_q,\ q \geqslant 0.$

En effet, on a pour chaque p, $H^{(1)}((\underline{L}'_p)'') \leqslant H^{(1)}_M(\underline{L}'_p)$, d'où

$H^{(1)}(L'') = \Sigma\, T^n H^{(1)}((\underline{L}'_n)'') \leqslant \Sigma\, T^n H^{(1)}_M(\underline{L}'_n) = H^{(1)}(L'')$

où l'égalité de gauche est celle de (2.3.4(2)), et où celle de droite tient au fait que $\underline{L}'$ est plat et que $H^{(1)}(L'') = H^{(d+1)}(\underline{L}'_p)$. Donc pour chaque p, les deux filtrations considérées sur $\underline{L}'_p$ ont même série de Poincaré et sont donc égales car l'une est plus fine que l'autre.

<u>Lemme 3.2.2.</u> Si p est un entier tel que $\underline{E}'_p$ soit plat sur R/P, alors

(6) $\qquad (\underline{K}'_p)''_q = \underline{K}'_p \cap (\underline{L}'_p)''_q,\quad q \geqslant 0.$

En effet, les trois termes de la suite exacte $0 \longrightarrow \underline{K}'_p \longrightarrow \underline{L}'_p \longrightarrow \underline{E}'_p \longrightarrow 0$ sont alors plats, donc libres, donc la filtration M-adique de $\underline{K}'_p$ est induite par celle de $\underline{L}'_p$ et (6) résulte de (4) et (5).

<u>Lemme 3.2.3.</u> Si n est un entier tel que $\underline{E}'_p$ soit plat sur R/P $p \leqslant n-1$, alors pour tout $p \leqslant n$, on a

(7) $\qquad (E'_p)''_q$ = image de $(\underline{L}'_p)''_q,\ q \geqslant 0.$

Soit $\underline{a} \in (\underline{E}'_p)''_q$, il existe $a \in E'_p \cap E''_{p+q}$ dont $\underline{a}$ soit la classe et il existe $b \in L''_{p+q}$ dont a soit l'image. Montrons que l'on peut choisir $b \in L'_p \cap L''_{p+q}$. Sinon, on peut en tout cas choisir $b \in L'_r \cap L''_{p+q}$, avec r maximum et $r < p$. Soit $\underline{b}$ la classe de b dans $\underline{L}'_r$; on a $\underline{b} \in (\underline{L}'_r)''_{q+p-r}$ et comme $r < p$, on a $\underline{b} \in \underline{K}'_r$. Mais comme $r < p \leqslant n$, d'après (3.2.2), on a $\underline{b} \subset (\underline{K}'_r)''_{q+p-r}$ et il existe donc $c \in K \cap L'_r \cap L''_{q+p}$ dont la classe dans $\underline{L}'_r$ est $\underline{b}$. Par suite, $b-c \in L'_{r+1}$ et bien sûr $b-c \in L''_{q+p}$ et comme $c \in K$, l'image de $b-c$ dans E est celle de b, c'est à dire a, donc r n'était pas maximum. On peut donc supposer que $b \in L'_p \cap L''_{p+q}$, auquel cas la classe de b dans $\underline{L}'_p$ appartient à $(\underline{L}'_p)''_q$ et son image dans $\underline{E}'_p$ est $\underline{a}$, ce qu'il fallait démontrer.

3.2.4. Nous pouvons maintenant démontrer que si $H^{(d+1)}(E'_p) = H^{(1)}(E'')$, alors chaque $\underline{E}'_n$ est plat sur R/P. On procède par récurrence sur n. Supposons que $\underline{E}'_p$ soit plat pour $p \leqslant n-1$, en vertu de (7) et (5), la filtration M-adique de $(\underline{E}'_p)$ est égale à la filtration $(\underline{E}'_p)''$ pour $p \leqslant n$; en vertu de (2.3.4(2)), on a donc :

$$H^{(1)}(E'') = \sum_{p\leqslant n} T^p H^{(1)}_M (\underline{E}'_p) + \sum_{p>n} T^p H^{(1)}((\underline{E}'_p)'')$$

$$= \sum_{p<n} T^p r(\underline{E}'_p)/(1-T)^{d+1} + T^n \ell(\underline{E}'_n/M\underline{E}'_n) \quad (\text{mod. } T^{n+1})$$

où $r(\underline{E}'_p)$ est le rang du module libre $\underline{E}'_p$ (sur l'anneau R/P qui est régulier de dimension d) et où $\ell(\underline{E}'_n/M\underline{E}'_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel $\underline{E}'_n/M\underline{E}'_n$ et l'on a également

$$H^{(1)}(E'') = H^{(d+1)}(\underline{E}'_p) = \Sigma\, T^p r(\underline{E}'_{P,p})/(1-T)^{d+1}$$

$$= \sum_{p<n} T^p r(\underline{E}'_p)/(1-T)^{d+1} + T^n\ r(\underline{E}'_{P,n}) \quad (\text{mod. } T^{n+1})$$

où $r(\underline{E}'_{P,p})$ est le rang du localisé $(\underline{E}'_P)_p = gr_p(E'_P)$ de $\underline{E}'_P$. En comparant on trouve $r(\underline{E}'_{P,n}) = \ell(\underline{E}'_n/M\underline{E}'_n)$, ce qui prouve que $\underline{E}'_n$ est plat sur R/P, ce qui prouve le théorème.

Corollaire 3.3. Soient x , y et z trois points d'un schéma localement noethérien X tels que $x \in \overline{\{y\}} = Y$ et $y \in \overline{\{z\}} = Z$. On suppose que Z et Y soient réguliers au point x. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est normalement plat le long de Z au point x

(ii) X est normalement plat le long de Y au point x et X est normalement plat le long de Z au point générique y de Y.

En effet, si $d = \dim \underline{O}_{Y,x}$ et $e = \dim \underline{O}_{Z,y}$, on a

$$H_z^{(d+e+1)}(X) \leqslant H_y^{(d+1)}(X) \leqslant H_x^{(1)}(X)$$

et par le critère numérique, la condition (i) signifie que les termes extrêmes sont égaux, cependant que (ii) signifie que les deux inégalités ci-dessus sont des égalités.

Corollaire 3.4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme entre schémas noethériens, soit $x \in X$ tel que $\underline{O}_{X_y,x}$ soit régulier de dimension d, avec $y = f(x)$ et f plat au point x. Alors $H_x(X) = H_y^{(d)}(Y)$.

On peut remplacer X et Y par les spectres de $\underline{O}_{X,x}$ et $\underline{O}_{Y,y}$ ce qui assure que X_y est fermé dans X et régulier. Comme f est plat en x, on a $C_{X_y}(X) = C_y(Y) \times_k X_y$; où k est le corps résiduel de Y en y, donc X est normalement plat le long de X_y, d'où la conclusion. De plus, si k' est le corps résiduel de y, on a un isomorphisme.

(1) $$C_x(X) \simeq (C_y(Y) \times_k k') \times_{k'} T_x(X_y).$$

L'hypothèse de l'énoncé est satisfaite si f est <u>lisse</u> et en particulier <u>étale</u>, mais aussi lorsque f est déduit d'un morphisme local et plat d'anneaux locaux $A \longrightarrow B$ tel que $\underline{m}_A B = \underline{m}_B$, car la fibre de y est alors le spectre du corps résiduel de B.

Corollaire 3.5. Soit k'/k une extension de corps qui est finie, soit X un k-schéma noethérien et soit $X' = X x_k k'$. Soit $x' \in X'$ se projettant sur $x \in X$. On a $H^{(1)}_{x'}(X') \geq H^{(1)}_{x}(X)$ et l'on a égalité si l'extension k'/k est séparable.

La seconde assertion résulte de (3.4) appliqué à la première projection $f:X' \longrightarrow X$, car f est alors étale. Pour la première, on peut supposer que k'/k est monogène, donc $k' = k[X]/(p)$, où p est un polynome irréductible. Le morphisme $X' \longrightarrow X$ se factorise alors en

(1) $\quad X' \xrightarrow{h} X'' \xrightarrow{g} X, \quad X'' = X' x_k \mathrm{Spec}(k[X])$.

Soit $x'' = h(x')$. Puisque g est lisse à fibres de dimension 1, on a $H_{x''}(X'') = H^{(1)}_{x}(X)$, car x'' est fermé dans $g^{-1}(x)$. Par ailleurs, $\underline{O}_{X',x'} = \underline{O}_{X'',x''}/p$ et l'on a donc, d'après (I 3.9), $H^{(1)}_{x'}(X') \geq H_{x''}(X'')$, ce qui donne la conclusion. Notons pour terminer que si $H^{(1)}_{x'}(X') = H^{(1)}_{x}(X)$, alors $p \notin \underline{m}^2_{X'',x''}$ et la <u>forme initiale</u> P <u>de</u> p <u>est non diviseur de</u> 0 <u>dans</u> $gr_{\underline{m}''}(A'') \simeq gr_{\underline{m}}(A)[X]$, où l'on a posé $A'' = \underline{O}_{X'',x''}$, $\underline{m}'' = \underline{m}_{X'',x''}$, $A = \underline{O}_{X,x}$ et $\underline{m} = \underline{m}_{X,x}$.

Corollaire 3.6. Soient k un corps, C un cone sur k(spectre d'une k-algèbre graduée de type fini S), F son faîte et soient PC et PF les schémas projectifs déduits de C et F. Soit O le sommet de C et soit x un point fermé de PC. On a

(1) $\quad H^{(1)}_{O}(C) \geq H^{(2)}_{x}(PC)$

et si (1) est une égalité, alors $x \in PF$. Réciproquement, si x est un point de PF dont le corps résiduel k' est <u>séparable</u> sur k, alors (1) est une égalité.

3.6.1. Introduisons le cone épointé $C' = C - \{O\}$ et le morphisme lisse bien connu

(2) $\qquad f : C' \longrightarrow PC.$

Il existe un point fermé x' de C' tel que $f(x') = x$ et si y est le point générique de la fibre $f^{-1}(x)$, on a d'après (3.4)

(3) $\qquad H_x^{(1)}(PC) = H_{x'}(C') = H_y^{(1)}(C').$

Si x est un point <u>rationnel</u>, on peut choisir x' rationnel, en sorte que la droite Ox' notée Y est un schéma régulier de dimension 1 tel que $Y' = Y - \{0\}$ soit égal à $f^{-1}(x)$. Par (3.1(1)), on a donc

(4) $\qquad H_0^{(1)}(C) \geqslant H_y^{(2)}(C) = H_{x'}^{(1)}(C) = H_x^{(1)}(PC)$. De plus, dire que l'on a égalité signifie que C est normalement plat le long de Y au point 0, ce qui d'après (2.6) signifie que la droite Y est contenue dans le faîte de C, ce qui signifie que le point x' est dans le faîte de C, ce qui signifie que $x \in PF$, ce qui prouve le corollaire dans ce cas.

3.6.2. Si l'extension k'/k n'est pas triviale, avec $k' = k(x)$, intoduisons le cone $C' = C\times_k k'$. Pour tout point x' de PC' se projettant sur $x \in PC$, on a

(5) $\qquad H_x^{(2)}(PC) \leqslant H_{x'}^{(2)}(PC') \leqslant H_0^{(1)}(C') = H_0^{(1)}(C)$

la dernière égalité provenant du fait que $gr_0(C)$ s'identifie à l'algèbre graduée qui définit C. Ceci prouve l'inégalité (1). De plus, si on a égalité, on a $x' \in PF'$ où F' est le faîte de C', donc sa projection x appartient à PF car $F' = F\times_k k'$. Enfin, si k'/k est séparable, la première inégalité de (5) est une égalité, d'où la conclusion. On peut également formuler autrement le même corollaire.

<u>Corollaire 3.7.</u> Soit x un point fermé d'un cone C sur un corps k, soit 0 le sommet du cone et soit y le point générique du plus petit sous-cone Y contenant 0 et y. On a

(1) $$H_0^{(1)}(C) \geq H_x^{(1)}(C) = H_y^{(2)}(C)$$

et C est normalement plat le long du schéma régulier $Y' = Y - \{0\}$. De plus, si (1) est une égalité, alors x appartient au faîte F de C. Si x appartient au faîte de C et si le corps résiduel de x est séparable sur k, alors (1) est une égalité.

<u>Théorème 3.8.</u> Soit x un point d'un sous-schéma fermé Y d'un schéma noethérien X. Soit $p:X' \longrightarrow X$ l'éclaté de X de centre Y, soit x' un point fermé de $X'_x = p^{-1}(x)$, on suppose que Y est <u>permis</u> pour X au point x, en sorte que X'_x s'identifie à $\mathrm{Proj}(C)$, où $C = C_x(X)/T_x(Y)$. Alors

(1) $$H_x^{(1)}(X) \geq H_{x'}^{(1)}(X')$$

et si (1) est une égalité, alors

(i) $x' \in \mathrm{Proj}(F)$, où F est le faîte de C.

De plus, si X est un sous-schéma fermé d'un schéma régulier Z, si $P:Z' \longrightarrow Z$ s'obtient en éclatant Y dans Z, alors

(ii) X' est transverse à $p^{-1}(x) = Z'_x$ dans Z.

(iii) si l'extension résiduelle $k(x')/k(x)$ est <u>séparable</u> la conjonction de (i) et (ii) assure que (1) est une égalité.

3.8.1. Posons déjà $d = \dim(\underline{O}_{Y,x})$ et montrons que

(2) $$H_{x'}(X') \leq H_{x'}^{(d+1)}(X'_x).$$

D'après (I.3.9), il suffit de prouver que l'idéal qui définit $\underline{O}_{X'_x,x'}$ dans $\underline{O}_{X',x'}$ peut être engendré par $d+1$ éléments. On sait que le diviseur exceptionnel $X'_Y = p^{-1}(Y)$ est un diviseur (sic) et par ailleurs, l'idéal maximal de $\underline{O}_{Y,x}$ peut être engendré par d éléments, d'où la conclusion. Si X est un sous-schéma fermé d'un schéma régulier Z, alors

$X'_x = Z'_x \cap X'$ et Z'_x est un sous-schéma régulier de codimension $d+1$ de Z'. En ce cas, dire que (2) est une égalité signifie que X' et Z'_x sont transverses dans Z' (I 6.6), autrement dit, (ii) signifie que (2) est une égalité.

3.8.2. Puisque Y est permis (c'est à dire régulier et X normalement plat sur Y au point x), on a un isomorphisme

$$(3) \qquad C_Y(X)(x) \longleftarrow C_x(X)/T_x(Y) = C$$

et comme X'_x s'identifie à $\mathrm{Proj}(C_Y(X)(x)) = \mathrm{Proj}(C)$, on a aussi d'après (3.6) l'inégalité

$$(4) \qquad H^{(2)}_{x'}(X'_x) \leqslant H^{(1)}_0(C).$$

Par ailleurs, $H^{(d)}_0(C) = H_0(C_x(X)) = H_x(X)$ car $T_x(Y)$ est un espace numérique de dimension d et la conjonction de (2) et (4) assure (1) car

$$(5) \qquad H^{(1)}_{x'}(X') \leqslant H^{(d+2)}_{x'}(X'_x) \leqslant H^{(d+1)}_0(C) = H^{(1)}_x(X)$$

Notons au passage que si $d \geqslant 1$, on a même

$$(6) \qquad H_{x'}(X') \leqslant H_x(X).$$

Si (1) est une égalité, il en est de même de (2) et (4), ce qui assure (i) et (ii). Réciproquement, si l'extension résiduelle est séparable et si on a (i), alors (4) est une égalité par (3.6) et l'on a vu que (ii) implique que (2) est une égalité, ce qui achève la démonstration. Notons pour terminer que l'on a un énoncé analogue même si x' n'est pas supposé fermé dans sa fibre, obtenu en considérant les points fermés de l'adhérence de x' dans X'_x et en utilisant le théorème suivant.

<u>Théorème 3.9.</u> Soient x et y deux points d'un schéma noethérien X.. On suppose que $x \in \overline{\{y\}} = Y$, que $\underline{O}_{Y,x}$ est de dimension d, et que $\underline{O}_{X,x}$ est universellement japonais (EGA IV 7.7). Alors on a

(1) $$H_x^{(1)}(X) \geqslant H_y^{(d+1)}(X).$$

3.9.1. On peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x})$. En considérant une chaine maximale d'idéaux premiers emboités de $\underline{O}_{Y,x}$, on peut supposer que $d = 1$, (l'hypothèse n'est pas détruite car un localisé d'anneau universellement japonais en est un autre). L'inégalité a déjà été démontré si Y est régulier (3.1(1)), on va se ramener à ce cas en faisant une suite d'éclatements dans X de centre le point fermé, ce qui, au bout d'un nombre fini de pas, remplace $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{Y,y})$ par un schéma régulier (1.10), car $\underline{O}_{Y,y}$ est japonais, donc son normalisé est fini sur lui. A chaque pas, si X_{n+1} et Y_{n+1} se déduisent de X_n et Y_n en éclatant le point fermé x_n, alors Y_{n+1} est intègre de point générique y_{n+1} et il existe un point x_{n+1} de Y_{n+1} se projettant sur x_n et l'on a des isomorphismes

$\underline{O}_{X,y} \simeq \underline{O}_{X_1,y_i} \simeq \ldots \simeq \underline{O}_{X_n,y_n}$ et

$$H_x^{(1)}(X) \geqslant H_{x_1}^{(1)}(X_1) \geqslant \ldots \geqslant H_{x_n}^{(1)}(X_n)$$

et on conclut en prenant n assez grand pour que $\underline{O}_{Y_n,x_n}$ soit régulier, ce qui assure que $H_{x_n}^{(1)}(X_n) \geqslant H_{y_n}^{(2)}(X_n)$.

3.9.2. Le théorème de semi-continuité (3.9) et le critère numérique (3.1), dûs à Bennett, suffisent à établir l'existence d'une partition finie de tout schéma noethérien <u>excellent</u> X, appelée stratification de Samuel, telle que la relation d'équivalence associée soit

$$\check{H}_x(X) = \check{H}_{x'}(X), \text{ avec } \check{H}_x(X) = H_x^{(d(x))}(X) \text{ et } d(x) = \dim\overline{(x)},$$

et dont les classes d'équivalence sont localement fermées. Pour plus de détails, voir la thèse de Bennett parue aux Annals.

§ 4. Théorème de stabilité (Hironaka)

Je ne connais pas de preuve écrite de ce théorème en car. $p > 0$; il est cependant clair que l'on peut le déduire des résultats (beaucoup plus précis) de Hironaka (J. M. Kyoto, 1970, p. 151-187). Par ailleurs, H. Teissier et M. Lejeune en ont donné une preuve fort simple en géométrie analytique complexe. Nous montrons comment la considération du faîte d'un cone permet d'étendre cette dernière démonstration en surmontant les difficultés dues aux phénomènes d'inséparabilité.

Théorème 4.1. Soit $p_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$, $n \geq 1$, une suite de morphismes de schémas et soit, pout chaque $n \geq 0$, un point $x_n \in X_n$ tels que

(a) X_o est un schéma noethérien et $p_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ est un éclatement permis pour $n \geq 1$,

(b) $p_n(x_n) = x_{n-1}$, $n \geq 1$, et x_n est fermé dans sa fibre, autrement dit, l'extension résiduelle k_n/k_{n-1} est algébrique finie. Soit K un corps parfait et soit, pour tout $n \geq 0$ un plongement $a_n : k_n \longrightarrow K$ tel que $a_n | k_{n-1} = a_{n-1}$. Il existe un entier N tel que, pour $n \geq N$, on ait $H_{x_n}(X_n) = H_{x_{n-1}}(X_{n-1})$ et un isomorphisme de cones

$$C_{x_n}(X_n) \times_{k_n} K \xrightarrow{\sim} C_{x_{n-1}}(X_{n-1}) \times_{k_{n-1}} K. \tag{1}$$

4.1.1. Posons

$$H^{(1)}_{x_n}(X_n) = \sum_p a_{n,p} T^p \; ; \tag{2}$$

alors, pour p fixé, on a une fonction à valeurs dans les entiers naturels $n \longrightarrow a_{n,p}$, qui est décroissante d'après (3.8(1)), donc constante pour n grand et par suite, il existe un entier $N(p)$ tel que

$$H^{(1)}_{x_n}(X_n) = H^{(1)}_{x_{N(p)}}(X_{N(p)}) \pmod{T^{p+1}}, \text{ pour } n \geq N(p). \tag{3}$$

Introduisons le cone tangent $C_n = C_{x_n}(X_n)$ qui est fermé dans l'espace tangent $T_n = T_{x_n}(X_n)$ donc défini par un idéal homogène J_n de l'algèbre de polynomes S_n qui définit T_n, et le cone $C_n(p)$ défini dans T_n par l'idéal $J(p)$ engendré par les éléments de J qui sont homogènes de degré $\leqslant p$. Soit encore $F_n(p)$ le faîte de $C_n(p)$ et $f_n(p)$ sa dimension. Nous montrerons plus bas (4.2) que (3) assure que

(4) $\qquad f_n(p) \geqslant f_{n+1}(p), \quad n \geqslant N(p).$

Il existe donc un entier $M(p) \geqslant N(p)$ tel que l'on ait

(5) $\qquad f_n(p) = f_{M(p)}(p)$, pour $n \geqslant M(p)$.

Nous montrerons plus bas (4.2), que ceci implique l'existence d'un K-isomorphisme linéaire

(6) $\qquad r_{n,p} : T_{n-1} x_{k_{n-1}} K \xrightarrow{\sim} T_n x_{k_n} K$, pour $n > M(p)$,

qui identifie $C_n(p) x_{k_n} K$ et $C_{n-1}(p) x_{k_{n-1}} K$ et par suite aussi $C_n(q) x_{k_n} K$ et $C_{n-1}(q) x_{k_{n-1}} K$ pour $q < p$, par définition même des idéaux $J_n(p)$.

En posant

(7) $\qquad T(p) = T_{M(p)} x_{k_{M(p)}} K, \quad C(p) = C_{M(p)} x_{k_{M(p)}} K$, les $r_{n,p}$, pour $M(p) < n \leqslant M(p+1)$, induisent, par extension des scalaires et composition, des isomorphismes

(8) $\qquad r(p) : T(p) \xrightarrow{\sim} T(p+1)$ avec $r(p)(C(p)) \supset C(p+1)$.

En identifiant les $T(p)$ grâce aux $r(p)$, on en déduit une suite décroissante de sous-schémas fermés d'un espace numérique sur le corps K, qui est donc stationnaire. Autrement dit, il existe un entier p_o tel que l'on ait

(9) $\qquad H(C(p_o + k)) = H(C(p_o))$ pour $k \geqslant 0$.

Il reste à montrer que $C_n = C_n(p_o)$ pour $n \geqslant M(p_o)$, ce qui prouvera à la fois la constance de $H(C_n) = H_{x_n}(X_n)$ pour $n \geqslant M(p_o)$ et l'existence de l'isomorphisme (4.1(1)) grâce à (6). Comme $C_n \subset C_n(p_o)$ par définition, on a $H(C_n) \leqslant H(C_n(p_o)) = H(C(p_o))$, et il suffit de prouver que pour tout $q \geqslant p_o$, on a $H^{(1)}(C_n) \geqslant H^{(1)}(C(p_o))$ (mod. T^{q+1}) par quoi l'on entend l'inégalité des coefficients de T^s dans ces deux séries pour $s \leqslant q$. Soit m un entier, $m \geqslant n$, $m \geqslant M(q)$. Alors on a :

$$H^{(1)}(C_n) \geqslant H^{(1)}(C_m) \equiv H^{(1)}(C_m(q)) = H^{(1)}(C(q)) = H^{(1)}(C(p_o))$$

où le signe $\equiv$ désigne l'égalité mod. T^{q+1}, d'où la conclusion.

<u>Proposition 4.2.</u> Soit x un point d'un schéma noethérien X, soit $p:X' \longrightarrow X$ un éclatement de centre Y permis au point x et soit x' un point fermé de $X'_x = p^{-1}(x)$. Soit un entier $N \geqslant 1$ tel que

(1) $$H_x(X) = H_{x'}(X') \quad (\text{mod. } T^{N+1}).$$

On a

(2) $$\dim F_x(X)(N) \geqslant \dim F_{x'}(X')(N)$$

où $F_x(X)(N)$ est le faîte de $C_x(X)(N)$, (I 6.8.2(3)). De plus, si (2) est une égalité, si k' et k sont les corps résiduels des points x' et x et si K est un corps parfait contenant k', on a un K-isomorphisme d'espaces numériques

(3) $$r:T_{x'}(X')x_{k'}K \xrightarrow{\sim} T_x(X)x_k K$$

qui induit un isomorphisme de cones

(4) $$C_{x'}(X')(N)x_{k'}K \xrightarrow{\sim} C_x(X)(N)x_k K.$$

4.2.1. Il suffit de trouver un isomorphisme (4), c'est à dire un isomorphisme entre les algèbres graduées correspondantes, car ce dernier induit un isomorphisme entre leurs composantes homogènes de degré 1 lequel induit un isomorphisme (3), qui à son tour induit l'isomorphisme de cones dont on est parti. Par localisation, complétion et en appliquant les théorèmes de Cohen, on peut supposer que X est un sous-schéma fermé d'un schéma régulier Z et considérer l'éclatement $P : Z' \longrightarrow Z$ de Z de centre Y dont X' est un sous-schéma fermé (cela n'est pas indispensable mais commode pour l'exposé). Comme dans la preuve de (3.8), dont (4.2) n'est qu'un raffinement, on introduit les cones

(1) $\quad C = C_x(X)/T_x(Y) \simeq C_Y(X)(x), \quad C'' = C x_k k'$, on pose $X'' = X'_x x_k k'$

et on introduit un point x'' de X'' se projettant sur x' et rationnel sur k'. D'après (I 3.9), (3.5) et (3.7), on a

(2) $$H^{(1)}_{x'}(X') \leqslant H^{(d+2)}_{x'}(X'_x) \leqslant H^{(d+2)}_{x''}(X'') \leqslant H^{(d+1)}_{0}(C'') = H^{(1)}_{x}(X),$$

où $d = \dim \underline{O}_{Y,y}$. En vertu de (4.2(1)), comme $(1-T)^a = 1 + \ldots$, on en tire

(3) $$H_{x'}(X') = H^{(d+1)}_{x'}(X'_x) \qquad (\mathrm{mod.}\ T^{N+1})$$

(4) $$H_{x'}(X'_x) = H_{x''}(X'') \qquad (\mathrm{mod.}\ T^{N+1})$$

(5) $$H^{(1)}_{x''}(X'') = H_0(C'') \qquad (\mathrm{mod.}\ T^{N+1}).$$

<u>Lemme 4.2.2.</u> On a

(1) $$\dim F_{x'}(X')(N) \leqslant \dim F_{x'}(X'_x)(N)+d+1$$

et si (1) est une égalité, il existe un espace numérique A de dimension $d+1$ et un K-isomorphisme de cones

(2) $$C_{x'}(X')(N) x_{k'} K \xrightarrow{\sim} C_{x'}(X'_x)(N) x_{k'} K x_K A.$$

Puisque $X'_x = Z'_x \cap X'$ et que Z'_x est régulier de codimension $d+1$ dans Z' qui est lui-même régulier, la relation (4.2.1(3)) permet d'appliquer le "critère numérique de transversalité tronqué" (I 6.9) qui assure :

(3) $$C_{x'}(X')(N) \cap T_{x'}(Z'_x) = C_{x'}(X'_x)(N),$$

qui entraine évidemment $F_{x'}(X')(N) \cap T_{x'}(Z'_x) \subset F_{x'}(X'_x)(N)$ (Cela se voit sur les foncteurs représentés sur les faîtes). Comme la dimension d'un faîte est le rang de l'espace vectoriel de ses points à valeurs dans un corps parfait, par exemple K, on en tire (1) trivialement. Posons $C = C_{x'}(X')(N)x_{k'}K$, $C' = C_{x'}(X'_x)(N)x_{k'}K$, $T = T_{x'}(Z')x_{k'}K$, $T' = T_{x'}(Z'_x)x_{k'}K$ en sorte que $C' = C \cap T'$ et notons D et D' les directrices de C et C'. Comme K est parfait D et D' sont les schémas réduits sous-jacents aux faîtes F et F' de C et C' et si (1) est une égalité, on a donc $\dim D = \dim D' + d + 1$, car la formation du faîte commute à l'extension du corps de base. Raisonnant comme dans (I 6.9.3), on en déduit qu'il exite un espace numérique A de dimension $d + 1$, par exemple D/D', et un isomorphisme $CxA \xrightarrow{\sim} C'$, ce qui prouve le lemme.

<u>Lemme 4.2.3.</u> On a

(1) $$\dim F_{x'}(X'_x)(N) \leqslant \dim F_{x''}(X'')(N)$$

et si (1) est une égalité, alors on a un isomorphisme

(2) $$C_{x'}(X'_x)(N)x_{k'}K \xrightarrow{\sim} C_{x''}(X'')(N)x_{k'}K.$$

On choisit un système de générateurs de l'extension finie k'/k, ce qui donne $k' = k_o/(p_1,\dots,p_r)$, $k_o = k[X_1,\dots,X_r]$ et l'on considère le diagramme ci-dessous, où, par définition, les carrés sont cartésiens

(3) $$\begin{tikzcd} Z'_x & Z_o \arrow[l] & Z'' \arrow[l] \\ X'_x \arrow[u] \arrow[d] & X_o \arrow[l, "a"'] \arrow[u] \arrow[d] & X'' \arrow[l, "b"'] \arrow[u] \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(k) & \mathrm{Spec}(k_o) \arrow[l] & \mathrm{Spec}(k'). \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Puisque $Z'_x = \mathrm{Proj}(T_Y(Z)(x))$ est lisse, Z_o est régulier et Z'' est régulier de codimension r dans Z_o. Puisque $X'' = X_o \cap Z''$ et que a est lisse de dimension relative r, on a

(4) $$H^{(r)}_{x'}(X'_x) = H_{x''}(X_o) \leqslant H^{(r)}_{x''}(X'')$$

et, en vertu de (4.2.1(4)), on a donc

(5) $$H_{x''}(X_o) = H^{(r)}_{x''}(X'') \quad (\mathrm{mod.}\ T^{N+1})$$

et puisque a est lisse à fibres de dimension r

(6) $$C_{x'}(X'_x)(N) \simeq C_{x''}(X_o)(N)/T_{x''}(a^{-1}(x')).$$

Raisonnant comme plus haut pour le passage de X_o à X'', on en tire

(7) $$\dim F_{x'}(X'_x)(N) = \dim F_{x''}(X_o)(N) - r \leqslant \dim F_{x''}(X'')(N),$$

ce qui prouve l'inégalité (1). De plus, si (1) est une égalité, il en est de même de (7); en posant
$C_o = C_{x''}(X_o)(N) x_{k'} K$, $C_1 = C_{x''}(X'')(N) x_{k'} K$, et ne notant D_o et D_1 les directrices de C_o et C_1, on voit comme dans (I 6.9.3) que $C_o/D_o \simeq C_1/D_1$. Si on pose $C' = C_{x'}(X'_x)(N) x_{k'} K$ et si on note D' sa directrice, il résulte immédiatement de (6) que $C'/D' \simeq C_o/D_o$, on en tire alors

(8) $$C' \simeq (C'/D') x D' \simeq (C_1/D_1) x D_1 \simeq C_1,$$

car il est immédiat que D' et D_1 ont même dimension car ce sont les espaces réduits sous-jacents aux faîtes de C' et C_1. Le lecteur aura noté que, ici comme plus haut, la difficulté tient au fait que C' n'est pas nécessairement isomorphe à $(C'/F') x F$ où F' est le faîte de C'.

<u>Lemme 4.2.4.</u> Soit ξ un point de C'', rationnel sur k' et se projettant sur x'' par le morphisme lisse (cone épointé)

(1) $$h : C'' - \{0\} \longrightarrow X''$$

et soit L la droite joignant 0 et ξ. Alors L est contenu dans le faîte de $C''(N)$ et on a un isomorphisme

(2) $$C''(N)/L \xrightarrow{\sim} C_{X''}(X'')(N).$$

Puisque h est lisse de fibre $L - \{0\}$ au point ξ, on a un isomorphisme canonique

(3) $$C_{X''}(X'')(N) = C_\xi(C'')(N)/T_\xi(L)$$

et il suffit donc de trouver un isomorphisme

(4) $$C''(N)/L \longrightarrow C_\xi(C'')(N)/T_\xi(L).$$

Nous avons donc besoin d'une amélioration du critère de platitude normale d'un cone le long d'un sous-espace numérique (2.6). Soit maintenant V un espace numérique sur k' contenant C'' comme sous-cone fermé, par exemple $V = C''(1)$. On peut choisir les coordonnées telles que $V = \mathrm{Spec}(S)$, $S = k'[u, X_1, \ldots, X_s]$, $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$, en sorte que $gr_L(V) = k[u][\underline{X}]$, $gr_0(V) = k[U, \underline{X}]$, $gr_\xi(V) = k[W, \underline{X}]$, où W est la forme initiale de $w = u - 1$. Soit J l'idéal homogène de S qui définit l'algèbre graduée $G = S/J$ de C'' et soient $gr_L(J,S)$, $gr_0(J,S)$ et $gr_\xi(J,S)$ les idéaux des algèbres $gr_L(G)$, $gr_0(G)$ et $gr_\xi(G)$ dans $gr_L(V)$, $gr_0(V)$ et $gr_\xi(V)$. Considérons également le morphisme naturel

(5) $$t : gr_L(V) \longrightarrow gr_0(V),\ k[u][\underline{X}] \longrightarrow k[U, \underline{X}],\ u \longmapsto 0,\ X_i \longmapsto X_i.$$

Soit η le point générique de L. D'après (3.7), on a $H^{(1)}_{X''}(X'') = H_\xi(C'') = H^{(1)}_\eta(C'')$ et en vertu de (4.2.1(5)), on a donc $H_0(C'') = H^{(1)}_\eta(C'')$ (mod. T^{N+1}). Puisque la preuve du critère numérique de platitude normale procède par récurrence (3.2.4), on voit que les composantes homogènes de degré $\leq N$ de $gr_L(J,S)$ sont plates sur $\underline{O}_L = k[u]$.

En fait, en examinant un peu mieux (3.2.4) et la preuve du critère de Hironaka (2.4.2), on voit même que l'idéal de $gr_0(V)$ engendré par $t(gr_L(J,S))$ coïncide avec $gr_0(J,S)$ en degré $\leq N$. Il en résulte que $gr_0(J,S)(N)$ est engendré par des éléments $f_1,\ldots,f_m$ de degré $\nu_1,\ldots,\nu_m$ de l'image de t, c'est à dire des éléments $f_i \in k[\underline{X}]$. Comme $J = gr_0(J,S)$ (car $C'' = C_0(C'')$), on a $f_i \in J$. Par ailleurs, $(\underline{X})$ est précisément l'idéal de L, on voit donc par (I 5.4(iv)) que L est contenu dans le faîte de $C''(N)$ et que l'on a un isomorphisme naturel

(6) $$C''(N)/L \xrightarrow{\sim} C_1, \quad C_1 = \mathrm{Spec}(k[\underline{X}]/(f_1,\ldots,f_m)).$$

Par ailleurs, les formes initiales des f_i au point ξ ne sont autres que les f_i considérés comme éléments de $gr_\xi(V) = k[W,\underline{X}]$. Comme $v_\xi(f_i) = \deg(f_i) = \nu_i \leq N$, on a

(7) $$(f_1,\ldots,f_m)gr_\xi(V) \subset gr_\xi(J,S)(N).$$

Un calcul immédiat montre que les séries de Poincaré de ces deux idéaux sont égales mod. T^{N+1} et comme ces deux idéaux sont engendrés par leurs éléments de degré $\leq N$, ils sont égaux. Comme l'idéal $(\underline{X})gr_\xi(V)$ est celui qui définit $T_\xi(L)$ dans $T_\xi(V)$, on en tire par (I 5.4 (iv)) que $T_\xi(L)$ est contenu dans le faîte de $C_\xi(C'')(N)$ et que l'on a un isomorphisme

(8) $$C_\xi(C'')(N)/T_\xi(L) \xrightarrow{\sim} C_1.$$

On prouve le lemme en conjuguant (6) et (8).

4.2.5. La preuve de (4.2) est maintenant facile. Notons d'abord que l'on a des isomorphismes $C_x(X) \simeq C \times T_x(X)$ et $C'' \simeq C \times_k k' \simeq (C''/L) \times_{k'} L$ qui induisent, par passage à K et troncature à l'ordre N un isomorphisme $C_x(X)(N) \times_k K \xrightarrow{\sim} (C''(N)/L) \times_{k'} K \times_K B$, où B est un espace numérique de dimension $\dim T_x(Y) + \dim L = d+1$, d'où, en vertu de (4.2.4) un isomorphisme

(1) $$C_x(X)(N)\times_k K \xrightarrow{\sim} C_{x''}(X'')(N)\times_{k'} K\times_K B.$$

L'inégalité à démontrer entre les dimensions des faîtes résulte donc de (1) et des égalités qui figurent dans (4.2.2) et (4.2.3). Si la première est une égalité, il en est de même des deux autres, d'où des isomorphismes

(2) $$C_{x'}(X')(N)\times_{k'} K \simeq C_{x'}(X'_x)(N)\times_{k'} K\times_K A \simeq C_{x''}(X'')(N)\times_{k'} K\times_K A$$

où A est un espace numérique de dimension $d + 1$, d'où la conclusion car deux espaces numériques de même dimension sont isomorphes!

CHAPITRE III

Phénomènes spéciaux à la caractérisation $p > 0$.

Introduction. Aucun résultat substantiel n'est démontré dans ce chapitre. Le § 1 rassemble quelques résultats classiques que l'on trouve par exemple dans T. Oda [15] et dans les notes de Hironaka à Oslo [10]. Ensuite, on étudie un éclatement permis et deux points se projettant l'un sur l'autre avec même série de Hilbert; en fait on se contente de citer la définition des "groupes B" et le théorème dûs à Hironaka [9]. On en tire quelques conséquences simples sans autre ambition que de débroussailler la voie pour une étude plus approfondie de la situation qui, à ma connaissance, n'a pas encore été menée à bien.

§ 1. Parties principales, opérateurs différentiels.

1.1. Parties principales.

Soit $f:A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Avec Grothendieck, [EGA 0_{IV} 16.3], on introduit les morphismes

(1) $$A \xrightarrow{f} B \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} B\otimes_A B \xrightarrow{\Delta} B, \quad p_1(x) = x\otimes 1, p_2(x) = 1\otimes x, \ \Delta(x\otimes y) = xy.$$

et le noyau I de Δ. On appelle alors partie principale d'ordre n de B sur A le quotient

(2) $$\mathbb{P}^n_{B/A} = (B\otimes_A B)/I^{n+1}.$$

On convient d'en faire un B-module grâce à l'application $p_1 : B \longrightarrow B\otimes_A B$ (c'est même une B-algèbre!) et l'on note $d^n_{B/A}$ le composé

(3) $$B \xrightarrow{p_2} B\otimes_A B \longrightarrow \mathbb{P}^n_{B/A}.$$

Bien entendu, l'application $d^n_{B/A}$ est A-linéaire mais elle n'est B-linéaire que dans des cas triviaux. Cette construction est compatible avec la localisation, autrement dit, si R et S sont des parties multiplicativement stables de A et B telles que $f(R) \subset S$, le morphisme naturel

(4) $$\mathbb{P}^n_{B/A} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{B_S/A_R}$$

induit un isomorphisme

(5) $$(\mathbb{P}^n_{B/A})_S \longrightarrow \mathbb{P}^n_{B_S/A_R} \text{ , [EGA } 0_{IV} \text{ 16.4.15] .}$$

1.2. Opérateurs différentiels. Conservons les notations de (1.1) et introduisons une B-algèbre $g:B \longrightarrow C$. On appelle A-opérateur différentiel d'ordre zéro de B dans C une application B-linéaire $D:B \longrightarrow C$; ce sont donc les homothéties

(1) $$h_c:B \longrightarrow C,\ h_c(b) = g(b)c,\quad c \in C;$$

elles forment un C-module noté $\mathrm{Diff}_0(B/A,C/B)$. On définit par récurrence $\mathrm{Diff}_n(B/A,C/B)$ comme l'ensemble des applications A-linéaires $D:B \longrightarrow C$ telles que, pour tout $b \in B$, l'application

(2) $$\mathrm{ad}(b)D = [D,b] : B \longrightarrow C,\ [D,b]\,(x) = D(bx) - g(b)D(x),$$

appartiennent à $\mathrm{Diff}_{n-1}(B/A,C/B)$.

Par cette définition, on a par exemple

(3) $$D \in \mathrm{Diff}_1(B/A,C/B) \Leftrightarrow Dxy = xDy + yDx - xyD(1),$$

ce qui conduit à introduire le noyau

(4) $$\mathrm{Diff}^+_n(B/A,C/B) \text{ de } \mathrm{Diff}_n(B/A,C/B) \longrightarrow C,\ D \longmapsto D(1),$$

en sorte que $\mathrm{Diff}^+_1(B/A,C/B)$ est formé des A-dérivations de B dans C. On fait de $\mathrm{Diff}_n(B/A,C/B)$ un C-module en posant

(5) $$(cD)(b) = cD(b),\ c \in C,\ b \in B.$$

Comme D est A-<u>linéaire</u>, on a aussi

(6) $$(aD)(b) = D(ab),\ a \in A,\quad b \in B,$$

mais, par définition, les seuls opérateurs différentiels B-linéaires sont d'ordre 0. On pose

(7) $$\mathrm{Diff}(B/A,C/B) = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathrm{Diff}_n(B/A,C/B)$$

et on appelle <u>ordre</u> d'un opérateur différentiel le plus petit entier n tel que $D \in \mathrm{Diff}_n$, on le note souvent $|D|$. Si $h:C \longrightarrow C'$ est une C-algèbre et si $B \xrightarrow{D} C \xrightarrow{D'} C'$ sont des A-opérateurs différentiels, alors $D'D$ est un A-opérateur différentiel et l'on a

(8) $$|D'D| \leqslant |D| + |D'| ,$$

car $[D'D,b] = D'Db - D'bD + D'bD - bD'D = D'[D,b] + [D',b]D$, ce qui donne la conclusion par récurrence sur $|D|$ et $|D'|$. Si $B = C = C'$, on peut aussi former $[D,D'] = DD' - D'D$ et l'on a de même

(9) $$|[D,D']| \leqslant |D| + |D'| - 1,$$

car

(10) $$[[D,D'],b] = [D,[D',b]] - [D',[D,b]] \text{ (Jacobi).}$$

Pour simplifier, lorsque $B = C$, on écrira

(11) $$\mathrm{Diff}_n(B/A),\ \mathrm{Diff}^+(B/A) \text{ et } \mathrm{Diff}(B/A)$$

au lieu de $\mathrm{Diff}_n(B/A,B/B)$ etc...

<u>Lemme 1.2.1.</u> On a un isomorphisme de C-modules

(1) $$\mathrm{Lin}_B(\mathbb{P}^n_{B/A}, C) \longrightarrow \mathrm{Diff}_n(B/A,C/B),\ d \longmapsto d\circ d^n_{B/A}.$$

On peut invoquer [EGA IV 16.8.8], ou procéder comme suit. Par la propriété universelle du produit tensoriel de modules, pour toute application A-linéaire $D:B \longrightarrow C$, il existe une unique application $D':B\otimes_A B \longrightarrow C$ telle que $D(x) = D'(1\otimes x)$ et telle que $D'(zx\otimes y) = z\,D'(x\otimes y)$; il suffit de prendre $D'(x\otimes y) = g(x)D(y)$. Par ailleurs, si D' correspond à D, alors pour tout $b \in B$,

(2) $\quad ad(b)D':B\otimes_A B \longrightarrow C,\ ad(b)D'(x\otimes y) = D'((1\otimes b - b\otimes 1)x\otimes y)$

correspond à $ad(b)D = [D,b]$. Or, par définition, dire que $D \in Diff_n$ signifie que, pour tout $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in B^{n+1}$, on a

(3) $\quad ad(x_1)ad(x_2)\dots ad(x_{n+1})D = 0,$

puisque I^{n+1} est engendré par les $(1\otimes x_1 - x_1\otimes 1)\dots(1\otimes x_{n+1} - x_{n+1}\otimes 1)$, ceci signifie exactement que D' est nul sur I^{n+1}, donc que D' se factorise en l'application $d : \mathbb{P}^n_{B/A} \longrightarrow C$ que l'on cherche.

Lemme 1.2.2. Si p est un nombre premier tel que $p = 0$ dans B, alors, pour tout $b \in B$ et tout $D \in Diff(B/A,C/B)$, on a

(1) $\quad ad(b^p)D = ad(b)^pD.$

Si $|D| \leq p^r-1$, on a, pour tout $b \in B$

(2) $\quad ad(b^{p^r})D = 0,$

donc D est $A[B^{p^r}]$-linéaire et en particulier

(3) $\quad Diff_{p^r-1}(B/A,C/B) = Diff_{p^r-1}(B/A[B^{p^r}],B/C).$

La formule (1) résulte de (1.2.1(2)) et de la formule du binome dans $B\otimes_A B$; d'où (2) grâce à (1.2.1(3)), d'où (3).

Lemme 1.2.3. Soit P un idéal de B. Pour tout opérateur différentiel $D:B \longrightarrow C$, on a $D(P^n) \subset P^{n-|D|}C$.

On raisonne par récurrence sur n et $|D|$ avec les conventions habituelles $P^n = B$ si $n \leqslant 0$ et $|D| = 0$ si $|D| < 0$. Si $x \in P^{n+1}$, on a $x = \sum y_i z_i$, $y_i \in P$, $z_i \in P^n$, donc

$Dx = \sum Dy_i z_i = \sum y_i Dz_i + \sum [D, y_i] z_i \in P^{1+n-|D|} + P^{n-(|D|-1)}$,

d'où la conclusion.

<u>Exemple 1.2.4.</u> Si k est un anneau et $S = k[\underline{X}]$, $\underline{X} = (X_i)$, $i \in E$, est une algèbre de polynomes, l'isomorphisme naturel $B \otimes_A B = k[\underline{X}, \underline{X}']$ identifie l'idéal I de la diagonale à celui qu'engendrent les $(X_i - X_i')$, en sorte que les $(\underline{X}' - \underline{X})^A$, $A \in \underline{\underline{N}}^{(E)}$, $|A| \leqslant n$, forment une base de $\mathbb{P}^n_{S/k}$ comme S-module. On a donc des opérateurs différentiels

(1) $\qquad D_A : S \longrightarrow S$, $A \in \underline{\underline{N}}^{(E)}$, $|A| \leqslant n$, $D_A = d_A \circ d^n_{S/k}$

(2) $\qquad d_A : \mathbb{P}^n_{S/k} \longrightarrow S$, $d_A((\underline{X}' - \underline{X})^B) = \delta_{A,B}$ (symbole de Kronecker)

En posant $\underline{U} = \underline{X}' - \underline{X}$, on voit que $D_A f$ <u>est le coefficient de</u> $\underline{U}^A$ <u>dans le développement en</u> $\underline{U}$ <u>de</u> $f(\underline{X} + \underline{U})$, d'où

(3) $\qquad D_A(\underline{X}^B) = \binom{B}{A} \underline{X}^{B-A}$ et $f(\underline{X} + \underline{U}) = \sum (D_A f)(\underline{X}) \underline{U}^A$.

<u>Si</u> E <u>est fini, les</u> D_A de (1) <u>forment donc une base de</u> $\mathrm{Diff}_n(S/k)$. Si E est infini, comme le dual d'une somme directe est le produit correspondant, tout $D \in \mathrm{Diff}_n(S/k)$ s'écrit de manière unique

(4) $\qquad D = \sum x_A D_A$, $A \in \underline{\underline{N}}^{(E)}$, $|A| \leqslant n$, $x_A \in S$,

où les x_A peuvent être tous non nuls, ce qui n'empêche pas Df d'être bien défini, car $d^n_{S/k}(f) = \sum f_B (\underline{X}' - X)^B$, où seul un nombre fini de f_B sont non nuls, ce qui fait que la somme

(5) $\qquad Df = \sum_A x_A d_A(d^n_{S/k} f) = \sum_A x_A f_A$,

a un sens. Remarque analogue pour un $D \in \mathrm{Diff}_n(S/k, S'/S)$, où S' est une S-algèbre.

<u>Lemme 1.2.5.</u> Soit K une k-algèbre et soit (x_i), $i \in E$, une famille d'éléments de K telle que les dx_i engendrent le K-module $\Omega^1_{K/k}$. Soit $\xi_i = j_2(x_i) - j_1(x_i) \in K\otimes_k K$. Supposons qu'il existe des k-opérateurs différentiels

(1) $$D_A : K \longrightarrow K,\ A \in \underline{\underline{N}}^{(E)},\quad |D_A| \leqslant |A|,$$

tels que

(2) $$D_A(\underline{x}^B) = \binom{B}{A}\,\underline{x}^{B-A}\ ,\ A,B \in \underline{\underline{N}}^{(E)}.$$

Alors les classes dans $\mathbb{P}^n_{K/k}$ des $\underline{\xi}^A$, $A \in \underline{\underline{N}}^{(E)}$, $|A| \leqslant n$, forment une base du K-module $\mathbb{P}^n_{K/k}$ et tout $D \in \mathrm{Diff}_n(K/k)$ s'écrit de façon unique comme une somme (éventuellement infinie)

(3) $$D = \sum c_A D_A,\quad c_A \in K,\quad A \in \underline{\underline{N}}^{(E)},\quad |A| \leqslant n.$$

La seconde assertion est conséquence de la première. De plus, puisque les dx_i engendrent $\Omega^1_{K/k}$, les classes des $\underline{\xi}^A$, $|A| \leqslant n$, engendrent le K-module $\mathbb{P}^n_{K/k}$. Pour montrer que ces éléments sont linéairement indépendants, il suffira d'établir que, si l'on note $d_A : \mathbb{P}^n_{K/k} \longrightarrow K$ l'application K-linéaire telle que $D_A = d_A d^n_{K/k}$, alors on a $d_A(\underline{\xi}^B) = 1$ si $A = B$ et 0 sinon. Or, ceci résulte de la formule du binome dans $K\otimes_k K$ qui nous assure que

(4) $$\underline{\xi}^B = \sum_C (-1)^{|B-C|}\ j_1(\underline{x})^{B-C} j_2(\underline{x})^C \binom{B}{C}$$

d'où

(5) $$d_A(\underline{\xi}^B) = \sum_C (-1)^{|B-C|}\ \underline{x}^{B-C}\binom{B}{C} D_A(\underline{x}^C)$$

$$= \underline{x}^{B-A}\sum_C (-1)^{|B-C|}\binom{B}{C}\binom{C}{A} = \delta_{A,B},$$

d'où la conclusion.

<u>Exemple 1.2.6.</u> Le lemme précédent va nous permettre de calculer les opérateurs différentiels dans plusieurs cas.

(i) Si $k = \mathbb{F}_p$ est-le corps premier de caractéristique $p > 0$ et si (x_i), $i \in E$, est une p-base d'une extension K de k, on sait que les dx_i engendrent $\Omega^1_{K/k}$ et l'on construit les opérateurs D_A pour $|A| < q = p^r$ en notant que $\mathrm{Diff}_{q-1}(K/k) = \mathrm{Diff}_{q-1}(K/K^q)$ (1.2.2(3)) et que l'on a un isomorphisme $K = K^q[\underline{X}]/(X_i^q - x_i^q)$, où $\underline{X} = (X_i)$, $i \in E$, sont des indéterminées. Alors, les $D_A \in \mathrm{Diff}_{q-1}(K^q[\underline{X}]/K^q)$ de (1.2.4) s'annulent sur les $(X_i^q - x_i^q)$, pour $A \neq 0$, donc définissent des $D_A \in \mathrm{Diff}_{q-1}(K/K^q)$ qui satisfont évidemment à la condition (1.2.5(2)) en vertu de (1.2.4(3)).

(ii) Si k est un anneau et $K = k[[\underline{X}]]$ un anneau de série formelles bati sur k, on pose

(1) $$D_A(\sum f_B \underline{X}^B) = \sum f_B \binom{B}{A} \underline{X}^{B-A},$$

qui est bien un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant |A|$ comme on voit grâce aux relations de commutations évidentes

(2) $$[D_A, \underline{X}^B] = -\sum_{A' \neq 0} \binom{B}{A'} \underline{X}^{B-A'} D_{A-A'}.$$

Hélas, on ne peut appliquer (1.2.5) car les dx_i n'engendrent pas $\Omega^1_{K/k}$, mais seulement le module séparé associé. On peut cependant déterminer $\mathrm{Diff}(K/k)$ et même $\mathrm{Diff}(K/\mathbb{F}_p)$ si k est de caractéristique $p > 0$ grâce à (iii) et (1.2.8)(1.2.9), ce qui nous suffira.

(iii) Nous allons maintenant traiter le cas où $S = K[\underline{X}]$, $\underline{X} = (X_i)$, $i \in E$, avec pour K un corps de caractéristique $p > 0$. On prend pour k le corps premier $\mathbb{F}_p$, et on choisit une p-base (c_i), $i \in F$, de K. On a alors une famille (c_i, X_j) $i \in F$, $j \in E$, d'éléments de S et il résulte de la suite exacte

(3) $$\Omega^1_{K/k} \otimes_K S \longrightarrow \Omega^1_{S/k} \longrightarrow \Omega^1_{S/K} \longrightarrow 0$$

que les (dc_i, dX_j) engendrent $\Omega^1_{S/k}$.

D'après (i), on a des opérateurs différentiels

(4) $\Delta_A : K \longrightarrow K,\ A \in \underline{\underline{N}}^{(F)},\ |\Delta_A| = |A|$,

Or tout $D \in \mathrm{Diff}_n(K/k)$ se prolonge en un $D' \in \mathrm{Diff}_n(S/k)$ en posant

(5) $D'(\sum f_A \underline{X}^A) = \sum D(f_A)\underline{X}^A$.

D'après (1.2.4) ou (1.2.6(ii)) suivant les cas, on a également les opérateurs différentiels

(6) $D_B : S \longrightarrow S,\ B \in \underline{\underline{N}}^{(E)},\ |D_B| = |B|$

d'où les opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant |A| + |B|$

(7) $D'_A D_B = D_B D'_A$, $A \in \underline{\underline{N}}^{(F)}$, $B \in \underline{\underline{N}}^{(E)}$,

ce qui permet d'appliquer (1.2.5) car on a trivialement

(8) $D'_A D_B(\underline{c}^{A'}\underline{X}^{B'}) = \binom{A'}{A}\binom{B'}{B}\underline{c}^{A'-A}\underline{X}^{B'-B}$.

Il en résulte que pour toute S-algèbre S', tout $D \in \mathrm{Diff}_n(S/k,S'/S)$ s'écrit de façon unique

(9) $D = \sum_{|A| + |B| \leqslant n} d_{A,B}\, D'_A D_B,\quad d_{A,B} \in S'$.

Tadao Oda a remarqué que l'étude de groupe B de Hironaka (2.2.3) est grandement facilitée lorsque l'on emploie le lemme de "Taylor".

<u>Lemme 1.2.7.</u> Soit $S = k[\underline{X}]$ une algèbre de polynomes à un nombre fini d'indéterminées $\underline{X} = (X_1,\dots,X_r)$ sur un corps k de caractéristique $p > 0$. Soit P un idéal premier de S. Soit $f \in S$ et soit n un entier, les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $f \in P^n S_P$

(ii) pour tout $D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(S/\underline{\underline{F}}_p)$ on a $Df \in P$.

1.2.7.1.(i) ⇒ (ii) résulte de (1.2.3) appliqué à S_P et PS_P car, en vertu de (1.1(5)), tout $D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(S/\underline{\underline{F}}_p)$ est induit par un $D' \in \mathrm{Diff}_{n-1}(S_P/\underline{\underline{F}}_p)$. Pour prouver la réciproque, introduisons le localisé $R = S_P$, son idéal maximal $\underline{m} = PS_P$ et son complété pour la topologie $\underline{m}$-adique noté $\hat{P}$. Par le théorème de Cohen, il existe un corps de représentants $F \subset \hat{R}$ du corps résiduel K de $\hat{R}$ et un système régulier de paramètres $(z_1,\ldots,z_s)$ de R induisant un isomorphisme $F[[\underline{z}]] \xrightarrow{\sim} \hat{R}$. D'après (1.2.6(ii)), on en déduit des opérateurs différentiels $D_A^{(\underline{z})} : \hat{R} \longrightarrow \hat{R}$, $A \in \underline{\underline{N}}^s$. Introduisons de même les $D_A^{(\underline{X})} \in \mathrm{Diff}(S/k)$, $A \in \underline{\underline{N}}^r$, une p-base $(\underline{c})$ de k et les $D_A^{(\underline{c})} \in \mathrm{Diff}(k/\underline{\underline{F}}_p)$ dont le prolongement à $S = k[\underline{X}]$ est noté de la même façon.

1.2.7.2. Notons $i : S \longrightarrow \hat{R}$ le morphisme naturel. On a donc $i(f) = \sum f_A \underline{z}^A$, $A \in \underline{\underline{N}}^s$, $f_A \in F$. Pour tout $B \in \underline{\underline{N}}^s$, on a $D_B^{(\underline{z})}(i(f)) = f_B$ (mod. $\underline{m}\hat{R}$); mais $D_B^{(z)} \circ i : S \longrightarrow \hat{R}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant |B|$, on a donc d'après (1.2.6(9)),

$$(1) \qquad D_B^{(\underline{z})} \circ i = \sum_{|C|+|D|\leqslant|B|} d_{C,D} D_C^{(\underline{c})} D_D^{(\underline{X})}, \quad d_{C,D} \in \hat{R}.$$

Si on a (ii) pour tout $B \in \underline{\underline{N}}^s$ tel que $|B| < n$, on a donc $D_B^{(\underline{z})}(i(f)) \in \underline{m}\hat{R}$, donc $f_B = 0$, donc $i(f) \in \underline{m}^n\hat{R}$. Par définition de $\hat{R}$, on a donc $f \in \underline{m}^n R = P^n S_P$.

<u>Si l'on suppose de plus que</u> f <u>est additif,</u> c'est à dire que $f = \sum c_i X_i^{p^{r_i}}$, la condition (ii) équivaut à

(iii) $n \leqslant \inf \left\{ p^{r_i} \,\middle|\, c_i \neq 0 \right\}$ et pour tout $D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(k/\underline{\underline{F}}_p)$, on a $Df \in P$.

En effet, (ii) $\Rightarrow$ (iii) car il suffit de prouver que la première assertion de (iii); or, pour tout i, il existe $D \in \mathrm{Diff}(S/k)$, $|D| = p^{r_i}$, avec $Df = c_i$, donc $c_i = 0$ si $n > p^{r_i}$. Inversement, si on a la première condition de (iii), on a $D_A^{(\underline{X})}(f) = 0$ dès que $|A| < n$, donc d'après (1.2.6(9)), pour tout $D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(S/\underline{\underline{F}}_p)$, on a $Df = \sum u_A D_A^{(\underline{c})}(f)$, $u_A \in S$, $|A| \leqslant n-1$, donc $Df \in P$ si on a (iii).

<u>Lemme 1.2.8.</u> Soient A un anneau et R une A-algèbre qui est un anneau noethérien. Soit I un idéal de R, soit $\hat{R}$ le complété de R pour la topologie I-adique et soit $\hat{I} = I\hat{R}$. L'application naturelle

(1) $$\mathrm{Diff}_m(\hat{R}/A) \longrightarrow \mathrm{Diff}_n(R/A, \hat{R}/R),\ D \longmapsto D|R$$, est un isomorphisme.

Tout opérateur différentiel $D \in \mathrm{Diff}(\hat{R}/A)$ est continu car $D(\hat{I}^n) \subset \hat{I}^{n-|D|}$, et comme l'image de R est dense dans $\hat{R}$, l'application (1) est injective. Inversement, si $D \in \mathrm{Diff}_n(R/A,\hat{R}/R)$, il existe une unique application additive et continue $\hat{D} : \hat{R} \longrightarrow \hat{R}$ telle que $\hat{D}|R = D$. De plus, il est clair que $\hat{D}(\hat{I}^n) \subset \hat{I}^{n-|D|}$. Pour montrer que $\hat{D}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$, il reste à voir que si $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \hat{R}^{n+1}$, alors $F = \mathrm{ad}x_1\dots\mathrm{ad}x_{n+1}\hat{D} = 0$, ou encore que, pour tout q, on a $F(\hat{R}) \subset \hat{I}^q$. Pour chaque $i \in [1, n+1]$, on a $x_i = a_i + b_i$, $a_i \in R$, $b_i \in \hat{I}^{q+|D|}$ et $F = \mathrm{ad}a_1\dots\mathrm{ad}a_{n+1}\hat{D} + \sum F_j$, où chaque F_j est de la forme $F_j = \mathrm{ad}c_1\dots\mathrm{ad}c_{n+1}\hat{D}$, où, pour tout $k \in [1,n+1]$, chaque c_k est égal à a_k où à b_k avec cette restriction que, au moins, l'un des c_k est égal à b_k. On en tire que $F_j(\hat{I}^m) \subset \hat{I}^{m-|D|+q+|D|}$ donc $F_j(R) \subset \hat{I}^q$ en vertu du fait que si $G : \hat{R} \longrightarrow \hat{R}$ est une application additive telle que $G(\hat{I}^m) \subset \hat{I}^{m-s}$, alors, pour tout $y \in \hat{I}^r$, $\mathrm{ad}yG(\hat{I}^m) \subset \hat{I}^{m-s+r}$. Par ailleurs, $\mathrm{ad}a_1\dots\mathrm{ad}a_{n+1}\hat{D}$ est nul car sa restriction à R l'est car D est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$, d'où la conclusion.

<u>Lemme 1.2.9.</u> Sous les hypothèses de (1.2.7), pour tout $D \in \mathrm{Diff}_n(S/\underline{\underline{F}}_p,\hat{R}/S)$, il existe un unique $\hat{D} \in \mathrm{Diff}_n(\hat{R}/\underline{\underline{F}}_p)$ tel que $\hat{D}|S = D$.

En effet, les deux applications ci-dessous sont bijectives

$$\mathrm{Diff}_n(\hat{R}/\underline{\underline{F}}_p) \longrightarrow \mathrm{Diff}_n(R/\underline{\underline{F}}_p,\hat{R}/R) \longrightarrow \mathrm{Diff}_n(S/\underline{\underline{F}}_p,\hat{R}/S)$$

la première en vertu du lemme précédent et la seconde en vertu de (1.2(5)) et (1.2.1).

§ 2. Les groupes de Hironaka [8].

2.1. Soit V un espace numérique sur un corps k, donc $V = \mathrm{Spec}(S)$, $S = k[\underline{X}]$, et soit ξ un point de $P = \mathrm{Proj}(S)$. Soit encore $\pi : V' \longrightarrow P$, avec $V' = V - \{0\}$, le morphisme lisse habituel (cone projettant épointé) et soit $x \in V'$ tel que $\pi(x) = \xi$. Il existe $T \in S_1$ (variable d'homogénéité) qui n'est pas nul au point ξ et pour être sûr que x soit rationnel sur ξ, il suffit d'imposer que $T-1$ soit nul au point x. Soit encore $\underline{m}$ (resp. M) l'idéal premier (resp. premier homogène) de S correspondant à x (resp. ξ).

<u>Lemme 2.2.</u> Soit $F \in S_m$, soit $f = F/T^n$ et soit m un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $v_x(F) \geqslant m$ (c'est à dire $F \in \underline{m}^m_{V,x}$)

(ii) $v_\xi(f) \geqslant m$ (c'est à dire $f \in \underline{m}^m_{P,\xi}$)

2.2.1. Soit W l'hypersurface de V d'équation $F=0$ et soit Q l'hypersurface de P d'équation $F=0$. Le morphisme π induit un morphisme lisse $W' = W - \{0\} \longrightarrow Q$ et par suite (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) en vertu de (II 3.4).

<u>Corollaire 2.2.2.</u> Si $F \in S_n$, on a

(1) $$v_x(F) = v_\xi(F/T^n) \leqslant n.$$

En effet, si $F = \sum F_A \underline{X}^A$, $F_A \in k$, et $F_B \neq 0$, on a $D_B F = F_B \neq 0$ et comme $D_B : S \longrightarrow S$ est un opérateur différentiel d'ordre $|B| = n$, (1.2.4), si $F \in \underline{m}^{n+1}$ alors $F_B = D_B F \in \underline{m}^{n+1-n}$, (1.2.3) ce qui est idiot.

2.2.3. Pour chaque entier n, on pose

(1) $$U_{\xi,n} = \{F \in S_n \mid v_\xi(F/T^n) = n\} = \{F \in S_n \mid F \in \underline{m}^n_{V,x}\}$$

(2) $$U_\xi = \bigoplus_{n \geqslant 0} U_{\xi,n}.$$

Il est clair que U_ξ est une sous-algèbre graduée de S et par ailleurs, elle satisfait à la condition de (I 5.4.3), autrement dit, si $F \in U_{\xi,n}$ alors pour tout multi-indice A tel que $|A| \leqslant n$ on a $D_A F \in U_{\xi,n-|A|}$. En effet, l'application D_A est un opérateur différentiel d'ordre $|A|$. Il en résulte que U_ξ <u>est l'algèbre des invariants d'un sous-groupe</u> B_ξ <u>de</u> V <u>que l'on appelle le groupe de Hironaka attaché au point</u> ξ. D'après (1), on peut aussi le décrire comme attaché à un point quelconque de V se projettant sur ξ et nous adopterons souvent ce point de vue.

2.2.4. D'après les résultats de (I 5), l'algèbre U_ξ est engendrée par des polynomes additifs homogènes $s_1,\dots,s_e$ (donc des formes linéaires en caractéristique 0), que l'on peut supposer rangés par degrés croissants et algébriquement indépendants sur k, ce qu'on écrit $U_\xi = k[\underline{s}]$ et l'on a $B_\xi = \mathrm{Spec}(S/(\underline{s})S)$. De plus, pour qu'un sous-cone C de V d'idéal homogène I soit invariant par B_ξ (i.e. B_ξ contenu dans le faîte de C), il faut et il suffit que $I = (I \cap k[\underline{s}])S$, autrement dit que I soit engendré par des éléments de $k[\underline{s}]$, homogènes pour la graduation induite par celle de S (I 5.4 (iv)).

2.2.5. Soit $x \in V' \subset V$, où V et V' sont deux espaces numériques. On a alors deux groupes de Hironaka $B_x(V')$ et $B_x(V)$, nous allons voir qu'<u>ils sont égaux</u>. En effet, on peut supposer que $V = \mathrm{Spec}(k[\underline{X},Y])$ et que $(\underline{Y})$ est l'idéal de V' dans V, ce qui met en évidence le fait que les Y_i appartiennent à $U_x(V)$, donc $V' \supset B_x(V)$. L'algèbre des invariants de $B_x(V)$ dans V' est donc $k[\underline{X}] \cap U_x(V)$, elle est égale à celle de $B_x(V')$ comme on voit en utilisant le fait que l'inclusion $V' \longrightarrow V$ admet une rétraction et en revenant à la définition (2.2.3(1)), d'où ce point.

Par ailleurs, un cone $C = \mathrm{Spec}\ G$, où G est une algèbre graduée sur un corps k engrendrée par G_1, est plongé de manière naturelle dans $V' = \operatorname{Spec} k[G_1]$ et tout plongement de C dans un espace numérique V est induit par l'inclusion naturelle $V' \longrightarrow V$. Comme le faîte FC de C ne dépend pas non plus du plongement choisi, l'énoncé ci-dessous peut se formuler intrinsèquement $B_x(V') \subset FC$.

<u>Théorème 2.3.</u> Soient V un espace numérique sur un corps, $V = \operatorname{Spec}(S)$, $S = k[\underline{X}]$, soit $x \in V$, $x \neq 0$, et soit C un sous-cone fermé de V. Soit encore $t = \dim(\overline{\{x\}})$. On a $H_x^{(t+1)}(C) \leqslant H^{(1)}(C)$ et si on a égalité, alors le groupe B_x est contenu dans le faîte de C.

Ce théorème, ou plutôt le corollaire (2.4) qui, nous le verrons, lui est trivialement équivalent, est dû à Hironaka, c'est le théorème IV de [9]. <u>Nous l'admettrons</u>; notons toutefois qu'il est évident si l'idéal de C dans V est principal.

<u>Corollaire 2.4.</u> Soit X un schéma localement noethérien et soit $f:X' \longrightarrow X$ un éclatement permis de centre Y. Soit $x' \in X'$ et soit $x = f(x')$. Soit t le degré de transcendance de l'extension résiduelle $k(x')/k(x)$. Soit encore $C = C_x(X)/T_x(Y) = C_Y(X)(x)$, en sorte que la fibre $X'_x = f^{-1}(x)$ n'est autre que $\operatorname{Proj}(C)$. On a $H_{x'}^{(t+1)} \leqslant H_x^{(1)}(X)$ et si on a égalité, alors $B_{x'}$ est contenu dans le faîte de C.

2.4.1. Montrons comment le corollaire résulte du théorème et laissons au lecteur le soin de déduire le théorème du corollaire en faisant éclater le sommet du cone. Soit $d = \dim \underline{O}_{Y,x'}$, soit E l'adhérence de x' dans X'_x et soit x'' un point fermé de E, on a :

$$(1) \qquad H_{x'}^{(t+1)}(X') \leqslant H_{x'}^{(t+1+d+1)}(X'_x) \leqslant H_{x''}^{(1+d+1)}(X'_x) \leqslant H_0^{(1+d)}(C) = H_x^{(1)}(X),$$

où la première inégalité vient du fait que X'_x s'obtient en annulant

$d+1$ équations dans X'(II 3.8.1), où la seconde est le théorème de semi-continuité (II 3.9), où la troisième est (II 3.7) et où l'égalité est conséquence du critère numérique de platitude normale. De plus, si l'on a $H_{x'}^{(t+1)}(X') = H_x^{(1)}(X)$, alors on peut appliquer le théorème (2.3) à l'espace numérique $T_x(X)/T_x(Y)$, au cone $C = C_x(X)/T_x(Y)$ et à un point de C se projettant sur le point x' de $X'_x = \mathrm{Proj}(C)$, ce qui donne la conclusion.

<u>Corollaire 2.5.</u> Sous les hypothèses de (2.3), soit encore FC le faîte de C. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) $H_x^{(t)}(C) = H(C)$

(ii) $H_x^{(t)}(FC) = H(FC)$

(iii) $B_x \subset FC$.

2.5.1. Nous venons de voir que (i) $\Rightarrow$ (iii). De plus, si on note respectivement U_{FC} et U les algèbres d'invariants de FC et de B_x, alors (iii) signifie que $U_{FC} \subset U$. Or il existe des polynomes additifs homogènes $s_1,\ldots,s_e$ tels que $e = \mathrm{codim}(FC,V)$ et $U_{FC} = k[\underline{s}]$. Si on a (iii), on a évidemment $v_x(s_i) = \deg(s_i)$ et d'après le lemme de Bennett (I.3.9), on a

$$(1) \qquad H_x^{(e)}(FC) \geqslant \prod_{1\leqslant i\leqslant e} \frac{(1-T^{q_i})}{1-T}\, H_x(V)$$

or on a évidemment

$$(2) \qquad H^{(e)}(FC) = \prod_{1\leqslant i\leqslant e} \frac{(1-T^{q_i})}{1-T}\, H(V),$$

d'où l'on tire $H_x^{(e)}(FC) \geqslant H^{(e)}(FC)H_x(V)/H(V) = H^{(e-t)}(FC)$ et comme on a l'inégalité inverse par le lemme de semi-continuité, on a égalité, donc (iii) $\Rightarrow$ (ii). Bien entendu, (ii) $\Rightarrow$ (iii), comme on voit en appliquant (2.3) au cone FC.

2.5.2. Il reste à prouver que (ii) + (iii) ⇒ (i). Pour cela, introduisons l'idéal premier $\underline{m}$ du point x de V, le localisé $R = S_{\underline{m}}$ et les filtrations

(1) $$S'_n = (S_+)^n \qquad S''_n = \sum_{A \in \underline{\underline{N}}^e,\ |Aq| \geqslant n} S.s^A$$

(2) $$R''{}'_n = \underline{m}^n R \qquad R''_n = (S''_n)_{\underline{m}},$$

où l'on a posé $q_i = \deg(s_i)$ et $Aq = A_1q_1 + \dots + A_eq_e$.

On a donc $S'_n \supset S''_n$ et, puisque $v_x(s_i) = q_i$ (en vertu de (iii)), on a aussi $R''{}'_n \supset R''_n$. Désignons par le même symbole souligné les anneaux gradués associés à ces anneaux filtrés. Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on a une filtration (S_+)-bonne sur $\underline{S}''_n$ et une filtration $\underline{m}$-bonne sur R''_n

(3) $$(\underline{S}''_n)'_m = \mathrm{Im}(S''_n \cap S'_{n+m}) \qquad (\underline{R}''_n)''{}'_m = \mathrm{Im}(R''_n \cap R''{}'_{m+n})$$

et comme dans (II 3.2.4), on a

(4) $$H_0(V) = H(\underline{S}') = \sum T^n H((\underline{S}''_n)')$$

(5) $$H_x(V) = H(\underline{R}''{}') = \sum T^n H((\underline{R}''_n)''{}').$$

Puisque $(\underline{s})$ est une suite régulière dans S, on a

(6) $$\underline{S}''_n = \bigoplus_{|Aq| = n} (S/(\underline{s})S).\Sigma^A;\ \Sigma = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_e), \Sigma_i = \mathrm{cl}(s_i),$$

en particulier, $\underline{S}''_n$ est libre sur $(S/(\underline{s})S) = D$, [algèbre affine du groupe FC], et son rang est noté $r(\underline{S}''_n)$. Bien sûr, on a $\underline{R}_n = (\underline{S}''_n)_{\underline{m}}$ et comme les filtrations (3) sont bonnes, on en déduit

(7) $$H^{(1)}((\underline{S}''_n)') \leqslant H_0^{(1)}(\underline{S}''_n) = r(\underline{S}''_n)\, H_0^{(1)}(FC)$$

(8) $$H^{(1)}((\underline{R}''_n)''{}') \leqslant H_x^{(1)}(\underline{R}''_n) = H_x^{(1)}(\underline{S}''_n) = r(\underline{S}''_n) H_x^{(1)}(FC).$$

En multipliant (7) et (8) par T^n et en faisant la somme on trouve donc

(9) $$H_0^{(1)}(V) \leqslant \sum T^n r(\underline{S}''_n)\ H_0^{(1)}(FC)$$

(10) $$H_x^{(1)}(V) \leqslant \sum T^n r(\underline{S}''_n)\ H_x^{(1)}(FC).$$

Mais on a évidemment

(11) $$\sum T^n r(\underline{S}''_n) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant e} (1-T^{q_i})^{-1}$$

car c'est la série de Hilbert-Samuel d'une algèbre de polynomes et aussi

(12) $$H_0^{(1)}(FC) = H_0^{(1)}(V). \prod_{1 \leqslant i \leqslant e} (1-T^{q_i})$$

car les s_i forment une suite régulière dans S. Donc (9) est une égalité, donc aussi (7), pour tout n, ce qui donne

(13) $$(\underline{S}''_n)'_m = (S_+)^n \underline{S}''_n.$$

En vertu de (ii), puisque (9) est une égalité, il en est de même de (10), (multiplier par $(1-T)^t$), donc aussi de (8) pour tout n, d'où

(14) $$(\underline{R}''_n)''{}'_m = \underline{m}^m \underline{R}''_n.$$

2.5.3. Nous n'avons encore rien dit de C. Introduisons l'idéal homogène J de C dans V, l'anneau A = S/J et les localisés $K = J_{\underline{m}}$ et $B = A_{\underline{m}}$. On munit J (resp. A) des filtrations induites par (resp. quotient de) celles de (2.5.2(1)), d'où des modules filtrés J', J", A', A" dont les gradués sont désignés par les mêmes symboles soulignés, et des filtrations sur $\underline{J}''_n$ et $\underline{A}''_n$

(1) $$(\underline{J}''_n)'_m = \mathrm{Im}(J''_n \cap J'_{n+m}) \qquad (\underline{A}''_n)'_m = \mathrm{Im}(A''_n \cap A'_{n+m}).$$

De plus, on a

(2) $$(S_+)^m \underline{J}''_n \subset (\underline{J}''_n)'_m \subset (\underline{S}''_n)'_m = (S_+)^m \underline{S}''_n.$$

En fait, nous allons voir que $\underline{A}''$ est plat sur $(S/(\underline{s})S)$, d'où il résulte immédiatement que les extrêmes de (2) sont égaux, d'où l'on déduit comme dans (I 3.2.3) que

(3) $$\underline{m}^m \underline{A}''_n = (\underline{A}''_n)'_m$$

d'où l'on tire

(4) $$H_0(C) = H(\underline{A}') = \sum T^n H((\underline{A}'')') = \sum T^n r(\underline{A}''_n).H_0(FC) ,$$

où $r(\underline{A}''_n)$ désigne le rang du module libre $\underline{A}''_n$ sur l'anneau affine $S/(\underline{s})S$ du groupe FC. Un raisonnement tout analogue faisant intervenir les localisés K et B de J et A et les filtrations induites et quotients de celle de (2.5.2(2)), nous donne

(5) $$H_x(C) = H(\underline{B}''') = \sum T^n H((\underline{B}''_n)''') = \sum T^n r(\underline{B}''_n).H_x(FC),$$

et la condition (ii) nous donne (i) qu'il fallait démontrer.

2.5.4. Il reste à prouver que $\underline{A}''$ est plat sur $S/(\underline{s})S$. Or FC est le faîte de C, donc l'idéal J de C dans V est engendré par $H = J \cap k[\underline{s}]$, car $k[\underline{s}]$ est l'algèbre des invariants de FC dans V. Mais le morphisme d'inclusion $k[\underline{s}] \longrightarrow S$ est plat, d'où il résulte que $\underline{A}'' = gr_{(\underline{s})}(S/J) = gr_{(\underline{s})}(k[\underline{s}]/H) \otimes_{k[\underline{s}]} (S/(\underline{s})S)$, ce qui donne la conclusion.

<u>Remarque 2.6.</u> Appelons <u>strate de Samuel du sommet d'un cone</u> C l'ensemble des $x \in C$ tels que $H_x(C) = H_0^{(-t)}(C)$, $t = \dim(\overline{\{x\}})$, ce qui signifie aussi $H_x(C)/H_0(C) = H_x(V)/H_0(V)$, où V est un espace numérique contenant C comme sous-cone fermé. Nous venons de prouver que <u>la strate de Samuel du sommet de</u> C <u>est aussi celle du sommet de son faîte</u> et que x appartient à la strate de Samuel de B_x, où B_x est le groupe de Hironaka attaché au point x de V. Pour l'instant, la

strate de Samuel n'est qu'une partie de C, on pourrait prouver qu'elle est fermée en utilisant les résultats de (II 4), mais nous allons voir mieux, c'est l'ensemble sous-jacent à un sous-groupe ΣF de F.

<u>Scholie 2.7.</u> Soit $V = \mathrm{Spec}(S)$, $S = k[X]$, un espace numérique sur un corps k, soit F <u>un faîte</u> dans V (sous-cone fermé qui est aussi un sous-groupe) et soit U l'algèbre des invariants de F, c'est à dire l'anneau affine du quotient V/F. On sait que U détermine F car U_+S est l'idéal de F dans V. Par ailleurs, soit L_n, $n \geqslant 0$, le k-espace vectoriel des polynomes additifs homogènes de degré n et soit $L = \bigoplus_{n\geqslant 0} L_n$; $L_n = 0$ si n n'est pas une puissance de l'exposant caractéristique p de k. Si l'on introduit l'endomorphisme

(1) $\quad \underline{f}:S \longrightarrow \underline{S},\ \underline{f}(x) = x^p,$

et l'anneau usuel $k[\underline{f}]$ où $\underline{f}a = a^p\underline{f}$, $a \in k$, alors L est un $k[\underline{f}]$-module à gauche : c'est le module de Dieudonné de V. (cf. [5] où [15]) de plus, $M = U \cap L$ est le module de Dieudonné du groupe quotient V/F, on a $U = k[M]$, et par suite, M détermine F. Dans ce qui suit, on fait agir sur S les opérateurs différentiels de k (relatifs au corps premier $\underline{\underline{F}}_p$) en les faisant agir sur les coefficients. Si $f \in L_n$, les seuls opérateurs différentiels de S d'ordre $< n$ qui n'annulent pas f sont des combinaisons linéaires à coefficients dans S d'opérateurs différentiels provenant de k.

<u>Proposition 2.8.</u> Sous les hypothèses de (2.7), si k est un corps de caractéristique $p > 0$, il existe un faîte ΣF tel que

(i) la sous-algèbre ΣU de S engendrée par les DF, $f \in M_n = U \cap L_n$, $D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(k)$, est l'algèbre des invariants de ΣF;

(ii) l'espace vectoriel $\Sigma M = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Sigma M_n$, où

(1) $$\Sigma M_n = (Df \mid f \in M_n,\ D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(k))$$

est le module de Dieudonné du groupe quotient $V/\Sigma F$

(iii) si $(s_1, \dots, s_e)$ sont des polynomes homogènes additifs de degrés $q_1, \dots, q_e$ qui engendrent U, alors les Ds_i, $D \in \mathrm{Diff}_{q_i - 1}(k)$, engendrent l'algèbre ΣU et le $k[f]$-module ΣM;

(iv) l'ensemble sous-jacent à ΣF est l'ensemble des $x \in F$ tels que $H_x^{(t(x))}(F) = H_0(F)$, où $t(x) = \dim\overline{\{x\}}$.

2.8.1. Soit $(x_i,\ i \in I)$ une p-base de k sur le corps premier $\underline{\underline{F}}_p$ et soit $A \in \underline{\underline{N}}^{(I)}$. Je dis que l'on a

(2) $$(D_A^{(\underline{x})} a)^p = D_{pA}^{(\underline{x})}(a^p), \quad a \in k.$$

En effet, si $q = p^r$ est tel que $|A| < q$, on a

(3) $$a = \sum_{B_i < q} a_B \underline{x}^B, \quad a_B \in k^q,$$

$$(D_A^{(\underline{x})} a)^p = (\sum a_B \binom{B}{A} \underline{x}^{B-A})^p$$

$$= \sum a_B^p \binom{B}{A} \underline{x}^{pB-pA} \qquad (\text{car } \tbinom{B}{A} \in \underline{\underline{F}}_p)$$

$$= \sum a_B^p \binom{pB}{pA} \underline{x}^{pB-pA}$$

$$= D_{pA}^{(\underline{x})} \sum a_B^p \underline{x}^{pB} \qquad (\text{car } a_B^p \in k^{pq}).$$

$$= D_{pA}^{(\underline{x})}(a^p).$$

Il en résulte que pour tout $s \in S$, on a

(4) $$\underline{f}\, D_A^{(\underline{x})} s = D_{pA}^{(\underline{x})} \underline{\underline{f}} s.$$

On en déduit que si $A \in \underline{\underline{N}}^{(I)}$ on a

(5) $$D_A^{(x)}\, \underline{f}^t = 0 \quad \text{si} \quad p^t \nmid A$$
$$= \underline{f}^t D_B^{(\underline{x})}, \text{ si } A = p^t B,\ B \in \underline{\underline{N}}^{(I)}$$

En effet, le second cas résulte de (4) et le premier tient à

(6) $$D_A^{(\underline{x})}(a^{p^t}) = 0 \quad \text{si} \quad p^t \nmid A,\ a \in k,$$

qui se démontre en écrivant $A = p^t B + C$, avec $C_i < p^t$ pour $i \in I$, d'où $D_A(a^{p^t}) = D_C(D_{p^t B}(a^{p^t})) = D_C(D_B(a)^{p^t}) = D_B(a)^{p^t} D_C(1) = 0$. Il résulte de (4) que ΣM est un sous-$k[\underline{f}]$-module gradué de L; en effet, si $s \in M_n$ et si $D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(k)$, alors $\underline{f}Ds = D'\underline{f}s$, avec $D' \in \mathrm{Diff}_{pn-p}(k) \subset \mathrm{Diff}_{pn-1}(k)$, donc $\underline{f}Ds \in M_{np}$ car $\underline{f}s \in M_{np}$. Par la théorie de Dieudonné, il existe donc un unique sous-groupe ΣF de V tel que ΣM soit le module de Dieudonné de $V/\Sigma F$. Par ailleurs, l'algèbre des invariants de ΣF étant engendrée par ΣM qui est un sous-espace vectoriel <u>gradué</u> de L; il est clair que ΣF est aussi un cone, donc un faîte et qu'il satisfait aux conditions (i) et (ii).

2.8.2. Pour prouver que ΣF satisfait à (iii), il suffit de prouver que le $k[\underline{f}]$-module M' engendré par les Ds_i, $D \in \mathrm{Diff}_{q_i-1}(k)$, est égal à ΣM. On a évidemment $M' \subset \Sigma M$ et il reste à prouver que, pour tout $s \in M_n$, $n = p^u$, et tout $D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(k)$, on a $Ds \in M'_n$. Or on a $s = \sum m_i s_i^{n/q_i}$, $m_i \in k$, et en particulier $m_i = 0$ si $n < q_i$.

On a donc
$$Ds = \sum m_i D(s_i^{n/q_i}) + \sum [D, m_i]\, s_i^{n/q_i}.$$

Puisque $|[D,m_i]| \leq |D| - 1$, en raisonnant par récurrence sur $|D|$, il suffit de prouver que les $D(s_i^{n/q_i})$, $|D| < n$, appartiennent à M'. Par linéarité, on peut supposer que $D = D_A^{(\underline{x})}$, $A \in \underline{\underline{N}}^{(I)}$, et l'on conclut par (2.8.1(5)).

2.8.3. Il reste à prouver que l'ensemble sous-jacent à ΣF est la strate de Samuel du sommet de F. D'après (2.6), pour qu'un point x de V appartienne à la strate de Samuel de F, il faut et il suffit que l'on ait $U_x \supset U_F$ où U_x est l'algèbre de Hironaka du point x. Par définition de U_x, si $s_1,\ldots,s_e$ sont des polynomes additifs homogènes qui engendrent U_F, cela signifie que $v_x(s_i) = \deg(s_i) = q_i$. Par le lemme de Taylor (1.2.7), cela signifie que les Ds_i, $D \in \mathrm{Diff}_{q_i-1}(k)$, sont nuls au point x, ce qui signifie que $x \in \Sigma F$, d'où la conclusion.

<u>Remarque 2.9</u>. Si C est un cone, on dira que le groupe ΣFC attaché par (2.8) au faîte FC de C est la <u>strate de Samuel de</u> C. C'est donc un <u>schéma</u> et pas seulement un ensemble et ΣFC n'est pas nécessairement réduit; mais comme c'est un faîte, ΣFC est <u>absolument irréductible</u>. Puisque (2.8) décrit ΣFC à partir de FC, il est utile de savoir aussi décrire FC à partir d'équations bien choisies de C.

<u>Proposition 2.10</u> Soit $V = \mathrm{Spec}(S)$, $S = k[X_1,\ldots,X_r]$, un espace numérique sur un corps k et soit $C = \mathrm{Spec}(S/J)$ un cone dans V.
Soient $f_1,\ldots,f_m$ des éléments homogènes de J de degrés $n(1),\ldots,n(m)$ tels que

(a) $n(1) \leqslant n(2) \leqslant \ldots \leqslant n(m)$

(b) les f_i engendrent J

(c) f_i est normalisé par rapport à l'idéal $(f_1,\ldots,f_{i-1})S$.

Alors

(i) si $A \in \exp(J)$ et $|A| < n(i)$, on a $D_A f_i = 0$, donc

(1) $$f_i(\underline{X}+\underline{X}') - f_i(\underline{X}') = \sum_{0 \leqslant |A| < n(i),\ A \notin \exp(J)} D_A f_i \cdot \underline{X}'^A.$$

(ii) les $D_A f_i$, $0 \leqslant |A| < n(i)$ appartiennent à l'algèbre des invariants U du faîte FC de C et l'engendrent; ils engendrent aussi l'idéal K du faîte FC de C.

2.10.1. On appelle exposant d'un polynome homogène f le plus grand indice pour l'ordre lexicographique tel que le coefficient du monome correspondant soit non nul, on le note $\exp(f)$. L'exposant d'un idéal homogène H est l'ensemble $\exp(H) \subset \underline{\underline{N}}^r$ des exposants de ses éléments homogènes non nuls. Il est immédiat que les classes dans S/H des $\underline{X}^A$, $A \in \underline{\underline{N}}^r$, $A \notin \exp(H)$ forment une base du k-espace vectoriel S/H. La projection $\pi : S \longrightarrow S/H$ admet donc une section k-linéaire $\nu : S/H \longrightarrow S$. On dit que $f \in S_n$ est normalisé par rapport à H si $f = \nu\pi(f)$; si $f = \sum f_A \underline{X}^A$, ceci signifie que $f_A = 0$ si $A \in \exp(H)$. Prouvons maintenant (i), où D_A désigne comme toujours l'opérateur différentiel de (1.2.4). Si $f_i = \sum f_{i,B} \underline{X}^B$, on a

$$D_A f_i = \sum_{B \in \underline{\underline{N}}^r} f_{i,A+B} \binom{A+B}{A} \underline{X}^B.$$

Si $|A| < n(i)$ et si $A \in \exp(J)$, en vertu de (a) et (b) on a $A \in \exp(f_1,\dots,f_{i-1})S$, donc $A+B \in \exp(f_1,\dots,f_{i-1})S$, donc $f_{i,A+B} = 0$, donc $D_A f_i = 0$. La formule (1) n'est autre que la formule de définition des D_A, compte tenu du fait que f_i est homogène.

2.10.1 Identifions $S \otimes_k S$ à $k[\underline{X}, \underline{X}']$ et notons ξ_i la classe dans $S \otimes_k (S/J)$ de X'_i. Puisque les ξ^A, $A \notin \exp(J)$ forment une k-base de S/J, les ξ^A, $A \notin \exp(J)$ forment une base du S-module $S \otimes_k (S/J)$ et d'après (1) on a :

(2) $$\mathrm{cl}(f_i(\underline{X} + \underline{X}')) = \mathrm{cl}(f_i(\underline{X} + \underline{X}') - f_i(\underline{X}')) = \sum_{A < n(i),\ A \notin \exp(J)} D_A f_i \cdot \xi^A$$

où cl désigne la classe dans $S \otimes_k (S/J)$. Puisque les f_i engendrent J, d'après (I 5.3.1), on sait donc que les $D_A f_i$, $|A| < n(i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, engendrent l'idéal K. Montrons maintenant que pour i fixé, les $D_A f_i$, $|A| < n(i)$, appartiennent à l'algèbre des invariants U de FC. Soit C_i le cone d'équations $f_i = 0$, soit FC_i son faîte, K_i l'idéal de celui-ci et U_i son algèbre d'invariants. D'après ce qu'on vient de voir, les $D_A f_i$, $|A| < n(i)$, i fixé, engendrent K_i, donc $K_i \subset K$. Par ailleurs, puisque l'idéal de C_i est principal, il est immédiat que $f_i \in U_i \subset U$ et enfin, puisque U est stable par dérivation (I 5.4.3 ,5.5), les $D_A f_i$, $|A| < n(i)$, appartiennent à U. Soit U' la sous-algèbre graduée de U qu'ils engendrent. On vient de voir que $U'_+ S = K$ et l'on sait que $U_+ S = K$. Par fidèle platitude de S sur U, on a donc $U'_+ U = U_+$, d'où l'on déduit par récurrence sur le degré que $U' = U$, d'où la conclusion.

Remarque 2.11. A tout faîte F d'un espace numérique V, on a donc associé deux faîtes ΣF et $\underline{B}F$, où ΣF est la strate de Samuel de F et où $\underline{B}F$ est le groupe de Hironaka du point générique de F. Ces opérations conservent les inclusions : pour ΣF, cela résulte de (2.8(ii)) et pour $\underline{B}F$, cela résulte du fait que si x est spécialisation de y, alors $U_y \subset U_x$, donc $B_y \supset B_x$. De plus, d'après (2.3), on a $\underline{B}\,\Sigma\, F \subset F$ et d'après l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) de (2.5) on a $x \in \Sigma\, \underline{B}F$, où x est le point générique de F, car

(1) $$H_x^{(t)}(B_x) = H_0(B).$$

En résumé on a des immersions fermées

(2) $$\Sigma\, F \subset \underline{B}\,\Sigma\, F \subset F, \qquad |F| \subset \Sigma\, \underline{B}\, F \subset \underline{B}\, F$$

avec le commentaire évident qu'un groupe de Hironaka H est le groupe de Hironaka du point générique x de sa strate de Samuel [comme dit ODA [15], << x is the most generic point such that $H = B_x$ >>] et aussi que F est un groupe de Hironaka si, et seulement si, on a $\underline{B}\,\Sigma\, F = F$. Le module de Dieudonné ΣM de $V/\Sigma F$ est décrit à partir du module de Dieudonné M de F par (2.8(1)) : $\Sigma M = \bigoplus_{n \geq 0} \Sigma M_n$ avec

(3) $\quad \Sigma M_n = \{ Df \mid f \in M_n,\ D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(k)\}$:

je dis que le module de Dieudonné $\underline{B}M$ de $V/\underline{B}F$ est décrit par

$\underline{B}M = \bigoplus_{n \geq 0} \underline{B}M_n$ avec

(4) $\quad \underline{B}M_n = \{ f \in L_n \mid \text{pour tout } D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(k),\ Df \in \underline{R}M \}$ où

$\underline{R}M = \bigoplus_{n \geq 0} \underline{R}M_n$ avec

(5) $\quad \underline{R}M_n = \{ s \in L_n \mid \text{il existe } r \text{ avec } \underline{f}^r s \in M_{np^r}\}$.

Notons d'abord que $\underline{R}M$ est un sous-$k[\underline{f}]$-module de L et que $L/\underline{R}M$ s'obtient an débarassant le module de Dieudonné L/M de F de sa $(\underline{f})$-torsion et correspond donc à un sous-faîte $\underline{R}F$ de F. Il est clair que F et $\underline{R}F$ ont même espace sous-jacent. De plus, $\underline{R}F$ <u>est le plus petit sous-faîte de</u> F <u>ayant même espace sous-jacent</u>. En effet, si F' est un sous-faîte de F ayant même espace sous-jacent, on a une suite exacte de modules de Dieudonné

$$0 \longrightarrow D(F/F') \longrightarrow D(F) \longrightarrow D(F') \longrightarrow 0$$

et $D(F/F')$ est de $(\underline{f})$-torsion car F/F' est de dimension 0. Il résulte de ceci que si P est l'idéal premier de S correspondant au point générique x de F, on a

(6) $\quad P \cap L_n = \underline{R}M_n$.

En effet, on a $\underline{R}M_n \subset P$ car $x \in \underline{R}F$ et inversement, tout polynome additif $s \in P \cap L_n$ définit un faîte dont l'intersection avec $\underline{R}F$ contient x, donc aussi l'ensemble sous-jacent à F, ce qui assure que cette intersection est $\underline{R}F$, ce qui assure $s \in \underline{R}M_n$. La formule (4) est maintenannt évidente. En effet, $\underline{B}M_n = U_x \cap L_n = \{s \in L_n \mid v_x(s) \geq n\}$, par le lemme de Taylor (1.2.7), on a donc $\underline{B}M_n = \{s \in L_n \mid \text{pour tout } D \in \mathrm{Diff}_{n-1}(k),\ Ds \in P\}$. ce qui prouve (4) grâce à (6).

Pour terminer, notons que par définition de **l**'algèbre des invariants d'un groupe de Hironaka, on a évidemment

(7) $\underline{R}M = M$

si M est le module de Dieudonné de V/F où F est un groupe de Hironaka. Par ailleurs, nous avons noté que pour qu'un faîte F soit un groupe de Hironaka il faut et il suffit que $\underline{B}\Sigma F = F$, ce qui s'écrit ici

(8) $\underline{B}\Sigma M = M$

où M est le module de Dieudonné de V/F, compte tenu des formules (3) (4) (5), on retrouve la caractérisation de ODA [15] . On notera que ODA l'obtient directement alors qu'ici elle résulte de l'inclusion $\underline{B}\ \Sigma\ F \subset C$ qui s'appuie sur le théorème de Hironaka (2.3) que nous n'avons pas démontré. Cependant, nous donnerons ailleurs une démonstration simple de (2.3) basée sur des arguments de calcul différentiel, ce qui fondera les résultats de ce paragraphe. En attendant, le lecteur se reportera à [9], et [15].

Exemple 2.12. Nous donnons ici un exemple de groupe de Hironaka F de dimension 7 tel que l'on ait des inclusions strictes $0 = \Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,F \subset \Sigma\,\Sigma\,F \subset \Sigma\,F \subset F$ et qui n'a pas de points rationnels. Récrivons cette suite $0 \subset H \subset G \subset F$ et notons η, γ et ϕ les points génériques de H, G et F. On voit que le cone tangent à F au point η est lui-même un faîte, ce qui contredit une conjecture que j'avais hasardée, à savoir que si x est un point d'un cone tel que $H_x^{t(x)}(C) = H_0(C)$ et $\operatorname{codim}(F_x(C), T_x(C)) = \operatorname{codim}(F_0(C), T_0(C))$, alors x appartient au groupe engendré par les points rationnels de $FC = F_0(C)$. Le problème de trouver des invariants numériques d'un cone qui assure qu'un point x appartient au groupe engendré par les points rationnels de son faîte est donc ouvert. Bien entendu, en caractéristique nulle, la fonction de Hilbert-Samuel suffit. Venons à l'exemple. On considère un corps k de caractéristique 2 et $a_1, a_2, a_3 \in k$ tels que $[k(b_1,b_2,b_3) : k] = 8$, où b_i est une racine carrée de a_i et le faîte F de l'espace numérique V de dimension 8 d'équation

$$f = X_0^2 + a_1X_1^2 = a_2X_2^2 + a_3X_3^2 + a_1a_2X_{12}^2 + a_2a_3X_{23}^2 + a_3a_1X_{31}^2 + a_1a_2a_3X_{123}^2 \tag{1}$$

Si l'on note D_i la dérivation par rapport à a_i, on voit que les équations $H = \Sigma F$ sont f et

$$\left\{\begin{aligned} D_1f &= X_1^2 + a_2X_{12}^2 + a_3X_{31}^2 + a_2a_3X_{123}^2 \\ D_2f &= X_2^2 + a_3X_{23}^2 + a_1X_{12}^2 + a_3a_1X_{123}^2 \\ D_3f &= X_3^2 + a_1X_{31}^2 + a_2X_{23}^2 + a_1a_2X_{123}^2 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où l'on peut évidemment remplacer f par

$$f_o = f - \sum a_iD_if = X_0^2 + a_1a_2X_{12}^2 + a_2a_3X_{23}^2 + a_3a_1X_{31}^2. \tag{3}$$

On reconnait alors que G est le groupe de Hironaka que ODA appelle de type (4.4)[15] . Nous laissons au lecteur le soin de prouver que $F = \underline{B}\, G$, en utilisant (2.11(4)). Le groupe $H = \Sigma\, \Sigma F$ s'obtient alors en ajoutant à (2) et (3) les équations

$$\left\{\begin{aligned} D_1D_2f &= X_{12}^2 + a_3X_{123}^2 \\ D_2D_3f &= X_{23}^2 + a_1X_{123}^2 \\ D_3D_1f &= X_{31}^2 + a_2X_{123}^2 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ou encore en conjuguant (2) , (4) et

(5) $$f - \Sigma\, a_i D_i f - \Sigma\, a_i a_j D_i D_j f = X_0^2 + a_1 a_2 a_3 X_{123}^2 .$$

La strate de Samuel de H s'obtient en annulant en plus $D_1 D_2 D_3 f = X_{123}^2$, d'où il résulte qu'elle est réduite à l'origine. Par suite, H n'est pas un groupe de Hironaka car le groupe de Hironaka de zéro est zéro. Pour étudier F au point η, on note d'abord que $X_{123}(\eta) \neq 0$, et les équations (4) nous donnent trois éléments de $M = \underline{m}_{V,\eta}$

(6) $$u_{ij} = D_i D_j f$$

qui forment évidemment un début de système régulier de paramètres.

Comme

$$D_i f(\eta) = a_1 a_2 a_3 X_{123}(\eta)^2 / a_i$$

on a par exemple

$$D_1 f(\eta) = X_{12}(\eta)^2 X_{31}(\eta)^2 / X_{123}(\eta)^2 ;$$

Comme $D_1 f \in M^2$, on en déduit

(7) $$u_1 = X_{123} X_1 + X_{12} X_{31} \in M$$

de même u_2 et u_3 par permutation circulaire et de façon analogue en utilisant (5), on trouve que

(8) $$u_0 = X_0 X_{123}^2 + X_{12} X_{23} X_{31} \in M$$

et en fait $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_{12}, u_{23}, u_{31})$

est un système de paramètres de $\underline{O}_{V,\eta}$. Un calcul facile donne

(9) $$X_{123}^4 f = u_0^2 + (a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2) X_{123}^2 + u_{12} u_{23} u_{31} .$$

On voit donc que la forme initiale de f au point η est un polynome additif (c'est même un carré) comme on l'avait annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Abhyankar, S., Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Academic Press, New-York-London, 1966.

[2] Bennett, B-M, On the characteristic function of a local ring, Annals of Math., 1970.

[3] Bourbaki, N, Algèbre Commutative, Hermann, Paris, cité [BAC]

[4] Dieudonné et Grothendieck. Eléments de Géométrie Algébrique, Pub. Math. IHES, P.U.F., Paris, cité [EGA]

[5] Demazure et Gabriel, Groupes algébriques, Masson, N.H.P.C., 1970

[6] Gabriel, P, Etude infinitésimale des schémas en groupes, Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S., 1963, expose VIIB, Lecture Note n° 151, Springer Verlag.

[7] Hironaka, Heisuke, Résolution of singularities of an algebraic variety over a field of charactéristic zero : I-II; Annals of Math. (79); 1964, p. 109-236.

[8] Additive groupes associated with points of a projective space, Annals of Math, (91), 1970.

[9] Certain numerical characters of singularities, J. Math. Kyoto Univ., 10-1 (1970), p. 151-187.

[10] Schemes etc..., Notes by A. B. Altman, Fifth Nordic Summer School in mathematics, OSLO, 1970, mimeographed.

[11] Characteristic polyhedra of singularities, J. Math. Kyoto Univ., 7-3 (1967), p. 251-293.

[12] Bimeromorphic smoothing of a complex analytic space, To appear.

[13] Lejeune et Teissier, Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Ecole Polytechnique, Paris, 1972, mimeographié.

[14] Lejeune, Hironaka, Teissier, ouvrage à paraître

[15] Oda, Tadao, Hironaka's additive group schemes, to appear in J.Math. Kyoto Univ.

[16] Serre J.P., Algèbre locale et multiplicités, Lecture Note, 11, Springer Verlag.

[17] Zariski, O, Reduction of singularities of algebraic three dimansional varieties, Annals of Math., 45, (1944), p. 472-542.

En outre, on trouvera dans (1) une bibliographie plus complète des travaux plus anciens.

N° d'impression 427

2ème trimestre 1980