MATHEMATIQUES

Edition
PARIS ONZE EDITION
Université de Paris-Sud

Introduction aux équations de Schrödinger non linéaires

Cours de DEA 1994 - 1995

J. Ginibre

Centre Scientifique
d'Orsay

Introduction
aux équations de Schrödinger non linéaires
Cours de DEA 1994 - 1995

J. GINIBRE

Edition
Paris Onze édition

Directeurs du Service Paris Onze édition
Jean-Pierre Michaut, Lionel Salem, Khalil Mihoubi

N° Paris Onze édition *L 161*

ISBN 2-87800-147-8

Table des matières

1. Introduction

Le but de ce cours est d'étudier de façon détaillée le problème de Cauchy et le comportement asymptotique en temps des solutions globales d'une classe d'équations de Schrödinger non linéaires (SNL ; voir ci-dessous). On exposera sur cet exemple des méthodes générales qui s'appliquent à une vaste classe d'équations dispersives semi-linéaires dont on donne ci-dessous quelques exemples.

(1) Présentation des équations

On note (x, t) un point générique de l'espace temps $\mathbb{R}^{n+1}$, $\partial_t = \partial/\partial t$ et $\partial_i = \partial/\partial x_i$ les dérivées par rapport à t et x, Δ le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$, et $\Box = \partial_t^2 - \Delta$ le D'Alembertien dans $\mathbb{R}^{n+1}$. La fonction inconnue u est définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ en général, parfois dans $\mathbb{R}$.

Equation de Schrödinger non linéaire (SNL)

L'équation est

$$i\partial_t u = -\frac{1}{2}\,\Delta u + f(u) \tag{1.1}$$

avec $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Le cas $f = 0$ est l'équation de Schrödinger libre (voir n'importe quel traité de Mécanique Quantique) pour une particule de masse $m = 1$ et avec $\hbar = 1$. Un exemple typique de non linéarité f qui sera traité dans ce cours est

$$f(u) = \lambda\,|u|^{p-1}u \tag{1.2}$$

avec $p > 1$ et λ une constante réelle qui n'importe que par son signe, car $|\lambda|$ peut être éliminé par un changement d'échelle.

L'équation (1.1) apparaît en optique non linéaire pour décrire la propagation d'un faisceau lumineux intense dans un milieu dont l'indice de réfraction ν dépend de l'intensité du faisceau. L'équation (1.1) s'obtient à partir des équations de Maxwell dans une approximation d'enveloppe où u représente l'amplitude lentement variable d'un champ rapidement oscillant. Si ν dépend de u selon $\nu = \nu_0 + \nu_1\,|u|^2$, on obtient l'équation (1.1)(1.2) avec $p = 3$.

L'équation (1.1) apparaît aussi en théorie des plasmas pour décrire la propagation d'ondes électromagnétiques et sonores, comme cas limite du système de Zakharov

$$\begin{cases} i\,\partial_t u = -\dfrac{1}{2}\,\Delta u + n\,u \\ (c^{-2}\,\partial_t^2 - \Delta)\,n = \Delta\,|u|^2 \end{cases} \tag{1.3}$$

où u s'interprète comme précédemment et n est la déviation de la densité ionique par rapport à sa moyenne. Le système (1.3) se réduit formellement à l'équation (1.1)(1.2) avec $p = 3$ lorsque la vitesse du son ionique c tend vers l'infini.

L'équation (1.1) apparaît aussi en Physique Nucléaire dans la description des collisions d'ions lourds.

Equation de Hartree

L'équation est

$$i\,\partial_t u = -\frac{1}{2}\,\Delta u + (V * |u|^2)\,u \tag{1.4}$$

où $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un potentiel d'interaction, par exemple $V(x) = |x|^{-\gamma}$, avec $\gamma > 0$. Le cas $\gamma = 1$ est le potentiel Coulombien (pour $n = 3$). L'équation (1.4) a des propriétés voisines de celles de (1.1)(1.2), avec une correspondance $p - 1 \sim 2\gamma/n$, mais elle est plus régulière.

L'équation (1.4) apparaît en Physique Atomique et en Physique Nucléaire, sous le nom de théorie du champ moyen. Pour décrire un système de N particules, on considère alors plutôt un système de N équations pour N fonctions u_i, $1 \leq i \leq N$,

$$i\,\partial_t\, u_i = -\frac{1}{2}\,\Delta u_i + (V * \rho)\,u_i\,, \quad \rho = \sum_i |u_i|^2 \tag{1.5}$$

et chaque particule interagit par l'intermédiaire du potentiel V avec la densité totale ρ. Dans le cas d'un atome, les N particules sont les électrons, on prend $V = e^2\,|x|^{-1}$, et on rajoute dans chaque équation l'interaction linéaire $-ZV(x)\,u_i$ avec le noyau de charge Ze fixé à l'origine. En fait, on doit tenir compte en outre du principe de Pauli, c'est-à-dire du fait que les électrons obéissent à la statistique de Fermi, et on considère une équation plus compliquée, l'équation de Hartree-Fock, où l'interaction non linéaire comporte un terme d'échange.

Equations des ondes non linéaire (ONL) et de Klein Gordon non linéaire (KGNL)

Ces équations sont

$$\Box\, u + m^2 u = f(u) \tag{1.6}$$

avec $m = 0$ (resp. $m > 0$) pour l'équation ONL (resp. KGNL). Ces équations sont les prototypes des équations hyperboliques non linéaires. Ce sont les équations classiques correspondant aux Théories Quantiques des Champs (TQC) les plus simples, celles de champs scalaires neutres (si u est à valeurs réelles) ou chargés (si u est à valeurs complexes), avec masse (si $m > 0$) ou sans masse (si $m = 0$). Elles apparaîssent comme limites classiques des équations de champs quantiques et ont été utilisées pour fournir des fonctions d'essai dans une TQC axiomatique proposée par Segal vers 1960, mais qui a fait long feu.

Equations de Maxwell couplées à la matière et équations de Yang-Mills

Les équations de Maxwell sont linéaires, mais fournissent un système non linéaire intéressant dès qu'on les couple, typiquement de façon dite minimale, à un champ de matière, par exemple un champ scalaire satisfaisant une équation ONL ou KGNL. Les équations de Yang-Mills sont une généralisation non commutative des équations de Maxwell et sont déjà non linéaires, même en l'absence de champ de matière. On peut aussi les coupler à un champ de matière, par exemple scalaire, obtenant ainsi un système *a fortiori* non linéaire. (Equations de Yang-Mills-Higgs (YMH)). Les théories actuelles des interactions fondamentales, en particulier le Modèle Standard, sont des TQC de type YMH couplés à des champs de Dirac. On ne doit cependant pas se bercer d'illusions. Les physiciens n'utilisent pas la version classique hyperbolique des équations décrites ici, et sont intéressés par la TQC correspondante, où les problèmes sont très différents (et beaucoup plus difficiles).

Equations de Korteweg de Vries et de Benjamin-Ono généralisées (KdVG et BOG)

On prend ici $n = 1$ et u à valeurs réelles. Les équations sont

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = \partial_x f(u) \tag{1.7}$$

$$\partial_t u - \partial_x |\partial_x|^{2\mu} u = \partial_x f(u)\,. \tag{1.8}$$

L'équation KdV est (1.7) avec $f(u) = u^2$, l'équation KdV "modifiée" est (1.7) avec $f(u) = u^3$, l'équation (1.7) est le cas particulier $\mu = 1$ de (1.8), et l'équation BO est (1.8) avec $\mu = 1/2$ et $f(u) = u^2$. Dans (1.8), $|\partial_x|$ est la multiplication par $|\xi|$ en transformée de Fourier. L'équation BO est souvent écrite en utilisant l'opérateur $\mathrm{sgn}(-i\partial_x) = \mathcal{F}^*\, \xi/|\xi|\, \mathcal{F}$, qui est la transformation de Hilbert. Les équations (1.7)(1.8) sont utilisées pour décrire la propagation d'ondes de surface dans un fluide de faible profondeur, dans des situations unidimensionnelles.

Il existe un grand nombre d'autres équations de type analogue, utilisées pour décrire les phénomènes physiques les plus variés.

(2) Propriétés communes à ces équations

Les équations précédentes présentent un certain nombre de caractères communs, ce qui permet de leur appliquer un certain nombre de méthodes avec des adaptations relativement mineures en fonction de l'équation considérée.

Ces **équations sont semi-linéaires**, parfois au sens strict où les termes contenant les dérivées d'ordre maximal sont linéaires (voir par exemple (1.6)) mais en tout cas en un sens généralisé où elles sont obtenues en ajoutant un terme non linéaire à une équation linéaire de base contenant les termes en dérivées d'ordre maximal. Après un éventuel changement de fonctions inconnues et avec un u éventuellement vectoriel, elles se mettent sous la forme

$$\partial_t u = L\, u + f(u) \tag{1.9}$$

avec une équation linéaire de base (appelée par la suite équation libre)

$$\partial_t u = L\, u \tag{1.10}$$

et une perturbation non linéaire $f(u)$. L est un opérateur différentiel (pseudodifférentiel pour l'équation BOG (1.8)) indépendant de u, x, t (à coefficients constants) et f dépend de u et éventuellement de dérivées de u d'ordre inférieur à celui de L.

Ces équations sont dispersives. L'évolution libre (1.10) a des solutions qui s'étalent dans l'espace (et dont la régularité en x éventuellement s'améliore) au cours du temps et en particulier quand $t \to \infty$. Cette propriété sera utilisée systématiquement.

Ces équations sont variationnelles et conservatives. L'équation libre (1.10), et, sous des hypothèses algébriques convenables sur f, l'équation totale (1.9), est l'équation d'Euler-Lagrange d'un problème variationnel associé à une densité de Lagrangien $\mathcal{L}$. Souvent $\mathcal{L}$ est une fonction locale de u et de ses dérivées premières (une adaptation est nécessaire pour les équations de Hartree, KdVG et BOG). Pour tout ouvert borné à frontière régulière $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}$, on définit l'action

$$A_\Lambda(u, \partial u) = \int_\Lambda dx\, dt\, \mathcal{L}(u, \partial u) \tag{1.11}$$

et on écrit que cette action est stationnaire par rapport à des variations de u, ∂u nulles au bord de Λ, ce qui donne l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}(u, \partial u)}{\delta u} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_\mu \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)} = 0 \tag{1.12}$$

où $0 \le \mu \le n$, $\partial_0 = \partial_t$ et la sommation sur l'indice muet μ est sous entendue.

Dans le cas de l'équation SNL (1.1)(1.2), par exemple, on prend

$$\mathcal{L}(u, \partial u) = \frac{i}{2} (\overline{u}\, \partial_t u - u\, \partial_t \overline{u}) - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{2\lambda}{p+1} |u|^{p+1} . \tag{1.13}$$

On pose $u = u_1 + i\, u_2$ avec u_1 et u_2 réelles, et on prend comme fonctions indépendantes en principe u_1 et u_2, en pratique u et $\overline{u}$. On obtient alors

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \overline{u}} \equiv i\, \partial_t u + \frac{1}{2} \Delta u - \lambda\, |u|^{p-1}\, u = 0 \tag{1.14}$$

qui est bien l'équation (1.1)(1.2).

Sous les mêmes conditions, l'équation totale (1.9) et l'équation libre (1.10) sont hamiltoniennes. Il existe une fonction $E(u, \partial u)$ et un opérateur J antiautoadjoint (dans un espace de Hilbert raisonnable) tels que l'équation se mette sous la forme

$$\partial_t u = J\, \delta E / \delta u\, . \tag{1.15}$$

Par exemple, dans le cas de l'équation SNL considéré plus haut, on peut prendre

$$E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2\, dx + \frac{2\lambda}{p+1} \int |u|^{p+1}\, dx \tag{1.16}$$

et dans les variables $(u, \overline{u})$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, si bien que l'équation prend la forme

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ \overline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta E / \delta u \\ \delta E / \delta \overline{u} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

ou encore

$$\partial_t u = -i\, \delta E / \delta \overline{u} = -i \Big(- \frac{1}{2} \Delta u + \lambda\, |u|^{p-1}\, u \Big) \tag{1.18}$$

et sa complexe conjuguée.

La structure variationnelle des équations, combinée à leurs propriétés d'invariances, donne par le théorème de Noether des quantités conservées par l'évolution, en particulier l'énergie. Celles de ces quantités conservées qui ont de bonnes propriétés de positivité fournissent des estimations *a priori* des solutions qui seront largement utilisées par la suite.

(3) Problèmes considérés

On étudiera pour l'équation SNL (1.1) les problèmes suivants.

(3a) Problème de Cauchy

On considère de façon générale l'équation (1.9). On se donne une condition initiale $u(x, t = 0) = u_0(x)$ dans un espace convenable X et on cherche les solutions du problème

$$\begin{cases} \partial_t u = L\, u + f(u) \\ u(t = 0) = u_0 \end{cases} \tag{1.19}$$

dans un espace convenable $\mathcal{X}(I)$ de fonctions $u : I \mapsto X$ où I est un intervalle $I = [0, T]$ ou $I = [-T, T]$ avec $T > 0$. L'espace $\mathcal{X}(I)$ pourra être par exemple l'espace $\mathcal{C}(I, X)$ des fonctions continues de I à valeurs dans X. On considèrera en particulier les questions suivantes.

Existence locale en temps. On essaie de montrer qu'il existe $T > 0$ et une solution dans $\mathcal{X}(I)$ avec $I = [0, T]$ ou $I = [-T, T]$.

Unicité des solutions. On essaie de montrer que pour tout intervalle I contenant 0, il existe au plus une solution dans $\mathcal{X}(I)$.

Continuité par rapport aux données initiales. On essaie de montrer que l'application $u_0 \to u$ est continue, de préférence dans le sens naturel, c'est-à-dire avec la topologie de X pour u_0 et celle de $\mathcal{X}(I)$ pour u.

Si les trois propriétés ci-dessus sont satisfaites, on dit que le problème de Cauchy (1.19) est **localement bien posé** (pour des données initiales dans X, et à valeurs dans $\mathcal{X}(\cdot)$).

Noter que l'unicité est le degré zéro de la continuité par rapport aux données initiales : si la donnée initiale change peu, la solution change peu, et en particulier pour la même donnée initiale, on a la même solution.

Existence globale en temps. On essaie de montrer qu'il existe une solution dans $\mathcal{X}(\mathbb{R})$.

Si les quatre propriétés ci-dessus sont satisfaites, on dit que le problème de Cauchy (1.19) est **globalement bien posé**.

Régularité des solutions. Soit $u_0 \in X$ et $u \in \mathcal{X}(I)$ une solution de (1.19) pour un $\mathcal{X}(I)$ convenable, par exemple $\mathcal{C}(I, X)$. On suppose savoir en outre que u_0 est plus régulière, par exemple que $u_0 \in Y$ pour un espace $Y \subsetneq X$. On essaie alors de montrer que la régularité est propagée, par exemple que $u \in \mathcal{Y}(I)$ pour un espace $\mathcal{Y}(I)$ naturellement associé à Y, par exemple $\mathcal{C}(I, Y)$. Le fait d'avoir déjà une solution dans $\mathcal{X}(I)$ peut permettre d'aborder ce problème sans reprendre *ab initio* le problème de Cauchy dans $(Y, \mathcal{Y}(\cdot))$.

Explosion en temps fini. C'est la situation opposée à celle de l'existence globale. On essaie de montrer qu'il existe $T^* < \infty$ tel que la solution de (1.19) explose quand $t \uparrow T^*$, par exemple dans le sens que $||u(t)||_X \to \infty$.

Pour chacune des questions considérées ci-dessus, on pourra par ailleurs s'intéresser au cas de données initiales petites, ce qui peut réduire l'influence du terme non linéaire. On visera alors des propositions du type : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $||u_0||_X \leq \varepsilon$, l'une ou l'autre des propriétés ci-dessus soit vraie.

(3b) Comportement asymptotique en temps. Théorie de la diffusion

Lorsque le problème de Cauchy (1.19) est globalement bien posé, on peut s'intéresser au comportement asymptotique des solutions quand $t \to \pm\infty$. Une des méthodes d'étude de ce problème est d'essayer de classer les comportements asymptotiques possibles en termes des comportements asymptotiques obtenus dans un problème plus simple. Le candidat le plus évident est fourni par l'équation libre (1.10). On essaie donc de comparer les comportements asymptotiques des solutions de (1.9) et (1.10), ce qui conduit aux deux questions suivantes.

(Q1) Etant donnée une solution v_+ de (1.10), caractérisée par sa donnée initiale $v_+(0) = u_+$, existe-t-il une solution u de (1.9), de donnée initiale $u(0) = u_0$, asymptote à v_+ quand $t \to +\infty$, par exemple au sens que

$$||u(t) - v_+(t)||_X \to 0\,, \quad t \to +\infty\,. \tag{1.20}$$

Avec pour domaine l'ensemble des u_+ pour lesquels cette propriété est vraie, on définit alors l'opérateur d'onde Ω_+ comme l'application $\Omega_+ : u_+ \to u_0$. On définit de la même façon un opérateur d'onde $\Omega_- : u_- \to u_0$ en considérant les comportements asymptotiques quand $t \to -\infty$.

Inversement :

(Q2) Etant donnée u solution de (1.9), existe-t-il deux solutions $v_\pm$ de (1.10) asymptotes à u respectivement pour $t \to \pm\infty$. La propriété que ceci ait lieu pour tout u_0 (dans un espace X) s'appelle la **complétude asymptotique** (dans X). C'est une propriété très forte qui n'a lieu que dans des cas assez particuliers. Sous cette forme, elle nécessite par exemple l'absence d'ondes solitaires localisées. Si elle est vraie, elle fournit une classification complète des comportements asymptotiques des solutions de (1.9) par ceux des solutions de (1.10).

(4) Méthodes d'étude

On utilisera les méthodes suivantes.

(4a) Méthode de contraction

On est dans la situation où l'opérateur L qui figure dans (1.9) est antiautoadjoint ($L = -L^*$) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (par exemple L^2) et définit par le théorème de Stone un groupe unitaire à un paramètre $U(t) = \exp(tL)$, appelé groupe libre. On remplace alors le problème de Cauchy (1.19) par l'équation intégrale

$$u(t) = U(t)\, u_0 + \int_0^t dt'\, U(t-t')\, f(u(t')) \tag{1.21}$$

ou, en notations évidentes,

$$u = u^{(0)} + F(u) \equiv A(u)\,,$$

et on cherche un point fixe de A par contraction dans un espace de Banach convenable. Cette méthode donne de façon naturelle

– l'existence locale en temps,

– l'unicité des solutions,

– la continuité par rapport aux données initiales.

Elle utilise

– des estimations sur le groupe libre, faisant intervenir de façon essentielle ses propriétés dispersives ou de lissage (gain de dérivées),

– des estimations de f.

Le lemme de point fixe est élémentaire, la difficulté est de trouver les bons espaces et de démontrer les estimations.

Pour les comportements à l'infini, la méthode est utilisée pour résoudre le problème de Cauchy localement à l'infini, prélude à la démonstration d'existence des opérateurs d'ondes. Elle donne comme sous produit l'existence (et l'unicité) de solutions globales petites.

(4b) Exploitation des invariants, estimations d'énergie généralisées

Quand l'équation est variationnelle (Lagrangienne, hamiltonienne) ou du moins possède quelques propriétés algébriques qui la rapprochent de telles équations, on peut utiliser les lois de conservation exactes ou approchées pour obtenir des estimations *a priori* des solutions à partir des quantités conservées, en particulier l'énergie. Cette méthode est utile

– pour prolonger en solutions globales les solutions locales en temps obtenues par la méthode de contraction,

– pour démontrer des comportements asymptotiques convenables de solutions globales, prélude à la démonstration de la complétude asymptotique,

– pour fournir la matière première des méthodes de compacité.

(4c) Méthode de compacité

On remplace l'équation considérée, ici (1.9), par une équation approchée plus régulière, qu'on sait résoudre par des méthodes plus ou moins élémentaires. On utilise les majorations précédentes pour montrer que les solutions de l'équation régularisée restent dans un ensemble compact fixe, et on élimine la régularisation par un passage à la limite. Cette méthode donne en général des solutions globales en temps, mais sans unicité.

Dans la suite du cours, on traitera dans le cadre précédent l'équation SNL (1.1). On conclut cette introduction par une brève liste de questions que le titre aurait pu laisser espérer et qui ne sont pas abordées ici. On ne traitera pas

– le problème des solutions stationnaires (existence, stabilité, etc.),

– les propriétés de lissage (gain de dérivées pour le groupe libre),

– les équations SNL avec non linéarités contenant des dérivées, qui ont suscité de nombreux travaux récents utilisant les méthodes d'énergie, les propriétés de lissage mentionnées ci-dessus, et/ou des méthodes de calcul pseudodifférentiel,

– le problème de Cauchy pour l'équation SNL périodique en variables d'espace et les travaux de Bourgain sur ce sujet.

Note bibliographique.

La littérature concernant l'équation SNL est extrêmement vaste et il est hors de propos de donner dans le cadre de ce cours une bibliographie ayant la moindre prétention à la complétude. On se restreindra à la littérature qui concerne directement la matière de ce cours. On donnera à la fin de chaque section, à partir de la Section 3, une note bibliographique indiquant sommairement l'origine des résultats exposés et leurs prolongements éventuels.

Le texte qui recouvre le mieux le contenu de ce cours est [C1], qui traite en outre le problème des solutions stationnaires et traite en parallèle l'équation SNL et l'équation de Hartree. On y trouvera une bibliographie assez détaillée allant jusqu'en 1993. On trouvera dans [C2] des compléments plus spécialisés et dans [CHa] un traitement moins détaillé de l'équation SNL et d'autres équations d'évolution. Un autre exposé sur l'équation SNL est [K2], qui est essentiellement basé sur [K1]. Il existe par ailleurs des textes didactiques consacrés en priorité, voire exclusivement aux équations ONL ou KGNL, [Hö2], [Re], [So], [Sta1], [Sta2], [Sta4].

2. Préliminaires d'Analyse

On donne dans cette section un certain nombre de résultats d'analyse qui seront utilisés systématiquement par la suite en étant cités de façon plus ou moins explicite. Ces résultats portent sur les espaces fonctionnels, espaces de Banach en général et espaces de Sobolev en particulier, sur l'intégrale de Bochner, et sur les résultats de points fixes. Les références les plus utiles sont [Yo] pour les espaces de Banach et l'intégrale de Bochner, [A] et [F] pour les espaces de Sobolev et les inégalités associées. Des compléments d'information seront donnés au fur et à mesure des besoins, en particulier dans la Section 7 à l'occasion des méthodes de compacité.

(1) Espaces fonctionnels

(1a) Espaces de Banach [Yo]

Un espace de Banach est un espace normé complet. Si X est un espace de Banach, l'espace des formes linéaires continues sur X est lui même un espace de Banach, appelé dual de X, et qu'on note X^*. Si on s'intéresse à un espace de Banach qui est déjà le dual d'un espace de Banach, on note X_* son prédual, *i.e.* $X = (X_*)^*$.

On note $Y \hookrightarrow X$ le fait que Y s'injecte continûment dans X (par exemple $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$ pour $p \leq q$). Si $Y \hookrightarrow X$ et si Y est dense dans X, alors $X^* \hookrightarrow Y^*$ (mais X^* n'est pas forcément dense dans Y^* : par exemple $Y = \ell^1 \hookrightarrow X = \ell^2 \Rightarrow X^* = \ell^2 \hookrightarrow Y^* = \ell^\infty$, ℓ^1 est dense dans ℓ^2, qui n'est pas dense dans ℓ^∞).

La topologie $*$-faible sur le dual X^* d'un espace de Banach X est la topologie sur X^* engendrée par les semi normes $N_x(x^*) = |\langle x^*, x\rangle|$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est l'appariement de X^* et X. Elle possède la propriété suivante, qui est essentielle dans les méthodes de compacité.

Théorème 2.1 (Alaoglu). *Les boules fermées de X^* sont $*$-faiblement compactes.*

Si X_1, X_2 sont deux espaces de Banach et Z un EVT séparé tels que $X_1 \hookrightarrow Z$, $X_2 \hookrightarrow Z$, alors $X_1 \cap X_2$ et $X_1 + X_2$ sont des espaces de Banach quand on les munit des normes respectives

$$||x; X_1 \cap X_2|| = \mathrm{Max}(||x; X_1||, ||x; X_2||)$$

$$||x; X_1 + X_2|| = \operatorname*{Inf}_{x = x_1 + x_2} (||x_1; X_1|| + ||x_2; X_2||)$$

où le Inf est pris sur les décompositions de x en somme d'un élément $x_1 \in X_1$ et d'un élément $x_2 \in X_2$. Si en outre $X_1 \cap X_2$ est dense dans X_1 et dense dans X_2, alors

$$(X_1 \cap X_2)^* = X_1^* + X_2^* ,$$

$$(X_1 + X_2)^* = X_1^* \cap X_2^* .$$

On a des résultats analogues pour une famille finie d'espaces de Banach.

(1b) Espaces de Sobolev [A]

On note $L^r = L^r(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de puissance r intégrable définies dans $\mathbb{R}^n$. Pour $1 \leq r \leq \infty$, on note $\overline{r}$ l'exposant conjugué, défini par $1/r + 1/\overline{r} = 1$. On a alors $(L^r)^* = L^{\overline{r}}$ pour $1 \leq r < \infty$. (Le dual de L^∞ est un espace gigantesque et compliqué). Pour m entier ≥ 0 et $1 \leq r \leq \infty$, on définit **l'espace de Sobolev**

$$W_r^m = \left\{ u : ||u; W_r^m|| \equiv \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||_r < \infty \right\} \tag{2.1}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un multi-indice, et $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$. Si $r = 2$, on utilisera la notation $W_2^m \equiv H_2^m \equiv H^m$. Il existe une autre version des espaces de Sobolev, définie au moyen de la transformée de Fourier. On définit celle ci par

$$(\mathcal{F}u)(\xi) \equiv \hat{u}(\xi) \equiv (2\pi)^{-n/2} \int dx \, \exp(-i\, x \cdot \xi)\, u(x)\,.$$

Pour $\rho \in \mathbb{R}$, $1 \leq r \leq \infty$, on définit alors

$$H_r^\rho = \left\{ u : ||\mathcal{F}^*(1+\xi^2)^{\rho/2}\, \mathcal{F}u||_r \equiv ||u; H_r^\rho|| < \infty \right\}. \tag{2.2}$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.1. *Soit $\rho = m$ entier ≥ 0 et $1 < r < \infty$. Alors $W_r^m = H_r^m$.*

Ceci justifie la notation $W_2^m = H_2^m$ annoncée plus haut. Les cas $r = 1$ et $r = \infty$ sont exclus car la démonstration utilise le théorème de Mikhlin ([Höl], Théorème 7.9.5 p. 243).

Les espaces de Sobolev satisfont diverses injections qui résultent d'inégalités entre les normes correspondantes. On donne deux exemples particulièrement utiles de telles inégalités, adaptés aux deux versions citées ci-dessus.

Proposition 2.2 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg). *Soit $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 \leq j \leq m$, j et m entiers,*

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = \sigma\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-\sigma)\,\frac{1}{q}\,, \quad \frac{j}{m} \leq \sigma \leq 1\,, \tag{2.3}$$

$\sigma < 1$ si $1/r = (m-j)/n$ et $r > 1$. Alors

$$\sum_{|\alpha|=j} ||\partial^\alpha u||_p \leq C \left\{ \sum_{|\alpha|=m} ||\partial^\alpha u||_r \right\}^\sigma ||u||_q^{1-\sigma}\,. \tag{2.4}$$

Commentaire. Voir [F], Théorème 9.3, p. 24. Dans (2.3), la première condition sur σ est l'homogénéité en x. La seconde condition exprime qu'à homogénéité fixée, j ne peut pas dépasser la valeur d'interpolation avec σ, *i.e.* $j \leq \sigma m$. Le cas limite interdit est $p = \infty$ lorsqu'il a la même homogénéité que $||\partial^m u||_r$, sauf si $r = 1$ auquel cas le résultat est trivial (en intégrant $m - j$ fois).

La deuxième inégalité utile est la suivante.

Proposition 2.3 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Soit* $0 < \rho < n$, $1 < r < q < \infty$, $1/q = 1/r - \rho/n$. *Alors*

$$|| \, |x|^{-(n-\rho)} * u||_q \leq C \, ||u||_r \, . \tag{2.5}$$

Commentaire. Voir [Höl], Théorème 4.5.3, p. 117. La convolution par $|x|^{-(n-\rho)}$ est l'opérateur $C \, |\Delta|^{-\rho/2}$ (voir [Ste] p. 117). On déduit donc de (2.5) l'inégalité

$$||u||_q \leq C \, || \, |\Delta|^{\rho/2} u||_r \tag{2.6}$$

avec les conditions précédentes sur ρ, q, r. Cette inégalité est l'analogue en dérivées non nécessairement entières et dans le cadre des espaces H^ρ_r du cas $j = 0$, $\sigma = 1$ de (2.4).

On utilisera fréquemment la Proposition 2.3 avec $n = 1$, la variable étant le temps. En ce qui concerne la variable d'espace, on pourra se limiter dans le cadre de ce cours aux espaces de Sobolev d'ordre m entier et on utilisera surtout la Proposition 2.2.

En ce qui concerne les fonctions de l'espace temps, on aura besoin d'espaces de Banach de fonctions d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach X. Outre les espaces $\mathcal{C}(I, X)$, $\mathcal{C}_w(I, X)$ et $\mathcal{C}_{*w}(I, X)$ de fonctions fortement, faiblement et $*$-faiblement continues (ce dernier cas si X est un dual), on aura besoin d'espaces $L^q(I, X)$. Pour définir ces espaces et pour donner un sens à l'équation intégrale (1.21), on a besoin de quelques résultats d'intégration vectorielle.

(2) Intégrale de Bochner ([Yo], p. 130-136)

Soit (S, μ) un espace muni d'une mesure et X un espace de Banach (en pratique $S = \mathbb{R}$ ou I intervalle $\subset \mathbb{R}$ et μ mesure de Lebesgue).

Définitions. *Une fonction* $x : s \to x(s)$ *de* S *dans* X *est dite*

(1) simple (ou à image finie) si elle prend un nombre fini de valeurs non nulles, chacune sur un ensemble mesurable de mesure finie :

$$x(s) = \sum_{j=1}^{N} a_j \, \chi(B_j) \, , \quad a_j \in X \, , \ \mu(B_j) < \infty \, , \tag{2.7}$$

(2) à image presque séparable *s'il existe* B_0 *mesurable avec* $\mu(B_0) = 0$ *tel que l'ensemble* $\{x(s) : s \in S \setminus B_0\}$ *soit séparable,*

(3) *faiblement mesurable si* $\langle f, x(\cdot)\rangle$ *est mesurable pour tout* $f \in X^*$,

(4) *fortement mesurable si elle est limite forte dans* X *presque partout de fonctions simples, i.e. s'il existe* B_0 *mesurable avec* $\mu(B_0) = 0$, *et une suite* $\{x_n\}$ *de fonctions simples telles que*

$$\forall s \in S \setminus B_0\,, \quad \lim_{n\to\infty} ||x_n(s) - x(s)||_X = 0\,.$$

Théorème 2.2 (Pettis). $x(s)$ *est fortement mesurable ssi elle est faiblement mesurable et à image presque séparable.*

Seulement si est évident : $\mathcal{R}(x) \subset \overline{U\mathcal{R}(x_n)}$, fermeture d'un ensemble dénombrable. Si : voir [Yo] p. 131.

En particulier si X est séparable, faiblement mesurable $\Leftrightarrow$ fortement mesurable.

Intégrale de Bochner. L'intégrale d'une fonction simple (2.7) est définie évidemment par

$$\int x(s)\, d\mu(s) = \sum_{1\leq j\leq N} a_j\, \mu(B_j)\,. \tag{2.8}$$

Définition. *Une fonction* $x(s) : S \to X$ *est dite Bochner intégrable si elle est limite simple presque partout d'une suite de fonctions simples* $\{x_n\}$ *et si*

$$\lim_{n\to\infty} \int ||x_n(s) - x(s)||\, d\mu(s) = 0\,. \tag{2.9}$$

On définit alors

$$\int x(s)\, d\mu(s) = \lim_{n\to\infty} \int x_n(s)\, d\mu(s)\,. \tag{2.10}$$

Remarque. Il résulte de (2.9) que (2.10) est une suite de Cauchy dans X et ne dépend pas du choix de la suite $\{x_n\}$.

Théorème 2.3. *Une fonction* $x(s)$ *fortement mesurable est Bochner intégrable ssi* $||x(s)||$ *est intégrable. De plus*

$$\Big|\Big| \int x(s)\, d\mu(s) \Big|\Big| \leq \int ||x(s)||\, d\mu(s)\,. \tag{2.11}$$

Corollaire. *Si $x(s) : S \to X$ est Bochner intégrable et si $T : X \to Y$ est un opérateur borné (X et Y espaces de Banach), alors $T\,x(s)$ est Bochner intégrable et*

$$T \int x(s)\, d\mu(s) = \int T\, x(s)\, d\mu(s)\,. \tag{2.12}$$

Théorème 2.4 (convergence dominée). *Si $x(s) : S \to X$ est limite presque partout d'une suite $\{x_n\}$ de fonctions intégrables et si $\exists\, f : S \to \mathbb{R}^+$, $f \in L^1(S, d\mu)$ telle que $||x_n(s)|| \leq f(s)$ $\forall\, n$ et p.p. en s, alors x est Bochner intégrable et*

$$\int x(s)\, d\mu(s) = \lim_{n\to\infty} \int x_n(s)\, d\mu(s)\,.$$

Remarque. Si X est réflexif, on peut aussi définir $\int x(s)\, d\mu(s)$ comme intégrale faible, si on a un minimum de contrôle sur l'intégrand. Si X n'est pas réflexif, cette intégrale est à valeurs dans le bidual X^{**}.

On peut maintenant définir les espaces $L^q(I, X)$.

Définition. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, X un espace de Banach, et $1 \leq q \leq \infty$. On définit $L^q(I, X)$ comme l'espace des fonctions fortement mesurables $t \to f(t)$ de I dans X telles que $||f; X|| \in L^q(I)$.*

L'espace $L^q(I, X)$ est un espace de Banach avec la norme naturelle

$$||f; L^q(I, X)|| = ||\, ||f(\cdot); X||; L^q(I)||\,.$$

Pour $q < \infty$, $\mathcal{D}(I, X)$ est un sous espace dense de $L^q(I, X)$.

L'espace $L^q(I, X)$ est séparable pour $q < \infty$ et X séparable (ce résultat sera utilisé dans les méthodes de compacité, avec $X = H^1$).

L'espace dual de $L^q(I, X)$ est, dans les bons cas, ce qu'on attend.

Théorème 2.5. *Soit $1 \leq \overline{q} < \infty$ et X réflexif où X^* séparable. Alors*

$$L^{\overline{q}}(I, X)^* = L^q(I, X^*)\,.$$

On utilisera beaucoup les espaces $L^q(I, L^r)$. On a en particulier

$$L^{\overline{q}}(I, L^{\overline{r}})^* = L^q(I, L^r)$$

pour $1 \leq \overline{q} < \infty$ et $1 < \overline{r} < \infty$, qui couvre tous les cas intéressants sauf le cas $r = \infty$ (L^∞ n'est ni séparable ni réflexif). Ce résultat suffira pour les applications faites dans ce cours.

L'intégrale de Bochner permet de donner un sens à l'équation intégrale (1.21). Le terme intégral

$$F(u) = \int_0^t dt' \, U(t - t') \, f(u(t'))$$

sera considéré comme intégrale de Bochner dans un espace X assez grand pour que les hypothèses soient faciles à vérifier, par exemple $X = H^{-N}$ avec N assez grand. Fréquemment, l'intégrand sera mesurable parce qu'il sera continu.

(3) Résultats de point fixe

On utilisera le résultat élémentaire suivant.

Proposition 2.4. *Soit X un espace de Banach, $S \subset X$ et $A : S \to X$.*

Soit A contractant dans S, i.e. tel que

$$\exists \, \delta < 1 \, , \ \ \forall \, u_1, u_2 \in S \, , \quad ||A(u_1) - A(u_2)||_X \leq \delta \, ||u_1 - u_2||_X \, .$$

Alors l'équation $Au = u$ a au plus une solution dans S.

On suppose de plus S fermé dans X et $A(S) \subset S$. Alors l'équation $Au = u$ a une (seule) solution dans S.

Preuve. Unicité : $u_1 = A(u_1)$ et $u_2 = A(u_2) \Rightarrow$

$$||u_1 - u_2||_X = ||A(u_1) - A(u_2)||_X \leq \delta \, ||u_1 - u_2||_X \Rightarrow ||u_1 - u_2||_X = 0 \, .$$

Existence : S fermé dans X est complet et les itérées $A^n(u_0)$ pour $u_0 \in S$ forment une suite de Cauchy dans S.

La continuité par rapport aux données initiales sera obtenue en utilisant le résultat suivant.

Proposition 2.5. *On suppose de plus que $A(u) = u^{(0)} + F(u)$ et que les hypothèses sont satisfaites uniformément pour $u^{(0)} \in S_0 \subset X$, i.e. $S_0 + F(S) \subset S$ et*

$$\exists \, \delta < 1 \, , \ \ \forall \, u_1, u_2 \in S \, , \quad ||F(u_1) - F(u_2)||_X \leq \delta \, ||u_1 - u_2||_X \, .$$

Alors l'application $u^{(0)} \to u$ est Lipschitz continue en norme X de S_0 dans S.

Preuve. Soit $u_i = u_i^{(0)} + F(u_i)$, $i = 1, 2$. Alors

$$\begin{aligned} ||u_1 - u_2||_X &\leq ||u_1^{(0)} - u_2^{(0)}||_X + ||F(u_1) - F(u_2)||_X \\ &\leq ||u_1^{(0)} - u_2^{(0)}||_X + \delta\, ||u_1 - u_2||_X \end{aligned}$$

$$||u_1 - u_2||_X \leq (1-\delta)^{-1} ||u_1^{(0)} - u_2^{(0)}||_X \,.$$

On obtiendra des propriétés de continuité supplémentaires au moyen du résultat suivant.

Proposition 2.6. *On suppose en outre qu'il existe une famille emboîtée*

$$X_\theta (0 \leq \theta \leq 1)\,, \quad X_0 = X\,, \quad X_1 = Y\,, \quad X_\theta \hookrightarrow X_{\theta'} \ \text{ si } \theta \geq \theta' \quad \text{et}$$

$$||u; X_\theta|| \leq C\, ||u; X||^{1-\theta}\, ||u; Y||^\theta$$

et on suppose que S est borné dans Y. Alors l'application $u^{(0)} \to u$ est $(1-\theta)$-Hölder continue de S_0 (en norme X) dans S (en norme X_θ) pour $0 \leq \theta < 1$.

Preuve.

$$\begin{aligned} &||u_1 - u_2||_X \leq (1-\delta)^{-1}\, ||u_1^{(0)} - u_2^{(0)}||_X \\ &||u_1 - u_2||_Y \leq 2 \operatorname*{Sup}_{u \in S} ||u||_Y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad ||u_1 - u_2||_{X_\theta} \leq C\, ||u_1^{(0)} - u_2^{(0)}||_X^{1-\theta} \,.$$

En pratique $S_0 \subset Y$. Par exemple, $F(0) = 0 \Rightarrow S_0 \subset S$, et on aimerait savoir que $u^{(0)} \to u$ est continue de $Y \to Y$. Ceci ne résulte pas des arguments généraux qui précèdent et demande une estimation supplémentaire sur l'équation, qui raffine la stabilité de $S \subset Y$ et utilise les propriétés de continuité précédentes (voir par exemple la Proposition 4.3 ci-dessous).

Dans les applications de la Proposition 2.4, S sera souvent une boule fermée d'un espace $Y \hookrightarrow X$, et on devra s'assurer que S est fermé dans X en norme Le résultat suivant couvrira les besoins.

Proposition 2.7. *Soit $X_* \hookrightarrow Y_*$ dense, si bien que $Y \hookrightarrow X$, et S boule fermée dans Y. Alors S est fermée en norme dans X.*

Preuve. S est Y_*-faiblement compacte par le Théorème 2.1, donc X_*-faiblement compacte car la topologie X_*-faible est plus faible que la topologie Y_*-faible, donc S est X_*-faiblement fermée dans X (compact $\Rightarrow$ fermé), donc fermée en norme dans X, car la topologie de la norme est plus forte que la topologie X_*-faible.

On appliquera ce résultat par exemple avec $X_* = L^1(L^2)$, $Y_* = L^1(H^{-1})$, $X = L^\infty(L^2)$ et $Y = L^\infty(H^1)$.

(4) Satisfaction de l'équation

On devra décider en quel sens l'équation différentielle

$$\partial_t u = L\, u + f(u) \tag{1.9}$$

et l'équation intégrale

$$u(t) = U(t)\, u_0 + \int_0^t dt'\, U(t-t')\, f(u(t')) \tag{1.21}$$

sont satisfaites, et montrer qu'elles sont équivalentes. Le problème de l'équivalence sera en principe traité dans chaque cas particulier et en pratique évacué. On se borne ici aux remarques suivantes.

(1) On s'intéresse au problème d'équivalence des deux équations seulement dans les situations où on sait faire quelque chose avec l'une ou l'autre, ce qui veut dire en pratique avec beaucoup plus de régularité sur u que ce qui est nécessaire pour le traiter.

(2) Vérifier (1.9) est vérifier une égalité, et il suffit de le faire en le sens le plus faible possible, *i.e.* dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$. On aura en général des informations bien meilleures sur chacun des termes séparément.

(3) Pour l'équivalence de (1.9) et (1.21), il suffit de vérifier que l'intégrale dans (1.21), soit $F(u)$, satisfait

$$(\partial_t - L)\, F(u) = 0\,.$$

En général $F(u) \in \mathcal{C}^1(I, H^{-N})$ pour un N assez grand, et le sens de cette relation est sans problème.

3. L'équation de Schrödinger libre

On donne dans cette section les estimations fondamentales du groupe de Schrödinger libre qui seront utilisées dans les sections suivantes. La démonstration de ces estimations est en partie basée sur des arguments de dualité abstraits qu'on expose à cette occasion. Ces arguments de dualité sont applicables à toutes les équations considérées dans l'Introduction.

L'équation de Schrödinger libre

$$i\,\partial_t u = -\frac{1}{2}\,\Delta u \tag{3.1}$$

est résolue par le groupe unitaire à un paramètre (unitaire dans H^ρ pour tout $\rho \in \mathbb{R}$)

$$U(t) = \exp\left(i\,\frac{t}{2}\,\Delta\right). \tag{3.2}$$

Ce groupe peut être représenté par

$$U(t) = \mathcal{F}^{-1}\,\exp\left(-\frac{it}{2}\,\xi^2\right)\mathcal{F} = (2\pi\, it)^{-n/2}\,exp\left(i\,\frac{x^2}{2t}\right) *_x \tag{3.3}$$

où $*_x$ dénote la convolution en x.
Il résulte de la dernière forme que $U(t)$ est borné de L^1 dans L^∞ avec

$$||U(t)\,f||_\infty \leq (2\pi\,|t|)^{-n/2}\,||f||_1 \tag{3.4}$$

pour tout $t \neq 0$. En interpolant entre (3.4) et l'unitarité dans L^2

$$||U(t)\,f||_2 = ||f||_2$$

par le théorème de Riesz-Thorin, on voit que pour $2 \leq r \leq \infty$, $U(t)$ est borné de $L^{\bar{r}}$ dans L^r avec

$$||U(t)\,f||_r \leq (2\pi\,|t|)^{-\delta(r)}\,||f||_{\bar{r}} \tag{3.5}$$

où $0 \leq \delta(r) \equiv n/2 - n/r \leq n/2$.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On introduit les opérateurs

$$(U * f)(t) = \int_I dt'\,U(t-t')\,f(t'), \tag{3.6}$$

$$(U *_R f)(t) = \int_{I\cap\{t'\leq t\}} dt'\,U(t-t')\,f(t'), \tag{3.7}$$

où la lettre R signifie retardement et représente la restriction $t' \leq t$. On obtient alors une première famille de majorations.

Lemme 3.1. *Soit* $0 < \delta(r) < 1$, $1 < q_1, q_2 < \infty$ *et* $1/q_1 + 1/q_2 = \delta(r)$, *ou* $r = 2$, $q_1 = q_2 = \infty$. *Alors pour tout intervalle* I,

$$||U * f; L^{q_1}(I, L^r)|| \leq C\, ||f; L^{\overline{q}_2}(I, L^{\overline{r}})||\,, \tag{3.8}$$

$$||U *_R f; L^{q_1}(I, L^r)|| \leq C\, ||f; L^{\overline{q}_2}(I, L^{\overline{r}})||\,, \tag{3.9}$$

avec une constante C *indépendante de* I.

Preuve. Pour $\delta(r) > 0$, le lemme résulte de (3.5), des définitions, et de l'inégalité de HLS (Proposition 2.3) en temps. Le cas $r = 2$, $q_1 = q_2 = \infty$ est trivial.

Remarque. Les valeurs r et $\overline{r}$ dans les MD et MG de (3.8) et (3.9) sont conjuguées, mais il n'y a pas de couplage séparé entre r et q_1 ou q_2.

Pour aller plus loin, on a besoin d'un résultat abstrait de dualité. Ce résultat est élémentaire et dit simplement, dans un contexte approprié, qu'il est équivalent qu'un opérateur A soit borné, que son adjoint A^* soit borné, ou que A^*A soit borné. Le contexte utile est le suivant.

Soit $\mathcal{D}$ un espace vectoriel. On note $\mathcal{D}_a^*$ son dual algébrique, $\mathcal{L}_a(\mathcal{D}, X)$ l'espace des applications linéaires de $\mathcal{D}$ dans un espace vectoriel X, et $\langle \varphi, f \rangle_{\mathcal{D}}$ l'appariement entre $\mathcal{D}_a^*$ et $\mathcal{D}$ (avec $f \in \mathcal{D}$ et $\varphi \in \mathcal{D}_a^*$), qu'on prend linéaire en f et linéaire conjugué en φ.

Lemme 3.2. *Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert,* X *un espace de Banach,* X^* *le dual de* X, *et* $\mathcal{D}$ *un sous espace vectoriel dense de* X. *Soit* $A \in \mathcal{L}_a(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ *et* A^* *son adjoint, défini par*

$$\langle A^* v, f \rangle_{\mathcal{D}} = \langle v, Af \rangle\,, \quad \forall\, f \in \mathcal{D}\,,\ \forall\, v \in \mathcal{H}\,,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *est le produit scalaire dans* $\mathcal{H}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) Il existe a, $0 \leq a < \infty$ *tel que pour tout* $f \in \mathcal{D}$,

$$||Af|| \leq a\, ||f; X||\,. \tag{3.10}$$

(2) $\mathcal{R}(A^*) \subset X^*$ *et il existe* a, $0 \leq a < \infty$ *tel que pour tout* $v \in \mathcal{H}$,

$$||A^* v; X^*|| \leq a\, ||v||\,. \tag{3.11}$$

(3) $\mathcal{R}(A^*A) \subset X^*$ *et il existe a,* $0 \le a < \infty$ *tel que pour tout* $f \in \mathcal{D}$,

$$||A^*Af; X^*|| \le a^2 \, ||f; X|| \, , \tag{3.12}$$

où $||\cdot||$ *est la norme dans* $\mathcal{H}$. *La constante a est la même dans les trois conditions. Si l'une de (toutes) ces conditions est (sont) satisfaite(s), les opérateurs* A *et* A^*A *se prolongent par continuité en des opérateurs bornés de* X *dans* $\mathcal{H}$ *et de* X *dans* X^* *respectivement.*

Soit en outre $\tilde{X}$ *un sous espace fermé de* X^*. *On renforce les conditions (2) et (3) comme suit*

($\tilde{2}$) $\mathcal{R}(A^*) \subset \tilde{X}$ *et (2) est satisfaite.*

($\tilde{3}$) $\mathcal{R}(A^*A) \subset \tilde{X}$ *et (3) est satisfaite.*
Alors ($\tilde{2}$)$\Leftrightarrow$ ($\tilde{3}$)$\Rightarrow$(1).

Preuve. Du fait que $\mathcal{D}$ est dense dans X résulte que X^* est un sous espace de $\mathcal{D}_a^*$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Soit $v \in \mathcal{H}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{D}$,

$$|\langle A^*v, f\rangle_{\mathcal{D}}| = |\langle v, Af\rangle| \le ||v|| \, ||Af|| \le a \, ||v|| \, ||f; X|| \, .$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$|\langle v, Af\rangle| = |\langle A^*v, f\rangle_{\mathcal{D}}| \le ||A^*v; X^*|| \, ||f; X|| \le a \, ||v|| \, ||f; X|| \, .$$

Il est clair que (1) et (2) $\Rightarrow$ (3), donc (1) ou (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors

$$\langle Af, Af\rangle = \langle A^*Af, f\rangle_{\mathcal{D}} \le ||A^*Af; X^*|| \, ||f; X|| \le a^2 \, ||f; X||^2 \, .$$

Variante avec ($\tilde{2}$)($\tilde{3}$). Il est évident que ($\tilde{2}$) $\Rightarrow$ (2), ($\tilde{3}$) $\Rightarrow$ (3) et $\mathcal{R}(A^*A) \subset \mathcal{R}(A^*)$, donc ($\tilde{2}$) $\Rightarrow$ ($\tilde{3}$) $\Rightarrow$ (1).

D'autre part $\mathcal{R}(A)^\perp \subset \mathcal{N}(A^*)$ par définition, donc par décomposition orthogonale $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$, on a $\mathcal{R}(A^*) = A^* \, \overline{\mathcal{R}(A)}$. Mais sous les conditions (1)(2)(3), A^* est borné, donc par continuité :

$$A^* \, \overline{\mathcal{R}(A)} \subset \overline{A^* \, \mathcal{R}(A)} = \overline{\mathcal{R}(A^*A)} \subset \tilde{X}$$

si $\mathcal{R}(A^*A) \subset \tilde{X}$ et si $\tilde{X}$ est fermé. Donc sous (1)(2)(3), on a $(\tilde{3}) \Rightarrow (\tilde{2})$. Donc $(\tilde{3}) \Leftrightarrow (\tilde{2})$.

La variante $(\tilde{2})(\tilde{3})$ est adaptée au cas où X a un dual gigantesque mais où on sait que $A^*AX \subset \tilde{X}$ où $(X, \tilde{X})$ est un couple en dualité. Ce cas se produira pour l'équation SNL avec $n = 1$, $X = L^{4/3}(I, L^1)$, $\tilde{X} = L^4(I, L^\infty)$. L^∞ n'est ni réflexif ni séparable et les théorèmes connus de dualité ne s'appliquent pas (voir Théorème 2.5).

Le corollaire suivant sera très utile.

Corollaire 3.1. *Soit $\mathcal{H}, \mathcal{D}$ et deux triplets (X_i, A_i, a_i) $(i = 1, 2)$ satisfaisant les conditions (1)(2)(3) du Lemme 3.2. Alors pour tous les choix $i, j = 1, 2$, on a $\mathcal{R}(A_i^* A_j) \subset X_i^*$, et pour tout $f \in \mathcal{D}$*

$$||A_i^* A_j f; X_i^*|| \le a_i a_j ||f; X_j|| . \tag{3.13}$$

En particulier $A_i^* A_j$ s'étend par continuité en opérateur borné de $X_j \to X_i^*$ et (3.13) est valable pour tout $f \in X_j$.

L'exemple fondamental de la situation précédente est le suivant. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, U un groupe unitaire à un paramètre dans $\mathcal{H}$ et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (borné ou non). On définit l'opérateur borné de $L^1(I, \mathcal{H})$ dans $\mathcal{H}$

$$Af = \int_I U(-t)\, f(t)\, dt\,, \tag{3.14}$$

dont l'adjoint est l'opérateur borné de $\mathcal{H}$ dans $L^\infty(I, \mathcal{H})$

$$(A^*v)(t) = U(t)\, v\,, \tag{3.15}$$

la dualité étant définie par les produits scalaires dans $\mathcal{H}$ et $L^2(I, \mathcal{H})$. Alors toutes les conditions du Lemme 3.2 sont satisfaites avec

$$X = L^1(I, \mathcal{H})\,,\ \ a = 1\,,\ \ X^* = L^\infty(I, \mathcal{H}), \tilde{X} = (\mathcal{C} \cap L^\infty)(I, \mathcal{H})\,,$$

et $\mathcal{D}$ n'importe quel sous espace dense de X. L'opérateur A^*A est

$$A^*A\, f(t) = \int_I dt'\, U(t - t')\, f(t') = (U * f)(t) \tag{3.16}$$

et on notera par analogie (voir (3.6)(3.7))

$$(A^* A)_R\, f(t) = (U *_R f)(t)\,. \tag{3.17}$$

Cet exemple est adapté à la résolution du problème de Cauchy pour une équation

$$\partial_t u = L\, u + f\,, \quad u(0) = u_0 \tag{1.19}$$

qu'on résout formellement, avec $U(t) = \exp(tL)$, par

$$u(t) = U(t)\, u_0 + \int_0^t dt'\, U(t-t')\, f(t') \tag{1.21}$$

i.e. avec les opérateurs précédents

$$u = A^*\, u_0 + (A^* A)_R\, \chi_+ f \tag{3.18}$$

où χ_+ est la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$. En particulier la situation du Lemme 3.2 invite à résoudre l'équation dans X^* ou dans $\tilde{X}$ pour des données initiales dans $\mathcal{H}$, en s'assurant que $f \in X$. Le Lemme 3.2 est cependant insuffisant car il ne tient pas compte de χ_+ et du retardement dans (3.18), *i.e.* des restrictions $0 \leq t' \leq t$ de l'intégration en temps.

La restriction $t' \geq 0$ peut être considérée comme une condition de support sur f. On l'évacue en se restreignant à des espaces du type suivant.

Définition. *Un espace de Banach X de distributions dans l'espace temps est dit* **stable par restriction en temps** *si la multiplication par une fonction caractéristique d'intervalle χ_I en temps, $I \subset \mathbb{R}$, est un opérateur borné dans X avec une norme bornée uniformément par rapport à I.*

Ce sera le cas des espaces où la variable temps est contrôlée sous forme L^q, sans dérivées, et on s'efforcera d'utiliser de tels espaces (voir cependant la Section 6 où on utilise des espaces avec des dérivées **entières** par rapport au temps, ce qui modifie l'équation par des termes de bord. Les dérivées non entières par rapport au temps posent des problèmes plus sérieux).

Le retardement, *i.e.* **la restriction** $t' \leq t$ est un problème plus sérieux, et dans les conditions du Lemme 3.2 et du Corollaire 3.1, on doit montrer en outre qu'il préserve les majorations. On a déjà trouvé un cas où le retardement est inoffensif, à savoir le cas diagonal du Lemme 3.1, *i.e.* $X_1 = X_2 = L^q(I, L^r)$ avec $0 \leq 2/q = \delta(r) < 1$. On donne un second cas inoffensif.

Lemme 3.3. *Soit A, A^* donnés par (3.14)(3.15) satisfaisant les conditions du Lemme 3.2 pour X stable par restriction en temps. Alors $(A^*A)_R$ est borné de $L^1(I, \mathcal{H}) \to X^*$ et de $X \to L^\infty(I, \mathcal{H})$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $(A^*A)_R$ est borné de $X \to L^\infty(I, \mathcal{H})$. Soit $f \in \mathcal{D}$.

$$||(A^*A)_R\, f(t); \mathcal{H}|| = ||U(t)\, A(\chi_+(t - \cdot)f); \mathcal{H}|| \leq a\, ||\chi_+(t - \cdot); \mathcal{B}(X)||\, ||f; X||$$

par l'unitarité de U, la partie (1) du Lemme 3.2 et la stabilité de X. En prenant le Sup par rapport à t, on obtient

$$||(A^*A)_R\, f; L^\infty(I, \mathcal{H})|| \leq a \operatorname*{Sup}_{t \in I} ||\chi_+(t - \cdot); \mathcal{B}(X)||\, ||f; X||\,.$$

L'autre partie s'en déduit par dualité.

On applique maintenant les résultats précédents à l'équation de Schrödinger.

Définition. *Un couple (q, r) est admissible si $0 \leq 2/q = \delta(r) < 1$.*

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Proposition 3.1.

(1) Pour tout couple admissible (q, r)

$$||U(t)\, u; L^q(\mathbb{R}, L^r)|| \leq C_r\, ||u||_2\,. \tag{3.19}$$

(2) Pour tous couples admissibles (q_1, r_1) et (q_2, r_2) et tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$

$$||U * f; L^{q_1}(I, L^{r_1})|| \leq C_{r_1}\, C_{r_2}\, ||f; L^{\overline{q}_2}(I, L^{\overline{r}_2})||\,, \tag{3.20}$$

$$||U *_R f; L^{q_1}(I, L^{r_1})|| \leq C_{r_1}\, C_{r_2}\, ||f; L^{\overline{q}_2}(I, L^{\overline{r}_2})||\,. \tag{3.21}$$

Les constantes C_r sont indépendantes de I.

Preuve. L'estimation (3.8) avec $q_1 = q_2 = q$ montre que l'opérateur A précédent satisfait la condition (3) du Lemme 3.2 pour tout couple admissible (q, r) avec $X = L^{\overline{q}}(I, L^{\overline{r}})$ pour tout $I \subset \mathbb{R}$, avec $X^* = L^q(I, L^r)$ sauf si $n = 1$, $q = 4$, $r = \infty$ où $\tilde{X} = L^4(I, L^\infty)$. La partie (1) de la Proposition 3.1 est la partie (2) du Lemme 3.2, et l'estimation (3.20) résulte du Corollaire 3.1.

Le résultat retardé (3.21) est valable de $L^1(L^2)$ dans $L^q(L^r)$ et de $L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}})$ dans $L^\infty(L^2)$ pour tout (q,r) admissible par le Lemme 3.3 et de $L^{\bar{q}}(L^{\bar{r}})$ dans $L^q(L^r)$ pour tout (q,r) admissible par le Lemme 3.1, donc dans les cas annoncés par interpolation.

Remarque (très importante pour les applications). Les couples (q_1, r_1) et (q_2, r_2) dans (3.20) et (3.21) sont complètement découplés.

Note bibliographique.

Les inégalités de la Proposition 3.1 sont souvent appelées inégalités de Strichartz. Elles ont été démontrées dans [Sti] dans le cas particulier $q = r = 2(n+2)/n$ pour l'équation de Schrödinger et sous des hypothèses du même type pour l'équation des ondes et l'équation de Klein-Gordon, par une méthode d'interpolation complexe. L'argument de dualité du Lemme 3.2 est utilisé dans [Sti] avec pour opérateur A la restriction de la transformée de Fourier à une surface. Le cas général de (3.19) et de (3.20)(3.21) se trouve dans [GV2] et dans [Ya] respectivement. Il existe l'analogue de la Proposition 3.1 pour de nombreuses équations dispersives, et en particulier pour l'équation des ondes. On trouvera un exposé didactique de ce dernier cas avec une bibliographie détaillée dans [GV5].

On peut obtenir des inégalités plus générales par interpolation entre celles du Lemme 3.1 et de la Proposition 3.1. Voir à ce sujet [K3]. Ces inégalités permettent de raffiner les résultats sur le problème de Cauchy (voir ci-dessous).

4. Le problème de Cauchy local dans L^2 et dans H^1

Dans cette section, on étudie le problème de Cauchy (1.19) pour l'équation SNL (1.1) et on montre que ce problème est localement bien posé au sens de la Section 1.3 pour des données initiales u_0 dans L^2 ou dans H^1, à valeurs dans des espaces fonctionnels $\mathcal{X}(\cdot)$ convenables. Toute cette section est basée sur la méthode de contraction appliquée à l'équation intégrale associée à l'équation SNL (1.1) (cf. (1.21)), qu'on réécrit dans le cas présent pour référence ultérieure

$$u(t) = U(t)\, u_0 - i \int_0^t dt'\, U(t-t')\, f(u(t')) \tag{4.1}$$

$$u = u^{(0)} + F(u) \equiv A(u) \tag{4.2}$$

où $U(\cdot)$ est le groupe libre (3.2). Les opérateurs (non linéaires) F et A sont définis par (4.1)(4.2) et seront utilisés systématiquement dans la suite sans autre rappel.

(1) Choix des espaces de résolution

Il y a une assez grande liberté dans le choix des espaces fonctionnels. On peut soit laisser flotter plusieurs paramètres, soit faire des choix arbitraires. On commence avec des espaces assez généraux et on fera éventuellement des choix particuliers par la suite.

Sur la base des résultats obtenus dans la Proposition 3.1 pour le groupe libre, on définit pour $\rho \geq 0$ et I un intervalle, l'espace

$$X^\rho(I) = \left\{ u : u \in (\mathcal{C} \cap L^\infty)(I, H^\rho) \text{ et } u \in L^q(I, H_r^\rho) \text{ pour } 0 \leq \frac{2}{q} = \delta(r) < 1 \right\}. \tag{4.3}$$

La Proposition 3.1 entraîne que $u_0 \in H^\rho \Rightarrow U(\cdot)\, u_0 \in X^\rho(\mathbb{R})$ avec des estimations de toutes les normes utilisées.

Si I n'est pas compact, on définit $X_{\mathrm{loc}}^\rho(I)$ en remplaçant L^∞ et L^q par L_{loc}^∞ et L_{loc}^q dans (4.3). Dans le cas $\rho = 0$, on omettra ρ.

Les espaces $X^\rho(I)$ ne sont pas naturellement des espaces de Banach car l'intervalle de variation de r est semi-ouvert (pour $n \geq 2$). Pour avoir des espaces de Banach, on coupe cet intervalle en se limitant à $0 \leq \delta(r) \leq \delta_0 < 1$, et on définit, avec $2/q_0 = \delta(r_0) = \delta_0$, les espaces

$$\begin{aligned} X_{r_0}^\rho(I) &= \left\{ u : u \in (\mathcal{C} \cap L^\infty)(I, H^\rho) \text{ et } u \in L^q(I, H_r^\rho) \text{ pour } 0 \leq \frac{2}{q} = \delta(r) \leq \delta_0 \right\} \\ &= (\mathcal{C} \cap L^\infty)(I, H^\rho) \cap L^{q_0}(I, H_{r_0}^\rho) \end{aligned} \tag{4.4}$$

qui sont des espaces de Banach avec les normes naturelles. On effectue la même modification pour les espaces locaux en temps.

(2) Hypothèses sur $f(u)$

Dans toute cette section et dans la plupart des suivantes, on suppose que f satisfait l'hypothèse

(H1) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $f(0) = 0$ et il existe p, $1 \leq p < \infty$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| \equiv \mathrm{Max}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|\right) \leq C(1 + |z|^{p-1}) .$$

On imposera par la suite des bornes supérieures sur p en fonction des besoins.

L'hypothèse suivante ne sera pas utilisée techniquement dans cette section, mais on l'introduit dès maintenant pour orienter les développements ultérieurs.

(H2) (Invariance de jauge). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $\omega \in \mathbb{C}$ avec $|\omega| = 1$, on a $f(\omega z) = \omega f(z)$.

Si f est continue, ce qui sera toujours supposé dans les applications, cette hypothèse peut être réécrite de la façon suivante

(H2) $\exists\, V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ tel que $V(0) = 0$, $V(z) = V(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $f(z) = \partial V / \partial \overline{z}$.

Dans toutes les applications où l'hypothèse (H2) sera faite, on utilisera sans autre rappel la fonction V figurant dans cette deuxième version.

L'hypothèse (H2) est encore équivalente à :

$$\exists\, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ telle que } f(z) = z\, g(|z|^2) .$$

Si on définit $G(|z|^2) = V(|z|)$, on a alors $g = G'$.

L'hypothèse (H2) assure que l'équation SNL est Lagrangienne avec

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\overline{u}\, \partial_t u - u\, \partial_t\, \overline{u}) - \frac{1}{2}\, |\nabla u|^2 - V(u)$$

et hamiltonienne avec

$$E(u) = \frac{1}{2}\, ||\nabla u||_2^2 + \int dx\, V(u) . \tag{4.5}$$

(Voir Section 1.2). La fonction $E(u)$ est appelée l'énergie et sera utilisée dans toute la suite sans autre rappel.

(3) Considérations d'invariance et d'homogénéité

On rappelle que la norme dans H^ρ est conservée par l'équation libre, *i.e.* que le groupe libre $U(\cdot)$ est unitaire dans H^ρ pour tout $\rho \in \mathbb{R}$.

Sous l'hypothèse (H2), certaines quantités contenant des normes H^ρ pour certaines valeurs de ρ sont conservées, suggérant que ces valeurs de ρ sont plus intéressantes que les autres. Ceci apparaîtra dans le traitement du problème de Cauchy global dans la Section 5. Les lois de conservation les plus intéressantes sont :

– la conservation de la norme L^2, correspondant à $\rho = 0$. On déduit formellement de l'équation (1.1) en formant 2 $\mathrm{Im}\langle u, \mathrm{Eq}\ (1.1)\rangle$ que

$$\partial_t \, ||u||_2^2 = -\,\mathrm{Im}\langle u, \Delta u\rangle + 2\ \mathrm{Im}\langle u, f(u)\rangle = 0\,.$$

– La conservation de l'énergie, qui est reliée à la norme H^1. En formant 2 $\mathrm{Re}\langle \partial_t u, \mathrm{Eq}\ (1,1)\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= -\,\mathrm{Re}\langle \partial_t u, \Delta u\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle \partial_t u, f(u)\rangle \\ &= \partial_t \left\{ \frac{1}{2}\, ||\nabla u||_2^2 + \int dx\ V(u) \right\} = \partial_t\, E(u)\,, \end{aligned}$$

donc l'énergie est également conservée.

Les autres lois de conservation seront étudiées de façon générale dans la Section 8.

L'**homogénéité** en (x, t) est liée à l'invariance par dilatation. Considérons l'équation SNL avec une non linéarité en puissance

$$i\,\partial_t u = -\frac{1}{2}\,\Delta u \pm |u|^{p-1}\, u\,.$$

Cette équation est invariante par la transformation

$$u \to u_\lambda(x, t) = \lambda^\alpha\, u(\lambda x, \lambda t)$$

pour la valeur $\alpha = 2/(p-1)$. Supposons qu'on veuille résoudre cette équation pour une donnée initiale $u_0 \in H^\rho$ dans l'espace associé X^ρ. Les normes qui caractérisent la régularité locale de u_0 et des solutions u sont celles qui portent les dérivées d'ordre maximal en x, à savoir $||\,|\nabla|^\rho u_0||_2$ et $||\,|\nabla|^\rho u; L^q(\cdot, L^r)||$. Ces normes ont le degré d'homogénéité en x (compte tenu du fait que $t \sim x^2$)

$$\frac{n}{r} + \frac{2}{q} - \rho = \frac{n}{2} - \rho + \frac{2}{q} - \delta(r) = \frac{n}{2} - \rho$$

indépendamment du choix de (q, r). Elles sont invariantes par la transformation de dilatation ci-dessus si $\alpha = n/2 - \rho$. La situation où les deux valeurs de α considérées sont égales est assez importante pour appeler une définition.

Définition 4.1. *La puissance p est critique (resp. sous critique, resp. sur critique) au niveau de H^ρ (pour abréger : au niveau ρ) si $(p-1)(n/2-\rho) = 2$ (resp. < 2, resp. > 2).*

On n'utilisera cette notion dans ce cours que pour $0 \leq \rho \leq n/2$. Les valeurs les plus intéressantes de ρ sont :

$\rho = 0$, donnant $p-1 = 4/n$ ou $p+1 = 2(n+2)/n \equiv r_S$ (valeur L^2 critique). La valeur de r_S ainsi définie est la valeur pour laquelle $q = r = r_S$ dans la condition d'admissibilité $2/q = \delta(r)$. On a alors $2/r_S = \delta(r_S) = n/(n+2)$.

$\rho = 1$. La valeur H^1 critique est $p - 1 = 4/(n-2)$ ou $p + 1 = 2n/(n-2) \equiv 2^*$, qui est la valeur critique de Sobolev, c'est-à-dire la valeur limite pour laquelle $H^1 \subset L^{p+1}$ $(n \geq 3)$. C'est la valeur limite pour laquelle le terme potentiel est contrôlé par le terme cinétique dans l'énergie pour une interaction en puissance

$$f(u) = u\,|u|^{p-1} \to V(u) = \frac{2}{p+1}\,|u|^{p+1}\,.$$

Il est commode de représenter la relation de criticité entre ρ et p dans les variables $\rho, \delta(p+1)$ où elle prend la forme

$$\delta(p+1) \equiv \frac{n}{2}\ \frac{p-1}{p+1} = \frac{n}{n+2(1-\rho)}\,.$$

En particulier (voir la Figure 4.1)

$\rho = 0 \to \delta(p+1) = n/(n+2) = \delta(r_S)$

$\rho = 1 \to \delta(p+1) = 1$

$\rho = n/2 \to \delta(p+1) = n/2.$

La notion de criticité joue un rôle essentiel dans la résolution du problème de Cauchy par une méthode de contraction pour la raison suivante.

Supposons qu'on cherche une estimation de X^ρ dans X^ρ de l'opérateur intégral $F(u)$, qui figure dans (1.21), pour un f homogène de degré p en u, du type

$$\|\,|\nabla|^\rho\, F(u); L^q(I, L^r)\| \leq M(\|\,|\nabla|^\rho u; L^{q'}(I, L^{r'})\|)\,,$$

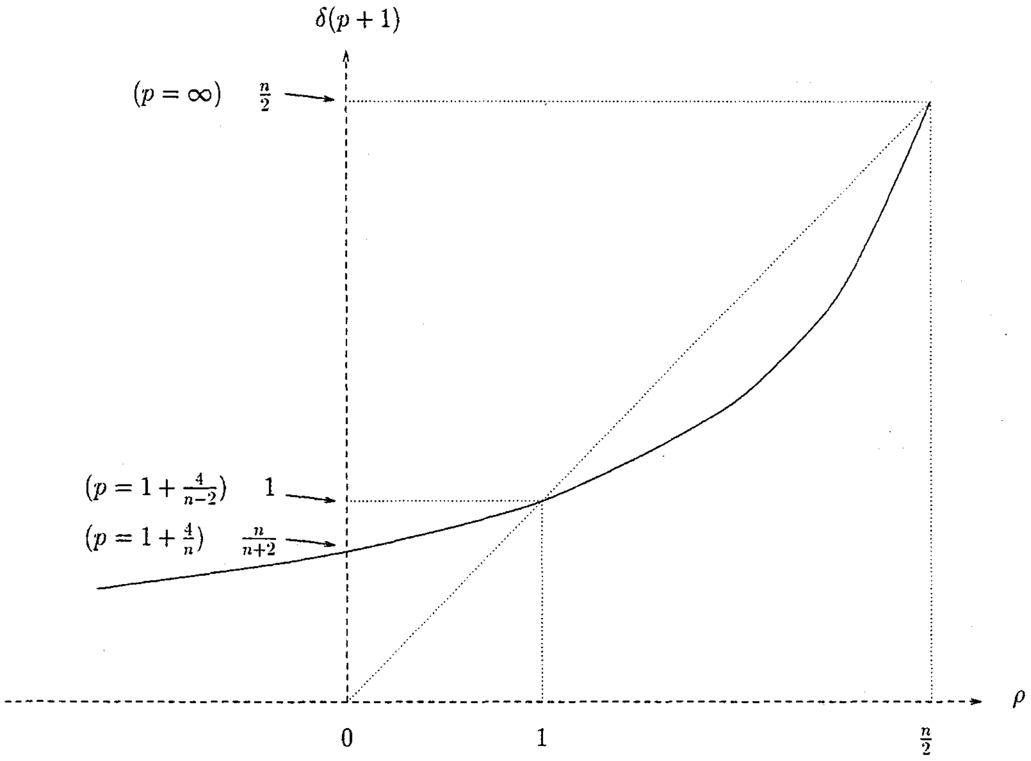

Fig. 4.1 *Critícité de p au niveau ρ dans les variables* $(\rho, \delta(p+1))$.
Le cas représenté est $n = 6$.

où (q, r) et (q', r') sont des couples admissibles. Cette estimation est obligatoirement du type

$$|| \, |\nabla|^{\rho} F(u); L^q(I, L^r)|| \leq C|| \, |\nabla|^{\rho} u; L^{q'}(I, L^{r'})||^p \, |I|^{\theta}$$

par homogénéité en u, où $|I|$ est la longueur de I, et le dernier facteur peut résulter de l'inégalité de Hölder en temps, ce qui impose $\theta \geq 0$. L'homogénéité en x donne alors

$$\frac{n}{2} - \rho + 2 = p\Big(\frac{n}{2} - \rho\Big) + 2\theta \to p - 1 = \frac{4(1-\theta)}{n - 2\rho} \,.$$

Plus généralement, on pourra chercher une estimation dans un espace Y homogène, sur les bornés de $X^{\rho} \cap Y$, et linéaire dans la norme de Y

$$||F(u); Y|| \leq C \, ||u; Y|| \, || \, |\nabla|^{\rho} u; L^{q'}(I, L^{r'})||^{p-1} \, |I|^{\theta}$$

ce qui donne la même relation entre p et ρ.

On voit alors que la condition $\theta \geq 0$, nécessaire pour l'existence d'une telle majoration, est précisément la condition de sous criticité de p au niveau ρ.

Ce résultat est très général et s'applique sous une forme appropriée à toutes les équations considérées dans l'introduction.

(4) Résultats d'unicité

On passe maintenant à l'étude du problème de Cauchy local pour l'équation SNL, et on commence par donner quelques résultats d'unicité. On donne successivement, dans la proposition suivante, un résultat adapté à L^2, un résultat adapté à H^ρ pour $\rho \geq 0$ général, et un résultat minimal adapté à H^1. Ce dernier est le résultat de [K1].

Proposition 4.1. *Soit f satisfaisant (H1) et I un intervalle contenant* 0. *Alors l'équation SNL (1.1) avec $u(0) = u_0$ a au plus une solution dans les cas suivants :*

?

(1) pour $p \leq 1 + 4/n$ et $u_0 \in L^2$, dans $X_{p+1,\mathrm{loc}}(I)$.

(2) Pour $p \geq 1 + 4/n$, $p - 1 = 4/(n - 2\rho)$ avec $0 \leq \rho < n/2$ et $u_0 \in H^\rho$, dans $X_{r_0,\mathrm{loc}}(I) \cap L^k_{\mathrm{loc}}(I, L^s)$, pour

$$\rho < \delta(s) < \mathrm{Min}\left(\frac{n}{2}, \rho + 1\right), \quad 0 \leq \frac{2}{k} \leq \delta(s) - \rho \quad \text{et} \quad \frac{n - 2\delta(s)}{n - 2\rho} \leq \delta_0 < 1\,.$$

(3) Pour $0 \leq p - 1 < 4/(n-2)$ et $u_0 \in H^1$, dans $\mathcal{C}(I, L^2) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(I, L^2 \cap L^{p+1})$.

Commentaire. Les hypothèses ne sont pas optimales, mais le gaspillage est modéré dans (1) et (2), voir la preuve; (3) est un cas particulier de (1)(2) adapté à la théorie H^1.

Preuve. On démontre la proposition par l'absurde.

Le problème est local en temps. Soit u_1 et u_2 deux solutions avec la même donnée initiale $u(0)$. Soit

$$t_0 = \mathrm{Inf}\,\{t : t \geq 0 \;\text{ et }\; u_1(t) \neq u_2(t)\}$$

alors $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ et il suffit de montrer que l'équation avec donnée initiale $u(t_0)$ en t_0 ne peut pas avoir deux solutions différentes dans $[t_0, t_0 + T]$ pour T positif petit. On se ramène à $t_0 = 0$ par translation. Il suffit donc de prouver le résultat pour $I = [0, T]$, T petit.

On procède par contraction partielle de la norme dans $X_{r_0,\mathrm{loc}}$ sur les bornés de l'espace indiqué. (Proposition 2.4 avec $X = X_{r_0}(I)$ et S une boule convenable de l'espace indiqué). On estime pour $I = [0,T]$

$$||F(u_1) - F(u_2); X(I)|| \leq C\, ||f(u_1) - f(u_2); L^{\bar{q}'}(I, L^{\bar{r}'})||$$

par la Proposition 3.1. On sépare $f = f_1 + f_2$ avec $|f_1'| \leq C$ et $|f_2'| \leq C\, |u|^{p-1}$. On peut prendre (q', r') différents pour estimer f_1 et f_2, avec $0 \leq 2/q' = \delta(r') \equiv \delta' < 1$.

Pour f_1, on prend $r' = 2$, $q' = \infty$, d'où une contribution

$$\leq C\, T\, ||u_1 - u_2; L^\infty(I, L^2)||\,.$$

Pour f_2, on continue en omettant l'indice 2 et on estime

$$f(u_1) - f(u_2) = \int_0^1 d\lambda\, f'(\lambda u_1 + (1-\lambda)\, u_2)(u_1 - u_2)\,,$$
$$|\cdot| \leq C\, |u_1 - u_2|\, \mathop{\mathrm{Max}}_i\, |u_i|^{p-1}\,.$$

On estime par l'inégalité de Hölder en espace puis en temps

$$\begin{aligned} ||f(u_1) - f(u_2); L^{\bar{q}'}(I, L^{\bar{r}'})|| \leq & C\, ||u_1 - u_2; L^q(I, L^r)|| \\ & \mathop{\mathrm{Max}}_i\, ||u_i; L^k(I, L^s)||^{p-1}\, T^\theta \end{aligned} \tag{4.6}$$

avec $0 \leq 2/q = \delta(r) \leq \delta_0 < 1$, $\delta \equiv \delta(r)$, $\theta \geq 0$, et

$$\begin{cases} (p-1)\,\dfrac{n}{s} = \dfrac{n}{\bar{r}'} - \dfrac{n}{r}\,, \\ (p-1)\,\dfrac{2}{k} = \dfrac{2}{\bar{q}'} - \dfrac{2}{q} - 2\theta\,. \end{cases} \iff \begin{cases} (p-1)\Big(\dfrac{n}{2} - \delta(s)\Big) = \delta + \delta'\,, \\ (p-1)\,\dfrac{2}{k} = 2(1-\theta) - (\delta + \delta')\,. \end{cases}$$

En particulier,

$$(p-1)\Big(\frac{n}{2} - \delta(s) + \frac{2}{k}\Big) = 2(1-\theta) \leq 2$$

ce qui exprime que p est sous critique au niveau $\rho' = \delta(s) - 2/k$ auquel appartient la norme $L^k(L^s)$. On retrouve le fait qu'on a besoin d'une norme à un niveau où p est sous critique. On considère alors deux cas correspondant aux parties (1) et (2).

Preuve de (1). $p - 1 \leq 4/n$. On a déjà des normes de niveau 0 où p est sous critique. On évite d'introduire des normes de niveau < 0 et on prend $L^k(L^s)$ de niveau 0, *i.e.*

$\text{si } p = 1 + \frac{4}{n} \quad , (p-1)\frac{n}{2} = 2 \quad \Rightarrow \theta = 0$

$2/k = \delta(s)$. Il vient alors $(p-1)n/2 = 2(1-\theta)$ qui détermine θ, $0 \le \theta \le 1$, et il reste à satisfaire

$$\begin{cases} 0 \le \delta \le \delta_0 < 1 & 0 \le \delta' < 1 \\ (p-1)\Big(\dfrac{n}{2} - \delta(s)\Big) = \delta + \delta' . & \end{cases}$$

De plus, $X_{r_0} \subset L^k(L^s)$ si $\delta_0 \ge \delta(s)$. On a intérêt à prendre $\delta = \delta(s) \le \delta_0$ et pour simplifier, on prend arbitrairement $\delta' = \delta = \delta(s) = \delta_0$ qui donne alors $\delta = \delta(p+1)$ car $(p-1)n/(p+1) = 2\delta(p+1)$. Toutes les conditions sont satisfaites, et on a une contraction pour T assez petit (voir (4.8) ci-dessous).

Preuve de (2). $(p-1)(n/2-\rho) = 2$, $p-1 \ge 4/n$, $0 \le \rho < n/2$, $0 \le \delta \le \delta_0 < 1$, $0 \le \delta' < 1$. On doit satisfaire

$$\begin{cases} (p-1)\Big(\dfrac{n}{2} - \delta(s)\Big) = \delta + \delta' \\ (p-1)\Big(\dfrac{n}{2} - \delta(s) + \dfrac{2}{k}\Big) = 2(1-\theta) . \end{cases} \tag{4.7}$$

On prend encore arbitrairement pour simplifier, $\delta = \delta'$. La première égalité de (4.7) donne, comparée à $(p-1)(n/2-\rho) = 2$ et $\delta \le \delta_0$,

$$\rho < \delta(s) \le \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \delta_0 \ge \frac{n - 2\delta(s)}{n - 2\rho} .$$

La deuxième donne alors

$$0 \le \frac{2}{k} \le \delta(s) - \rho .$$

On a presque toutes les conditions de l'énoncé. On a rajouté $\delta(s) < \mathrm{Min}(n/2, \rho+1)$ qui assure que le terme libre est dans $L^k_{\mathrm{loc}}(L^s)$ pour $u_0 \in H^\rho$, car

$$L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H^\rho_r) \subset L^k_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, L^s)$$

pour $0 \le 2/k \le 2/q = \delta(s) - \rho = \delta(r) < 1$ par les inégalités de Sobolev, Proposition 2.2. La contraction en résulte comme précédemment.

Preuve de (3). Pour $p \le 1 + 4/n$, (3) est un affaiblissement de (1) obtenu en prenant $L^\infty(L^{p+1})$ au lieu de $L^q(L^{p+1})$ pour $2/q = \delta(p+1)$.

Pour $p \ge 1 + 4/n$, (3) est le cas particulier de (2) obtenu en prenant $\delta(s) = \delta = \delta' = \delta_0 = \delta(p+1)$ et $2/k = 0$. Ce choix n'est valable que si $\delta(p+1) > \rho$, *i.e.* pour $p+1 < 2^*$ On a alors $\rho \le 1$ donc $u_0 \in H^1 \Rightarrow u_0 \in H^\rho$.

Remarques. La continuité ne sert que pour l'argument de localisation. On peut la remplacer par une continuité faible. Si on ne met pas de continuité, on obtient seulement l'unicité presque partout. Pour $p - 1 \leq 4/n$, on contracte et reproduit X_{p+1} *i.e.* on a résolu aussi le problème de l'existence de solutions dans X_{p+1} pour $u_0 \in L^2$. On va reprendre ce point dans la sous section suivante.

(5) Le problème de Cauchy local dans L^2

On peut maintenant montrer que le problème de Cauchy est localement bien posé dans L^2.

Proposition 4.2. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/n$. Alors pour tout $u_0 \in L^2$, $\exists\, T_+$ et $T_- > 0$ tels que l'équation SNL (1.1) avec $u(0) = u_0$ a une solution unique dans $X_{p+1,\mathrm{loc}}((-T_-, T_+))$ et la solution est en fait dans $X_{\mathrm{loc}}((-T_-, T_+))$.*

Si $T_+ < \infty$, alors $||u(t)||_2 \to \infty$ quand $t \uparrow T_+$.

Si $T_- < \infty$, alors $||u(t)||_2 \to \infty$ quand $t \downarrow -T_-$.

Pour $-T_- < T_1 \leq 0 \leq T_2 < T_+$, la solution est continue de $u_0 \in L^2$ à valeurs dans $X([T_1, T_2])$.

Preuve. La partie technique spécifique de la preuve a été faite dans celle de la Proposition 4.1, partie (1). Il ne manque que des arguments généraux valables pour toute preuve d'existence par contraction, et qu'on va donner sur ce cas particulier. On a montré que pour $I = [-T, T]$

$$||F(u_1) - F(u_2); X(I)|| \leq C\Big\{T\, ||u_1 - u_2; L^\infty(I, L^2)|| \\ + T^\theta\, ||u_1 - u_2; L^q(I, L^r)||\ \operatorname*{Max}_i ||u_i; L^q(I, L^r)||^{p-1}\Big\} \tag{4.8}$$

avec $0 \leq 2/q = \delta(r) = \delta(p+1)$ et $(p-1)n/2 = 2(1-\theta)$, $\theta > 0$. On montre que l'opérateur $A(u) = U\, u_0 + F(u)$ reproduit et contracte la boule $B(2R)$ de centre 0 et de rayon $2R$ dans $X_{p+1}([-T, T])$ pour R convenable. Par la Proposition 3.1

$$||U(\cdot)\, u_0; X_{p+1}(\mathbb{R})|| \leq C\, ||u_0||_2 \equiv R\,.$$

On prend pour R le MD de cette inégalité et on prend T assez petit pour que

$$C(T + T^\theta (2R)^{p-1}) \leq \frac{1}{2}\,. \tag{4.9}$$

Alors $||F(u); X_{p+1}(I)|| \leq R$ pour $u \in B(2R)$ et

$$||F(u_1) - F(u_2); X_{p+1}(I)|| \leq \frac{1}{2}\, ||u_1 - u_2; X_{p+1}(I)||\,.$$

Par la Proposition 2.4, l'équation a une solution unique dans $B(2R)$. De plus cette solution dépend continûment de u_0 ($L^2 \to X_{r_0}(I)$). D'où l'existence d'une unique solution locale en temps. Noter que le temps de résolution locale dépend de la taille des données initiales par $T \geq C(1 + ||u_0||_2)^{-(p-1)/\theta}$.

Suite de la preuve. En itérant la résolution locale vers T croissant ou décroissant, on prolonge la solution en préservant l'unicité. On définit

$$T_+ = \mathrm{Sup}\left\{T : \text{il existe une solution dans } X_{(p+1)}([0,T])\right\}$$

et T_- de façon analogue. On montre, par l'absurde, que si $T_+ < \infty$, alors $||u(t)||_2 \to \infty$ quant $t \to T_+$: en effet, si

$$\liminf_{t \uparrow T_+} ||u(t)||_2 = N < \infty\,,$$

alors il existe une suite croissante $\{t_j\} \uparrow T_+$ telle que $||u(t_j)||_2 \leq N + 1$. A partir de t_j, on peut résoudre localement dans $[t_j, t_j + T]$ pour $T \geq C(1 + N + 1)^{-(p-1)/\theta}$ indépendant de j, et pour j assez grand, on a $t_j + T > T_+$ en contradiction avec la définition de T_+.

Continuité par rapport aux données initiales. On couvre l'intervalle par un nombre fini d'intervalles de résolution locale successives et on utilise la continuité de chaque résolution. Les détails sont laissés en exercice.

Remarques sur le cas critique. Si $p - 1 = 4/n$, on a $\theta = 0$, donc on ne peut pas assurer la contraction en prenant seulement T petit, et on doit aussi prendre R petit, selon

$$C(T + (2R)^{4/n}) \leq \frac{1}{2} \tag{4.10}$$

i.e. $T \leq T_0$ fixe et $R \leq R_0$ fixe, par exemple $C\,T_0 = 1/4 = C(2R_0)^{4/n}$. On rappelle en effet qu'on dispose de l'estimation (avec $q = r = p + 1 = r_S = 2 + 4/n$, valeur L^2 critique), $p - 1 = 4/n$,

$$\begin{aligned} ||F(u_1) - F(u_2); X_{r_S}(I)|| \leq C\Big\{ & T\, ||u_1 - u_2; L^\infty(I, L^2)|| \\ & + ||u_1 - u_2; L^{r_S}(I, L^{r_S})||\ \mathrm{Max}_i\, ||u_i; L^{r_S}(I, L^{r_S})||^{4/n}\Big\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

avec $||v; X_{rs}|| = \mathrm{Max}\left\{||v; L^\infty(L^2)||,\ ||v; L^{rs}(L^{rs})||\right\}$.

On doit en outre reproduire un ensemble S, pour lequel on prend

$$S = \Big\{u \in X_{rs}(I)\ :\ ||u; L^\infty(I, L^2)|| \le 2\ \mathrm{Max}(||u_0||_2, R) \quad \text{et} \\ ||u; L^{rs}(I, L^{rs})|| \le 2R\Big\}$$

pour un $R \le R_0$. On impose en outre que

$$||U(\cdot)\, u_0; L^{rs}(I, L^{rs})|| \le R\,, \tag{4.12}$$

ce qui pour R fixé, est une restriction imposant que T est petit, dépendant de u_0. Dans ce cas, $U(\cdot)\, u_0 \in (1/2)\, S$, et il suffit de montrer que $F(u) \in (1/2)\, S$ pour $u \in S$, et pour cela que

$$||F(u); X_{rs}(I)|| \le R\,.$$

Mais

$$||F(u); X_{rs}(I)|| \le C\, T\, 2\ \mathrm{Max}(||u_0||_2, R) + C(2R)^p\,.$$

Il suffit donc d'imposer pour la reproduction de S

$$2\, C\, T\ \mathrm{Max}(||u_0||_2, R) \le \frac{1}{2}\, R\,, \tag{4.13}$$

$$C(2R)^{1+4/n} \le \frac{1}{2}\, R\,, \tag{4.14}$$

tandis que pour la contraction il fallait

$$\begin{cases} C\, T \le \dfrac{1}{4} \\ C(2R)^{4/n} \le \dfrac{1}{4}\,. \end{cases} \tag{4.15}$$

Les restrictions et choix sont donc les suivants : satisfaire (4.15) en prenant $R \le R_0$ et $T \le T_0$ (R_0 et T_0 sont fixes). Ceci assure (4.14) et la moitié de (4.13). En particulier on effectue la résolution locale, par exemple, avec $R = R_0$ indépendant de u_0.

Choisir, outre $T \le T_0$, T assez petit pour satisfaire l'autre moitié de (4.13), *i.e.*

$$2\, C\, T\, ||u_0||_2 \le \frac{1}{2}\, R$$

et (4.12). Noter en particulier qu'à cause de (4.12), T ne dépend pas de u_0 seulement par l'intermédiaire de $||u_0||_2$.

La contraction marche sans problème, mais on ne peut plus démontrer que $||u(t)||_2 \to \infty$ quans $t \uparrow T_+$, et cette propriété est remplacée par le fait que

$$||u; X_{p+1}([0, T_+))|| = +\infty .$$

(6) Le problème de Cauchy local dans H^1

On montre maintenant que le problème de Cauchy est localement bien posé dans H^1.

Proposition 4.3. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$ si $n \geq 2$. Alors pour tout $u_0 \in H^1$, $\exists\, T_\pm > 0$ tels que l'équation SNL (1.1) avec $u(0) = u_0$ a une solution unique dans $X^1_{p+1,\text{loc}}((-T_-, T_+))$ et la solution est en fait dans $X^1_{\text{loc}}((-T_-, T_+))$.*

Si $T_+ < \infty$, alors $||u(t); H^1|| \to \infty$ quand $t \uparrow T_+$.

Si $T_- < \infty$, alors $||u(t); H^1|| \to \infty$ quand $t \downarrow T_-$.

Pour $-T_- < T_1 \leq 0 \leq T_2 < T_+$, la solution est continue de $u_0 \in H^1$ à valeurs dans $X^1([T_1, T_2])$.

Preuve. On rappelle que

$$X^1_{p+1,\text{loc}}(I) = \{u : u \text{ et } \nabla u \in X_{p+1,\text{loc}}(I)\} = (\mathcal{C} \cap L^\infty_{\text{loc}})(I, H^1) \cap L^q_{\text{loc}}(I, H^1_{p+1})$$

avec $2/q = \delta(p+1)$.
Par Sobolev (Proposition 2.2), $L^\infty(H^1) \subset L^\infty(L^r)$ pour $2 \leq r \leq 2^*$ ($< \infty$ si $n = 2$) et en particulier $L^\infty_{\text{loc}}(H^1) \subset X_{\text{loc}}$. La preuve est par contraction de la norme de X_{p+1} sur les bornés de X^1_{p+1}. La preuve de la contraction a déjà été donnée dans l'unicité, et il suffit de montrer que X^1_{p+1} est reproduit par l'équation. Dans ce but il suffit d'estimer $\nabla F(u)$ dans X_{p+1}. Mais ce calcul aussi est pratiquement déjà fait. On a (cf. (4.8) ci-dessus)

$$||\nabla F(u); X(I)|| \leq C\, ||\nabla f(u); L^{\overline{q}'}(I, L^{\overline{r}'})|| \leq C\, ||f'(u)\, \nabla u; L^{\overline{q}'}(I, L^{\overline{r}'})||$$

avec $0 \leq 2/q' = \delta(r') = \delta' < 1$.
On sépare $f = f_1 + f_2$ comme précédemment. On estime :

$$\begin{aligned} &\text{contribution de} f_1 && \leq C\, T\, ||\nabla u; L^\infty(L^2)|| \\ &\text{contribution de} f_2 && \leq C\, ||\nabla u; L^q(I, L^r)||\, ||u; L^k(I, L^s)||^{p-1}\, T^\theta \end{aligned}$$

avec le même choix de paramètres que précédemment, par exemple dans ce cas $\delta = \delta' = \delta(p+1) = \delta(s)$, $k = \infty$ qui donne $\theta = 1 - \delta(p+1) > 0$.

Ceci assure le résultat par les Propositions 2.4 et 2.5 et les mêmes arguments que dans la preuve de la Proposition 4.2, à une exception près, la continuité en norme X^1 : on a seulement à ce stade la continuité en norme X donc par interpolation la Hölder continuité d'exposant $1-\theta$ en norme X^θ pour $0 \leq \theta < 1$ (voir la Proposition 2.6).

Continuité en norme X^1. Il suffit comme plus haut de la montrer localement dans un petit intervalle de résolution par contraction. Soit u solution fixe associée à u_0 et v variable associée à v_0, où on fera tendre v_0 vers u_0 dans H^1. On estime comme plus haut

$$\|\nabla u - \nabla v; X(I)\| \leq \|U(\cdot)(\nabla u_0 - \nabla v_0); X(I)\| + C\,\|\nabla f(u) - \nabla f(v); L^{\bar{q}}(I, L^{\bar{r}})\|$$

où on fait déjà le choix facile $r = r' = p+1$, et où on considère seulement le terme en f_2. On estime ensuite

$$\begin{aligned}\|\nabla f(u) - \nabla f(v); L^{\bar{q}}(I, L^{\bar{r}})\| \leq\ & \|(f'(u) - f'(v))\,\nabla u; L^{\bar{q}}(I, L^{\bar{r}})\| \\ & + \|f'(v)(\nabla u - \nabla v); L^{\bar{q}}(I, L^{\bar{r}})\|\,.\end{aligned}$$

Par les estimations de contraction, le dernier terme est majoré par $(1/2)\|\nabla u - \nabla v; L^q(I, L^r)\|$ et passe au premier membre au prix d'un facteur 2. Dans le premier terme, on applique le théorème de la convergence dominée à l'intégrale en temps qui figure dans la norme $L^{\bar{q}}$. L'intégrand est majoré par $\|f'(u)\nabla u\|_{\bar{r}} + \|f'(v)\nabla u\|_{\bar{r}}$ qui est majoré par une fonction de $L^{\bar{q}}(I)$ pour u et v dans un borné de X^1_{p+1} par les estimations précédentes. Pour t fixé, on estime

$$\|(f'(u) - f'(v))\,\nabla u\|_{\bar{r}} \leq \|\nabla u\|_r\, \|f'(u) - f'(v)\|_m$$

avec $r = p+1$ et $m = (p+1)/(p-1)$. On sait par ailleurs que v tend vers u dans $X^{\delta(p+1)}$ et en particulier dans $L^\infty(L^{p+1})$, donc v tend vers u dans L^{p+1} en chaque t. Il en résulte que $f'(v) - f'(u)$ tend vers zéro dans L^m par le lemme suivant, dont on laisse la preuve au lecteur.

Lemme 4.1. *Soit g continue, $|g(z)| \leq C|z|^k$ $(0 < k < \infty)$ et $0 < r \leq \infty$. Alors l'application $u \to g(u)$ est fortement continue de $L^r \to L^{r/k}$.*

On applique le lemme avec $g = f'$ et $k = (p-1)\cancel{/(p+1)}$, $r = p+1$.

Remarque. Comme dans le cas L^2, le temps de résolution locale est estimé en terme de la norme H^1 des données initiales par une condition du type

$$C(T + T^\theta (2R)^{p-1}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad R = C\,\|u_0; H^1\|$$

et $\theta = 1 - \delta(p+1) > 0$ avec le choix simple $\delta = \delta(s) = \delta(p+1)$, $k = \infty$.

Note bibliographique.

Le problème de Cauchy local dans H^1 est traité dans [GV1], [GV3], [K1], [CW1] et le problème local dans L^2 dans [Ts2]. Les exposés dans [C1], [K2] et dans ce cours sont basés sur [K1]. Le traitement de [GV1] utilise seulement le Lemme 3.1, mais non la Proposition 3.1, et nécessite de ce fait une théorie plus compliquée. Le traitement de [CW1], [CHa] suppose seulement que f est Lipschitz (au lieu de $\mathcal{C}^1$) et est également plus compliqué pour cette raison.

En utilisant les inégalités combinées du Lemme 3.1 et de la Proposition 3.1 [K3], on peut raffiner les résultats, en particulier l'unicité. Voir à ce sujet [K4], [P].

Dans le cas critique au sens de la Définition 4.1, on peut montrer que le problème de Cauchy est localement bien posé pour tout (p, ρ), avec quelques restrictions en dimension élevée dues aux problèmes de régularité [CW2]. Le traitement de dérivées non entières requiert l'usage d'espaces de Besov [Tri] et d'estimations non linéaires dans ces espaces, dont une preuve simplifiée se trouve dans [NkO].

5. Le problème de Cauchy global dans L^2 et dans H^1

On montre dans cette section que les solutions locales en temps dans L^2 et dans H^1 construites dans les Propositions 4.2 et 4.3 peuvent être globalisées, c'est-à-dire prolongées en solutions définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, sous des hypothèses convenables sur l'interaction f.

On est pour $\rho = 0, 1$ dans la situation suivante : pour $p - 1 < 4/(n - 2\rho)$ et $u_0 \in H^\rho$, on sait résoudre l'équation SNL localement dans X^ρ_{p+1} par contraction et le temps de résolution locale est estimé en termes de la norme des données initiales sous la forme

$$T \geq C(1 + \|u_0; H^\rho\|)^{-N} . \tag{5.1}$$

On veut savoir si les solutions se prolongent à $\mathbb{R}$ entier, *i.e.* si les $T_\pm$ des Propositions 4.2 et 4.3 sont infinis. Ce sera le cas si on connaît des estimations *a priori* des solutions dans $X^\rho(I)$. De façon générale, une estimation *a priori* dans un espace $Y(I)$ pour donnée initiale dans un ensemble S est une estimation du type suivant :

$\forall\, u_0 \in S$, $\forall\, I$ intervalle, $0 \in I$, $\exists\, M(u_0, I)$ tel que $\forall\, u \in Y(I)$ solution avec $u(0) = u_0$, on a

$$\|u; Y(I)\| \leq M(u_0, I) . \tag{5.2}$$

"*a priori*" réfère au fait que $\exists\, M$ précède $\forall\, u$ (sinon l'énoncé est vide). En particulier $M(u_0, I)$ peut dépendre et en pratique dépend effectivement de u_0, peut dépendre de I, par exemple croître exponentiellement avec $|I|$, mais ne dépend pas de la solution particulière considérée.

Une estimation de ce type, avec dans le cas présent $S = H^\rho$, et $Y(I) = X^\rho(I)$ ou $X^\rho_{r_0}(I)$ pour un r_0 assez grand (en fait $r_0 \geq p + 1$ suffit) entraîne la globalisation par un argument très général dont on a donné une première version dans la preuve de la Proposition 4.2 et dont on donne maintenant une version plus constructive. On suppose qu'on sait résoudre le problème de Cauchy localement en temps. On itère alors cette résolution locale dans des intervalles successifs $[t_{j-1}, t_j = t_{j-1} + T_j]$ avec donnée initiale $u(t_{j-1})$. Si on a (5.1) et (5.2) (avec $Y = X^\rho_{r_0}$), on peut prendre

$$\begin{aligned} T_j &\geq C\big(1 + \|u(t_{j-1}); H^\rho\|\big)^{-N} \\ &\geq C\big(1 + \|u; X^\rho_{r_0}([0, t_{j-1}])\|\big)^{-N} \\ &\geq C\big(1 + M(u_0, [0, t_{j-1}])\big)^{-N} \end{aligned}$$

et si M est localement borné, T_j ne peut pas tendre vers zéro dans un intervalle borné, donc la série $\sum\limits_j T_j$ diverge.

Pour la globalisation dans L^2 et H^1, on a besoin d'estimations *a priori* dans L^2 et H^1, qu'on va déduire de la conservation de la norme L^2 et de l'énergie. Dans toute cette section, on suppose que f satisfait (H1) et (H2). On a alors conservation formelle comme on l'a vu dans la Section 4.3, mais le calcul formel n'a pas de sens avec la régularité disponible. Pour donner une vraie démonstration, on utilise une régularisation. Soit $\varphi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty$, $\varphi_1 \geq 0$, $\int \varphi_1 \, dx = 1$ et $\varphi_j(x) = j^n \, \varphi_1(jx)$ une approximation de la distribution δ. Si u satisfait l'équation SNL (1.1) et si $u \in \mathcal{C}(L^2)$ alors $\varphi_j * u \in \mathcal{C}^1(H^k)$ pour tout $k \geq 0$ et

$$i \, \partial_t(\varphi_j * u) = -\frac{1}{2} \, \Delta(\varphi_j * u) + \varphi_j * f(u) \, . \tag{5.3}$$

(1) Conservation de la norme L^2 et solutions globales dans L^2

On démontre d'abord la conservation de la norme L^2 pour les solutions dans L^2.

Proposition 5.1. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 \leq 4/n$ et (H2), I intervalle contenant 0, $u_0 \in L^2$ et u solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ dans $X_{p+1,\text{loc}}(I)$ $\left(\equiv \mathcal{C}(I, L^2) \cap L^q_{\text{loc}}(I, L^{p+1}),\ 2/q = \delta(p+1)\right)$. Alors $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$ pour tout $t \in I$.*

Preuve. On omet l'indice j. On obtient à partir de (5.3)

$$\begin{aligned} \partial_t \, \|\varphi * u\|_2^2 = 2 \ \text{Im}\langle \varphi * u, i \, \partial_t(\varphi * u)\rangle &= -\text{Im}\langle \varphi * u, \varphi * \Delta u\rangle + 2 \ \text{Im}\langle \varphi * u, \varphi * f(u)\rangle \\ &= 2 \ \text{Im}\langle \varphi * u, \varphi * f(u) - f(\varphi * u)\rangle \end{aligned}$$

d'où par intégration

$$\|\varphi * u(t)\|_2^2 - \|\varphi * u_0\|_2^2 = 2 \ \text{Im} \int_0^t dt' \langle \varphi * u, \varphi * f(u) - f(\varphi * u)\rangle \, (t') \, .$$

Quand $\varphi \to \mathbf{1}$, le MG tend vers $\|u(t)\|_2^2 - \|u_0\|_2^2$ car $\varphi \to \mathbf{1}$ comme opérateur dans L^r pour $1 \leq r < \infty$. Le MD tend vers zéro par le théorème de la convergence dominée. En effet pour $|f(u)| \leq C \, |u|^p$, $|\langle \cdot, \cdot \rangle| \leq \|u\|_{p+1} \, 2C \, \|u\|_{p+1}^p$ et ceci appartient à L^1 pourvu que $u \in L^{p+1}(I, L^{p+1})$.

Mais $u \in L^q(L^{p+1})$ avec $2/q = \delta(p+1)$. Il suffit donc que $(p+1) \, \delta(p+1) \leq 2$, ce qui est équivalent à $p - 1 \leq 4/n$.

D'autre part quand $\varphi \to \mathbf{1}$, $\varphi * u \to u$ dans L^{p+1}, $\varphi * f(u) \to f(u)$ dans $L^{\overline{p+1}}$ et $f(\varphi * u) \to f(u)$ dans $L^{\overline{p+1}}$ par le Lemme 4.1, donc l'intégrand tend vers zéro pour chaque t.

On peut maintenant démontrer l'existence de solutions globales dans L^2.

Proposition 5.2. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p-1 < 4/n$ et (H2) et soit $u_0 \in L^2$. Alors l'équation SNL a une solution unique dans $X_{p+1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. La solution est en fait dans $L^\infty(L^2) \cap X_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et satisfait $||u(t)||_2 = ||u_0||_2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

La proposition 5.2 résulte de la Proposition 4.2 et des arguments généraux précédents. **Attention au piège** : bien que la norme L^2 soit conservée **aussi** dans le cas limite $p-1 = 4/n$, la globalisation n'en résulte pas, car le temps de résolution locale n'est pas minoré en termes de la norme L^2 **seule**.

(2) Conservation de la norme L^2 et de l'énergie pour les solutions dans H^1

On montre d'abord la conservation de la norme L^2 pour les solutions dans H^1.

Proposition 5.3. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p-1 \leq 4/(n-2)$ ($< \infty$ si $n=2$) et (H2), I intervalle contenant 0, $u_0 \in H^1$ et u solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ dans $\mathcal{C}(I, H^1)$. Alors $||u(t)||_2 = ||u_0||_2 \ \forall t \in I$.*

On peut utiliser la même preuve que pour la Proposition 5.1, mais maintenant $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(I, L^{p+1})$ pour $p-1 \leq 4/(n-2)$. De plus, la régularisation est ici inutile (voir la Section 7 ci-dessous pour un résultat un peu plus fort).

On démontre maintenant la conservation de l'énergie pour les solutions dans H^1. On pourrait attendre (voir Section 6 ci-dessous) d'avoir la régularité H^2 des solutions pour en donner une preuve directe sans utiliser de régularisation (cf. [K1]), mais cette deuxième méthode est moins naturelle car elle mélange deux problèmes différents. Par exemple, dans le cas analogue de l'équation des ondes non linéaire, la conservation de l'énergie pour les solutions de niveau H^1 se démontre sans problème par régularisation alors que la régularité H^2 n'est pas démontrée en dimension n élevée pour p voisin de la valeur critique.

Proposition 5.4. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p-1 < 4/(n-2)$ et (H2), I intervalle contenant 0, $u_0 \in H^1$ et u solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ dans $X^1_{p+1,\mathrm{loc}}(I)$ $(= \mathcal{C}(I, H^1) \cap L^q(I, H^1_{p+1}),\ 2/q = \delta(p+1))$. Alors $E(u(t)) = E(u_0)$ pour tout $t \in I$, où $E(u)$ est définie par (4.5).*

Preuve. On utilise la même méthode que pour la Proposition 5.1. On obtient à partir de (5.3)

$$0 = 2\ \mathrm{Re}\langle \partial_t(\varphi * u), i\, \partial_t(\varphi * u)\rangle = -\ \mathrm{Re}\langle \partial_t(\varphi * u), \Delta(\varphi * u)\rangle + 2\ \mathrm{Re}\langle \varphi * \partial_t u, \varphi * f(u)\rangle\ ,$$

$$\frac{1}{2}\, \partial_t\, ||\varphi * \nabla u||_2^2 = -2\ \mathrm{Re}\langle \varphi * \partial_t u, \varphi * f(u)\rangle\ ,$$

$$\partial_t \int V(\varphi * u) = 2\ \mathrm{Re}\langle \varphi * \partial_t u, f(\varphi * u)\rangle\ ,$$

$$\begin{aligned} \partial_t\Big\{\frac{1}{2}\, ||\varphi * \nabla u||_2^2 + \int V(\varphi * u)\Big\} &= 2\ \mathrm{Re}\langle \varphi * \partial_t u, f(\varphi * u) - \varphi * f(u)\rangle \\ &= -\ \mathrm{Im}\langle \varphi * \nabla u, f'(\varphi * u)(\varphi * \nabla u) - \varphi * f'(u)\, \nabla u\rangle \\ &\quad - 2\ \mathrm{Im}\langle \varphi * f(u), f(\varphi * u) - \varphi * f(u)\rangle\ . \end{aligned}$$

On intègre de 0 à t :

$$\begin{aligned} E(\varphi * u(t)) - E(\varphi * u_0) = -\ \mathrm{Im} \int_0^t dt' \Big\{ &\langle \varphi * \nabla u, f'(\varphi * u)(\varphi * \nabla u) - \varphi * f'(u)\, \nabla u\rangle \\ &+ 2\langle \varphi * f(u), f(\varphi * u) - \varphi * f(u)\rangle \Big\}\, (t')\ . \end{aligned}$$

Le MG tend vers $E(u(t)) - E(u_0)$ quand $\varphi \to \mathbf{1}$; on applique le théorème de la convergence dominée au MD, où l'intégrand tend vers zéro et est estimé de façon intégrable uniformément en φ grâce aux estimations suivantes (où on suppose $|f'(u)| \leq C\, |u|^{p-1}$)

$$||f'(u)\, |\nabla u|^2;\ L^1(L^1)|| \leq C\, ||\nabla u; L^2(L^{p+1})||^2\, ||u; L^\infty(L^{p+1})||^{p-1}\ ,$$

qui est contrôlé car $\nabla u \in L^q(L^{p+1})$ avec $2/q = \delta(p+1) < 1$, et $u \in L^\infty(H^1) \subset L^\infty(L^{p-1})$.

D'autre part

$$||f(u); L^2(L^2)|| \leq C\, ||u; L^{2p}(L^{2p})||^p\ .$$

La dernière norme est contrôlée par $L^\infty(H^1)$ si $2p \leq 2^*$, *i.e.* si $p \leq n/(n-2)$. Si $2p > 2^*$, on estime

$$||u; L^{2p}(L^{2p})|| \leq C\, ||u; L^{2p}(H^1_r)||$$

avec $\delta(r) = \delta(2p) - 1$ et on doit s'assurer que $\delta(2p) - 1 \leq \mathrm{Min}(\delta(p+1), 1/p)$. Mais

$$p\, \delta(2p) = (p-1)\, \frac{n}{2} = (p+1)\, \delta(p+1)\ .$$

Donc

$$p(\delta(2p) - 1) = (p-1)\Big(\frac{n}{2} - 1\Big) - 1 < 1 \ \text{ si }\ p - 1 < \frac{4}{n-2}$$

tandis que

$$\delta(2p) \leq \delta(p+1) + \frac{\delta(p+1)}{p} < \delta(p+1) + 1$$

car

$$\delta(p+1) < 1 < p.$$

(3) Contrôle de la norme H^1 par l'énergie

On contrôle déjà séparément la norme L^2, et il suffit de contrôler $||\nabla u||_2$ par l'énergie à $||u||_2$ fixé. Le résultat est évident si $V \geq 0$, mais si $V < 0$, il faut empêcher que $V(u) \to -\infty$ et $||\nabla u||_2 \to +\infty$ à $E(u)$ fixé. Pour cela, il faut estimer $V(u)$ sous linéairement en $||\nabla u||_2^2$, ce qui est possible pour $p - 1 \leq 4/n$ grâce à l'inégalité de Sobolev (voir la Proposition 2.2)

$$||u||_{2+4/n}^{2+4/n} \leq c\, ||u||_2^{4/n}\, ||\nabla u||_2^2 . \tag{5.4}$$

On pose $V_\pm = \mathrm{Max}(\pm V, 0)$ et on ajoute l'hypothèse

(H3) $\quad R^{-(2+4/n)}\, V_-(R) \to 0$ quand $R \to \infty$.

On peut alors estimer $||\nabla u||_2$ par le lemme suivant.

Lemme 5.1. *Soit f satisfaisant (H2) et (H3) et $u \in H^1$. Alors il existe une fonction localement bornée $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que*

$$||\nabla u||_2^2 \leq 4\, E(u) + M(||u||_2) . \tag{5.5}$$

Preuve. D'après l'hypothèse (H3), pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, R_\varepsilon$ tel que

$$V_-(R) \leq \varepsilon\, R^{2+4/n} \quad \text{pour} \quad R \geq R_\varepsilon$$

et par suite

$$V_-(R) \leq \varepsilon\, R^{2+4/n} + b_\varepsilon\, R^2$$

avec

$$b_\varepsilon = \operatorname*{Sup}_{R \leq R_\varepsilon} \left(R^{-2}\, V_-(R) - \varepsilon\, R^{4/n}\right) < \infty .$$

On estime alors

$$\begin{aligned}E(u) &\geq \frac{1}{2}\,||\nabla u||_2^2 - \varepsilon\,||u||_{2+4/n}^{2+4/n} - b_\varepsilon\,||u||_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}\,||\nabla u||_2^2 - c\,\varepsilon\,||\nabla u||_2^2\,||u||_2^{4/n} - b_\varepsilon\,||u||_2^2\,.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}||\nabla u||_2^2 &\leq \left(1 - 2c\,\varepsilon\,||u||_2^{4/n}\right)^{-1}\left(2E(u) + 2b_\varepsilon\,||u||_2^2\right) \\ &\leq 4\,E(u) + 4\,b_\varepsilon\,||u||_2^2\end{aligned}$$

en choisissant $\varepsilon = (4c)^{-1}\,||u||_2^{-4/n}$.

(4) Solutions globales dans H^1

On peut maintenant montrer l'existence de solutions globales dans H^1.

Proposition 5.5. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$, (H2) et (H3). Soit $u_0 \in H^1$. Alors l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ a une solution unique dans $X^1_{p+1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. La solution est en fait dans $L^\infty(H^1) \cap X^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et satisfait $||u(t)||_2 = ||u_0||_2$ et $E(u(t)) = E(u_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Preuve. La proposition résulte des Propositions 4.3 et 5.4, du Lemme 5.1 et des considérations générales du début de la section.

Remarques. On peut construire des situations de globalisation H^1 sans l'hypothèse (H2) dans des cas où une conservation approchée de l'énergie permet un contrôle *a priori* de la norme H^1. Voir un exemple dans [K1].

La condition (H3) est indispensable. Pour $V(u) = -|u|^{p+1}$ avec $p - 1 \geq 4/n$ on peut montrer l'explosion H^1 en temps fini pour des données initiales convenables. Ce résultat sera donné après l'étude des propriétés d'invariance de l'équation (Proposition 9.3 ci-dessous).

Si l'hypothèse (H3) n'est pas satisfaite, on peut néanmoins obtenir l'existence de solutions globales pour des données petites.

Proposition 5.6. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p-1 < 4/(n-2)$ et (H2) et soit $u_0 \in H^1$. On suppose en outre que, ou bien*

(1) $V_-(R) \leq a\,R^{2+4/n} + b\,R^2$,
$||u_0||_2 < (2ac)^{n/4}$,
où c est la constante qui figure dans (5.4), ou bien

(2) $||u_0; H^1||$ *est assez petit.*

Alors on a les mêmes conclusions que dans la Proposition 5.5.

Preuve. Dans le cas (1), on estime

$$E(u) \geq ||\nabla u||_2^2 \Big(\frac{1}{2} - ac||u||_2^{4/n}\Big) - b\,||u||_2^2$$

qui joint à la conservation de la norme L^2, assure le contrôle de $||u; H^1||$ par l'énergie.

Dans le cas (2), pour $p - 1 > 4/n$, on estime par (H1) et par les inégalités de Sobolev (Proposition 2.2)

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \frac{1}{2}\,||\nabla u||_2^2 - C\,||u||_2^2 - C\,||u||_{p+1}^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2}\,||\nabla u||_2^2 - C\,||u||_2^2 - C\,||\nabla u||_2^{2\alpha}\,||u||_2^{\beta} \end{aligned}$$

avec $\beta = p + 1 - (p-1)\,n/2$ et $\alpha = (p-1)\,n/4$.

On obtient alors pour $y(t) = ||\nabla u(t)||_2^2$ l'inégalité

$$y(t) \leq 2\,E(u) + C\,||u_0||_2^2 + C\,||u_0||_2^{\beta}\,y(t)^{\alpha}$$

qui est de la forme

$$y \leq a + b\,y^{\alpha} \tag{5.6}$$

avec $\alpha = (p-1)\,n/4 > 1$. Si les deux courbes $z = y$ et $z = a + b\,y^{\alpha}$ se coupent et si $y(0)$ est dans la composante connexe de l'origine de la région (5.6), $y(t)$ qui est continue en t, reste dans cette composante connexe pour tout t. La condition d'intersection est que $y_0 > a + b\,y_0^{\alpha}$ où y_0 est l'abscisse du point de contact de la tangente issue de l'origine à la courbe $z = a + b\,y^{\alpha}$, donnée par $\alpha\,b\,y_0^{\alpha} = a + b\,y_0^{\alpha}$ ou encore $b\,y_0^{\alpha} = a/(\alpha - 1)$. Cette condition devient

$$a < (\alpha - 1)\,\alpha^{-\alpha/(\alpha-1)}\,b^{-1/(\alpha-1)}$$

qui pour $||u_0||_2$ donné est une condition de petitesse de $E(u)$. Elle assure que pour tout t

$$y(t) \leq a + b\,y_0^{\alpha} = a\alpha/(\alpha - 1)\,.$$

(Voir Figure 5.1).

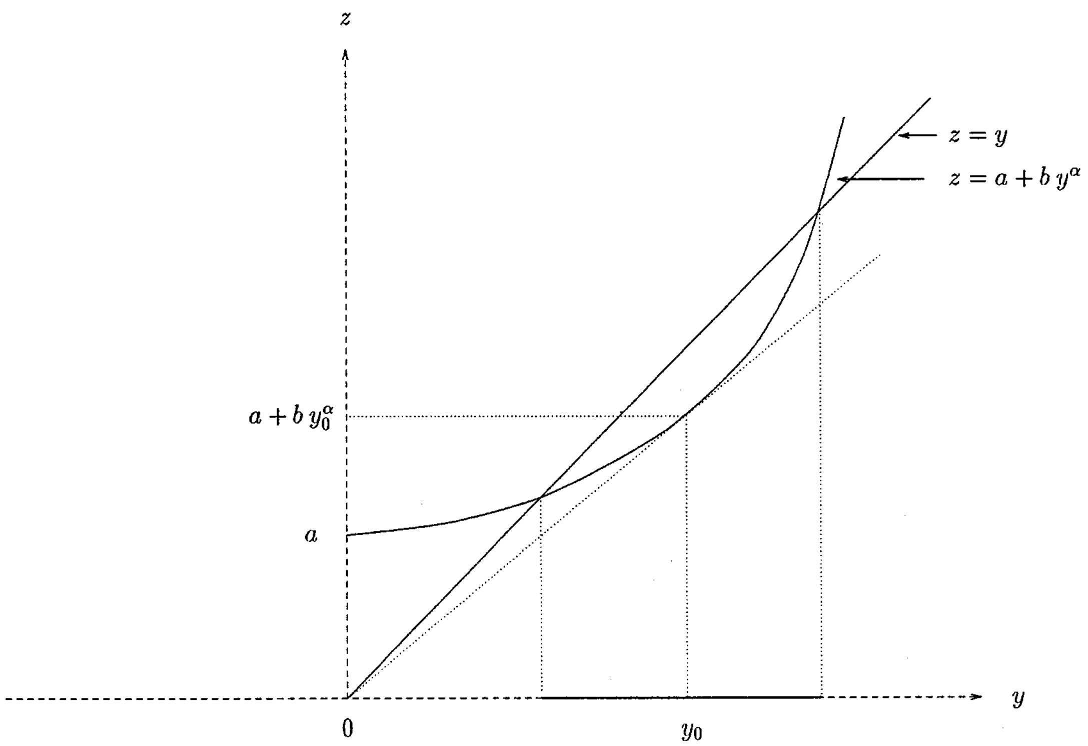

Fig. 5.1 *Estimation de y satisfaisant $y \leq a + by^{\alpha}$, $\alpha > 1$.*

Note bibliographique.

L'argument de globalisation est très classique et son application à l'équation SNL est sans problème [GV1], [K1], [C1]. La seule difficulté est de démontrer les lois de conservation au niveau de régularité minimal. Le traitement donné ici est assez représentatif. Voir [GV1] pour une autre méthode (plus compliquée). Le problème est contourné dans [K1] en établissant d'abord la régularité au niveau H^2. On trouvera par ailleurs dans [K1] des exemples où le contrôle de la norme H^1 est assuré sans conservation de la norme L^2.

Le problème global connaît actuellement un regain d'intérêt, d'une part dans le cas critique H^1, d'autre part dans des situations intermédiaires, au niveau H^{ρ} avec $0 < \rho < 1$ [Bo].

6. Régularité des solutions

Dans cette section, on étudie la régularité des solutions de l'équation SNL. On se trouve dans la situation générale suivante. On a une équation d'évolution du type (1.9) et un minimum d'information sur le problème de Cauchy pour des données initiales dans un espace K_0, à valeurs dans un espace $Y_0(I) \subset L^\infty_{\text{loc}}(I, K_0)$. Optimalement, le problème de Cauchy sera localement ou globalement bien posé dans ces espaces. On dispose en outre d'un espace $K_1 \hookrightarrow K_0$ et éventuellement d'un espace $Y_1(I)$ qu'on peut espérer être adapté aux solutions à données dans K_1, avec au moins $Y_1(I) \subset L^\infty_{\text{loc}}(I, K_1)$. Soit alors $u_0 \in K_1$, donc $u_0 \in K_0$, donnant lieu a une solution $u \in Y_0(I)$ pour un certain I. On se pose la question de savoir si $u \in Y_1(I)$ pour le même I, *i.e.* si le supplément de régularité est propagé par l'évolution $K_0 \to Y_0(I)$.

Exemple pour SNL

On s'intéressera en particulier au cas où $K_0 = H^1$, $K_1 = H^\rho$ pour $\rho > 1$, $Y_0(I) = X^1_{\text{loc}}(I)$ ou $X^1_{r_0,\text{loc}}(I)$, $Y_1(I) = X^\rho_{\text{loc}}(I)$ ou $X^\rho_{r_0,\text{loc}}(I)$.

On pourra recourir à l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes.

(1) On résout l'équation localement dans Y_1 pour des données initiales $u_0 \in K_1$ et on essaie de globaliser les solutions en estimant *a priori* les normes de ces solutions dans $Y_1(I)$, en supposant connue une estimation dans $Y_0(I)$. On pourra par exemple se procurer une famille emboîtée d'espaces Y_θ, $0 \leq \theta \leq 1$, $Y_\theta \hookrightarrow Y_{\theta'}$ pour $\theta \geq \theta'$ et une suite $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_k = 1$ et estimer successivement les normes dans Y_{θ_j} en supposant déjà estimées les normes dans $Y_{\theta_{j'}}$ pour $j' < j$. Comme dans ce cas on sait déjà que la norme à estimer est finie, il suffit d'obtenir pour cette norme une **estimation sous linéaire** en terme d'elle même et dépendant n'importe comment des précédentes (voir le Lemme 6.4 ci-dessous).

(2) On n'essaie pas de résoudre localement dans Y_1, et on essaie d'estimer les normes successives et **en même temps** de montrer qu'elles sont finies. Dans ce cas, on doit estimer la norme dans Y_{θ_j} en fonction des normes dans $Y_{\theta_{j'}}$ pour $j' < j$, mais pas d'elle même.

Exemple pour SNL

Avec $K_0 = H^1$, $K_1 = H^\rho$, on pourra prendre $K_\theta = H^{1+\theta(\rho-1)}$ et $Y_\theta(I) = X^{1+\theta(\rho-1)}_{\text{loc}}(I)$. Si ρ est entier, $\rho = k + 1$, on sera tenté d'utiliser seulement des dérivées entières et de prendre $\theta_j = (j-1)/(k-1)$.

Si la suite $\{\theta_j\}$ est quantifiée (par exemple dans le cas de dérivées entières), les estimations de la première méthode sont strictement moins fortes que celles de la seconde, et on a donc intérêt à résoudre d'abord localement au niveau $\theta = 1$.

Si θ peut varier continûment, on prend $\theta_j = j\,\varepsilon$ pour ε petit, et les deux méthodes d'estimations sont essentiellement équivalentes entre elles, et équivalentes au fait de pouvoir résoudre localement au niveau θ avec un peu de marge pour progresser de ε en θ à chaque pas. Dans ce cas, on pourra monter du niveau K_0 au niveau K_1 si on sait résoudre localement au niveau K_θ pour tout $\theta \in [0, 1]$ avec un peu de marge.

Pour l'équation SNL la situation finale est la suivante (et une situation analogue prévaut pour l'équation ONL).

(i) On peut résoudre l'équation localement pour ρ assez grand, typiquement pour $\rho > n/2$, ce qui assure $H^\rho \subset L^\infty$, et monter à partir de là jusqu'à n'importe quel $\rho' > \rho$ par l'une ou l'autre méthode.

(ii) On peut résoudre l'équation localement, ou remonter les normes par l'une ou l'autre méthode, pour ρ pas trop grand et en tout cas au moins pour $\rho = 2$.

(iii) Pour n pas trop grand, on peut atteindre la première région à partir de la seconde, au moins par la première méthode avec des dérivées entières.

(iv) Pour n grand, on ne sait pas passer de la région ρ petit à la région ρ grand. La dimension critique est $n = 12$ (pour l'équation ONL, la dimension critique est $n = 10$).

Par ailleurs, pour l'équation SNL et contrairement au cas de l'équation ONL, une dérivée en temps équivaut à deux dérivées d'espace, et on gagne davantage en régularité en utilisant les dérivées en temps plutôt que les dérivées d'espace.

Dans cette section, on traite pour l'équation SNL les points suivants.

(i) On établit de façon détaillée la régularité au niveau H^2.

(ii) On établit la régularité au niveau H^k pour k entier, $k > n/2$.

(iii) On donne un bref aperçu de la résolution locale au niveau H^4, qui montre que la dimension $n = 12$ est un cas limite, et on énonce le meilleur résultat disponible pour $n \leq 11$.

Dans cette section, on n'utilise jamais les lois de conservation, et pour éliminer quelques facteurs 2, on prend l'équation SNL sous la forme

$$i\,\partial_t u = -\Delta u + f(u)\,. \tag{6.1}$$

On rappelle que les opérateurs F et A sont définis par (4.1)(4.2).

(1) Régularité au niveau H^2

L'estimation directe de la norme H^2 en termes de la norme H^1 n'est pas possible en dimension élevée. On utilise donc la première méthode, *i.e.* on commence par résoudre l'équation localement au niveau H^2, en exploitant l'équivalence entre ∂_t et Δ. On rappelle la notation

$$(U *_R g)(t) = \int_0^t dt' \, U(t-t') \, g(t') \, . \tag{6.2}$$

Lemme 6.1.

$$\partial_t (U *_R g) = U(t) \, g(0) + U *_R \partial_t g \, , \tag{6.3}$$

$$\Delta (U *_R g) = i \, g(t) - i \, U(t) \, g(0) - i \, U *_R \partial_t g \, . \tag{6.4}$$

Preuve. Pour montrer (6.3), on calcule la dérivée par rapport au temps à partir de

$$(U *_R g)(t) = \int_0^t dt' \, U(t') \, g(t-t') \, .$$

Pour montrer (6.4), on écrit

$$\Delta (U *_R g) = \int_0^t dt' \, \Delta \, U(t-t') \, g(t') = \int_0^t dt' (i \, \partial_{t'} \, U(t-t')) \, g(t')$$

et on intègre par parties :

$$\ldots = -i (U *_R \partial_t g) + i \, g(t) - i \, U(t) \, g(0) \, .$$

En utilisant le Lemme 6.1, on voit que l'équation SNL sous forme intégrale est formellement équivalente au système suivant, dont elle est la première composante.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = A(u) \equiv U(t) \, u_0 - i \, U *_R f(u) \\ \nabla u(t) = \nabla A(u) \equiv U(t) \, \nabla u_0 - i \, U *_R \nabla f \\ \partial_t \, u(t) = \partial_t \, A(u) \equiv i \, U(t) (\Delta u_0 - f(u_0)) - i \, U *_R \partial_t \, f \\ \Delta u(t) = \Delta A(u) \equiv U(t) (\Delta u_0 - f(u_0)) - U *_R \partial_t \, f + f \, . \end{array} \right. \tag{6.5}$$

Noter en particulier que les MD ne contiennent que des dérivées premières de u et de f. On essaie de résoudre l'équation SNL dans l'espace

$$\tilde{X}^2_{(p+1)}(I) = \left\{u : u, \nabla u, \Delta u \text{ et } \partial_t u \in X_{(p+1)}(I)\right\}, \tag{6.6}$$

où le tilda indique qu'on a ajouté $\partial_t u$ par rapport aux espaces $X^2(\cdot)$ précédents. On rappelle qu'on dispose de la majoration (voir Section 4)

$$\|U *_R f'(u)\, v;\, X_{p+1}(I)\| \leq C\left(T + T^\theta \,\|u;\, L^\infty(I, L^{p+1})\|^{p-1}\right) \|v;\, X_{p+1}(I)\| \tag{6.7}$$

où $I = [-T, T]$ et $\theta = 1 - \delta(p+1) > 0$.

On aura besoin en outre d'estimer $f(u)$ dans X_{p+1}.

Lemme 6.2. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$. Alors*

$$\|f(u)\|_2 \leq C\left(\|u\|_2 + \|u\|_{p+1}^{p-\sigma}\, \|\Delta u\|_2^\sigma\right), \tag{6.8}$$

$$\|f(u); L^q(I, L^r)\| \leq C\Big\{\|u; L^q(I, L^r)\| + \|u; L^{pq}(I, L^{r_1})\|^{p-\sigma}\, \|\Delta u; L^{pq}(I, L^{r_2})\|^\sigma\Big\} \tag{6.9}$$

avec $0 \leq 2/q = \delta(r) < 1$, $\delta(r_1) = \delta(p+1) + \delta(r)/p$, $\delta(r_2) = \delta(r)/p$ et $\sigma = \delta(p+1)/(2 - \delta(p+1))$. En particulier

$$\|f(u); X_{p+1}(I)\| \leq C\Big\{\|u; X_{p+1}\| + \|u; X^1_{p+1}\|^{p-\sigma}\, \|\Delta u; X_{p+1}\|^\sigma\Big\}. \tag{6.10}$$

Preuve. (6.8) est le cas particulier $r = 2$, $q = \infty$ de (6.9). Pour démontrer (6.9), on utilise l'hypothèse (H1) et l'inégalité de Sobolev (Proposition 2.2) pour estimer

$$\|u; L^{pq}(L^{pr})\|^p \leq C\|u; L^{pq}(L^{r_1})\|^{p-\sigma}\, \|\Delta u; L^{pq}(L^{r_2})\|^\sigma .$$

On pose $\delta(r) = \delta$, $\delta(r_i) = \delta_i$ pour $i = 1, 2$. On impose $\delta_2 = 2/(pq) = \delta/p$ pour reconstituer une norme de X^2. Il reste deux paramètres r_1 et σ contraints par l'homogénéité en x (l'homogénéité en t est triviale) qui prend la forme

$$\frac{n}{r} = p\,\frac{n}{r_1} - \sigma\Big(\frac{n}{r_1} - \frac{n}{r_2} + 2\Big) \Leftrightarrow \sigma = \frac{p(n/2 - \delta_1) - (n/2 - \delta)}{2 + \delta/p - \delta_1}.$$

On fixe arbitrairement $\delta_1 = \delta(p+1) + \delta/p$, ce qui donne

$$\sigma = \frac{p\,n/(p+1) - n/2}{2 - \delta(p+1)} = \frac{\delta(p+1)}{2 - \delta(p+1)}.$$

(6.10) résulte des cas particuliers de (6.9) $r = 2$, $q = \infty$, *i.e.* (6.8) et $r = p + 1$. Noter que $r_2 < p + 1$ et

$$||u; L^{pq}(L^{r_1})|| \leq C|| \, |\nabla|^{\delta(p+1)} \, u; L^{pq}(L^{r_2})|| \, .$$

On peut alors résoudre l'équation SNL localement dans $\tilde{X}^2$.

Proposition 6.1. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$. Alors pour tout $u_0 \in H^2$, on peut résoudre l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ localement dans $\tilde{X}_2$ (i.e. on a le même énoncé que dans les Propositions 4.2 et 4.3 avec X et X^1 remplacés par $\tilde{X}_2$).*

Preuve. On montre en utilisant (6.5) que l'opérateur A est une contraction de la norme X_{p+1} sur les ensembles bornés de $\tilde{X}^2_{p+1}$. La contraction a déjà été démontrée sous une condition de petitesse de T. On pose

$$R = \mathrm{Max}\left\{||U(\cdot) \, v; X_{p+1}(\mathbb{R})|| : v = u_0, \, \nabla u_0, \, \Delta u_0 - f(u_0)\right\} .$$

Il suffit alors de montrer la stabilité par A de l'ensemble $S \subset \tilde{X}^2_{p+1}(I)$ défini par

$$S = \left\{u : u \in \tilde{B}_2(2R) \text{ et } ||\Delta u; X_{p+1}(I)|| \leq R_1\right\}$$

où

$$\tilde{B}_2(2R) = \left\{u : ||v; X_{p+1}(I)|| \leq 2R \text{ pour } v = u, \, \nabla u, \, \partial_t u\right\} .$$

Il résulte de (6.7) que pour u, $\nabla u \in B(2R)$, boule de rayon $2R$ dans $X_{p+1}(I)$ et en particulier pour $u \in S$

$$||U *_R f'(u) \, v; X_{p+1}(I)|| \leq C(T + T^\theta (2R)^{p-1}) \, ||v; X_{p+1}(I)|| \, .$$

On prend comme précédemment T assez petit selon

$$C(T + T^\theta (2R)^{p-1}) \leq \frac{1}{2} \, ,$$

ce qui assure que pour $u \in S$, on a $A(u)$, $\nabla A(u)$ et $\partial_t A(u) \in B(2R)$ et assure en outre la contraction de $||u; X_{p+1}(I)||$. On a enfin par (6.10)

$$||\Delta A(u); X_{p+1}(I)|| \leq 2R + ||f(u); X_{p+1}(I)|| \leq 2R + C\{2R + (2R)^{p-\sigma} \, R_1^\sigma\}$$

qu'on rend $\leq R_1$ en prenant par exemple R_1 assez grand selon

$$\begin{cases} R_1 \geq 4(1+C)\,R \\ R_1^{1-\sigma} \geq 2C(2R)^{p-\sigma}\,. \end{cases}$$

(Il est essentiel ici que $\sigma < 1$ dans (6.10)). Ceci achève de montrer que $AS \subset S$.

La contraction étant ainsi assurée, le reste de la preuve est identique à celle de la Proposition 4.3.

On peut maintenant établir le résultat de régularité au niveau H^2.

Proposition 6.2. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p-1 < 4/(n-2)$, soit $u_0 \in H^2$ et soit u solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ dans $X^1_{p+1}(I)$. Alors $u \in \tilde{X}^2(I)$ (avec le* **même** *I). Le même résultat s'applique avec $X^1_{p+1,\text{loc}}$ et $\tilde{X}^2_{\text{loc}}$.*

Preuve. Il suffit d'estimer *a priori* les nouvelles normes $||\partial_t u, \Delta u; X_{p+1}(I)||$ pour des solutions locales dans $\tilde{X}^2_{p+1}(I)$, en termes d'estimations données de u dans $X^1_{p+1}(I)$. On contrôle d'abord $\partial_t u$. Soit $I = [0, T_0]$. On choisit T selon (6.7) pour assurer

$$C(T + T^\theta ||u; L^\infty(I, L^{p+1})||^{p-1}) \leq \frac{1}{2}$$

et on découpe $I = \bigcup_{1\leq j\leq k} I_j$ avec $I_j = [(j-1)T, j\,T]$, $k\,T = T_0$. On estime $\partial_t u$ dans I_j en utilisant l'équation intégrale pour $\partial_t u$, qui est linéaire en $\partial_t u$, avec donnée initiale $\partial_t u(t_{j-1})$ en t_{j-1}. On obtient

$$||\partial_t u; X_{p+1}(I_j)|| \leq ||U(\cdot)\,\partial_t u(t_{j-1}); X_{p+1}(I_j)|| + \frac{1}{2}\,||\partial_t u; X_{p+1}(I_j)||\,.$$

Mais

$$||U(\cdot)\,\partial_t u(t_{j-1}); X_{p+1}(I_j)|| \leq C\,||\partial_t u(t_{j-1})||_2 \leq C\,||\partial_t u; X_{p+1}(I_{j-1})||$$

d'où

$$\begin{aligned} ||\partial_t u; X_{p+1}(I_j)|| &\leq 2C\,||\partial_t u; X_{p+1}(I_{j-1})|| \\ &\leq (2C)^j\,||\Delta u_0 - f(u_0)||_2\,, \end{aligned}$$

d'où on déduit une estimation de $||\partial_t u; X_{p+1}(I)||$ en sommant sur j. L'estimation dépend de $||\Delta u_0 - f(u_0)||_2$ donc de $||u_0; H^2||$ (par (6.8)) et de $k = T_0/T$ qui dépend donc de T_0 (*i.e.* de I) et de T. T ne dépend que de $||u; L^\infty(I, L^{p+1})||$ qui est une norme contrôlée par le niveau X^1.

On contrôle enfin Δu. Omettant les indices $p+1$ et I, on a

$$\begin{aligned} ||\Delta u; X|| &\leq ||\partial_t u; X|| + ||f; X|| \\ &\leq ||\partial_t u; X|| + ||u; X^1||^{p-\sigma} \, ||\Delta u; X||^{\sigma} \end{aligned}$$

par le Lemme 6.2, qui entraîne le contrôle de $||\Delta u; X||$ puisque $\sigma < 1$.

(2) Régularité au niveau H^k, $k > n/2$

On étudie maintenant la régularité de solutions à données initiales $u_0 \in H^k$ pour k élevé, en l'occurence $k > n/2$. On utilise les dérivées d'espace et non de temps pour contrôler la régularité, ce qui est techniquement plus simple, mais demande deux fois plus de régularité de f. On procède par la première méthode car la résolution locale au niveau H^k est très facile. On aura besoin des deux lemmes ci-dessous, qui sont d'intérêt général et servent dans de nombreux autres problèmes.

Lemme 6.3. *Soit $k > n/2$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ avec $f(0) = 0$. Alors l'application $u \to f(u)$ est bornée de H^k dans H^k.*

Preuve. Pour f fonction d'une variable réelle et α multi-indice, on a

$$\partial^\alpha f(u) = \sum_{\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\ell} C_{\{\alpha_j\}} f^{(\ell)}(u) \prod_{1 \leq j \leq \ell} \partial^{\alpha_j} u$$

où la somme porte sur toutes les décompositions $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\ell$ de α. Cette formule se démontre et les coefficients $C_{\{\alpha_j\}}$ peuvent être calculés par récurrence sur $|\alpha|$. Pour f fonction d'une variable complexe, on a une formule analogue en prenant comme variables indépendantes u et $\overline{u}$.

Pour $u \in H^k$ ($\subset L^\infty$) et $0 \leq |\alpha| \leq k$, on estime par l'inégalité de Hölder

$$||\partial^\alpha f(u)||_2 \leq C \sum_{\{\alpha_j\}} ||f^{(\ell)}(u)||_\infty \prod_{1 \leq j \leq \ell} ||\partial^{\alpha_j} u||_{r_j} \tag{6.11}$$

avec

$$\sum_{1 \leq j \leq \ell} \frac{1}{r_j} = \frac{1}{2} \, .$$

Pour $u \in H^k$, on estime la dernière norme dans (6.11) par l'inégalité de Sobolev (Proposition 2.2), ce qui est possible pour

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{r_j} \geq \left[\frac{1}{2} - \frac{k - |\alpha_j|}{n}\right]_+$$

où $[\lambda]_+ = \lambda_+$ si $\lambda \neq 0$, $[\lambda]_+ = \varepsilon > 0$ si $\lambda = 0$ (cas limite interdit). Une condition suffisante d'existence des r_j est que pour chaque ℓ, $1 \leq \ell \leq |\alpha|$

$$\frac{\ell}{2} \geq \frac{1}{2} = \sum_j \frac{1}{r_j} \geq \operatorname*{Sup}_{\{\alpha_j\}} \sum_j \left[\frac{1}{2} - \frac{k}{n} + \frac{|\alpha_j|}{n}\right]_+ .$$

Si $|\alpha_1|$ est le plus grand des $|\alpha_j|$, le dernier membre augmente quand on augmente $|\alpha_1|$ et diminue chacun des autres à somme fixée, et puisque $1/2 - k/n < 0$, le terme correspondant disparaît si $|\alpha_j| = 0$. On obtient donc le Sup en concentrant tous les α sur le même terme, *i.e.* $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_\ell = 0$. La condition devient alors

$$\frac{\ell}{2} \geq \frac{1}{2} \geq \left[\frac{1}{2} - \frac{k}{n} + \frac{|\alpha|}{n}\right]_+ ,$$

manifestement satisfaite pour $1 \leq \ell \leq |\alpha| \leq k$. Le cas $\ell = 0$ est trivial.

Corollaire 6.1. *H^k est une algèbre pour $k > n/2$.*

Preuve. Le seul point non trivial est que $u, v \in H^k \Rightarrow u\,v \in H^k$ et résulte du Lemme 6.3 appliqué à $f(u) = |u|^2$ par polarisation.

Le résultat suivant est très classique.

Lemme 6.4 (Gronwall). *Soit $g, y \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T))$, $h \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,T))$, g, h et $y \geq 0$ satisfaisant*

$$y(t) \leq g(t) + \int_0^t dt'\, h(t')\, y(t') \qquad \forall\, t \in [0,T) .$$

Alors

$$y(t) \leq g(t) + \int_0^t dt'\, g(t')\, h(t') \,\exp\left\{\int_{t'}^t dt''\, h(t'')\right\} \qquad \forall\, t \in [0,T) .$$

Preuve. Soit

$$z(t) = \int_0^t dt'\, h(t')\, y(t') .$$

Alors $z(0) = 0$ et

$$\partial_t z(t) = h\, y \leq h\, g + h\, z ,$$

$$\partial_t\left(z \,\exp\left(-\int_0^t h(t')\, dt'\right)\right) \leq \exp\left(-\int_0^t h(t')\, dt'\right) h\, g ,$$

$$z(t) \leq \int_0^t dt'\, h(t')\, g(t') \,\exp\left[\int_0^t h(t'')\, dt'' - \int_0^{t'} h(t'')\, dt''\right] ,$$

d'où le résultat.

On résout maintenant le problème de Cauchy local pour des données dans H^k, à valeurs dans $\mathcal{C}(\cdot, H^k)$. On rappelle que pour I compact, $\mathcal{C}(I, H^k)$ est un espace de Banach avec la norme de $L^\infty(I, H^k)$, en fait un sous espace fermé de $L^\infty(I, H^k)$ pour cette norme.

Proposition 6.3. *Soit $k > n/2$, $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ avec $f(0) = 0$. Alors pour $u_0 \in H^k$, on peut résoudre l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ localement dans $\mathcal{C}(I, H^k)$ (i.e. on a le même énoncé que dans les Propositions 4.2 et 4.3 avec $X(\cdot)$ et $X^1(\cdot)$ remplacé par $\mathcal{C}(\cdot, H^k)$).*

Preuve. On montre que l'opérateur A (cf. (4.2)) est une contraction dans la norme de $\mathcal{C}(\cdot, H^j)$ pour un $j < k$, par exemple $j = 0$, sur les ensembles bornés de $\mathcal{C}(\cdot, H^k)$. On montre d'abord la stabilité d'une boule convenable de $\mathcal{C}(I, H^k)$ pour $I = [-T, T]$, T assez petit. En utilisant l'unitarité de $U(\cdot)$ dans H^k, on obtient

$$||A(u); L^\infty(I, H^k)|| \leq ||u_0; H^k|| + |I| \, ||f(u); L^\infty(I, H^k)|| \, .$$

Par le Lemme 6.3, pour chaque t

$$||f(u); H^k|| \leq M(||u; H^k||)$$

donc pour

$$||u; L^\infty(I, H^k)|| \leq 2R \equiv 2 \, ||u_0; H^k||$$

on obtient

$$||A(u); L^\infty(I, H^k)|| \leq R + |I| \, M(2R) \leq 2R$$

pour $|I|$ assez petit. Donc la boule de rayon $2R$ dans $\mathcal{C}(I, H^k)$ est stable par A. La contraction en norme $L^\infty(I, H^j)$, $j < k$ se démontre de façon analogue, et on conclut par les mêmes arguments généraux que dans la Proposition 4.2.

On démontre ensuite la régularité au niveau $H^{k'}$, $k' \geq k$.

Proposition 6.4. *Soit $k' \geq k > n/2$, $f \in \mathcal{C}^{k'}$ avec $f(0) = 0$, $u_0 \in H^{k'}$ et u solution dans $\mathcal{C}(I, H^k)$ pour I un intervalle contenant 0. Alors*

(1) $u \in \mathcal{C}(I, H^{k'})$ *pour le même I.*

(2) $u \in \mathcal{C}^\ell(I, H^{k'-2\ell})$ *pour* $0 \leq \ell \leq [k'/2]$ *pour le même I.*

Preuve.

(1) La preuve procède par récurrence sur k'. Il suffit de montrer le résultat pour $k' = k+1$ et pour cela d'estimer *a priori* ∇u dans $L^\infty(H^k)$ pour une solution locale dans $\mathcal{C}(H^{k+1})$. On estime pour chaque t à partir de (4.1)

$$||\nabla u(t); H^k|| \le ||\nabla u_0; H^k|| + \int_0^t dt' \, ||f'(u); H^k|| \, ||\nabla u(t); H^k||$$

et on conclut par le Lemme 6.3, le Corollaire 6.1 et le Lemme 6.4 qu'on applique avec

$$y(t) = ||\nabla u(t); H^k|| , \quad g(t) = ||\nabla u_0; H^k|| \text{ et } h(t) = ||f'(u(t)); H^k|| .$$

(2) La preuve procède par récurrence sur ℓ à $k' = k$ fixé. Soit $0 \le \ell \le [k/2] - 1$. Alors $u \in X_\ell = \bigcap_{j \le \ell} \mathcal{C}^j(I, H^{k-2j}) \Rightarrow f(u) \in X_\ell$ par le même calcul que dans la preuve de la Proposition 6.3 (une dérivée de temps compte pour une dérivée seconde d'espace). Ensuite on utilise l'équation différentielle

$$\partial_t u = i \, \Delta \, u - f(u) ,$$

où $f(u)$ est meilleur que nécessaire, et $\Delta u \in \bigcap_{j \le \ell} \mathcal{C}^j(I, H^{k-2j-2})$ ce qui complète la preuve du fait que $u \in X_{\ell+1}$.

Remarques. Le fait que $H^k \subset L^\infty$ rend inutile des hypothèses sur le comportement de f à l'infini, et en particulier l'hypothèse (H1).

La Proposition 6.3 et la partie (1) de la Proposition 6.4 ne sont pas particulières à l'équation SNL. Il suffit que $U(t) = \exp(t \, L)$ soit un groupe borné dans H^k. Par exemple si $L = -L^*$, $U(t)$ est unitaire dans H^k. De même, le fait que $u \in X_\ell \Rightarrow f(u) \in X_\ell$ n'est pas particulier à l'équation SNL et repose seulement sur le Lemme 6.3.

(3) Régularité aux niveaux intermédiaires

Le passage de la régularité H^2 à la régularité H^k, $k > n/2$, s'effectue bien en dimension basse, mais pas en dimension élevée. On va voir pourquoi et trouver la dimension limite. En essayant d'appliquer les méthodes décrites au début de cette section, on se trouve dans la situation suivante.

(i) Pour atteindre la régularité $k > n/2$, il est techniquement nécessaire de résoudre l'équation localement au niveau de X^ρ pour $2 \le \rho \le k$, avec un peu de marge pour progresser.

(ii) En utilisant le fait que $\partial_t \sim \partial_x^2$, on doit pour cela appliquer à l'équation des dérivées d'ordre $k \geq \rho/2$ et pour cela, il faut que $f \in \mathcal{C}^k$ avec $k \geq \rho/2$.

(iii) Par l'estimation (6.11) avec $|\alpha| = \rho/2 = k$ et tous les $|\alpha_j| = 1$, f simule une puissance k, parce que sur $f^{(k)}$ on ne sait pas exploiter une décroissance en puissance à l'infini en u.

(iv) Pour résoudre au niveau ρ avec une puissance k, il faut que k soit sous critique au niveau H^ρ, *i.e.* que

$$k - 1 \leq \frac{4}{n - 2\rho}\,.$$

Cette condition n'est compatible avec $k \geq \rho/2$ pour tout $\rho \geq 2$ que si $n \leq 12$, le cas d'égalité étant le cas limite (voir Figure 6.1), avec une valeur critique $\rho = 4$.

En pratique, ce schéma suppose qu'on sait résoudre l'équation avec des dérivées non entières par rapport au temps de façon continue en ρ. Ce travail est assez compliqué et n'a pas été fait. Par contre on peut facilement résoudre localement au niveau critique $\rho = 4$ en utilisant la dérivée d'ordre deux en temps. Cette étude est le prolongement naturel de la régularité au niveau H^2 et on l'esquisse brièvement ci-dessous.

Résolution locale au niveau H^4. On introduit l'espace naturel

$$\tilde{X}^4_{r_0}(I) = \left\{u : u, \Delta u,\ \partial_t u,\ \partial_t^2 u,\ \partial_t\,\Delta u \ \text{ et } \ \Delta^2 u \in X_{r_0}(I)\right\}.$$

Proposition 6.5. *Soit $n \leq 12$. Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$ et en outre $f \in \mathcal{C}^2$ avec*

$$|f''(z)| \leq C(1 + |z|^{(p-2)_+})\,. \tag{6.12}$$

Alors pour tout $u_0 \in H^4$, on peut résoudre l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ localement dans $\tilde{X}^4$ (i.e. on a le même énoncé que dans les Propositions 4.2 et 4.3 avec X et X_1 remplacés par $\tilde{X}^4$).

Esquisse de la preuve. En utilisant le Lemme 6.1, on obtient à partir de (6.5) les équations suivantes, qu'on adjoint à (6.5)

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 u &= \partial_t^2\, A(u) \equiv -U(\Delta - f'(u_0))(\Delta u_0 - f(u_0)) - i\, U *_R \partial_t^2 f\,,\\
\partial_t \Delta u &= \partial_t\,\Delta\, A(u) \equiv i\, U(\Delta - f'(u_0))\,(\Delta u_0 - f(u_0)) - U *_R\, \partial_t^2\, f + \partial_t f(u)\,,\\
\Delta^2 u &= \Delta^2\, A(u) \equiv U(\Delta - f'(u_0))\,(\Delta u_0 - f(u_0)) + i\, U *_R \partial_t^2 f\\
&\qquad\qquad - i\,\partial_t f(u) + \Delta f(u)\,,
\end{aligned} \tag{6.13}$$

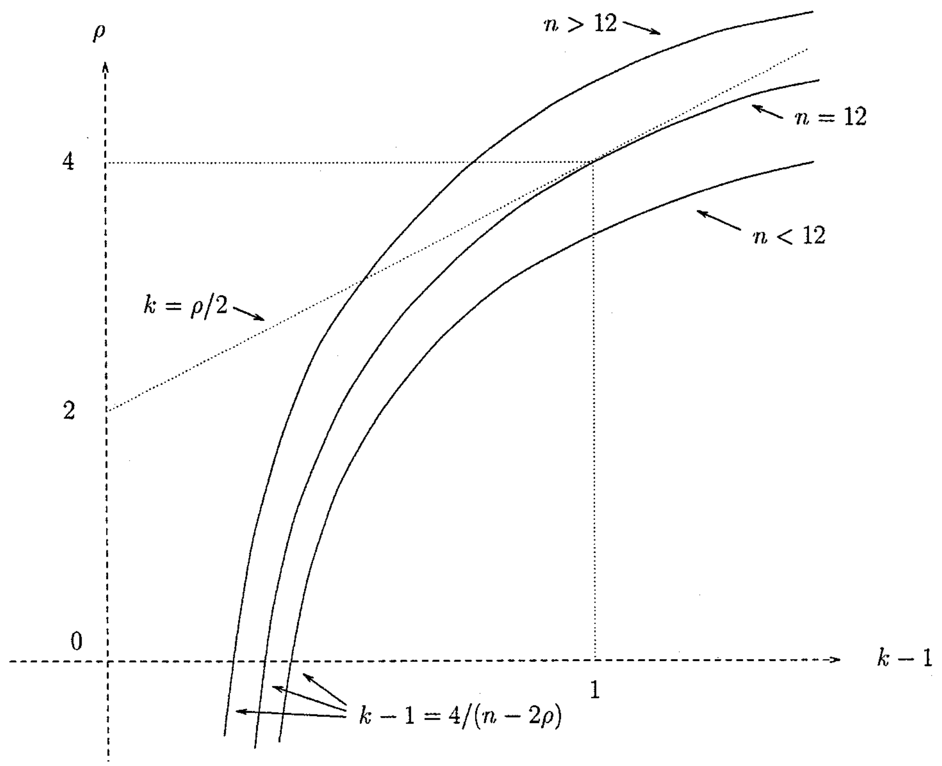

Fig. 6.1 *Régularité en dimension élevée. Les cas représentés sont $n = 10$, $n = 12$, $n = 14$.*

(cf. 6.5) et on résout le système (6.5)(6.13) par contraction partielle (par exemple de la norme dans X_{p+1}) sur les ensembles bornés de $\tilde{X}^4_{p+1}$. Il suffit pour cela d'assurer la reproduction des trois nouvelles normes. Noter que dans (6.13) f ne porte que des dérivées d'ordre ≤ 2, bien qu'on soit au niveau de H^4.

Tous les termes en dérivées premières se traitent par les méthodes et estimations précédentes, en particulier par le Lemme 6.2, sans nécessiter d'hypothèses sur f autres que (H1). Les termes nouveaux sont les termes en dérivées secondes, *i.e.*

$$U *_R f''(u)(\partial_t u)^2 \quad \text{et} \quad f''(u)(\nabla u)^2 .$$

On considère seulement pour orientation le premier, qui est le terme crucial, en supposant $n \geq 6$, donc $p \leq 2$ et $f'' \in L^\infty$. On estime avec $v = \partial_t u \in X^2$,

$$||U *_R f''(\partial_t u)^2; X|| \leq C||f''\, v^2; L^{\bar{q}'}(L^{\bar{r}'})|| \leq C||f''||_\infty\, ||v; L^{2\bar{q}'}(L^{2\bar{r}'})||^2 ,$$

$$\|v; L^{2\overline{q}'}(L^{2\overline{r}'})\| \leq C\,\|v; L^q(H^\rho_r)\|\, T^{\theta/2}$$

avec $0 \leq \rho \leq 2$, $\theta \geq 0$, $0 \leq \delta, \delta' < 1$ et

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\overline{q}'} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{n}{2\overline{r}'} = \dfrac{n}{r} - \rho \end{cases} \qquad i.e. \qquad \begin{cases} \delta + \dfrac{\delta'}{2} = 1 - \theta \\ \dfrac{n}{2} - \dfrac{n}{r} + \rho \equiv \rho + \delta = \dfrac{n}{4} - \dfrac{\delta'}{2} \equiv \dfrac{n}{2r'} \end{cases}$$

d'où $\delta + \delta'/2 = 1 - \theta = n/4 - \rho$, d'où $n/4 = 1 + \rho - \theta \leq 3$, qui pour $\rho \leq 2$ et $\theta \geq 0$, requiert $n \leq 12$.

Les détails de la preuve sont laissés en exercice.

La Proposition 6.5 permet de globaliser, *i.e.* de démontrer la régularité au niveau H^4, si on peut obtenir une estimation sous linéaire dans les nouvelles normes. Il est facile de voir que c'est le cas si le calcul précédent est valable avec $\rho = 1$, *i.e.* pour $n < 8$. En outre dans ce cas le niveau H^4 suffit pour se brancher sur les Propositions 6.3 et 6.4. Pour $8 \leq n \leq 11$, il faut travailler davantage. On cite sans démonstration le meilleur résultat publié [Hy] pour $6 \leq n \leq 11$. Ce résultat n'est pas optimal.

Proposition 6.6. *On suppose* $6 \leq n \leq 11$, $f \in \mathcal{C}^k$, $k \geq [n/2] + 2$, *et*

$$|f(z)| \leq C\,|z|^p\,, \quad |f'(z)| \leq C\,|z|^{p-1}\,, \quad |f''(z)| + |f'''(z)| \leq C$$

pour $(n-6)/(n+3) < p - 1 < 4/(n-2)$.

Soit $u_0 \in H^k$ *et* u *solution de l'équation SNL avec* $u(0) = u_0$ *dans* $\mathcal{C}(I, H^1)$ *pour* I *intervalle contenant* 0. *Alors*

$$u \in \mathcal{C}^\ell(I, H^{2k-\ell}) \quad pour \quad 0 \leq \ell \leq \left[\frac{k}{2}\right]$$

pour le même intervalle I.

Remarque. La présence d'une borne inférieure sur p est typique du fait qu'on utilise à des stades intermédiaires la majoration ponctuelle (3.5) et pas seulement les majorations intégrales (3.20)(3.21).

Note bibliographique.

La méthode de démonstration de la régularité est très classique, ainsi que les résultats de régularité au niveau H^k, $k > n/2$, et s'applique à un grand nombre d'équations d'évolution. La régularité au niveau H^2 se trouve dans [K1]. La régularité aux niveaux intermédiaires se trouve dans [PW], [TsHy], [Hy], mais ces résultats sont antérieurs à la mise au point de la Proposition 3.1 et des méthodes de la Section 4 et devraient pouvoir être améliorés en ce qui concerne les hypothèses sur f, dans l'esprit de la Proposition 6.5.

7. Méthode de compacité

Dans cette section, on étudie le problème de Cauchy (global en temps) pour l'équation SNL par une méthode de compacité. Cette méthode donne des solutions globales mais sans unicité. Elle s'applique à de très nombreuses équations et la présentation donnée ci dessous pour l'équation SNL est assez représentative, et transposable avec des modifications mineures à beaucoup d'autres équations. On trouvera des exposés traitant d'autres cas dans [Lio][Ta].

Les solutions obtenues seront dans $L^\infty(H^1)$ et les estimations d'énergie jouent un rôle important. On aura donc besoin des hypothèses (H2) et (H3). Par contre on ne vise pas l'unicité, on n'a pas besoin d'avoir f lipschitzienne, et on peut remplacer (H1) par l'hypothèse plus faible :

(H0) $$f \in \mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \text{ et } \exists\, p\,,\ 1 \le p < \infty \text{ tel que}$$

$$|f(z)| \le C(|z| + |z|^p) \tag{7.1}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Le problème de Cauchy dans H^1 pour l'équation SNL est bien compris pour p sous critique, $p + 1 < 2^* \equiv 2n/(n-2)$, par les méthodes des Sections 4 et 5. Les résultats de cette section sont donc intéressants surtout dans le cas surcritique. On suppose donc $n \ge 3$ dans toute cette section. Les cas $n = 1, 2$ ne présentent pas de difficultés particulières, mais demandent des énoncés adaptés à l'absence de 2^* fini.

On définit l'espace d'énergie

$$X = H^1 \cap L^{p+1} \qquad (X = H^1 \text{ si } p + 1 \le 2^*)\,,$$

et son dual

$$X^* = H^{-1} + L^{\overline{p+1}} \qquad (X^* = H^{-1} \text{ si } p + 1 \le 2^*)\,.$$

Ces deux espaces sont réflexifs et séparables.

La non linéarité f satisfait la propriété suivante.

Lemme 7.1. *Soit f satisfaisant (H0). Alors f est bornée et fortement continue de X dans $L^2 + L^{\overline{p+1}}$ et a fortiori de X dans X^*.*

Preuve. Par une inégalité de Sobolev (Proposition 2.2), $X \subset L^2 \cap L^s$ avec $s = \mathrm{Max}(2^*, p+1)$. D'autre part f est bornée de façon évidente et fortement continue par le Lemme 4.1 de $L^2 \cap L^s$ dans $(L^2 \cap L^s) + (L^{2/p} \cap L^{s/p}) \subset L^2 + L^{\overline{p+1}} \subset X^*$.

On donne maintenant deux lemmes de continuité. Le second sera effectivement utilisé, et s'inscrit dans le contexte du premier, qui est plus général que ce dont on a besoin.

Lemme 7.2. *Soient Y et Z deux espaces de Banach duals de Y_* et Z_* avec $Z_* \hookrightarrow Y_*$, Z_* dense dans Y_*, si bien que $Y \hookrightarrow Z$. Si une suite $\{v_j\}$ bornée dans Y converge $*-$faiblement dans Z vers $v \in Z$, alors $v \in Y$ et $\{v_j\}$ converge $*-$faiblement vers v dans Y.*

Preuve. La suite $\{v_j\}$ est bornée donc $*-$faiblement relativement compacte dans Y, donc admet un point d'accumulation $w \in Y$. Ce point est *a fortiori* un point d'accumulation $*-$faible dans Z, donc coïncide avec la limite $*-$faible de $\{v_j\}$ dans Z, *i.e.* $w = v$, donc $v \in Y$. De plus la suite $\{v_j\}$ admet v comme unique point d'accumulation $*-$faible dans Y, ce qui joint à la compacité $*-$faible dans Y, entraîne la convergence $*-$faible dans Y.

Remarque. Si Y_* est séparable ou réflexif, on peut remplacer "admet un point d'accumulation dans Y" par "admet une sous suite convergente dans Y" ([Yo] p. 126 et p. 141), mais ce n'est pas vrai en général ([ReSi] tome I, problème 12 p. 120).

Pour le lemme suivant, on se limite au cas réflexif. On note $\mathcal{C}_w(I,Y)$ l'espace des fonctions faiblement continues de $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach Y.

Lemme 7.3. *Soit $Y \hookrightarrow Z$ deux espaces de Banach avec Y réflexif. Alors*

$$L^\infty(I,Y) \cap \mathcal{C}_w(I,Z) \subset \mathcal{C}_w(I,Y)\,.$$

Preuve. Soit $\{\varphi_j\}$ une approximation $\mathcal{C}^\infty$ de la distribution δ en temps. Soit $v \in L^\infty(I,Y) \cap \mathcal{C}_w(I,Z)$. Alors $\varphi_j * v \in (\mathcal{C}^\infty \cap L^\infty)(I,Y)$ et $||\varphi_j * v; L^\infty(Y)|| \leq ||v; L^\infty(Y)||$. Pour chaque t, la suite $(\varphi_j * v)(t)$ est bornée dans Y et converge faiblement vers $v(t)$ dans Z, donc $v(t) \in Y$ pour **tout** (et pas seulement presque tout) $t \in I$, avec extension de la borne, par le Lemme 7.2.

Pour obtenir la continuité faible, on applique une deuxième fois le Lemme 7.2 à une suite $\{(v(t_j)\}$, $t_j \to t$.

On va s'intéresser aux propriétés des solutions de l'équation SNL dans $L^\infty(I,X)$. Ces solutions satisfont automatiquement des propriétés supplémentaires. On note respectivement $\mathcal{C}^\alpha(I,Y)$ et $\mathcal{C}_L(I,Y)$ les espaces des fonctions Hölder continues d'exposant α $(0 < \alpha < 1)$ et des fonctions lipschitziennes définies dans un intervalle I et à valeurs dans un espace de Banach Y.

Lemme 7.4. *Soit f satisfaisant (H0) et I un intervalle contenant 0. Soit $u \in L^\infty(I,X)$ solution de l'équation SNL. Alors, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle,*

(1) $u \in \mathcal{C}_L(I,X^*) \cap \bigcap_r \mathcal{C}^{\alpha(r)}(I,L^r) \cap \mathcal{C}_w(I,X)$
pour $2 \le r < s \equiv \mathrm{Max}(p+1, 2^*)$ *et* $\alpha(r) = (1/2)(1 - \delta(r)/\delta(s))$.

(2) u satisfait l'équation intégrale (pour $t \in I$)

$$u(t) = U(t)\,u(0) - i\int_0^t dt'\,U(t-t')\,f(u(t'))\,.$$

(3) Si de plus f satisfait (H2), alors $||u(t)||_2 =$ constante.

Preuve.

(1) Par le Lemme 7.1, $\partial_t u \in L^\infty(I, H^{-1} + L^2 + L^{\overline{p+1}}) \subset L^\infty(I,X^*)$. On définit $\tilde{u} = \int_0^t \partial_t u(t')\,dt'$, où $\partial_t u$ est la dérivée de u au sens des distributions. Alors $u - \tilde{u} = u_0 =$ constante comme distribution, donc $u = u_0 + \tilde{u}$ presque partout. On redéfinit u comme $\tilde{u} + u_0$, à une modification sur un ensemble de mesure nulle près. Il est alors évident que $u \in \mathcal{C}_L(I,X^*)$. La Hölder continuité d'exposant 1/2 dans L^2 résulte de l'estimation

$$\begin{aligned} ||u(t_1) - u(t_2)||_2^2 &= \int_{t_1}^{t_2} dt\;\; 2\,\mathrm{Re}\,\langle u(t) - u(t_1),\, \partial_t u(t)\rangle \\ &\le 4\,|t_2 - t_1|\,||u; L^\infty(I,X)||\,||\partial_t u; L^\infty(I,X^*)||\,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

La Hölder continuité dans L^r ($2 \le r < s$) s'obtient par interpolation entre la Hölder continuité dans L^2 et la borne uniforme dans $X \subset L^s$. La continuité faible dans X résulte du Lemme 7.3 avec $Y = X$ et $Z = L^2$.

(2) $u \in \mathcal{C}(L^2 \cap L^p) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(L^2 + L^1) \subset \mathcal{C}(H^{-k})$ pour $k > n/2$. L'intégrand dans l'équation intégrale est dans $\mathcal{C}(H^{-k})$ en t et t' et dans $\mathcal{C}^1(H^{-(k+2)})$ en t. La dérivée par rapport au temps de l'intégrale peut être calculée au sens usuel dans $H^{-(k+2)}$. La preuve suit alors le schéma donné dans la Section 2.4.

(3) On calcule

$$||u(t_2)||_2^2 - ||u(t_1)||_2^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt\;\; \mathrm{Im}\;\langle u(t), -\Delta u(t) + 2f(u(t))\rangle\,.$$

L'intégrale est bien définie car $u \in L^\infty(X)$ et $-\Delta u + 2f(u) \in L^\infty(X^*)$, et l'intégrand est nul par l'hypothèse (H2).

Remarque. Si u satisfait l'équation intégrale et si $u \in L^\infty(H^1)$, alors u satisfait l'équation différentielle. L'argument est analogue à celui de la partie (2) : l'équation intégrale et le Lemme 7.1 entraînent assez de régularité de u, donc de l'intégrand pour appliquer $i\,\partial_t + (1/2)\Delta$ à l'intégrale dans un H^{-N} avec N assez grand.

On passe maintenant au vif du sujet, *i.e.* la construction de solutions. On utilise la méthode de Galerkin qui consiste à

(1) tronquer l'équation pour se ramener à une équation différentielle en dimension finie et obtenir une solution de l'équation tronquée par les résultats connus sur les équations différentielles ordinaires (Théorème de Peano).

(2) Eliminer la troncature par un passage à la limite et obtenir par compacité un point limite de solutions des équations tronquées, qui fournira une solution de l'équation originale.

On tronque de la façon suivante.

Soit $\{e_k\}$ $(k \geq 1)$ une base de X, *i.e.* une suite de vecteurs de X tels que

(i) toute sous famille finie est linéairement indépendante,

(ii) les combinaisons linéaires finies des e_k sont denses dans X.

Soit Γ_k $(= \Gamma_k^* = \Gamma_k^2)$ le projecteur orthogonal dans L^2 sur le sous espace engendré par $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Pour chaque k, on considère l'équation tronquée

$$\begin{cases} i\,\partial_t u = -\dfrac{1}{2}\,\Gamma_k\,\Delta u + \Gamma_k\, f(u) \\ u(0) = u_{0k} \end{cases} \tag{7.3}$$

où $u_{0k} \in \mathcal{R}(\Gamma_k)$ pour tout k et où $u_{0k} \to u_0$ fortement dans X quand $k \to \infty$.

L'existence d'une suite $u_{0k} \in \mathcal{R}(\Gamma_k)$ tendant fortement vers $u_0 \in X$ se montre par l'absurde : s'il n'existait pas de telle suite, alors il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre u_0 et de rayon ε dans X ne rencontre aucun des $\mathcal{R}(\Gamma_k)$, en contradiction avec le fait que $\{e_k\}$ est une base de X.

L'équation tronquée est une équation différentielle dans l'espace de dimension finie $\mathcal{R}(\Gamma_k)$. L'existence d'une solution du problème (7.3) à k fixé résulte du Théorème de Peano ([Ht] p. 10-15) qu'on peut formuler comme suit.

Lemme 7.5. *Soit $h(t,y)$ continue sur un ouvert $S \subset \mathbb{R}^{k+1}$ et $(t_0, y_0) \in S$. Alors l'équation différentielle $dy/dt = h(t,y)$ avec donnée initiale $y(t_0) = y_0$ a (au moins) une* *solution $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^k)$ définie dans un intervalle $I = [t_0 - T_-, t_0 + T_+]$, $T_\pm > 0$. La solution peut être prolongée aussi longtemps que $(t, y(t))$ reste dans S.*

On obtient alors le résultat suivant.

Lemme 7.6. *Soit f satisfaisant (H0) et (H2). Alors le système tronqué (7.3) admet une solution $u_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{R}(\Gamma_k))$. Cette solution satisfait les lois de conservation*

$$||u_k(t)||_2 = ||u_{0k}||_2 \quad et \quad E(u_k(t)) = E(u_{0k}) \tag{7.4}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier elle est uniformément bornée en t dans $\mathcal{R}(\Gamma_k)$.

Preuve. On applique le Lemme 7.5 avec $u = \sum\limits_{1 \le j \le k} y_j\, e_j$, avec $h(t, y) = h(y) =$ le MD de (7.3) (indépendant de t) et $S = \mathbb{R}^{k+1}$ La continuité de h vient du fait que f est continue de X dans X^* et que Γ_k est borné de X^* dans X (on peut par exemple se ramener au cas où les e_j sont orthonormés dans L^2 par orthogonalisation de Schmidt auquel cas $\Gamma_k = \sum\limits_{j \le k} |e_j >< e_j|$).

L'existence globale résulte de la borne uniforme dans $\mathcal{R}(\Gamma_k)$ qui résulte elle même de la conservation de la norme dans L^2. Les deux lois de conservation se démontrent par le calcul usuel en prenant les produits scalaires $2\,\mathrm{Im}\langle u, \mathrm{Eq}\ (7.3)\rangle$ et $2\,\mathrm{Re}\langle \partial_t u, \mathrm{Eq}\ (7.3)\rangle$ et en remarquant que le projecteur Γ_k disparaît parce que $\Gamma_k u = u$ et $\Gamma_k\, \partial_t u = \partial_t u$.

Remarque. Le Théorème de Peano est déjà un résultat de compacité, et on n'a déjà pas d'unicité au stade du Lemme 7.6 pour le système tronqué. On ne peut d'ailleurs pas en espérer avec seulement $f \in \mathcal{C}$.

On note désormais u_k une solution globale du système (7.3). On va construire une solution de l'équation SNL en passant à la limite $k \to \infty$. Pour celà on aura besoin d'hypothèses plus fortes sur f. On énonce le résultat final dans la proposition suivante.

Proposition 7.1. *Soit f satisfaisant (H0), (H2) et (H3). Si $p + 1 > 2^*$, on suppose en outre que*

$$V(R) \ge -C_1\, R^2 + C_2\, R^{p+1} \tag{7.5}$$

pour un $C_2 > 0$ et tout $R \ge 0$. Soit $u_0 \in X$. Alors l'équation SNL avec donnée initiale $u(0) = u_0$ a (au moins) une solution u satisfaisant

$$u \in \mathcal{C}_L(\mathbb{R}, X^*) \cap \mathcal{C}^{\alpha(r)}(\mathbb{R}, L^r) \cap (L^\infty \cap \mathcal{C}_w)(\mathbb{R}, X) \tag{7.6}$$

pour $2 \leq r < s \equiv \mathrm{Max}(2^*, p+1)$, *avec* $\alpha(r) = (1/2)(1 - \delta(r)/\delta(s))$. *De plus* $||u(t)||_2 = ||u_0||_2$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Si $p + 1 \geq 2^*$, *on suppose en outre que* V *peut être décomposé en* $V = V_1 + V_2$ *où* V_1 *satisfait*

$$V_1(R) \leq C(R^2 + R^{p_1+1}) \tag{7.7}$$

pour un p_1 *satisfaisant* $1 \leq p_1 < p$ *et où* V_2 *est croissante convexe de* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. *Alors la solution construite précédemment satisfait*

$$E(u(t)) \leq E(u_0) \quad \textit{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Preuve. On construit u comme limite de solutions u_k des systèmes tronqués (7.3) obtenues dans le Lemme 7.6. La preuve procède par étapes.

(1) Majorations uniformes des u_k

Du fait que $u_{0k} \to u_0$ fortement dans X et de la continuité de l'énergie $E(u)$ comme fonction de X dans $\mathbb{R}$, il résulte que

$$\lim_{k\to\infty} ||u_k(t)||_2 = ||u_0||_2\,,$$
$$\lim_{k\to\infty} E(u_k(t)) = E(u_0)\,,$$

et par suite pour k assez grand

$$||u_k(t)||_2 \leq 2\,||u_0||_2\,,$$
$$E(u_k(t)) \leq E(u_0) + 1\,.$$

D'autre part, il résulte des hypothèses (H2) et (H3) si $p + 1 \leq 2^*$ par le Lemme 5.1, de (H2) et (7.5) si $p + 1 > 2^*$ que pour tout $u \in X$

$$||u; X|| \leq M_0(||u||_2,\ E(u))\,.$$

Par suite

$$||u_k(t); X|| \leq M(||u_0||_2,\ E(u_0))$$

uniformément en k et t, pour k assez grand, *i.e.*

$$||u_k; L^\infty(\mathbb{R}, X)|| \leq M(||u_0||_2,\ E(u_0))\,, \tag{7.8}$$

et par suite

$$||f(u_k); L^\infty(\mathbb{R}, X^*)|| \leq M_1(||u_0||_2,\ E(u_0)) \tag{7.9}$$

uniformément en k.

(2) Extraction d'une sous suite convergente

On a $L^\infty(\mathbb{R}, X) = L^1(\mathbb{R}, X^*)^*$ et $L^\infty(\mathbb{R}, X^*) = L^1(\mathbb{R}, X)^*$ par le Théorème 2.5, et ces deux espaces sont donc duals d'espaces de Banach séparables. Les suites u_k et $f(u_k)$ sont donc $*$−faiblement relativement compactes dans $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ et $L^\infty(\mathbb{R}, X^*)$ respectivement par le Théorème 2.1. On peut donc extraire (en deux étapes) une sous suite, qu'on continue à noter $\{u_k\}$, telle que

$$\begin{aligned} u_k &\text{ converge } *-\text{faiblement vers } u \in L^\infty(\mathbb{R}, X)\,, \\ f(u_k) &\text{ converge } *-\text{faiblement vers } v \in L^\infty(\mathbb{R}, X^*)\,, \end{aligned}$$

et u et v satisfont les mêmes majorations (7.8)(7.9) que u_k et $f(u_k)$.

Attention. On ne sait pas à ce stade, et c'est la difficulté majeure de la méthode, si $v = f(u)$.

(3) Convergences et propriétés faciles de u

On démontre d'abord quelques convergences supplémentaires de u_k vers u et quelques propriétés simples de u. On note $\langle\langle \varphi, v\rangle\rangle$ la dualité dans l'espace temps, par exemple entre $\varphi \in L^1(X^*)$ et $v \in L^\infty(X)$, et $\langle .,. \rangle$ la dualité dans l'espace, extension du produit scalaire dans L^2.

De la convergence $*$−faible de u_k vers u dans $L^\infty(\mathbb{R}, X)$, il résulte immédiatement que Δu_k converge $*$−faiblement vers Δu dans $L^\infty(\mathbb{R}, H^{-1})$. Par contre on ne sait pas si $\partial_t\, u_k$ converge vers $\partial_t u$, car les projecteurs Γ_k ne sont *a priori* pas bornés dans X (ou dans X^*), donc $\partial_t\, u_k$ n'est pas *a priori* borné dans $L^\infty(\mathbb{R}, X^*)$ uniformément en k. Néanmoins on va montrer que u satisfait l'équation

$$i\,\partial_t u = -\frac{1}{2}\,\Delta u + v\,. \tag{7.10}$$

Soit en effet $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour tout $j \le k$, $\Gamma_k\, e_j = e_j$ donc

$$\left\langle\left\langle \theta\, e_j, i\,\partial_t\, u_k + \frac{1}{2}\,\Delta u_k - f(u_k)\right\rangle\right\rangle = 0\,.$$

Mais

$$\langle\langle \theta\, e_j, i\,\partial_t\, u_k\rangle\rangle = -i\langle\langle (\partial_t \theta)\, e_j, u_k\rangle\rangle$$

par définition, et ceci tend vers

$$-i\langle\langle (\partial_t \theta)\, e_j, u\rangle\rangle = \langle\langle \theta\, e_j, i\,\partial_t u\rangle\rangle$$

par la convergence $*$−faible de u_k vers u dans $L^\infty(\mathbb{R}, X)$, car $(\partial_t \theta)\, e_j \in L^1(\mathbb{R}, X) \subset L^1(\mathbb{R}, X^*)$. On passe à la limite sans problème dans les autres termes car $(1/2)\,\Delta u_k - f(u_k)$ converge $*$−faiblement vers $(1/2)\,\Delta u - v$ dans $L^\infty(\mathbb{R}, X^*)$ et $\theta\, e_j \in L^1(\mathbb{R}, X)$. Donc

$$\left\langle\left\langle \theta\, e_j, i\,\partial_t u + \frac{1}{2}\,\Delta u - v \right\rangle\right\rangle = 0\,,$$

d'où le résultat puisque le système des $\theta\, e_j$ est total dans $L^1(X)$.

Il résulte de (7.10) après modification sur un ensemble de mesure nulle, qu'on s'empresse d'effectuer si nécessaire, que u satisfait les majorations et continuités du Lemme 7.4, et en particulier satisfait (7.6).

Par contre, et bien qu'on dispose de l'hypothèse (H2), on ne peut pas conclure à ce stade que $||u||_2$ est conservée, parce qu'on n'a pas assez de contrôle sur v pour savoir que $\mathrm{Im}\langle u, v\rangle = 0$, *i.e.* on n'est pas capable de passer à la limite dans le produit scalaire $\mathrm{Im}\langle u_k, f(u_k)\rangle = 0$ avec seulement des convergences faibles sur les deux termes.

Condition initiale. On montre maintenant que u satisfait la condition initiale $u(0) = u_0$.

Soit χ_+ fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\theta(0) = 1$. Alors pour tout $j \leq k$,

$$\langle e_j, u_k(0)\rangle = -\int_0^\infty dt\, \partial_t \langle e_j\, \theta(t), u_k(t)\rangle = -\langle\langle e_j\, \chi_+\, \partial_t\theta, u_k\rangle\rangle - \langle\langle e_j\, \theta\, \chi_+, \partial_t\, u_k\rangle\rangle\,.$$

On élimine $\partial_t\, u_k$ en utilisant l'équation, Γ_k s'élimine car $\Gamma_k\, e_j = e_j$, donc

$$\ldots = -\langle\langle e_j\, \chi_+\, \partial_t\theta, u_k\rangle\rangle - \left\langle\left\langle e_j\, \chi_+\theta, \frac{i}{2}\,\Delta u_k - i\, f(u_k)\right\rangle\right\rangle\,.$$

On passe à la limite en utilisant le fait que $e_j\, \chi_+\, \partial_t\theta \in L^1(\mathbb{R}, X^*)$, $e_j\, \chi_+\theta \in L^1(\mathbb{R}, X)$ et les convergences $*$−faibles de u_k dans $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ et de $(1/2)\,\Delta u_k - f(u_k)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}, X^*)$. On obtient

$$\begin{aligned}\langle e_j, u_0\rangle &= -\langle\langle e_j\, \chi_+\, \partial_t\theta, u\rangle\rangle - \left\langle\left\langle e_j\, \chi_+\theta,\ \frac{i}{2}\,\Delta u - iv\right\rangle\right\rangle \\ &= -\langle\langle e_j\, \chi_+\, \partial_t\theta, u\rangle\rangle - \langle\langle e_j\, \chi_+\theta,\ \partial_t u\rangle\rangle\end{aligned}$$

car u satisfait l'équation (7.10),

$$\ldots = \langle e_j, u(0)\rangle\,.$$

Donc $u(0) = u_0$, car le système $\{e_j\}$ est total dans X, donc dans X^*.

Convergence à temps fixé. On montre que $u_k(t) \to u(t)$ faiblement dans X pour t fixé. Comme $u_k(t)$ est borné dans X uniformément en t et k, il suffit de montrer la convergence en dualité avec un système total, pour lequel on prend encore les e_j. Pour $j \leq k$, on obtient

$$\langle e_j, u_k(t) - u_{0k}\rangle = \left\langle\left\langle e_j\, \chi([0,t]),\ \frac{i}{2}\,\Delta u_k - i\, f(u_k)\right\rangle\right\rangle$$

et comme précédemment, avec $e_j\, \chi([0,t]) \in L^1(\mathbb{R}, X)$ et $(1/2)\,\Delta u_k - f(u_k)$ $*$–faiblement convergent dans $L^\infty(\mathbb{R}, X^*)$, la limite suivante existe

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \langle e_j, u_k(t)\rangle &= \langle e_j, u_0\rangle + \langle\langle e_j\, \chi([0,t]),\ \partial_t u\rangle\rangle \\ &= \langle e_j, u(t)\rangle\,.\end{aligned}$$

(4) Satisfaction de l'équation

Il s'agit de montrer que $v = f(u)$, et c'est le point délicat de la méthode. C'est une propriété locale, qu'on va montrer dans $I \times K$ où I est un intervalle compact et K un compact de $\mathbb{R}^n$.

On sait que, avec des bornes uniformes en k

$$\begin{aligned}u_k &\in \mathcal{C}(I, X) \subset \mathcal{C}(I, H^1(K))\,,\\ u_k &\in \mathcal{C}^{1/2}(I, L^2) \subset \mathcal{C}^{1/2}(I, L^2(K))\,.\end{aligned}$$

On utilise alors la version suivante du Théorème d'Ascoli.

Lemme 7.7. *Soit I compact. Soit $X_1 \hookrightarrow X_0$ deux espaces de Banach, l'injection de X_1 dans X_0 étant compacte. Soit $\{u_k\}$ une suite uniformément bornée dans $\mathcal{C}(I, X_1)$ et (uniformément) équicontinue dans X_0. Alors la suite $\{u_k\}$ est relativement compacte en norme dans $\mathcal{C}(I, X_0)$.*

On applique le Lemme 7.7 à la suite précédente $\{u_k\}$ avec $X_0 = L^2(K)$ et $X_1 = H^1(K)$ (l'injection de $H^1(K)$ dans $L^2(K)$ est compacte pour K compact), et on conclut que la suite $\{u_k\}$ est relativement compacte en norme dans $\mathcal{C}(I, L^2(K))$.

La suite $\{u_k\}$ est relativement compacte en norme dans $L^\infty(I, L^2(K))$ et converge $*$–faiblement vers u dans $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ donc *a fortiori* dans $L^\infty(I, L^2(K))$. Par suite la suite $\{u_k\}$ converge vers u en norme dans $L^\infty(I, L^2(K))$ et *a fortiori* dans $L^2(I \times K)$, par un argument analogue à celui de la preuve du Lemme 7.2.

On utilise alors le lemme suivant pour conclure que la suite $\{u_k\}$ admet une sous suite qui converge vers u presque partout dans $I \times K$.

Lemme 7.8. *Soit (S, μ) un espace muni d'une mesure, soit $1 \leq r \leq \infty$ et $\{u_k\}$ une suite dans $L^r(S, \mu)$ qui converge fortement vers $u \in L^r$. Alors il existe une sous suite qui converge μ-presque partout vers u.*

Preuve. Soit $E(k, \delta) = \{y \in S : |u_k(y) - u(y)| > \delta\}$. Alors

$$\mu(E(k, \delta)) \leq \delta^{-r} \, ||u_k - u||_r^r$$

et ceci tend vers zéro à δ fixé quand $k \to \infty$ (pour $r < \infty$; le cas $r = \infty$ est trivial). On prend une suite $\delta_p \downarrow 0$, par exemple $\delta_p = 1/p$, et on choisit k_p tel que

$$\mu(E(k_p, \delta_p)) \leq 2^{-(p+1)} .$$

Soit alors

$$F_p = \bigcup_{q \geq p} E(k_q, \delta_q) \quad \text{et} \quad F = \bigcap_p F_p .$$

Alors $\mu(F_p) \leq 2^{-p}$ et par suite $\mu(F) = 0$.

D'autre part, si $y \notin F$, il existe p tel que $y \notin F_p$, donc il existe p tel que pour tout $q \geq p$, $|u_{k_q}(y) - u(y)| \leq \delta_q$, ce qui dit précisément que la sous suite u_{k_p} tend vers u en tout point $y \notin F$.

En appliquant le Lemme 7.8, on se restreint à une sous suite des $\{u_k\}$, qu'on note encore $\{u_k\}$, qui converge vers u presque partout dans $I \times K$. Le long de cette sous suite, $f(u_k) \to f(u)$ presque partout dans $I \times K$ par la continuité de f. On sait d'autre part que $f(u_k)$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}, L^2 + L^{\overline{p+1}}) \subset L^{\overline{p+1}}(I \times K)$. On en conclut que $f(u_k)$ tend vers $f(u)$ faiblement dans $L^{\overline{p+1}}(I \times K)$ par le lemme suivant ([Lio] p. 12).

Lemme 7.9. *Soit S ouvert $\subset \mathbb{R}^{n+1}$, $1 < r < \infty$, $\{f_k\}$ suite bornée dans $L^r(S)$ et convergeant presque partout dans S vers $f \in L^r(S)$. Alors $f_k \to f$ faiblement dans $L^r(S)$.*

Preuve. La suite $\{f_k\}$ étant bornée dans $L^r(S)$, il suffit de montrer la convergence faible en dualité avec un sous ensemble dense de $L^{\overline{r}}$, pour lequel on peut prendre les fonctions à support compact. On peut donc sans perte de généralité se restreindre au cas où S est borné. Soit encore

$$E(k,\delta) = \{y \in S : |f_k(y) - f(y)| > \delta\}.$$

Soit $F_p = \bigcup_{k \geq p} E(k,1)$.

Sur $\complement F_p$, on a $|f_k(y) - f(y)| \leq 1$ pour tout $k \geq p$ et par suite $\langle g, f_k \rangle \to \langle g, f \rangle$ par le théorème de la convergence dominée pour tout $g \in L^{\overline{r}}(S)$ avec $\operatorname{Supp} g \subset S \setminus F_p$ (on rappelle que S est borné).

D'autre part les F_p forment une famille emboîtée décroissante d'ensembles de mesure finie ($\mu(F_p) \leq \mu(S) < \infty$) et

$$\bigcap_p F_p = \left\{y \in S : \forall\, p,\ \exists\, k \geq p,\ |f_k(y) - f(y)| > 1\right\}$$

est de mesure nulle. Donc $\mu(F_p) \to 0$ quand $p \to \infty$, donc les $g \in L^{\overline{r}}(S)$ à support dans $S \setminus F_p$ pour un p sont denses dans $L^{\overline{r}}(S)$, et suffisent donc à vérifier la convergence faible.

En appliquant le Lemme 7.9, on se restreint à une nouvelle sous suite, encore notée $\{u_k\}$, telle que $f(u_k)$ tend vers $f(u)$ faiblement dans $L^{\overline{p+1}}(I \times K)$. On sait d'autre part que $f(u_k)$ tend vers v $*-$faiblement dans $L^\infty(\mathbb{R}, L^2 + L^{\overline{p+1}})$ donc faiblement dans $L^{\overline{p+1}}(I \times K)$. Par suite $f(u) = v$ dans $I \times K$, et comme I et K sont arbitraires, $f(u) = v$ partout, donc u satisfait l'équation SNL.

Pour terminer la preuve de la Proposition 7.1, il ne reste plus qu'à démontrer les lois de conservation.

(5) Lois de conservation

Puisque u satisfait l'équation SNL, on a maintenant la conservation de la norme L^2 par le point (3) du Lemme 7.4.

On revient ensuite à la convergence ponctuelle de la première suite extraite $\{u_k\}$. On a vu que pour chaque t, $u_k(t) \to u(t)$ faiblement dans X, et *a fortiori* faiblement dans L^2. D'autre part

$$||u_k(t)||_2^2 = ||u_{0k}||_2^2 \to ||u_0||_2^2 = ||u(t)||_2^2.$$

La convergence faible dans L^2 et la convergence de la norme entraînent la convergence forte dans L^2, *i.e.* $u_k(t) \to u(t)$ fortement dans L^2. Par interpolation avec la borne uniforme dans $X \subset L^2 + L^s$, il en résulte que $u_k(t) \to u(t)$ fortement dans L^r pour $2 \leq r < s = \operatorname{Max}(2^*, p+1)$.

On peut maintenant passer à l'inégalité d'énergie. On sait que $E(u_k(t)) = E(u_{0k}) \to E(u_0)$ quand $k \to \infty$, par le choix des u_{0k}. D'autre part, la convergence faible dans X, donc dans H^1, entraîne que

$$||\nabla u(t)||_2^2 \leq \liminf_{k\to\infty} ||\nabla u_k(t)||^2$$

tandis que la convergence forte dans L^r entraîne que

$$\int V(u_k(t))\, dx \to \int V(u(t))\, dx$$

si $p+1 < 2^*$, et l'analogue avec V_1 si $p+1 \geq 2^*$. Par suite $E(u(t)) \leq E(u_0)$ si $p+1 < 2^*$.

Il reste à considérer le cas de V_2 si $p+1 \geq 2^*$. Mais V_2 est convexe croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $V_2(z)$ est convexe sur $\mathbb{C}$. Par suite l'application $u \to \int dx\, V_2(u)$ est convexe sur X, donc son épigraphe est convexe. Mais cette fonction est fortement continue, donc son épigraphe est fortement fermé. Etant convexe et fortement fermé, il est faiblement fermé ([DS] Tome I, Théorème 13, p. 422), donc cette fonction est faiblement semi continue inférieurement. Par suite

$$\int V_2(u(t)) \leq \liminf_{k\to\infty} \int V_2(u_k(t))\, dx$$

ce qui achève la preuve de l'inégalité d'énergie pour $p+1 \geq 2^*$.

Remarque. Si on ajoute l'hypothèse (H1) avec $p+1 < 2^*$, il résulte du point (3) de la Proposition 4.1 que la solution de la Proposition 7.1 est unique (la Proposition 4.1 suppose la continuité forte dans H^1, mais il est clair que la preuve s'applique sans changement avec la continuité faible).

Pour $p+1 \geq 2^*$, l'unicité n'est pas connue. L'unicité, surtout pour $p+1 > 2^*$, est un problème ouvert, intéressant et très probablement difficile.

Note bibliographique.

Les méthodes de compacité datent des années 30 et des travaux de J. Leray sur les équations de Navier-Stokes. Elles ont été appliquées depuis de façon systématique à un grand nombre d'équations, dispersives ou dissipatives. Voir [Lio], Chapitre 1 et bibliographie. On trouvera également un exposé détaillé de ces méthodes dans [Ta]. Le cas de l'équation SNL est raisonnablement représentatif. L'exposé donné ici est basé sur [GV3].

8. Invariances et lois de conservation

Dans cette section, on présente la méthode générale d'obtention des lois de conservation à partir des propriétés d'invariance pour les équations d'évolution de type variationnel telles que celles considérées dans l'introduction, et on applique ensuite cette méthode à l'équation SNL. On considère ici seulement l'aspect algébrique du problème et on suppose que toutes les fonctions considérées sont suffisamment régulières et décroissantes à l'infini pour donner un sens au calcul formel. La démonstration proprement dite des lois de conservation, dès lors qu'on sait ce qu'on doit démontrer, s'effectue de la façon la plus économique par des applications directes de l'équation d'évolution elle même, et dépend du cadre fonctionnel considéré. Voir en particulier les Sections 5.1 et 5.2 ci-dessus et la Section 9 ci-dessous. On se limite aux équations de type local et du second ordre au plus, en ce sens que l'équation ne fait intervenir que la fonction inconnue et ses dérivées d'ordre au plus 2 prises en un même point. Cette classe contient l'équation SNL. Quelques modifications sont nécessaires pour les équations non locales comme l'équation de Hartree.

(1) Théorie générale

On note $y = (t, x)$ un point générique de l'espace temps $\mathbb{R}^{n+1}$, $y_0 = t$, $y_j = x_j$, $1 \leq j \leq n$, $\partial_\mu = \partial/\partial y_\mu$. Les indices latins (resp. grecs) varient de 1 à n (resp. de 0 à n). On s'intéresse à une équation d'évolution pour une fonction inconnue u de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}$ (plus généralement u pourrait être à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie), obtenue à partir du problème variationnel suivant.

On se donne une fonction $\mathcal{L}$, appelée Lagrangien, de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, et on considère la fonction composée, encore notée $\mathcal{L}$ par abus de notation, $y \to \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(u(y), \{\partial_\mu u(y)\}, y)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ouvert à frontière régulière. On lui associe l'action

$$A_\Lambda = \int_\Lambda \mathcal{L}(y)\, dy\,. \tag{8.1}$$

Le problème variationnel consiste à chercher u tel que pour tout Λ, l'action A_Λ soit stationnaire par rapport aux variations de u qui laissent invariante la valeur au bord $u|_{\partial\Lambda}$. Soit δu la variation de u. La variation de $\partial_\mu u$ est $\delta\partial_\mu u = \partial_\mu\, \delta u$. La variation de $\mathcal{L}$ est

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\, \delta\partial_\mu u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\, \delta u \\ &= \partial_\mu \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\, \delta u\Big) + \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - \partial_\mu\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\Big)\, \delta u\,. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Ici on utilise la convention usuelle de sommation sur l'indice muet répété μ. De plus si u est à valeur dans un espace vectoriel K de dimension réelle k avec des coordonnées u_i $(1 \leq i \leq k)$, u et δu portent en outre un indice muet i sur lequel on doit sommer également. Cet indice n'est pas écrit pour alléger la notation. Dans le cas où u est à valeurs complexes, $u = u_1 + i\, u_2$, on utilisera u et $\overline{u}$ comme variables indépendantes plutôt que u_1 et u_2. La variation de l'action A_Λ, c'est-à-dire la différentielle de A_Λ appliquée à δu, est alors

$$\begin{aligned} \delta A_\Lambda &= \int_\Lambda dy\, \delta\mathcal{L}(y) \\ &= \int_{\partial\Lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\, \delta u\, n_\mu\, d\sigma + \int_\Lambda dy \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)} \Big)\, \delta u \end{aligned} \tag{8.3}$$

où n est la normale sortante et $d\sigma$ la mesure de surface sur $\partial\Lambda$. La variation δA_Λ est nulle pour tout Λ et tout δu qui s'annule sur $\partial\Lambda$ ssi u satisfait l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)} = 0 \tag{8.4}$$

(la première égalité définit le premier membre).

Exemple. Pour l'équation SNL (1.1) avec une non linéarité invariante de jauge, *i.e.* satisfaisant l'hypothèse (H2) (voir Section 4.2), on prend comme Lagrangien

$$\mathcal{L}(u, \partial u) = \frac{i}{2}\, (\overline{u}\, \partial_t u - u\, \partial_t\, \overline{u}) - \frac{1}{2}\, |\nabla u|^2 - V(u) \tag{8.5}$$

ce qui donne bien l'équation

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \overline{u}} \equiv i\, \partial_t u + \frac{1}{2}\, \Delta u - f(u) = 0\,. \tag{8.6}$$

Le problème variationnel précédent peut être considéré dans un cadre plus général où l'espace temps $\mathbb{R}^{n+1}$ est remplacé par une variété différentiable M de dimension m et où le Lagrangien est à valeurs dans les m formes sur M.

On étudie maintenant les propriétés d'invariance du problème variationnel précédent. On considère un groupe à un paramètre $\{\tau_\theta\}$, $\theta \in \mathbb{R}$, de transformations $u \to \tau_\theta u$, ou tout au moins un groupe local défini pour θ réel voisin de zéro. On définit la transformation infinitésimale associée(*) $\delta : u \to \delta u$ définie par

$$\delta u(y) = \frac{d}{d\theta} (\tau_\theta u)(y)|_{\theta=0}\,. \tag{8.7}$$

(*) L'exposé traditionnel [CoHi] utilise deux transformations infinitésimales notées usuellement δ et $\overline{\delta}$. Le δ défini ci-dessus est le $\overline{\delta}$ de [CoHi] et le δ de [CoHi] n'est pas utilisé ici.

La transformation infinitésimale des dérivées de u est donnée de même par

$$\delta\,\partial_\mu u(y) = \frac{d}{d\theta}\,(\tau_\theta\,\partial_\mu u)(y)|_{\theta=0}\,. \tag{8.8}$$

La transformation de u induit des transformations du Lagrangien $\mathcal{L} \mapsto \tau_\theta\mathcal{L}$ et $\mathcal{L} \mapsto \delta\mathcal{L}$ définies par

$$\tau_\theta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\tau_\theta u, \{\tau_\theta\,\partial_\mu u\}, y)\,, \tag{8.9}$$

$$\delta\mathcal{L}(y) = \frac{d}{d\theta}\,(\tau_\theta\mathcal{L})(y)|_{\theta=0}\,. \tag{8.10}$$

La dernière peut s'exprimer par (8.2) avec δu et $\delta\partial_\mu u$ donnés par (8.7)(8.8).

Un cas particulièrement important est celui où le groupe de transformations $\{\tau_\theta\}$ est une représentation (ou la représentation d'une extension) d'un groupe de transformations de $\mathbb{R}^{n+1}$, qu'on notera encore $\{\tau_\theta\}$ pour ne pas multiplier les notations, $y \mapsto \tau_\theta y$. La transformation infinitésimale correspondante est définie par

$$y \to \delta y = \frac{d}{d\theta}\,(\tau_\theta y)|_{\theta=0}\,. \tag{8.11}$$

δy est un champ de vecteurs défini dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple. L'exemple le plus simple est celui des translations dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On a alors, pour $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\tau_\theta y = y + \theta a$, $\delta y = a$ (champ de vecteurs constant), $\tau_\theta u(y) = u(y - \theta a)$, $\delta u(y) = -a_\lambda\,\partial_\lambda u(y)$.

Pour $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}$, on note $\tau_\theta\Lambda$ son image par τ_θ. On définit alors un groupe à un paramètre de transformations de l'action A_Λ par

$$\tau_\theta\,A_\Lambda = \int_{\tau_\theta\Lambda} dy(\tau_\theta\mathcal{L})(y) \tag{8.12}$$

et une transformation infinitésimale

$$\tilde{\delta}\,A_\Lambda = \frac{d}{d\theta}\,(\tau_\theta\,A_\Lambda)|_{\theta=0} \tag{8.13}$$

qu'on note $\tilde{\delta}$ au lieu de δ car on a transformé non seulement l'intégrand, mais aussi le domaine d'intégration. Il résulte immédiatement de (8.10)(8.12)(8.13) que

$$\tilde{\delta}\,A_\Lambda = \int_{\partial\Lambda} \mathcal{L}(y)(\delta y\cdot n)\,d\sigma + \int_\Lambda \delta\mathcal{L}(y)\,dy\,. \tag{8.14}$$

On obtient alors les lois de conservation, qui sont des identités satisfaites par les solutions de l'équation variationnelle, en transformant cette dernière expression dans deux directions opposées.

On transforme d'une part l'intégrale de volume en intégrale de surface modulo l'équation au moyen de (8.2). On obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}\, A_\Lambda = &\int_{\partial\Lambda} d\sigma\, n_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\,\delta u + \mathcal{L}(y)\,\delta\, y_\mu\Big) \\ &+ \int_\Lambda dy \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_\mu\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\Big)\,\delta u\,. \end{aligned} \tag{8.15}$$

D'autre part, on transforme l'intégrale de surface en intégrale de volume en prenant la divergence. On obtient

$$\tilde{\delta}\, A_\Lambda = \int_\Lambda dy\, \tilde{\delta}\, \mathcal{L}(y) \tag{8.16}$$

avec

$$\tilde{\delta}\, \mathcal{L}(y) = \delta\mathcal{L}(y) + \partial_\mu(\mathcal{L}(y)\,\delta\, y_\mu)\,. \tag{8.17}$$

Si u est solution de l'équation d'Euler-Lagrange (8.4), l'intégrale de volume dans (8.15) s'annule et il reste l'identité

$$-\tilde{\delta}\, A_\Lambda = -\int_\Lambda dy\, \tilde{\delta}\, \mathcal{L}(y) = \int_{\partial\Lambda} d\sigma\, n_\mu\, \mathcal{J}_\mu(y) \tag{8.18}$$

où on a défini le courant

$$\mathcal{J}_\mu(y) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\,\delta u - \mathcal{L}(y)\,\delta\, y_\mu\,. \tag{8.19}$$

Les lois de conservation s'obtiennent alors sous la forme usuelle en prenant pour Λ une région du type $\Lambda = [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$. On définit la charge

$$Q(t) = \int dx\, \mathcal{J}_0(x,t) \tag{8.20}$$

et on obtient la loi de conservation

$$Q(t_2) - Q(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int dx\, \tilde{\delta}\, \mathcal{L}(y)\,. \tag{8.21}$$

La loi de conservation est exacte et donne $Q(t)$ = constante si l'action est invariante, *i.e.* $\tilde{\delta}\, A_\Lambda = 0$. L'invariance de l'action apparaîtra souvent de la façon suivante. Par changement de variable d'intégration, on peut écrire

$$\tau_\theta\, A_\Lambda = \int_{\tau_\theta\Lambda} (\tau_\theta\mathcal{L})(\tau_\theta y)\, d(\tau_\theta y) = \int_\Lambda (\tau_\theta\mathcal{L})(\tau_\theta y)\, j(\theta, y)\, dy \tag{8.22}$$

où $j(\theta, y)$ est le Jacobien de la transformation $y \to \tau_\theta y$. Une condition suffisante d'invariance de l'action est alors la condition

$$(\tau_\theta \mathcal{L})(\tau_\theta y) = j(\theta, y)^{-1}\, \mathcal{L}(y)\,. \tag{8.23}$$

Exemple. On reprend l'exemple des translations dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec un Lagrangien $\mathcal{L}(u, \{\partial_\mu u\})$ sans dépendance explicite en y. Dans ce cas $(\tau_\theta \mathcal{L})(\tau_\theta y) = \mathcal{L}(y)$ par définition, et $j(\theta, y) = 1$, donc la condition précédente est satisfaite.

Si l'action n'est pas invariante, il reste néanmoins la loi de conservation sous la forme approchée (8.21) avec (8.17) et (8.20), qui peut encore être très utile pour fournir des estimations *a priori* si $\tilde{\delta}\, \mathcal{L}$ est suffisamment régulier.

On conclut cette sous section en mentionnant la méthode des multiplicateurs, qui est une méthode empirique pour retrouver les lois de conservation. Il résulte immédiatement des définitions (8.17), (8.19) et de (8.2) que

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\right) \delta u = \partial_\mu\, \mathcal{J}_\mu + \tilde{\delta}\, \mathcal{L}$$

qui donne immédiatement la loi de conservation sous la forme (8.21) par intégration, si u est solution de l'équation, *i.e.* annule la parenthèse du premier membre. La méthode des multiplicateurs consiste à multiplier l'équation par un δu convenablement choisi et à transformer le résultat au mieux pour faire apparaître une divergence, ou, par intégration sur x, à faire le produit scalaire de l'équation par δu dans L^2 et à transformer le résultat pour faire apparaître une dérivée en temps. C'est cette méthode qui a été utilisée dans la Section 4.3 pour établir la conservation de la norme L^2 et de l'énergie. En dépit de sa parenté évidente avec la pêche à la ligne, cette méthode peut se révéler d'une efficacité redoutable entre les mains d'un praticien expérimenté.

(2) Application à l'équation SNL

On applique maintenant les considérations précédentes au cas de l'équation SNL. On rappelle que le Lagrangien est donné par (8.5) et engendre l'équation sous la forme (8.6) avec $f(u) = \partial V / \partial \overline{u}$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est euclidien, on utilisera toujours des coordonnées orthonormées avec convention de sommation des indices muets. On écrira par exemple $|\nabla u|^2 = \partial_j\, \overline{u}\, \partial_j u$.

Comme on va le voir maintenant, l'équation SNL est invariante par une représentation projective du groupe de Galilée $\mathcal{G}$, *i.e.* par une représentation d'une extension centrale

$\tilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ par le tore $\mathbb{T}^1$: le centre de $\tilde{\mathcal{G}}$ contient $\mathbb{T}^1$ et $\mathcal{G}$ est le quotient $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}/\mathbb{T}^1$ [Bag]. Le groupe de Galilée est le groupe de transformations de l'espace temps engendré par les sous groupes suivants :

Translations d'espace temps : $y \mapsto y + a$, $a \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Transformations de Galilée pures :

$$y = (t, x) \mapsto (t, x + vt)\,, \quad v \in \mathbb{R}^n\,.$$

Rotations d'espace qui sont sans intérêt pour les applications ultérieures dans ce cours. Dans la suite, on omettra les rotations d'espace et on appellera encore groupe de Galilée le groupe ainsi amputé.

On écrit maintenant la représentation projective du groupe de Galilée qui laisse invariante l'action et par suite l'équation SNL, ainsi que les lois de conservation qui en découlent. On considère successivement trois sous groupes qui engendrent le groupe étendu $\tilde{\mathcal{G}}$.

Transformations de jauge. Ce sont les transformations du sous groupe central $\mathbb{T}^1$ par lequel on étend $\mathcal{G}$ en $\tilde{\mathcal{G}}$. L'espace temps se transforme de façon triviale : $y \mapsto y$, $\delta y = 0$. La fonction u se transforme par

$$(\tau_\theta u)(y) = e^{i\theta}\, u(y)$$

et par suite $\delta u = iu$. Il est évident que $\tau_\theta \mathcal{L} = \mathcal{L}$, donc $\delta \mathcal{L} = 0$ et $\tilde{\delta}\, A_\Lambda = 0$. Le courant $\mathcal{J}_\mu$ associé est donné par (8.19) qui devient dans ce cas

$$\begin{cases} \mathcal{J}_0 = |u|^2\,, \\ \mathcal{J}_j = -\dfrac{i}{2}\left(\overline{u}\,\partial_j u - u\,\partial_j\,\overline{u}\right). \end{cases} \tag{8.24}$$

La quantité conservée est simplement $||u||_2^2$ et peut être interprétée comme la masse (ou la charge) de la solution u.

Translations d'espace temps. Soit $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. L'espace temps se transforme par $y \mapsto \tau_\theta\, y = y + \theta a$, et par suite $\delta y = a$. La fonction u se transforme par

$$(\tau_\theta u)(y) = u(\tau_\theta^{-1} y) = u(y - \theta a)\,, \tag{8.25}$$

et par suite $\delta u = -a_\lambda\, \partial_\lambda u$. La transformation est unimodulaire ($j(\theta, y) = 1$) et il est évident que $\mathcal{L}$ se transforme selon (8.23), ce qui assure l'invariance de l'action et par suite de l'équation. Le courant associé, donné par (8.19) est maintenant $\mathcal{J}_\mu = a_\lambda\, T_{\lambda\mu}$, avec

$$T_{\lambda\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\, \partial_\lambda u - \mathcal{L}\, \delta_{\lambda\mu}\,. \tag{8.26}$$

T est appelé tenseur d'impulsion énergie. Plus précisément, on obtient

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{1}{2}\, \partial_j\, \overline{u}\, \partial_j u + V(u)\,, \\
T_{0k} &= -\frac{1}{2}\left(\partial_0 \overline{u}\, \partial_k u + \partial_0 u\, \partial_k \overline{u}\right) = -\operatorname{Re}\, \partial_0 \overline{u}\, \partial_k u\,, \\
T_{j0} &= \frac{i}{2}\left(\overline{u}\, \partial_j u - u\, \partial_j \overline{u}\right) = \operatorname{Re}\left(i\, \overline{u}\, \partial_j u\right), \\
T_{jk} &= -\frac{1}{2}\left(\partial_j \overline{u}\, \partial_k u + \partial_k\, \overline{u}\, \partial_j u\right) - \mathcal{L}\, \delta_{jk} = -\operatorname{Re}\left(\partial_j \overline{u}\, \partial_k u\right) - \mathcal{L}\, \delta_{jk}\,.
\end{aligned}$$

Les quantités conservées sont les intégrales dans l'espace des composantes $\mu = 0$. La composante $\lambda = 0$, qui est associée aux translations de temps, donne l'énergie

$$\int dx\, T_{00} \equiv E(u) = \frac{1}{2}\, \|\nabla u\|_2^2 + \int dx\, V(u)\,. \tag{8.27}$$

Les composantes $1 \le \lambda \le n$, associées aux translations d'espace, donnent l'impulsion

$$-\int dx\, T_{j0} \equiv P_j(u) = -\frac{i}{2} \int dx (\overline{u}\, \partial_j u - u\, \partial_j \overline{u}) = -i\langle \overline{u}, \partial_j u\rangle\,. \tag{8.28}$$

Dans le cas particulier de l'équation SNL et avec la normalisation choisie ici, la densité d'impulsion est égale au courant de masse.

Transformations de Galilée pures. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. L'espace temps se transforme par $y = (t, x) \mapsto \tau_\theta\, y = (t, x + \theta v t)$, et par suite $\delta y = (0, vt)$. La fonction u se transforme par

$$\begin{aligned}
(\tau_\theta u)(y) &= \exp(i\varphi(\theta v, y))\, u(\tau_\theta^{-1} y) \\
&= \exp(i\varphi(\theta v, y))\, u(t, x - vt)\,,
\end{aligned} \tag{8.29}$$

où φ est une phase qu'on doit introduire pour assurer l'invariance. C'est la présence de cette phase qui nécessite l'extension de $\mathcal{G}$ par $\mathbb{T}^1$. On détermine φ par la condition que $\mathcal{L}$ se transforme selon (8.23), ce qui assure l'invariance de l'action. Il est clair que $j(\theta, y) = 1$. Prenant $\theta = 1$, on obtient les transformations

$$\begin{aligned}
\partial_t u &\to \left(\partial_t u - v\, \nabla\, u + i\, u\, \partial_t \varphi\right) \exp(i\varphi) \\
\nabla u &\to \left(\nabla u + i\, u\, \nabla \varphi\right) \exp(i\varphi)
\end{aligned}$$

et par suite

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \frac{i}{2}\, v(\overline{u}\, \nabla u - u \nabla\, \overline{u}) - |u|^2\, \partial_t \varphi$$
$$- \frac{i}{2}\, (u\, \nabla \overline{u} - \overline{u}\, \nabla u)\, \nabla \varphi - \frac{1}{2}\, |u|^2\, |\nabla \varphi|^2$$

qui assure l'invariance (8.23) si on impose $\nabla \varphi = v$ et $\partial_t \varphi = -(1/2)|\nabla \varphi|^2$. On prend donc

$$\varphi(v, y) = v \cdot x - \frac{1}{2}\, v^2\, t\,.$$

On obtient alors à partir de (8.29)

$$\delta u = i\, v \cdot x - vt\, \nabla u = i\, v \cdot J(t)\, u \tag{8.30}$$

où $J(t) = x + it\nabla$.

L'opérateur $J(t)$, générateur infinitésimal des transformations de Galilée pures, joue un rôle fondamental dans l'expression des lois de conservation qu'on verra plus loin et dans leur exploitation pour estimer les solutions de l'équation SNL (voir Sections 9, 10 et 11 ci-dessous). La loi de conservation associée à l'invariance de Galilée se déduit immédiatement de (8.30) et de la définition (8.19) du courant conservé. La composante $\mu = 0$ de ce courant est

$$\mathcal{J}_0 = t\, v_j\, T_{j0} + (v \cdot x)\, |u|^2$$

et donne par intégration la loi de conservation

$$\int dx\; x_j\, |u|^2 - t\, P_j(u) \equiv \langle u, x_j u \rangle - t\, P_j(u) = \text{Cte}$$

où $P_j(u)$ est l'impulsion (constante) définie par (8.28). Cette loi de conservation a une interprétation particulièrement simple : elle exprime que le centre de masse de la solution u est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, la vitesse étant $P_j(u)\, \|u\|_2^{-2}$, c'est-à-dire le quotient de l'impulsion par la masse totale, en parfait accord avec la signification intuitive de l'invariance Galiléenne.

Pour étudier l'existence globale et le comportement asymptotique en temps des solutions de l'équation SNL, on utilisera plus loin d'autres lois de conservation de l'équation libre, qui fournissent des lois de conservation approchées de l'équation SNL. Ces lois de conservation sont associées à un groupe de transformations de l'espace temps $\mathcal{G}_S$ qui contient le groupe de Galilée, et qu'on peut décrire de la façon suivante, en omettant toujours les rotations d'espace, sans intérêt ici, et qu'on pourrait incorporer facilement. On étend d'abord $\mathcal{G}$ de façon évidente par le groupe des dilatations

$$y = (t, x) \mapsto (t\, e^{2\theta}, x\, e^{\theta})\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,, \tag{8.31}$$

en un groupe $\mathcal{G}_1$. On considère ensuite la transformation involutive de l'espace temps $\mathbb{R}^{n+1}$ (en réalité, de l'espace projectif $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+2})$)

$$j : (t,x) \mapsto (t^{-1}, x\,t^{-1})$$

(en réalité : $(t,x,1) \mapsto (1,x,t)$). Soit $\mathcal{G}_2$ l'image de $\mathcal{G}_1$ par l'homomorphisme $\tau \to j\,\tau\,j$. On voit facilement que cet homomorphisme échange les translations d'espace $(t,x) \mapsto (t, x+a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, et les transformations de Galilée pures $(t,x) \mapsto (t, x+at)$, et échange chaque dilatation avec son inverse. Enfin, il échange le groupe des translations de temps $(t,x) \mapsto (t+\theta, x)$, $\theta \in \mathbb{R}$, avec un groupe à un paramètre de transformations

$$y = (t,x) \mapsto (t(1+\theta t)^{-1},\ x(1+\theta t)^{-1})\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,, \tag{8.32}$$

qu'on appellera transformations pseudoconformes. Le groupe de Schrödinger $\mathcal{G}_S$ est le groupe de transformations de l'espace temps engendré par $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. On voit facilement en calculant les commutateurs des transformations infinitésimales de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ que l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}_S$ est engendrée linéairement par celle de $\mathcal{G}_1$ et le générateur infinitésimal pseudoconforme (il est essentiel d'avoir inclus les dilatations pour arriver à ce résultat).

L'intérêt du groupe $\mathcal{G}_S$ réside dans le fait que l'équation de Schrödinger libre est invariante par une représentation projective de $\mathcal{G}_S$, c'est-à-dire par une représentation d'une extension centrale $\tilde{\mathcal{G}}_S$ de $\mathcal{G}_S$ par le tore $\mathbb{T}^1$. On détermine facilement la transformation de la fonction u en imposant soit l'invariance de l'équation, soit l'invariance de l'action associée au Lagrangien libre

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2}\,(\overline{u}\,\partial_0 u - u\,\partial_0\overline{u}) - \frac{1}{2}\,\partial_j\overline{u}\,\partial_j u\,.$$

On s'aperçoit alors, ce qui est presque évident pour les dilatations, que l'équation SNL est également invariante par cette représentation de $\tilde{\mathcal{G}}_S$ dans le cas particulier où $V(u) = \lambda\,|u|^{2+4/n}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. Noter que ce cas est celui d'une interaction en puissance (1.2) pour la valeur L^2 critique $p = 1 + 4/n$.

En appliquant la méthode générale précédente, on en déduit deux nouvelles lois de conservation, associées respectivement aux dilatations et aux transformations pseudoconformes. Ces lois sont exactes pour l'équation libre et l'équation SNL dans le cas particulier cité plus haut, et seulement approchées, c'est-à-dire de la forme (8.21), pour l'équation SNL dans le cas général. On donne maintenant le détail des calculs dont on vient d'esquisser le principe.

Involution j. Bien que n'appartenant pas à $\mathcal{G}_S$, dont elle définit seulement un automorphisme externe, cette transformation peut être représentée par une transformation

τ_j de la fonction u qui laisse l'équation libre invariante. Cette transformation est linéaire conjuguée (et non pas linéaire), et prend la forme

$$(\tau_j u)(t,x) = t^{-n/2} \exp\left(i \frac{x^2}{2t}\right) \overline{u(t^{-1}, x\, t^{-1})} \,. \tag{8.33}$$

Cette transformation discrète ne fournit pas de transformation infinitésimale, ni par conséquent de loi de conservation au sens précédent.

Exercice. Vérifier que l'équation SNL (8.6) avec $f(u) = \lambda\, |u|^{4/n}\, u$ est invariante par la transformation (8.33).

Dilatations. L'espace temps se transforme par (8.31), et par suite $\delta y = (2t, x)$. La fonction u se transforme par

$$(\tau_\theta u)(y) = e^{-n\theta/2}\, u(\tau_\theta^{-1} y) = e^{-n\theta/2}\, u(e^{-2\theta}\, t, e^{-\theta} x)$$

et par suite

$$\delta u = -\left(2t\, \partial_t + x_j\, \partial_j + \frac{n}{2}\right) u \,, \tag{8.34}$$

si bien que la composante $\mu = 0$ du courant de dilatation, donnée par (8.19), (8.34), est

$$\mathcal{J}_0 = 2t\, T_{00} + x_j\, T_{j0} \,. \tag{8.35}$$

Le jacobien de la transformation est $j(\theta) = \exp((n+2)\,\theta)$, indépendant de y. Il est évident que le Lagrangien libre $\mathcal{L}_0$ se transforme selon (8.23), mais il n'en est en général pas de même du terme d'interaction, et on doit calculer $\tilde{\delta}\, \mathcal{L} = -\tilde{\delta}\, V(u)$. On obtient à partir de (8.17) et (8.34)

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}\, V(u) &= -(2t\, \partial_t + x \cdot \nabla)\, V(u) - n\, \overline{u} f(u) \\
&\quad + \partial_t(2t\, V(u)) + \nabla \cdot (x\, V(u)) \\
&= (n+2)\, V(u) - n\, \overline{u}\, f(u) \,.
\end{aligned} \tag{8.36}$$

En particulier $\tilde{\delta}\, V(u) = 0$ si $V(u) = \lambda\, |u|^{2+4/n}$.

En intégrant (8.35)(8.36) dans l'espace, on obtient la loi de conservation approchée sous la forme différentielle

$$\partial_t (2t\, E(u) + x\, \langle u, i\nabla u \rangle) = \int dx\, \tilde{\delta}\, V(u)$$

ou encore

$$\partial_t \, \langle u, Du \rangle = 2E(u) - R(u) \tag{8.37}$$

où $E(u)$ est l'énergie (constante) donnée par (8.27), D est l'opérateur auto adjoint

$$D = -\frac{i}{2}\,(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)\,,$$

et $R(u)$ est défini par

$$R(u) = \int dx \{(n+2)\, V(u) - n\, \overline{u}\, f(u)\}\,. \tag{8.38}$$

Transformations pseudoconformes. On rappelle que l'espace temps se transforme par (8.32) et par suite $\delta y = (-t^2, -tx)$. La fonction u se transforme selon

$$(\tau_\theta u)(y) = (1-\theta t)^{-n/2}\, \exp\left[-\frac{i}{2}\,\theta x^2 (1-\theta t)^{-1}\right] u(\tau_\theta^{-1} y)\,, \tag{8.39}$$

cette loi de transformation s'obtenant de la façon la plus simple en conjuguant la translation de temps par la transformation τ_j donnée par (8.33).

Exercice. Etablir (8.39) par la méthode indiquée.

La transformation infinitésimale de la fonction u est donnée par

$$\delta u = \left(t^2\, \partial_t + t\, x_j\, \partial_j - \frac{i}{2}\, x^2 + \frac{n}{2}\, t\right) u \equiv -i\, K\, u \tag{8.40}$$

où K est le générateur infinitésimal pseudoconforme, relié au générateur de Galilée par

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\, x^2 + i\, t\, x \cdot \nabla + \frac{n}{2}\, t + i\, t^2\, \partial_t \\ &= \frac{1}{2}\, J(t)^2 + t^2\, L\,, \end{aligned} \tag{8.41}$$

où $L = i\, \partial_t + (1/2)\, \Delta$ est l'opérateur qui engendre l'équation de Schrödinger libre $L\, u = 0$.

La composante $\mu = 0$ du courant pseudoconforme, donnée par (8.19) et (8.40) est

$$\mathcal{J}_0 = -t^2\, T_{00} - t\, x_j\, T_{j0} - \frac{1}{2}\, x^2\, |u|^2\,. \tag{8.42}$$

Comme dans le cas des dilatations, l'équation n'est pas invariante en général à cause du terme d'interaction, et on doit calculer $\tilde{\delta}\, \mathcal{L} = -\tilde{\delta}\, V(u)$ à partir de (8.17) et (8.40), ce qui donne

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}\, V(u) &= (t^2\, \partial_t + t\, x \cdot \nabla)\, V(u) + n\, t\, \overline{u}\, f(u) \\ &\quad - \partial_t (t^2\, V(u)) - \nabla \cdot (t\, x\, V(u)) \\ &= -t((n+2)\, V(u) - n\, \overline{u}\, f(u))\,. \end{aligned} \tag{8.43}$$

En intégrant sur l'espace, comme précédemment, on obtient la loi de conservation pseudoconforme, qu'on peut mettre sous la forme différentielle

$$\partial_t \Big\{ \frac{1}{2} \, ||xu||_2^2 + t^2 \, E(u) - t \, \langle u, Du \rangle \Big\} = t \, R(u) \tag{8.44}$$

où $R(u)$ est défini par (8.38).

En comparant (8.37) avec (8.44), on voit que les deux lois de conservation de dilatation et pseudoconforme sont équivalentes modulo la relation élémentaire

$$\partial_t \Big\{ \frac{1}{2} \, ||x \, u||^2 \Big\} = \langle u, Du \rangle \tag{8.45}$$

qu'on obtient immédiatement à partir de l'équation SNL et qui donne la dérivée par rapport au temps du moment d'inertie.

La loi de conservation pseudoconforme peut également s'écrire sous une autre forme qui sera plus utile pour la suite. Pour cela, on note que (cf. (8.41))

$$||J(t) \, u||_2^2 = ||x \, u||_2^2 - 2t \, \langle u, Du \rangle + t^2 \, ||\nabla u||_2^2$$

et par suite (8.44) peut s'écrire sous la forme

$$\partial_t \Big\{ \frac{1}{2} \, ||J(t) \, u||_2^2 + t^2 \int dx \; V(u) \Big\} = t \, R(u) \, . \tag{8.46}$$

Les lois de conservation de dilatation et pseudoconforme ont été établies ci-dessus en suivant pas à pas la méthode générale de la Section 8.1. Pour conclure, on indique maintenant brièvement la méthode de calcul la plus rapide pour les retrouver directement à partir de l'équation.

Pour la loi de dilatation (8.37), on utilise la méthode des multiplicateurs. On calcule $2 \ \mathrm{Im}\langle Du, \mathrm{Eq}\ (8.6) \rangle$, on obtient

$$\partial_t \, \langle u, Du \rangle = - \, \mathrm{Im} \, \langle Du, \Delta u \rangle + 2 \ \mathrm{Im} \, \langle Du, f(u) \rangle$$

et on intègre par parties pour faire disparaître les facteurs x contenus dans les deux produits scalaires du MD.

Pour la loi pseudoconforme (8.46), on note que $[J(t), L] = 0$ où $L = i \, \partial_t + (1/2) \, \Delta$. Par suite si u est solution, on a

$$i \, \partial_t \, J(t) \, u = - \frac{1}{2} \, \Delta \, J(t) \, u + J(t) \, f(u) \tag{8.47}$$

et en formant $\mathrm{Im}\langle J(t)\, u, \mathrm{Eq}\ (8.47)\rangle$ on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t \frac{1}{2}\, \|J(t)\, u\|_2^2 &= \mathrm{Im}\, \langle J(t)\, u,\ J(t)\, f(u)\rangle \\ &= \mathrm{Im}\, \big(\langle xu, i\, t\nabla\, f(u)\rangle + \langle i\, t\, \nabla u,\ x\, f(u)\rangle\big) \\ &\quad - t^2\ \mathrm{Im}\, \langle \Delta u, f(u)\rangle\, . \end{aligned} \tag{8.48}$$

On utilise encore une fois l'équation pour écrire

$$\mathrm{Im}\, \langle \Delta u,\ f(u)\rangle = 2\ \mathrm{Re}\, \langle \partial_t u, f(u)\rangle = \partial_t \int dx\, V(u)$$

et on intègre par partie comme plus haut pour éliminer les facteurs x dans les deux premiers produits scalaires du MD de (8.48). La fin du calcul est laissée en exercice.

Note bibliographique.

Les propriétés d'invariance et les lois de conservation jouent un rôle très important en Physique. On trouvera un exposé traditionnel de la méthode générale dans [CoHi], Vol. 1, p. 260-265 et un exposé plus moderne dans [Tr]. Le groupe d'invariance $\mathcal{G}_S$ de l'équation de Schrödinger libre est décrit dans [Bau]. Les extensions centrales et les représentations projectives du groupe de Galilée sont étudiées dans [Bag].

9. Invariance pseudoconforme et explosion en temps fini

Dans cette section, on démontre dans un cadre fonctionnel approprié la loi de conservation pseudoconforme obtenue au niveau formel dans la Section 8. Comme première application de cette loi, on démontre ensuite l'existence de solutions explosives de l'équation SNL. La loi de conservation jouera également un rôle important dans l'étude des comportements asymptotiques en temps dans la Section 11 ci-dessous. Un rôle important est joué ici par le générateur infinitésimal de Galilée $J(t) = x + i\,t\,\nabla$. On a déjà vu qu'il satisfait

$$\left[J(t), i\,\partial_t + \frac{1}{2}\,\Delta\right] = 0\,. \tag{9.1}$$

D'autre part, du fait que

$$x = \mathcal{F}^*\, i\,\nabla_\xi\, \mathcal{F}\,, \quad U(t) = \mathcal{F}^*\, \exp\left(-\,i\,t\,\frac{\xi^2}{2}\right) \mathcal{F}\,,$$

il résulte que

$$J(t) = U(t)\,x\,U(-t) \tag{9.2}$$

et plus généralement

$$J(t)\,U(t-t') = U(t)\,x\,U(-t') = U(t-t')\,J(t')\,. \tag{9.3}$$

Une conséquence importante de (9.2)(9.3) est que $J(t)$ se combine facilement aux estimations du groupe libre $U(t)$ données dans la Proposition 3.1.

Lemme 9.1.

(1) Pour tout couple admissible (q,r)

$$\|J(t)\,U(t)\,u;\ L^q(L^r)\| \le C_r\,\|x\,u\|_2\,. \tag{9.4}$$

(2) Pour tous couples admissibles (q_1,r_1) *et* (q_2,r_2) *et tout intervalle* $I \subset \mathbb{R}$,

$$\|J(t)(U * f);\ L^{q_1}(I, L^{r_1})\| \le C_{r_1}\,C_{r_2}\,\|J(t)\,f;\ L^{\overline{q}_2}(I, L^{\overline{r}_2})\| \tag{9.5}$$

$$\|J(t)(U *_R f);\ L^{q_1}(I, L^{r_1})\| \le C_{r_1}\,C_{r_2}\,\|J(t)\,f;\ L^{\overline{q}_2}(I, L^{\overline{r}_2})\| \tag{9.6}$$

avec les mêmes constantes C_r *que dans la Proposition 3.1.*

Preuve. (9.4) résulte de (9.2) et de (3.19). (9.5) et (9.6) résultent de (9.3) et respectivement de (3.20) et (3.21).

Soit maintenant

$$M(t) = \exp\left(i\,\frac{x^2}{2t}\right). \tag{9.7}$$

Alors

$$J(t) = M(t)\,it\,\nabla\,M(-t)\,. \tag{9.8}$$

Une conséquence importante de (9.8) est que $J(t)$ se comporte comme une dérivation sur les fonctions invariantes de jauge.

Lemme 9.2. *Soit $f \in \mathcal{C}^1$ satisfaisant (H2). Alors*

$$J(t)\,f(u) = \partial_z\,f(u)\,J(t)\,u - \partial_{\bar{z}}\,f(u)\,\overline{J(t)\,u}\,. \tag{9.9}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
J(t)\,f(u) &= M(t)\,i\,t\,\nabla\,M(-t)\,f(u) = M(t)\,i\,t\,\nabla\,f(M(-t)\,u)\\
&= M(t)\,\partial_z f(M(-t)\,u)\,i\,t\,\nabla\,M(-t)\,u + M(t)\,\partial_{\bar{z}}\,f(M(-t)\,u)\,i\,t\,\nabla\,\overline{M(-t)\,u}\\
&= \partial_z f(u)\,M(t)\,i\,t\,\nabla\,M(-t)\,u - \partial_{\bar{z}}\,f(u)\,\overline{M(t)\,i\,t\,\nabla\,M(-t)\,u}\\
&= \partial_z\,f(u)\,J(t)\,u - \partial_{\bar{z}}\,f(u)\,\overline{J(t)\,u}\,.
\end{aligned}$$

Les lemmes 9.1 et 9.2 vont permettre de manipuler l'opérateur $J(t)$ dans des estimations portant sur l'équation intégrale exactement comme on a manipulé l'opérateur ∇, qui satisfait de manière évidente des propriétés analogues.

La loi de conservation pseudoconforme n'a de sens que pour les solutions u telles que $x\,u(t) \in L^2$ pour tout t. On introduit donc l'espace approprié

$$\Sigma = H^1 \cap \mathcal{F}\,H^1 = \left\{u : u \in H^1 \text{ et } x\,u \in L^2\right\} \tag{9.10}$$

qui est un espace de Hilbert avec la norme

$$||u;\Sigma||^2 = ||u||_2^2 + ||\nabla u||_2^2 + ||x\,u||_2^2\,.$$

En analogie avec les espaces X^ρ de la Section 4, on introduit les espaces

$$Y^1(I) = \Big\{u : u \in \mathcal{C}(I,\Sigma) \text{ et } u,\ \nabla u \text{ et } J(t)\,u \in L^q(I,L^r) \quad \text{pour } 0 \le \frac{2}{q} = \delta(r) < 1\Big\} \tag{9.11}$$

et pour $0 < \delta(r_0) \equiv \delta_0 < 1$,

$$
\begin{aligned}
Y^1_{r_0}(I) &= \Big\{ u : u \in \mathcal{C}(I, \Sigma) \ \text{ et } \ u, \ \nabla u \ \text{ et } \ J(t)\, u \in L^q(I, L^r) \\
&\qquad\qquad \text{pour } \ 0 \le \frac{2}{q} = \delta(r) \le \delta_0 \Big\} \\
&= \Big\{ u : u \in \mathcal{C}(I, \Sigma) \ \text{ et } \ u, \ \nabla u \ \text{ et } \ J(t)\, u \in L^\infty(I, L^2) \cap L^{q_0}(I, L^{r_0}) \Big\} . \quad (9.12)
\end{aligned}
$$

On utilisera également les espaces locaux qui leur sont associés de façon évidente. Il résulte immédiatement de la Proposition 3.1 et du Lemme 9.1, partie (1) qu'une donnée initiale $u_0 \in \Sigma$ engendre une solution libre $U(t)\, u_0 \in Y^1(\mathbb{R})$, avec les estimations en norme qui résultent de (3.19) et (9.4).

Le premier problème est de montrer que les solutions H^1 à données initiales $u_0 \in \Sigma$ restent dans Σ pour tout t, et en fait sont dans $Y^1(\cdot)$.

Proposition 9.1. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$ et (H2), soit $u_0 \in \Sigma$ et $u \in X^1_{p+1(\mathrm{loc})}(I)$ solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$, où I est un intervalle contenant 0. Alors $u \in Y^1_{(\mathrm{loc})}(I)$ pour le même I.*

Preuve. C'est un résultat de régularité disant que les solutions H^1 (de la Proposition 4.3 par exemple) propagent la décroissance à l'infini $x\, u \in L^2$. La preuve est la même que celle de la régularité H^2 en plus simple, avec $\partial_t u$ remplacé par $J(t) u$.

On résout l'équation intégrale localement dans Y^1_{p+1} en contractant la norme X_{p+1} sur les bornés de Y^1_{p+1}. La reproduction de la norme $||J(t)u; X_{p+1}||$ s'effectue par le même calcul que celle de la norme de ∇u dans la Proposition 4.3, grâce aux Lemmes 9.1 et 9.2.

On estime ensuite la nouvelle norme comme on a estimé la norme de $\partial_t u$ dans la Proposition 6.2, car $J(t)\, u$ et $\partial_t u$ satisfont essentiellement la même équation, *i.e.* l'équation linéarisée au voisinage de u.

On démontre maintenant la loi de conservation pseudoconforme en deux étapes correspondant à (8.45) et (8.37). On donne au passage des résultats intermédiaires qui resserviront pour démontrer l'inégalité de Morawetz et la complétude asymptotique dans H^1 dans la Section 12. On commence par montrer une version tronquée de (8.45), avec $(1/2)\, x^2$ remplacé par une fonction bornée h.

Lemme 9.3. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$ et (H2), soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, avec h et $\nabla h \in L^\infty$. Soit $u_0 \in H^1$, I un intervalle contenant 0, $u \in \mathcal{C}(I, H^1)$ une solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$. Alors $\langle u(t), h\, u(t) \rangle \in \mathcal{C}^1(I)$ et pour tout $t \in I$*

$$\partial_t \, \langle u(t), h\, u(t) \rangle = \mathrm{Im} \, \langle u, \nabla h \cdot \nabla u \rangle . \tag{9.13}$$

Preuve. Sous les hypothèses faites, $u \in \mathcal{C}(I, H^1) \cap \mathcal{C}^1(I, H^{-1})$ et la multiplication par h est un opérateur borné dans H^1 et dans H^{-1}. Donc le calcul formel a un sens. Il donne

$$\begin{aligned}\partial_t \langle u, h\, u\rangle &= 2 \text{ Im } \left\langle u, h\Big(-\frac{1}{2}\,\Delta u + f(u)\Big)\right\rangle \\ &= \text{Im}\,\langle u, \nabla h \cdot \nabla u\rangle\end{aligned}$$

en intégrant par parties.

On passe à la version tronquée de (8.37), *i.e.* avec comme ci-dessus $(1/2)\, x^2$ remplacé par une fonction h bornée à dérivées bornées.

Lemme 9.4. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$ et (H2), soit $h \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $\nabla^j h \in L^\infty$, $1 \le j \le 4$. Soit $u_0 \in H^1$, I un intervalle contenant 0 et $u \in X^1_{p+1,\text{loc}}(I)$ une solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$. Alors* $\text{Im}\,\langle u, \nabla h \cdot \nabla u\rangle \in \mathcal{C}^1(I)$ *et pour tout $t \in I$*

$$\partial_t \text{ Im}\,\langle u, \nabla h \cdot \nabla u\rangle = \langle \nabla_i u, (\nabla^2_{ij} h)\, \nabla_j u\rangle - \frac{1}{4}\,\langle u, (\Delta^2 h)\, u\rangle + \int \Delta h(\text{Re}\; \overline{u}\, f(u) - V(u))\,. \tag{9.14}$$

Preuve. Le MD de (9.14) est une fonction continue de $u \in H^1$, donc il suffit de démontrer (9.14) sous forme intégrale pour conclure que $\text{Im}\,\langle u, \nabla h \cdot \nabla u\rangle \in \mathcal{C}^1(I)$ et satisfait (9.14). La preuve de l'identité intégrale est une combinaison de la généralisation du calcul formel conduisant à (8.37) et de la régularisation utilisée dans la preuve de la conservation de l'énergie (Proposition 5.4). Comme dans cette dernière on pourrait utiliser la régularité au niveau H^2 avec les mêmes avantages et inconvénients. On préfère régulariser l'équation comme précédemment. On pose $u_\varphi = \varphi * u$. Alors $u_\varphi \in \mathcal{C}^1(H^k)\ \forall\, k \ge 0$, et on peut faire le calcul formel avec u_φ. On obtient

$$\begin{aligned}\partial_t \text{ Im}\langle u_\varphi, (\nabla h \cdot \nabla)\, u_\varphi\rangle &= \frac{i}{2}\,\partial_t\,\langle u_\varphi, [\nabla h; \nabla]_+\, u_\varphi\rangle \\ &= -\,\text{Re}\left\langle u_\varphi, [\nabla h; \nabla]_+\left(-\frac{1}{2}\,\Delta u_\varphi + \varphi * f(u)\right)\right\rangle \\ &= -\frac{1}{4}\,\langle u_\varphi, [\Delta, [\nabla h; \nabla]_+]\, u_\varphi\rangle - \text{Re}\,\langle u_\varphi, [\nabla h; \nabla]_+\,(\varphi * f(u))\rangle \equiv R_1 + R_2\end{aligned}$$

où $[\ ;\ ]_+$ désigne l'anticommutateur combiné avec le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Terme cinétique. (La sommation sur les indices muets est sous entendue).

$$\begin{aligned}[\Delta, [\nabla h; \nabla]_+] &= \left[\nabla_i\,(\nabla^2_{ij} h) + (\nabla^2_{ij} h)\,\nabla_i, \nabla_j\right]_+ = \left[[\nabla^2_{ij} h, \nabla_i]_+, \nabla_j\right]_+ \\ &= 4\,\nabla_i(\nabla^2_{ij} h)\,\nabla_j + \nabla_i(\nabla^2_{ij}\,\nabla_j h) - (\nabla^2_{ij}\,\nabla_j h)\,\nabla_i \\ &= 4\,\nabla_i(\nabla^2_{ij} h)\,\nabla_j + (\Delta^2 h)\,.\end{aligned}$$

Par suite

$$R_1 = \left\langle \nabla_i \, u_\varphi, (\nabla^2_{ij} h) \, \nabla_j \, u_\varphi \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle u_\varphi, (\Delta^2 h) \, u_\varphi \right\rangle .$$

Terme en f.

$$\begin{aligned} R_2 &= -\frac{1}{2} \left\{ \left\langle u_\varphi, [\nabla h; \nabla]_+ \, \varphi * f(u) \right\rangle - \left\langle \varphi * f(u), [\nabla h; \nabla]_+ \, u_\varphi \right\rangle \right\} \\ &= \mathrm{Re} \left\langle \varphi * f(u), \nabla h \cdot \nabla u_\varphi \right\rangle - \mathrm{Re} \left\langle u_\varphi, \nabla h \cdot \nabla (\varphi * f(u)) \right\rangle \\ &= 2 \; \mathrm{Re} \left\langle \nabla u_\varphi, (\nabla h) \, \varphi * f(u) \right\rangle + \mathrm{Re} \left\langle u_\varphi, (\Delta h) \, \varphi * f(u) \right\rangle \\ &= - \int (\Delta h) \, V(u_\varphi) + \mathrm{Re} \left\langle u_\varphi, (\Delta h)(\varphi * f(u)) \right\rangle \\ &\quad + 2 \; \mathrm{Re} \left\langle \nabla u_\varphi, \nabla h \, (\varphi * f(u) - f(u_\varphi)) \right\rangle . \end{aligned}$$

On a obtenu ainsi l'identité différentielle régularisée

$$\begin{aligned} \partial_t \; \mathrm{Im} \left\langle u_\varphi, (\nabla h \cdot \nabla) \, u_\varphi \right\rangle &= \left\langle \nabla_i \, u_\varphi, (\nabla^2_{ij} h) \, \nabla_j \, u_\varphi \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\langle u_\varphi, (\Delta^2 h) \, u_\varphi \right\rangle + \int (\Delta h) \big(\mathrm{Re} \; \overline{u}_\varphi (\varphi * f(u)) - V(u_\varphi) \big) \\ &\quad + 2 \; \mathrm{Re} \left\langle \nabla u_\varphi, (\nabla h)(\varphi * f(u) - f(u_\varphi)) \right\rangle . \end{aligned}$$

Par intégration sur t, on en déduit l'inégalité régularisée sous forme intégrale, et on passe à la limite $\varphi \to \mathbf{1}$ exactement comme dans la preuve de la conservation de l'énergie (Proposition 5.4), en particulier en appliquant le théorème de la convergence dominée à l'intégrale en temps. Le problème est en fait moins singulier que dans le cas de l'énergie, car la fonction h absorbe au moins une dérivée. On laisse les détails en exercice.

L'étape suivante est de passer à la limite $h \to (1/2)\, x^2$. Pour cela on a besoin de solutions dans Σ.

Proposition 9.2. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$ et (H2). Soit $u \in X^1_{p+1}(I) \cap \mathcal{C}(I, \Sigma)$ solution de l'équation SNL dans un intervalle I contenant* 0 *avec $u(0) = u_0 \in \Sigma$. Alors $||x \, u(t)||_2^2 \in \mathcal{C}^2(I)$ et u satisfait les relations*

$$\partial_t \, \frac{1}{2} \, ||x \, u||_2^2 = \mathrm{Im} \left\langle u, x \cdot \nabla u \right\rangle , \tag{8.45}$$

$$\partial_t \; \mathrm{Im} \left\langle u, x \cdot \nabla u \right\rangle = 2E(u) - R(u) \tag{8.37}$$

avec

$$R(u) = \int dx \big[(n+2) \, V(u) - n \; \mathrm{Re} \; \overline{u} \, f(u) \big] , \tag{8.38}$$

$$\partial_t \left\{ \frac{1}{2} \, ||x\, u||^2 + t^2 \, E(u) - t \, \langle u \, D \, u \rangle \right\} \equiv \partial_t \left\{ \frac{1}{2} \, ||J(t)\, u||_2^2 + t^2 \int V(u) \right\} = t \, R(u) \, . \quad (8.44, 46)$$

Preuve. La propriété $\mathcal{C}^2$ résulte du fait que les MD de (8.45) et (8.37) sont continus de $u \in \Sigma$ et il suffit de démontrer ces identités sous forme intégrale. Dans ce but, on approche $(1/2)\, x^2$ par des fonctions convenablement bornées et on passe à la limite. Soit $\psi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $0 \leq \psi_1 \leq 1$, $\psi_1(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$, $\psi_1(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$. On définit $\psi_k(x) = \psi_1(x/k)$ et $h_k(x) = (1/2)\, x^2 \, \psi_k(x)$. Pour démontrer (8.45), on écrit (9.13) sous forme intégrale avec $h = h_k$

$$\langle u(t_2), h_k \, u(t_2) \rangle - \langle u(t_1), h_k \, u(t_1) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} dt \ \mathrm{Im} \, \langle u, \nabla h_k \cdot \nabla u \rangle (t) \qquad (9.15)$$

et on fait tendre k vers l'infini. Pour $u \in \mathcal{C}(\cdot, \Sigma)$, le MG de (9.15) tend vers la limite attendue. Dans le MD, on passe à la limite par le théorème de la convergence dominée. On a

$$\nabla h_k = x \, \psi_k + \frac{1}{2} \, x^2 \, \nabla \psi_k \, .$$

Le terme $\langle u, \psi_k \, x \cdot \nabla u \rangle$ est majoré par $||x\, u||_2 \, ||\nabla u||_2$ uniformément en k et tend vers $\langle u, x \cdot \nabla u \rangle$. D'autre part

$$|\overline{u} \, x^2 \, \nabla \psi_k \cdot \nabla u| \leq ||x \, \nabla \psi_k||_\infty \, |x\, u| \, |\nabla u|$$

où la norme $||x \, \nabla \psi_k||_\infty$ est indépendante de k, tandis que le support de $\nabla \psi_k$ est contenu dans la région $|x| \geq k$ et s'éloigne à l'infini quend $k \to \infty$. Il en résulte que le produit scalaire $\langle u, x^2 \, \nabla \psi_k \cdot \nabla u \rangle$ est majoré uniformément en k par $C \, ||x\, u||_2 \, ||\nabla u||_2$ et tend vers zéro quand $k \to \infty$ pour chaque t. Par suite sa contribution à l'intégrale dans (9.15) tend vers zéro quand $k \to \infty$, ce qui achève la démonstration de (8.45) sous forme intégrale.

Pour démontrer (8.37) on procède de même à partir de (9.14). On utilise les relations

$$\nabla_{ij}^2 \, h_k = \delta_{ij} \, \psi_k + x_i \, \nabla_j \, \psi_k + x_j \, \nabla_i \, \psi_k + \frac{1}{2} \, x^2 \, \nabla_{ij}^2 \, \psi_k$$

$$\Delta \, h_k = n \, \psi_k + 2x \cdot \nabla \psi_k + \frac{1}{2} \, x^2 \, \Delta \psi \, .$$

Les premiers termes des MD donnent à la limite les contributions attendues à (8.37), et les contributions des autre termes tendent vers zéro par des arguments du même type que ci-dessus. On laisse les détails en exercice. Les identités (8.44) et (8.46) résultent de (8.45) et (8.37) par des opérations élémentaires, comme on l'a vu dans la Section 8.

On exploite immédiatement la loi de conservation pseudoconforme pour démontrer l'existence de solutions de l'équation SNL qui explosent en temps fini. On introduit le potentiel auxiliaire

$$W(z) = (n+2)\, V(z) - n\bar{z}\, f(z)\,. \tag{9.16}$$

Proposition 9.3. *Soit f satisfaisant (H1) avec $(p-1) < 4/(n-2)$, (H2) et $W(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Soit $u_0 \in \Sigma$ et soit $u \in Y^1_{p+1,\mathrm{loc}}(I)$ la solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ construite dans la Proposition 4.3 complétée par la Proposition 9.1, avec $I = (-T_-, T_+)$ l'intervalle maximal d'existence. Alors*

(1) si $E(u_0) < 0$, on a $T_+ < \infty$ et $T_- < \infty$.

(2) Si $(\mathrm{Im}\,\langle u_0, x\cdot\nabla u_0\rangle)^2 \geq 2\,E(u_0)\,||x\,u_0||_2^2$ et $\mathrm{Im}\,\langle u_0, x\cdot\nabla u_0\rangle \lesseqgtr 0$, on a $T_\pm < \infty$, les signes se correspondant.

Plus précisément T_+ est plus petit que la plus petite racine positive (resp. $-T_-$ est plus grand que la plus grande racine négative) de l'équation

$$\frac{1}{2}\,||x\,u_0||_2^2 + T\ \mathrm{Im}\,\langle u_0, x\cdot\nabla u_0\rangle + E(u_0)\,T^2 = 0\,. \tag{9.17}$$

Preuve. Il résulte de (8.45), (8.37) et du fait que $W \geq 0$ entraîne $R \geq 0$ que

$$\partial_t^2\,\frac{1}{2}\,||x\,u||_2^2 \leq 2\,E\,,$$

et par suite pour tout $t \in I$

$$\frac{1}{2}\,||x\,u||_2^2 \leq \frac{1}{2}\,||x\,u_0||_2^2 + t\ \mathrm{Im}\,\langle u_0, x\cdot\nabla u_0\rangle + E\,t^2\,. \tag{9.18}$$

Si le MD de (9.18) s'annule dans I, alors $||x\,u(t)||_2 \to 0$ quand t approche une racine et par l'inégalité de Heisenberg

$$||x\,u||_2\,||\nabla u||_2 \geq \frac{n}{2}\,||u||_2^2$$

et la conservation de la norme L^2, $||\nabla u(t)||_2 \to \infty$, en contradiction avec la définition de I. Les conditions (1) et (2) assurent l'existence de racines.

Remarque. On a établi l'inégalité essentielle (9.18) en utilisant la relation (8.45) et la loi de dilatation (8.37). Comme on l'a vu dans la Section 8, ces deux relations conduisent à la loi pseudoconforme (8.44), et effectivement (9.18) s'obtient directement par application de cette dernière. Il suffit d'écrire la relation (8.44) intégrée entre $-t$ et 0 pour la translatée en temps de u par $-t$. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,||x\,u(t)||_2^2 &= \frac{1}{2}\,||x\,u_0||_2^2 + t\,\langle u_0, Du_0\rangle + t^2\,E(u) + \int_{-t}^{0} dt'\,t'\,R(u(t+t'))\\ &= \frac{1}{2}\,||x\,u_0||_2^2 + t\ \mathrm{Im}\,\langle u_0, x\cdot\nabla u_0\rangle + t^2\,E(u) - \int_0^t dt'(t-t')\,R(u(t'))\end{aligned}$$

qui est simplement le développement de Taylor en $t = 0$ du MG avec reste à l'ordre 2, et qui entraîne (9.18) puisque $R(u)$ est positif.

Le résultat de la Proposition 9.3 est choquant en ce qu'il suggère que la solution implose en se concentrant à l'origine, qui ne joue aucun rôle particulier pour une équation invariante par translation. En fait il n'en est rien. L'équation est invariante par translation et par transformation de Galilée. On peut la réécrire dans n'importe quel repère Galiléen, appliquer l'argument précédent dans le nouveau repère, obtenant ainsi une borne supérieure du temps d'explosion qui dépend du repère, et minimiser cette borne par rapport au repère. On trouve alors que le minimum s'obtient dans le repère du centre de masse, ce qui suggère une implosion par concentration au centre de masse.

On rappelle que pour une solution dans $\mathcal{C}(I, H^1)$, l'impulsion $P = P(u)$ est conservée

$$P = \langle u, -i\,\nabla\,u\rangle = \langle u_0, -i\,\nabla\,u_0\rangle\,.$$

La loi de conservation associée à l'invariance de Galilée assure que le centre de masse

$$x(t) = ||u_0||_2^{-2}\,\langle u, x\,u\rangle(t)$$

est en translation uniforme :

$$x(t) = x(0) + t\,||u_0||_2^{-2}\,P(u)\,.$$

D'autre part, le moment d'inertie par rapport à un point $a \in \mathbb{R}^n$ est minimum au centre de masse $a = x(t)$ et vaut alors

$$\frac{1}{2}\,||(x-a)\,u(t)||_2^2 = \frac{1}{2}\,||x\,u(t)||_2^2 - \frac{1}{2}\,x(t)^2\,||u_0||_2^2\,.$$

On peut alors améliorer la proposition précédente comme suit.

Proposition 9.4. *Soit f, u_0 et u comme dans la Proposition 9.3. On pose*

$$\begin{aligned}P &= \langle u_0, -i\,\nabla\,u_0\rangle\,,\\ x_0 &= ||u_0||_2^{-2}\,\langle u_0, x\,u_0\rangle\,,\\ E_{CM} &= E(u_0) - \frac{1}{2}\,||u_0||_2^{-2}\,P^2\,.\end{aligned}$$

Alors

(1) *si* $E_{CM}(u_0) < 0$, *on a* $T_+ < \infty$ *et* $T_- < \infty$.

(2) *Si* $\left(\operatorname{Im}\langle u_0, x\cdot\nabla u_0\rangle - P\,x_0\right)^2 \geq 2\,E_{CM}(u_0)\left(||x\,u_0||_2^2 - x_0^2\,||u_0||_2^2\right)$ *et* $\operatorname{Im}\langle u_0, x\cdot\nabla u_0\rangle - P\,x_0 \lessgtr 0$, *on a* $T_\pm < \infty$, *les signes se correspondant, avec le même complément d'information que dans la Proposition 9.3, avec (9.17) remplacée par*

$$\frac{1}{2}\,||x\,u_0||_2^2 - \frac{1}{2}\,x_0^2\,||u_0||_2^2 + T\left(\operatorname{Im}\langle x\,u_0, \nabla u_0\rangle - P\,x_0\right) + E_{CM}(u_0)\,T^2 = 0\,. \tag{9.19}$$

Preuve. L'inégalité (9.18) peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2}\,||x\,u||_2^2 \leq \frac{1}{2}\,||(x - it\nabla)\,u_0||_2^2 + t^2\int dx\,V(u_0)\,. \tag{9.20}$$

On définit pour $a, b \in \mathbb{R}^n$, la transformée de Galilée de u

$$v(t,x) = \exp\left(-\,i\,b\cdot x - i\,\frac{b^2}{2}\,t\right)u(t, x + a + b\,t) \tag{9.21}$$

et on lui applique (9.20). Il vient, avec $v_0 = \exp(-i\,b\,x)\,u_0(x+a)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,||x\,v(t)||_2^2 &\leq \frac{1}{2}\,||(x - i\,t\,\nabla)\,v_0||_2^2 + t^2\int dx\,V(v_0)\\ &= \frac{1}{2}\,||(x - a - i\,t\,\nabla - b\,t)\,u_0||_2^2 + t^2\int dx\,V(u_0)\,.\end{aligned} \tag{9.22}$$

On développe

$$\begin{aligned}||(x - i\,t\,\nabla - a - b\,t)\,u_0||_2^2 = {}& ||(x - i\,t\,\nabla)\,u_0||_2^2 + |a + b\,t|^2\,||u_0||_2^2\\ &- 2(a + b\,t)\,\langle u_0, (x - i\,t\,\nabla)\,u_0\rangle\,.\end{aligned} \tag{9.23}$$

On minimise cette quantité en prenant

$$(a + b\,t)\,||u_0||_2^2 = \langle u_0, (x - i\,t\,\nabla)\,u_0\rangle$$

i.e. $a = x_0$ et $b = P\,||u_0||_2^{-2}$. Pour ce choix, (9.23) devient

$$\begin{aligned}\ldots &= ||(x - i\,t\,\nabla)\,u_0||_2^2 - ||u_0||_2^2\left(x_0 + t\,P\,||u_0||_2^{-2}\right)^2\\ &= ||x\,u_0||_2^2 - x_0^2\,||u_0||_2^2 + 2\,t\left(\operatorname{Im}\langle u_0, x\cdot\nabla u_0\rangle - x_0\,P\right)\\ &\quad + t^2\left(||\nabla u_0||_2^2 - P^2\,||u_0||_2^{-2}\right)\end{aligned}$$

d'où le résultat suit immédiatement.

Discussion des résultats des Propositions 9.3 et 9.4.

L'hypothèse $W \geq 0$ signifie que

$$(n+2)\,V - \frac{n}{2}\,V' \geq 0$$

i.e. que $R^{-(2+4/n)}\,V(R)$ est décroissante.

Dans le cas particulier où $V(R) = -C\,R^{p+1}$, elle est équivalente à $p \geq 1 + 4/n$ et est complémentaire de (H3).

L'hypothèse $E < 0$ est une hypothèse disant que u_0 est grand. On sait d'ailleurs (Proposition 5.6) qu'on a existence globale pour u_0 petit. Pour $V(R) = -C\,R^{p+1}$ avec $p > 1$ et $u_0 \in H^1$, on a $E(\lambda\, u_0) < 0$ pour λ assez grand.

La situation pour $V(R) = -C\,R^{p+1}$ est finalement la suivante :

$p < 1 + 4/n$: existence globale pour toute donnée dans H^1.

$p = 1 + 4/n$: existence globale pour $||u_0||_2$ assez petit,
explosion pour u_0 assez grand.

$p > 1 + 4/n$: existence globale pour $||u_0; H^1||$ assez petit,
explosion pour $||u_0; H^1||$ assez grand.

Les résultats d'explosion précédents, même sous la forme améliorée de la Proposition 9.4, et plus généralement tous les résultats d'explosion obtenus par une démonstration par l'absurde, doivent être interprétés avec une certaine prudence. La démonstration suggère un mécanisme d'explosion, par exemple pour la Proposition 9.4, par concentration au centre de masse. Cependant il peut parfaitement arriver que la solution explose plus tôt qu'au temps prédit, et par un mécanisme complètement différent de celui qui est suggéré. Par exemple pour l'équation SNL, on peut démontrer l'existence de solutions qui présentent des explosions par concentration simultanée en plusieurs points différents de l'espace et dans ce cas le moment d'inertie ne tend certainement pas vers zéro à l'explosion. Le mécanisme suggéré par les Propositions 9.3 et 9.4 est cependant qualitativement correct pour certaines solutions à symétrie sphérique.

L'étude des phénomènes d'explosion pour l'équation SNL et d'autres équations similaires est un domaine de recherche très actif, tant du point de vue analytique que numérique.

Note bibliographique.

La loi de conservation pseudoconforme est établie dans [GV1], où elle est appliquée à des problèmes de diffusion (voir ci-dessous Sections 10 et 11). Le résultat d'explosion (Proposition 9.3) se trouve dans [Gl]. L'étude des phénomènes d'explosion a suscité de nombreuses études en raison de leur intérêt physique. Voir les articles de revue [Be], [RaRy]. Pour le point de vue mathématique, voir [C2] et sa bibliographie, et pour des résultats récents [Me] et sa bibliographie.

10. Existence des opérateurs d'ondes dans H^1 et dans Σ

Dans cette section, on commence l'étude des comportements asymptotiques en temps des solutions globales de l'équation SNL obtenues dans la Section 5. On se place dans le cadre de la théorie de la diffusion, décrit dans la Section 1.3 b, et on étudie la première question posée dans cette section, *i.e.* le problème de l'existence des opérateurs d'ondes. La deuxième question, *i.e.* le problème de la complétude asymptotique, sera traité dans les Sections 11 et 12 ci-dessous.

On se donne une classe de fonctions de référence v satisfaisant une évolution simplifiée, en priorité, et en pratique exclusivement dans cette section, l'évolution libre : $v(t) = U(t)\, u_+$. La condition initiale u_+ pour v sera appelée **état asymptotique**. Pour chaque v de ce type, on cherche une solution u de l'équation SNL qui se comporte asymptotiquement comme v quand $t \to +\infty$. On construit ainsi une application $\Omega_+ : u_+ \to u(0)$ appelée opérateur d'onde pour $t \geq 0$. Le même problème se pose pour t$\leq$ 0, donnant lieu à la définition d'un opérateur d'onde Ω_- pour $t \leq 0$. Dans toute cette section, on se limite au cas $t \geq 0$. Les résultats pour $t \leq 0$ se déduisent immédiatement de ceux pour $t \geq 0$ car l'équation SNL est réversible en temps.

Pour construire u asymptote à v pour $t \to +\infty$, on procède comme suit. On résout le problème de Cauchy pour l'équation SNL avec donnée initiale $u(t_0) = v(t_0)$ fixé, obtenant ainsi pour chaque $t_0 > 0$ (ou au moins pour $t_0 > 0$ assez grand) une solution u_{t_0}. On fait tendre ensuite t_0 vers $+\infty$ pour v fixé et on s'efforce de montrer que u_{t_0} tend vers une solution u de SNL qui satisfait la condition asymptotique souhaitée (voir Figure 10.1)). Les différentes opérations se formulent facilement au moyen d'équations intégrales.

Le problème de Cauchy avec donnée initiale $u(t_0)$ en t_0 prend la forme de l'équation intégrale

$$u(t) = U(t-t_0)\, u(t_0) - i \int_{t_0}^{t} dt'\, U(t-t')\, f(u(t'))\,. \tag{10.1}$$

Une fonction quelconque v, pas nécessairement solution de l'équation libre, satisfait l'identité

$$v(t) = U(t-t_0)\, v(t_0) - i \int_{t_0}^{t} dt'\, U(t-t')\Big(i\,\partial_t v + \frac{1}{2}\,\Delta v\Big)(t') \tag{10.2}$$

qu'on obtient immédiatement en écrivant que

$$h(t) = h(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt'\, h'(t')$$

avec $h(s) = U(t-s)\, v(s)$.

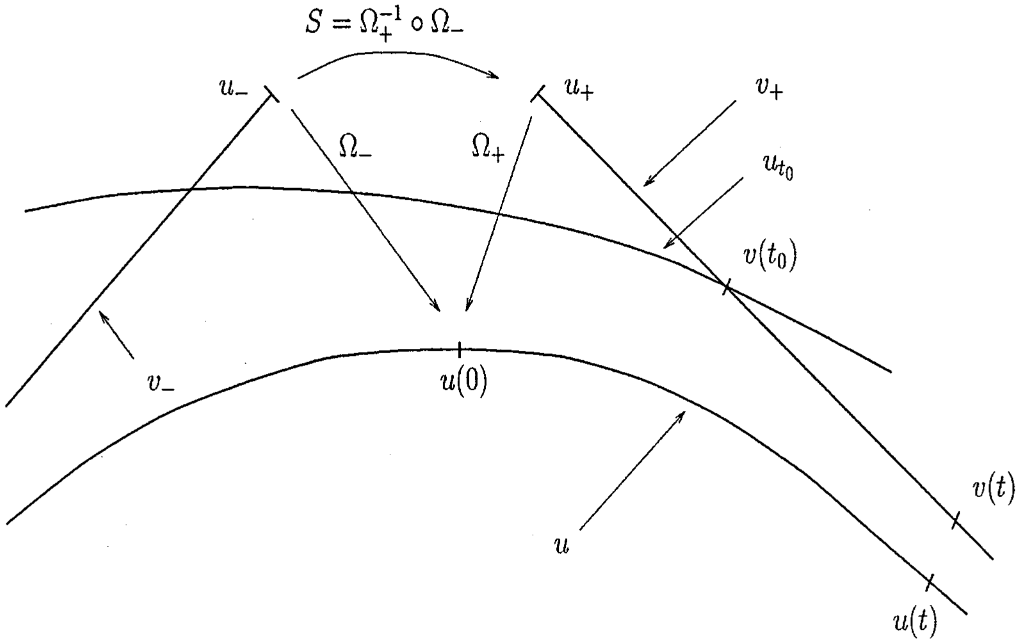

Fig. 10.1 *Définition des opérateurs d'ondes.*

On impose $u(t_0) = v(t_0)$, si bien que (10.1) est équivalente à

$$u(t) = v(t) - i \int_{t_0}^{t} dt' \, U(t-t') \Big(f(u(t')) - \big(i\, \partial_t v + \frac{1}{2} \Delta v \big)(t') \Big) . \qquad (10.3)$$

Si v est solution de l'équation libre $v(t) = U(t)\, u_+$, il vient

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t)\, u_+ + i \int_{t}^{t_0} dt' \, U(t-t')\, f(u(t')) \\ &\equiv U(t)\, u_+ + \big(F_{t_0}(u)\big)(t) \equiv \big(A_{t_0}(u)\big)(t) \end{aligned} \qquad (10.4)$$

où les deux derniers membres définissent de façon évidente les opérateurs F_{t_0} et A_{t_0}. Les opérateurs F et A introduits dans (4.2) et utilisés dans les sections précédentes sont les cas particuliers $t_0 = 0$ ce ceux-ci. C'est cette dernière équation qu'on essaiera de résoudre pour t_0 grand et en particulier pour $t_0 = \infty$. L'équation devient alors

$$u(t) = U(t)\, u_+ + i \int_{t}^{\infty} dt' \, U(t-t')\, f(u(t')) . \qquad (10.5)$$

Le problème d'existence des opérateurs d'onde est donc essentiellement le problème de Cauchy avec temps initial infini. Comme pour le problème de Cauchy en temps fini, on procèdera en deux temps.

(i) On résout l'équation (10.4) ou (10.5) par contraction dans un intervalle $[T, \infty)$. La contraction nécessitera un paramètre petit qu'on obtiendra en prenant l'intervalle petit, *i.e.* T assez grand.

(ii) On prolonge la solution à tout temps a partir de $t = T$ en utilisant les résultats des sections précédentes sur le problème de Cauchy global à temps fini.

Une autre façon d'obtenir un facteur de contraction petit dans la première étape consiste à prendre la donnée initiale petite, *i.e.* l'état asymptotique u_+ petit. On pourra alors dès la première étape, résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$ entier pour t_0 quelconque. Le résultat pratique est que la première étape donnera comme sous produit la résolution globale et la complétude asymptotique pour données petites.

Pour réaliser la première étape on aura besoin au minimum que l'intégrale dans (10.5) ait une certaine forme de convergence à l'infini, et pour cela que $f(u)$ ait une certaine forme de décroissance en temps. Cette propriété s'obtiendra par la combinaison des deux faits suivants.

(i) Les fonctions u elles même doivent avoir une certaine décroissance en temps, *i.e.* on doit essayer de résoudre (10.4) ou (10.5) dans des espaces fonctionnels qui incorporent une certaine décroissance en temps dans leur définition. On utilisera en particulier les espaces $X(\cdot)$ de la Section 4 et les espaces $Y(\cdot)$ de la Section 9, qui possèdent de telles propriétés. On devra alors s'assurer que les solutions de l'équation libre appartiennent à ces espaces, en imposant des restrictions convenables sur les états asymptotiques.

(ii) La décroissance en temps de u doit entraîner une décroissance en temps de f, et pour cela $f(u)$ doit tendre vers zéro assez vite quand u tend vers zéro. Dans le cas où $f(u)$ est une puissance de u, cette condition prendra la forme de bornes inférieures sur l'exposant. Il est intuitif que les bornes inférieures requises sur ces exposants seront d'autant plus faibles que les décroissances disponibles sur u seront plus fortes.

On imposera en général sur f la condition suivante :

(H4) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $f(0) = 0$ et il existe p_1 et p avec $1 < p_1 \leq p < 4/(n-2)$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| \equiv \text{Max}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|\right) \leq C\left(|z|^{p_1-1} + |z|^{p-1}\right).$$

L'hypothèse (H4) est une variante renforcée de (H1), qui correspondrait au cas $p_1 = 1$. De plus on a incorporé dans (H4) la condition de sous-criticité H^1 qu'on supposera toujours dans la suite. En fait, avec les méthodes utilisées, les problèmes de régularité locale, qui requièrent la borne supérieure sur p, sont essentiellement découplés des problèmes de décroissance à l'infini, qui requerront des bornes inférieures sur p_1.

Dans la suite de cette section on traitera le problème d'existence des opérateurs d'onde pour des états asymptotiques u_+ dans H^1, ce qui nécessitera la borne inférieure $p_1 - 1 \geq 4/n$, puis dans Σ, ce qui nécessitera $p_1 - 1 > 4/(n+2)$. On discutera ensuite les meilleures bornes accessibles, et on montrera en particulier que les opérateurs d'ondes "ordinaires" considérés ici, c'est-à-dire associés aux comportements asymptotiques de l'équation libre, ne peuvent pas exister pour $p - 1 \leq 2/n$.

On utilisera souvent et sans autre rappel la notation

$$\tilde{u}(t) = U(-t)\, u(t)\,. \tag{10.6}$$

Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, borné ou non, on notera $\overline{I}$ sa fermeture dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ avec la topologie évidente. On se limitera au cas de dimension $n \geq 2$, car le cas $n = 1$, sans être plus difficile, demande dans certains cas des énoncés légèrement modifiés.

(1) Existence des opérateurs d'onde dans H^1

On prend les états asymptotiques u_+ dans H^1 et on utilise les espaces fonctionnels $X^1(\cdot)$ introduits dans la Section 4.1. Dans ces espaces, la décroissance en temps dans un intervalle I non borné est exprimée par l'intégrabilité $L^q(I)$.

On commence par résoudre le problème de Cauchy local à l'infini.

Proposition 10.1. *Soit f satisfaisant (H4) avec $p_1 - 1 \geq 4/n$. Alors pour tout $u_+ \in H^1$, il existe $T < \infty$ tel que*

(1) pour tout $t_0 \in \overline{I}$, où $I = [T, \infty)$, l'équation (10.4) a une solution unique dans $X^1_{p+1}(I)$. La solution est en fait dans $X^1(I)$.

(2) La solution u est fortement continue de $u_+ \in H^1$ et de $t_0 \in \overline{I}$ à valeurs dans $X^1(I)$.

Preuve. La preuve est très voisine de celle de la Proposition 4.3, basée sur les calculs de la Proposition 4.1. Pour simplifier l'exposé, on se limite au cas d'une seule puissance p dans (H4). (Les deux puissances sont traitées indépendamment et leurs contributions s'ajoutent de façon évidente). Par les mêmes estimations que dans la preuve de la Proposition 4.3, mais maintenant avec $\theta = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \|F_{t_0}(u_1) - F_{t_0}(u_2); X(I)\| &\leq C\, \|f(u_1) - f(u_2); L^{\bar{q}'}(I, L^{\bar{r}'})\| \\ &\leq C\, \|u_1 - u_2; L^q(I, L^r)\|\ \operatorname*{Max}_i \|u_i; L^k(I, L^s)\|^{p-1}\,, \end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla F_{t_0}(u); X(I)\| &\leq C\, \|\nabla f(u); L^{\bar{q}'}(I, L^{\bar{r}'})\| \\ &\leq C\, \|\nabla u; L^q(I, L^r)\|\ \|u; L^k(I, L^s)\|^{p-1}\,, \end{aligned} \tag{10.8}$$

avec $0 \leq \delta,\ \delta' < 1$ et

$$\begin{cases} (p-1)\Big(\dfrac{n}{2} - \delta(s)\Big) = \delta + \delta' \\ (p-1)\,\dfrac{2}{k} = 2 - (\delta + \delta') \end{cases} \tag{10.9}$$

qui avec le choix (arbitraire) $\delta = \delta'$ se réduit à $0 \leq \delta < 1$ et

$$\begin{cases} (p-1)\Big(\dfrac{n}{2} - \delta(s)\Big) = 2\delta \\ (p-1)\,\Big(\dfrac{n}{2} - \delta(s) + \dfrac{2}{k}\Big) = 2\,. \end{cases} \tag{10.10}$$

On choisit maintenant $s = p + 1$, ce qui entraîne $\delta = \delta(s) = \delta(p+1)$, et on estime

$$\begin{aligned} \|u; L^k(I, L^s)\|^{p-1} &\leq C\, \|u; L^q(I, L^{p+1})\|^\sigma\, \|u; L^\infty(I, L^{p+1})\|^{p-1-\sigma} \\ &\leq C\, \|u; L^q(I, L^{p+1})\|^\sigma\, \|u; L^\infty(I, H^1)\|^{p-1-\sigma}\,. \end{aligned}$$

L'homogénéité en temps combinée avec (10.10) donne

$$2(1 - \delta(p+1)) = (p-1)\,\frac{2}{k} = \sigma\,\frac{2}{q} = \sigma\delta(p+1).$$

i.e.

$$\sigma = \frac{2(1 - \delta(p+1))}{\delta(p+1)} > 0\,. \tag{10.11}$$

On utilise maintenant ces estimations pour montrer que A_{t_0} contracte la norme $X_{p+1}(I)$ sur des ensembles bornés de $X^1_{p+1}(I)$ du type suivant. On sait par la Proposition 3.1 que

$$\|U(\cdot)u_+; X^1_{p+1}(\mathbb{R})\| \leq C_1\, \|u_+; H^1\|\,.$$

On considère l'ensemble

$$S = \Big\{u \in X^1_{p+1}(I) : \|u; X^1_{p+1}(I)\| \leq 2R \ \text{ et } \ \|u; L^q(I, L^{p+1})\| \leq 2R_0\Big\}$$

où

$$C_1 \, ||u_+; H^1|| = R \,, \tag{10.12}$$

$$||U(\cdot)u_+; L^q(I, L^{p+1})|| = R_0 \,. \tag{10.13}$$

Les estimations précédentes donnent alors pour $u, u_1, u_2 \in S$

$$||F_{t_0}(u); X^1_{p+1}(I)|| \leq C \, ||u; X^1_{p+1}(I)|| \, (2R_0)^\sigma \, (2R)^{p-1-\sigma} \,,$$

$$||F_{t_0}(u); L^q(I, L^{p+1})|| \leq C \, ||u; L^q(I, L^{p+1})|| \, (2R_0)^\sigma \, (2R)^{p-1-\sigma} \,,$$

$$||F_{t_0}(u_1) - F_{t_0}(u_2); X_{p+1}(I)|| \leq C \, ||u_1 - u_2; L^q(I, L^{p+1}) \, ||(2R_0)^\sigma \, (2R)^{p-1-\sigma} \,.$$

On impose

$$C(2R_0)^\sigma \, (2R)^{p-1-\sigma} \leq \frac{1}{2} \,, \tag{10.14}$$

ce qui assure que S est stable par A_{t_0} et que A_{t_0} y contracte la norme X_{p+1}. D'où le premier résultat par la Proposition 2.4.

Pour u_+ fixé, R est déterminé par (10.12), la condition (10.14) à R fixé est une condition de petitesse de R_0, et cette condition est assurée avec (10.13) en prenant T assez grand.

Les continuités de u en (u_+, t_0) résultent du fait que l'opérateur A_{t_0} est continu en t_0, u_+ dans les normes de X. Pour la continuité en t_0, on utilise les estimations ci-dessus avec I remplacé par $[t_{01}, t_{02}]$. Pour les normes de ∇u dans X, on a besoin d'un argument supplémentaire comme dans la Proposition 4.3.

Les estimations de la preuve de la Proposition 10.1 ont deux conséquences immédiates. La première est la continuité de $\tilde{u}$ dans H^1 à l'infini, c'est-à-dire l'existence d'états asymptotiques pour les solutions ainsi construites.

Proposition 10.2. *Soit f satisfaisant (H4) avec $p_1 - 1 \geq 4/n$. Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, $u_+ \in H^1$ et $u \in X^1_{p+1}(I)$ solution de l'équation (10.4). Alors $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\overline{I}, H^1)$. En particulier si $I = [T, \infty)$, la limite suivante existe :*

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{u}(t) = \tilde{u}(\infty) \tag{10.15}$$

comme limite forte dans H^1. Si $t_0 = \infty$, $\tilde{u}(\infty) = u_+$.

Preuve. On estime

$$||\tilde{u}(t) - \tilde{u}(t'); H^1|| = \left|\left| \int_{t'}^{t} dt'' \, U(t - t'') \, f(u(t'')); H^1 \right|\right|$$

$$\leq C||U * f; L^\infty([t', t], H^1)|| \leq C||U * f; X^1_{p+1}([t', t])||$$

$$\leq C \, ||u; X^1_{p+1}([t', t])|| \;\; ||u; L^q([t', t], L^{p+1})||^\sigma \, ||u; L^\infty([t', t], L^{p+1})||^{p-1-\sigma} \,.$$

Les deux normes extrêmes du dernier membre sont bornées uniformément en t et t' et la norme médiane tend vers zéro quand t et t' tendent vers une même limite, en particulier vers $+\infty$, fournissant un système de Cauchy, d'où l'existence de la limite en norme dans H^1.

L'autre conséquence est l'existence de solutions globales, l'existence des opérateurs d'onde et la complétude asymptotique pour des données petites.

Proposition 10.3. *Soit f satisfaisant (H4) avec $p_1 - 1 \geq 4/n$. Alors il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout $u_+ \in H^1$ avec $||u_+; H^1|| \leq R_1$, l'équation (10.4) a une solution unique dans $X^1_{p+1}(\mathbb{R})$. La solution est en fait dans $X^1(\mathbb{R})$. Les opérateurs d'onde $\Omega_\pm$ et leurs inverses sont définis au voisinage de 0 dans H^1, et sont des homéomorphismes locaux de H^1 dans H^1.*

Preuve. On prend $R_0 = R$ dans (10.14), *i.e.* $C(2R)^{p-1} \leq 1/2$, et pour cela, (cf. (10.12)), $C_1 R_1 = R$. On assure ainsi la stabilité de S et la contraction sans condition sur I, *i.e.* pour $I = \mathbb{R}$.

On définit $\Omega_\pm$ comme les applications $u_\pm \to u(0)$ en résolvant (10.4) avec u_+ remplacé par $u_\pm$ et $t_0 = \pm\infty$.

On définit $\Omega_\pm^{-1}$ comme les applications $u_0 \to \tilde{u}(\pm\infty)$ en résolvant (10.4) avec u_+ remplacé par u_0 et $t_0 = 0$, *i.e.*

$$u(t) = U(t)\, u_0 - i \int_0^t dt'\, U(t - t')\, f(u(t'))\,. \tag{4.1}$$

Pour construire les opérateurs d'onde pour des données de taille arbitraire, on a besoin de prolonger les solutions locales à l'infini de la Proposition 10.1 en utilisant la Proposition 5.5 de globalisation à temps fini. En préliminaire, on ajoute l'hypothèse (H2) et on étend les lois de conservation de la norme L^2 et de l'énergie à l'infini.

Proposition 10.4. *Soit f satisfaisant (H4) avec $p_1 - 1 \geq 4/n$ et (H2). Soit $I = [T, \infty)$, $t_0 \in I$, $u_+ \in H^1$ et $u \in X^1_{p+1}(I)$ solution de l'équation (10.4). Alors*

$$||\tilde{u}(\infty)||_2 = ||u||_2 \quad et \quad \frac{1}{2}\, ||\nabla\, \tilde{u}(\infty)||_2^2 = E(u)\,. \tag{10.16}$$

Preuve. On sait par les Propositions 5.3 et 5.4 que $||u(t)||_2 = ||u||_2$ et $E(u(t)) = E(u)$ sont des constantes. Par la Proposition 10.2, $\tilde{u}(\infty)$ existe,

$$||\tilde{u}(\infty)||_2 = \lim_{t\to\infty} ||\tilde{u}(t)||_2 = \lim_{t\to\infty} ||u(t)||_2 = ||u||_2$$

et

$$\frac{1}{2}\,||\nabla\,\tilde{u}(\infty)||_2^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\,||\nabla\,\tilde{u}(t)||_2^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\,||\nabla u(t)||_2^2 = E(u) - \lim_{t\to\infty} \int V(u(t))\,dx\,.$$

Il suffit donc de montrer que $\int V(u(t))\,dx \to 0$ à l'infini, et pour cela, en se limitant pour simplifier au cas d'une seule puissance $p_1 = p$, que $||u(t)||_{p+1} \to 0$ à l'infini. On sait déjà que $u \in X_{p+1}(I)$, donc $||u(t)||_{p+1} \in L^q(I)$. D'autre part de l'équation différentielle et du fait que $H^1 \subset L^{p+1} \Rightarrow L^{\overline{p+1}} \subset H^{-1}$ et que

$$u \in L^\infty(L^{p+1}) \Rightarrow f(u) \in L^\infty(L^{\overline{p+1}}) \Rightarrow f(u) \in L^\infty(H^{-1})$$

il résulte (voir aussi le Lemme 7.4) que

$$||u(t) - u(s); H^{-1}|| \leq |t-s|\{||u; L^\infty(H^1)|| + ||f(u); L^\infty(H^{-1})||\}$$

i.e. que u est uniformément Lipschitzienne dans H^{-1}, donc par interpolation avec $L^\infty(H^1)$, que u est uniformément $\alpha-$Hölder continue dans L^{p+1} d'exposant $\alpha = 1/2(1-\delta(p+1))$. La norme $||u(t)||_{p+1}$ est donc dans $L^q(I)$ et uniformément $\alpha-$Hölder continue, donc elle tend vers zéro à l'infini par un argument élémentaire.

On obtient maintenant l'existence des opérateurs d'onde en rassemblant les résultats précédents et ceux de la Section 5.

Proposition 10.5. *Soit f satisfaisant (H2), (H3) et (H4) avec $p_1 - 1 \geq 4/n$. Alors :*

(1) pour tout $u_+ \in H^1$, l'équation (10.5) a une solution unique dans $X^1_{p+1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap X^1_{p+1}(\mathbb{R}^+)$. De plus $u \in X^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap X^1(\mathbb{R}^+)$, $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, H^1)$ et u satisfait les lois de conservation

$$||u(t)||_2 = ||u_+||_2 \quad et \quad E(u(t)) = \frac{1}{2}\,||\nabla u_+||_2^2 \tag{10.17}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) L'opérateur d'onde $\Omega_+ : u_+ \to u(0)$ est défini dans H^1, continu et borné en norme H^1.

On a les mêmes résultats à $t = -\infty$.

Preuve. Cette proposition est une récapitulation de résultats précédents. On construit la solution au voisinage de $t = +\infty$ par la Proposition 10.1 et on la prolonge à $\mathbb{R}$ entier par la Proposition 5.5. Les lois de conservation résultent des Propositions 5.3 et 5.4 à temps fini et de la Proposition 10.4 à l'infini. La borne des Ω dans H^1 résulte des lois de conservation, de l'hypothèse (H3) et du Lemme 5.1.

Remarque. Les solutions construites dans la partie (1) de la Proposition 10.5 sont dispersives à $t \to +\infty$, mais rien n'est dit sur leur comportement asymptotique à $-\infty$ (et inversement dans le cas de Ω_-). Un résultat de ce type relèverait de la complétude asymptotique, qui sera étudiée dans la Section 12.

(2) Existence des opérateurs d'onde dans Σ

La décroissance de u en temps contenue dans la définition de $X(\mathbb{R})$ ou de $X^1(\mathbb{R})$, à savoir $u \in L^q(\mathbb{R}, L^r)$ pour (q, r) compatible est loin d'être optimale pour les solutions de l'équation libre. En fait la décroissance optimale est donnée par

$$||U(t)\, u_0||_r \leq C\, |t|^{-\delta(r)}$$

d'après (3.5) pour $u_0 \in L^{\bar{r}}$, et on voit qu'elle est optimale sur l'exemple exactement calculable où u_0 est Gaussien. Cette décroissance est deux fois meilleure que celle contenue dans $X(\mathbb{R})$.

Pour exploiter cette décroissance optimale, on fait maintenant une théorie analogue à celle de la Section 10.1 pour des données initiales et des états asymptotiques dans Σ. On utilise maintenant les espaces $Y^1(\cdot)$ définis par (9.11)(9.12). La théorie utilise de façon essentielle l'opérateur $J(t)$ et le Lemme 9.2, et on devra donc faire l'hypothèse (H2) dès le stade de la résolution locale. La borne inférieure sur p_1 va s'améliorer de $p_1 - 1 \geq 4/n$ à $p_1 - 1 > 4/(n+2)$ (pour $n \geq 2$. On trouverait $p_1 > 3$ pour $n = 1$). La possibilité d'exploiter la décroissance optimale dans cette théorie résulte du lemme suivant.

Lemme 10.1. *Soit $u \in \Sigma$. Alors*

$$||u||_r \leq C\, |t|^{-\delta(r)}\, ||J(t)\, u||_2^{\delta(r)}\, ||u||_2^{1-\delta(r)} \tag{10.18}$$

pour $0 \leq \delta(r) \leq 1$ (< 1 si $n = 2$).

Preuve. On part de l'inégalité de Sobolev (Proposition 2.2)

$$||v||_r \leq C\, ||\nabla v||_2^{\delta(r)}\, ||v||_2^{1-\delta(r)}$$

qu'on applique à $v = M(-t)\, u$. On obtient

$$\begin{aligned} ||u||_r = ||v||_r &\leq C\, |t|^{-\delta(r)}\, ||i\, t\, \nabla M(-t)\, u||_2^{\delta(r)}\, ||v||_2^{1-\delta(r)} \\ &= C\, |t|^{-\delta(r)}\, ||J(t)\, u||_2^{\delta(r)}\, ||u||_2^{1-\delta(r)} \end{aligned}$$

par (9.8).

On commence par résoudre le problème de Cauchy local à l'infini pour des données initiales dans Σ.

Proposition 10.6. *Soit f satisfaisant (H4) avec $p_1 > 4/(n+2)$ et (H2). Alors pour tout $u_+ \in \Sigma$, il existe $T < \infty$ tel que*

(1) pour tout $t_0 \in \overline{I}$, où $I = [T, \infty)$, l'équation (10.4) a une solution unique dans $Y^1_{p+1}(I)$. La solution est en fait dans $Y^1(I)$.

(2) La solution u est fortement continue de $u_+ \in \Sigma$ et de $t_0 \in \overline{I}$ à valeurs dans $Y^1(I)$.

Preuve. On se limite encore au cas d'une seule puissance p dans f. La preuve est encore par contraction de la norme dans X_{p+1} sur les ensembles bornés de Y^1_{p+1}. On complète (10.7)(10.8) par l'estimation analogue de $J\, F_{t_0}(u)$ où on utilise les Lemmes 9.1 et 9.2, donc l'hypothèse (H2) :

$$||J\, F_{t_0}(u); X(I)|| \leq C\, ||Jf(u); L^{\overline{q}'}(I, L^{\overline{r}'})|| \leq C\, ||Ju; L^q(I, L^r)||\, ||u; L^k(I, L^s)|| \quad (10.19)$$

où r, r', s et k satisfont (10.9), et après le choix arbitraire $\delta = \delta'$, (10.10). Il reste à estimer la dernière norme de (10.7), (10.8) et (10.19), mais on dispose maintenant pour celle-ci d'une meilleure estimation que dans la Proposition 10.1. Il résulte en effet du Lemme 10.1, de (9.2) et de la définition de $Y(\cdot)$ (9.11) que

$$||u(t)||_s \leq C\, t^{-\delta(s)}\, ||\tilde{u}; L^\infty(I, \Sigma)|| \leq C\, t^{-\delta(s)}\, ||u; Y^1_{p+1}(I)||$$

et par suite

$$\begin{aligned} ||u; L^k(I, L^s)||^{p-1} &\leq C \left\{ \int_T^\infty dt\ t^{-k\delta(s)} \right\}^{(p-1)/k} ||\tilde{u}; L^\infty(I, \Sigma)||^{p-1} \\ &= C\ T^{-\theta}\, ||\tilde{u}; L^\infty(I, \Sigma)||^{p-1} \end{aligned} \quad (10.20)$$

avec $\theta = (p-1)(\delta(s) - 1/k)$, pourvu que

$$0 < \frac{1}{k} < \delta(s) \leq 1 \quad (< 1 \text{ si } n = 2)\,.$$

Par (10.10), la dernière condition sur k se réduit à

$$(p-1)\Big(\frac{n}{2}+\delta(s)\Big) > 2\,.$$

On choisit alors $\delta(s) = 1$ pour $n \geq 3$ ($\delta(s) = 1-\varepsilon$ pour $n = 2$) qui permet de satisfaire toutes les conditions restantes pourvu que $4/(n+2) < p-1 < 4/(n-2)$, et on obtient

$$||F_{t_0}(u); Y^1_{p+1}(I)|| \leq C\, ||u; Y^1_{p+1}(I)||\, T^{-\theta}\, ||\tilde{u}; L^\infty(I,\Sigma)||^{p-1}$$

$$||F_{t_0}(u_1) - F_{t_0}(u_2); X_{p+1}(I)|| \leq C\, ||u_1 - u_2; X_{p+1}(I)||\, T^{-\theta}\ \mathrm{Max}\ ||\tilde{u}_i; L^\infty(I,\Sigma)||^{p-1}$$

qui assure que la boule $B(2R)$ de $Y^1_{p+1}(I)$ est stable par A_{t_0} et que la norme X_{p+1} y est contractée si $U(\cdot)\,u_+ \in B(R)$ et si T est assez grand. La fin de la démonstration procède par les mêmes arguments que celle de la Proposition 10.1.

Comme précédemment, les estimations de la preuve de la Proposition 10.6 entraînent la continuité de $\tilde{u}$ dans Σ à l'infini, c'est-à-dire l'existence d'états asymptotiques dans Σ pour les solutions ainsi construites.

Proposition 10.7. *Soit f satisfaisant (H4) avec $p_1 - 1 > 4/(n+2)$ et (H2). Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, $u_+ \in \Sigma$, et $u \in Y^1_{p+1}(I)$ solution de l'équation (10.4). Alors $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\overline{I},\Sigma)$. En particulier si $I = [T,\infty)$, la limite suivante existe :*

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{u}(t) = \tilde{u}(\infty)$$

comme limite forte dans Σ. Si $t_0 = \infty$, $\tilde{u}(\infty) = u_+$.

Preuve. On estime

$$||\tilde{u}(t_2) - \tilde{u}(t_1); \Sigma|| = \left|\left| \int_{t_1}^{t_2} dt\, U(-t)\, f(u(t)); \Sigma \right|\right| \leq ||U * f; Y^1_{p+1}([t_1,t_2])||$$

où on a utilisé la relation (9.2),

$$\ldots \leq C ||u; Y^1_{p+1}([t_1,t_2])||\, ||\tilde{u}; L^\infty([t_1,t_2],\Sigma)||^{p-1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} t^{-k\delta(s)}\, dt \right\}^{(p-1)/k}$$
$$\leq \ldots \left\{ t_1^{1-k\delta(s)} - t_2^{1-k\delta(s)} \right\}^{(p-1)/k}$$

qui tend vers zéro quand t_1 et $t_2 \to \infty$ et on conclut comme précédemment.

L'existence de solutions globales, celle des opérateurs d'onde et la complétude asymptotique pour des données petites se formulent et se démontrent comme dans la Proposition 10.3.

Proposition 10.8. *Soit f satisfaisant les hypothèses des Propositions 10.6 et 10.7. Alors on a les mêmes conclusions que dans la Proposition 10.3 avec H^1 remplacé par Σ.*

On démontre maintenant les lois de conservation à l'infini. Comme on a déjà supposé (H2) dans les trois propositions précédentes, on pourra ajouter ces lois de conservation aux conclusions de ces propositions.

Proposition 10.9. *Soit f satisfaisant (H4) avec $p_1 - 1 > 4/(n+2)$ et (H2). Soit $I = [T, \infty)$, $t_0 \in I$, $u_+ \in \Sigma$ et $u \in Y^1_{p+1}(I)$ solution de l'équation (10.4). Alors pour tout $t \in I$,*

$$||\tilde{u}(\infty)||_2 = ||u||_2 \quad et \quad \frac{1}{2}\,||\nabla\, \tilde{u}(\infty)||_2^2 = E(u)\,.$$

Si de plus $p_1 - 1 > 4/n$, alors pour tout $t \in I$

$$\frac{1}{2}\,||J(t)\,u(t)||_2^2 + t^2 \int V(u(t))\,dx = \frac{1}{2}\,||x\,\tilde{u}(\infty)||_2^2 - \int_t^\infty t'\,dt'\,R(u(t')) \tag{10.21}$$

où $R(u)$ est défini par (8.38) et où la dernière intégrale converge absolument.

Preuve. Pour la conservation de $||u||_2$ et de $E(u)$, la preuve est la même que dans la Proposition 10.4, mais ici

$$\int V(u)\,dx \leq C\,||u||_{p+1}^{p+1} \leq C\,||\tilde{u}; L^\infty(I,\Sigma)||^{p+1}\,t^{-(p-1)n/2}$$

et cette quantité décroît ponctuellement en temps comme une puissance $(p+1)\,\delta(p+1) = (p-1)\,n/2$. Pour la loi pseudoconforme, on part de la loi à temps fini obtenue dans la Proposition 9.2, qu'on met grâce à (9.2) sous la forme

$$\frac{1}{2}\,||J(t)\,u(t)||_2^2 + t^2 \int V(u(t))\,dx = \frac{1}{2}\,||x\,\tilde{u}(t')||_2^2 + t'^2 \int V(u(t'))\,dx - \int_t^{t'} t''\,dt''\,R(u(t''))\,.$$

Quand $t' \to \infty$, le premier terme du MD tend vers $(1/2)||x\,\tilde{u}(\infty)||_2^2$ par la continuité de $\tilde{u}$ dans Σ. Le deuxième terme tend vers zéro et l'intégrale converge absolument si $(p-1) > 4/n$.

On obtient l'existence des opérateurs d'onde en rassemblant les résultats précédents, ceux de la Section 5 et les Propositions 9.1 et 9.2.

Proposition 10.10. *Soit f satisfaisant (H4) avec $p_1 - 1 > 4/(n+2)$, (H2) et (H3). Alors :*

(1) pour tout $u_+ \in \Sigma$, l'équation (10.5) a une solution unique dans $Y^1_{p+1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap Y^1_{p+1}(\mathbb{R}^+)$. De plus $u \in Y^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap Y^1(\mathbb{R}^+)$, $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \Sigma)$ et u satisfait les lois de conservation (10.17) et, si $p-1 > 4/n$

$$\frac{1}{2}\,||J\,u(t)||_2^2 + t^2 \int V(u(t))\,dx = \frac{1}{2}\,||x\,u_+||_2^2 - \int_t^\infty t'\,dt'\,R(u(t'))\,. \tag{10.22}$$

(2) L'opérateur d'onde $\Omega_+ : u_+ \to u(0)$ est défini dans Σ, continu et borné en norme Σ. On a les mêmes résultats à $t = -\infty$.

Preuve. Comme la Proposition 10.5, cette proposition est une récapitulation des résultats précédents. On construit la solution u au voisinage de l'infini par la Proposition 10.6, et on la prolonge à $\mathbb{R}$ entier par les Propositions 5.5 et 9.1. Les lois de conservation résultent des Propositions 5.3, 5.4 et 9.2 à temps fini, et de la Proposition 10.9 à l'infini. La borne des Ω dans Σ résulte de la résolution locale à l'infini et des lois de conservation.

On conclut cette section par quelques commentaires sur le rôle de l'hypothèse (H2) d'invariance de jauge. On a fait cette hypothèse dès le stade de la résolution locale pour pouvoir exploiter le Lemme 9.2. Si on ne fait pas cette hypothèse, on peut néanmoins résoudre le problème local à l'infini par contraction dans un espace du type

$$Z_{r_0}(I) = \left\{u : u \in X^1_{r_0}(I) \text{ et } (1+|t|)^{\delta(r)}\,||u(t)||_r \in L^\infty(I) \text{ pour } 0 \le \delta(r) \le \delta(r_0) < 1\right\}$$

sous une condition du type $p > p_0(n)$ où $p_0(n)$ est une valeur comprise entre $1 + 4/n$ et $1 + 4/(n+2)$, solution de l'équation $p\,\delta(p+1) = 1$ ou encore

$$n\,p(p-1) - 2(p+1) = 0\,, \tag{10.23}$$

si bien que

$$p_0(n) = (2n)^{-1}\left(n + 2 + \sqrt{n^2 + 12n + 4}\right)\,, \tag{10.24}$$

$p_0(1) = (3 + \sqrt{17})/2$, $p_0(2) = 1 + \sqrt{2}$, $p_0(3) = 2$, $p_0(4) = (3 + \sqrt{17})/4$, etc. Cette valeur magique reparaîtra dans la Section 11 ci-dessous comme borne inférieure sur p assurant la complétude asymptotique dans Σ. Elle apparaît également, décalée d'une unité en dimension, dans le problème d'existence des opérateurs d'ondes et de solutions globales à données petites pour l'équation ONL.

La théorie locale à l'infini ainsi obtenue a plusieurs inconvénients par rapport à celle décrite plus haut dans cette section. Elle est sensiblement plus compliquée, du fait que l'espace des données initiales est défini de façon peu explicite par la condition d'engendrer des solutions de l'équation libre appartenant à $Z(\cdot)$. De plus, il n'est guère possible de globaliser sans restriction de taille des données sauf si on suppose (H2) et (H3), auquel cas cette théorie perd le bénéfice de sa généralité par rapport à celle décrite plus haut dans cette section.

(3) Borne inférieure sur p_1. Amélioration et valeur optimale

On a déjà dit, et vérifié sur les deux exemples précédents, que la borne inférieure sur p_1 est d'autant meilleure, *i.e.* plus basse, que l'espace dans lequel on résout a de meilleures décroissances en temps. La décroissance optimale des solutions de l'équation libre est

$$||u(t)||_r \leq C\ |t|^{-\delta(r)}$$

La théorie dans H^1 utilise la décroissance $u \in L^q(L^r)$ avec $0 \leq 2/q = \delta(r) < 1$, qui est dimensionnellement deux fois moins bonne, donnant la borne inférieure $p_1 \geq 1 + 4/n$. La théorie dans Σ utilise la décroissance donnée par le Lemme 10.1, qui est optimale, mais seulement avec $\delta(r) \leq 1$, donnant la borne $p_1 - 1 > 4/(n+2)$. On a vu qu'en fait, la borne inférieure sur p_1 vient de l'estimation de u dans $L^k(L^s)$ nécessaire dans (10.7), (10.8) et (10.19), et pour une décroissance optimale de u, c'est-à-dire avec $1/k \lesssim \delta(s)$, cette estimation donne par l'intermédiaire de (10.10) la condition $(p-1)(n/2+\delta(s)) > 2$, qui conduit à $p-1 > 4/(n+2)$ pour $\delta(s) = 1$. On améliorerait donc la borne inférieure en augmentant la valeur autorisée pour s, et en particulier pour $s = \infty$, $\delta(s) = n/2$, on obtiendrait $p-1 > 2/n$. On verra ci-dessous que cette dernière condition est effectivement optimale, en montrant que les opérateurs d'ondes précédents ne peuvent pas exister pour $p_1 - 1 \leq 2/n$. Par l'inégalité

$$||u||_r \leq C\ |t|^{-\delta(r)}\ ||\ |J(t)|^{\delta(r)}u||_2$$

valable pour $0 \leq \delta(r) < n/2$, qui résulte des inégalités de Sobolev et de (9.8) et qui généralise le cas $\delta(r) = 1$ de (10.18), la décroissance requise serait satisfaite pour $|J(t)|^\rho u \in L^\infty(I, L^2)$ pour $\rho = n/2$ ou du moins ρ proche de $n/2$. Ceci suggère de généraliser les espaces Σ et $Y^1(I)$ en $\Sigma^\rho = H^\rho \cap \mathcal{F}(H^\rho)$,

$$Y^\rho(I) = \left\{u : u \in \mathcal{C}(I, \Sigma^\rho) \text{ et } u,\ |\nabla|^\rho u \text{ et } |J(t)|^\rho u \in L^q(I, L^r) \text{ pour } 0 \leq \frac{2}{q} = \delta(r) < 1\right\}$$

avec $1 \leq \rho \leq n/2$, et d'essayer de résoudre le problème de Cauchy local à l'infini dans $Y^\rho(I)$ pour des états asymptotiques dans Σ^ρ. Dans ce but, on devrait estimer $|\nabla|^\rho f$ et $|J(t)|^\rho f$ dans $L^q(I, L^r)$ et on devrait donc supposer que f est au moins C^ρ. Mais si f se comporte comme $|u|^{p_1-1}u$ en $u = 0$, on doit avoir $\rho \leq p_1$. La situation est alors la suivante.

Pour $n = 2$, la condition $p - 1 > 4/(n+2)$ est déjà optimale (et il en est de même de la condition $p > 3$ pour $n = 1$).

Pour $n = 3$, $1 + 2/n = 5/3 > n/2 = 3/2$, et le schéma précédent s'applique avec $p_1 > 1 + 2/n = 5/3$, et par exemple $\rho = 3/2$.

Pour $n \geq 4$, $1 + 2/n < n/2$. Les deux conditions nécessaires donnent

$$p_1 - 1 > \mathrm{Max}\left(\rho - 1, \frac{4}{n + 2\rho}\right) \tag{10.25}$$

i.e. $p_1 > \rho_0(n)$, où $\rho_0(n)$ est solution de l'équation

$$(\rho - 1)(n + 2\rho) = 4\,.$$

On attend donc que le schéma précédent soit valable pour $n = 3$, $\rho = 3/2$, $p_1 > 5/3$ et $n \geq 4$, $p_1 > \rho = \rho_0(n) > 1 + 2/n$, et c'est effectivement ce qui se produit. Le domaine utile pour ρ et p_1 est $1 \leq \rho < \mathrm{Min}(p_1, 2)$. En se limitant pour simplifier au cas d'une seule puissance, on renforce (H4) de la façon suivante.

($\tilde{\mathrm{H}}4$) $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $f(0) = f'(0) = 0$ et il existe p avec $0 < p - 1 < 4/(n-2)$ tel que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$|f'(z_1) - f'(z_2)| \leq C \begin{cases} |z_1 - z_2|^{p-1} & \text{si } p \leq 2\,, \\ |z_1 - z_2| \ \mathrm{Max}\,|z_i|^{p-2} & \text{si } p \geq 2\,. \end{cases}$$

On modifie la définition des espaces Y^ρ en les exprimant en termes d'espaces de Besov pour traiter le cas de dérivées d'ordre non entier et on suit le même chemin que dans les Sections 10.1 et 10.2, menant aux résultats attendus, *i.e.*,

(1) le problème de Cauchy pour l'équation SNL avec données initiales dans Σ^ρ est globalement bien posé dans $Y^\rho_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ pour $1 \leq \rho < \mathrm{Min}(p, 2)$.

(2) On peut résoudre le problème de Cauchy local à l'infini sous la forme de l'équation (10.5) dans $Y^\rho([T, \infty))$ pour des états asymptotiques dans Σ^ρ pourvu que $1 \leq \rho < \mathrm{Min}(p, 2)$ et $p - 1 > 4/(n + 2\rho)$, ce qui entraine comme précédemment l'existence de

solutions globales, l'existence des opérateurs d'ondes, et la complétude asymptotique pour des données petites.

(3) Enfin, sous les hypothèses ($\tilde{\text{H}}$4), (H2), (H3) et les conditions précédentes sur ρ, et p, les opérateurs d'ondes existent dans Σ^ρ.

Le problème de l'existence des opérateurs d'ondes pour $n \geq 4$ et $1 + 2/n < p_1 \leq \rho_0(n)$ est une question ouverte.

On montre maintenant que la borne inférieure $p - 1 > 2/n$ est optimale en montrant que les opérateurs d'ondes précédents ne peuvent pas exister pour $p - 1 \leq 2/n$. Plus précisément dans ce cas, il n'existe pas de solution non triviale de l'équation SNL admettant des états asymptotiques dans L^2.

On a besoin de la structure suivante du groupe libre

$$\begin{aligned} U(t)\, f(x) &= (2\pi\, it)^{-n/2} \exp\left(i\, \frac{x^2}{2t}\right) \int dy \exp\left[-i\, \frac{xy}{t}\right] \exp\left(i\, \frac{y^2}{2t}\right) f(y) \\ &= i^{-n/2}\, M(t)\, D(t)\, \mathcal{F}\, M(t) \end{aligned} \tag{10.26}$$

où $M(t) = \exp(i\, x^2/2t)$ (voir (9.7)) et $D(t)$ est l'opérateur de dilatation

$$(D(t)f)(x) = t^{-n/2}\, f\left(\frac{x}{t}\right). \tag{10.27}$$

Si $f(u) = \lambda\, |u|^{p-1}u$, alors

$$f(D(t)u) = t^{-(p-1)n/2}\, D(t)\, f(u)\,.$$

On va donner un résultat taillé sur mesure pour un tel f, mais avec des hypothèses abstraites sur f qui permettent de traiter d'autres cas et en particulier le cas de l'équation de Hartree (1.4).

Proposition 10.11. *Soit $n \geq 2$ et $0 \leq (p-1)n/2 \equiv \delta(r) \leq 1$. Soit f une application de L^2 dans $L^{\bar{r}}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

(a) f est Lipschitzienne uniformément sur les bornés, et $f(0) = 0$.
$||f(u_1) - f(u_2)||_{\bar{r}} \leq C(R)\, ||u_1 - u_2||_2$ *pour* $||u_i||_2 \leq R$, $i = 1, 2$.

(b) Invariance de jauge :
$f(\omega u) = \omega f(u)$ *pour* $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$.

(c) Homogénéité de degré p :
$f(D(t)u) = t^{-\delta(r)}\, D(t)\, f(u)$ *pour tout* $t > 0$ *et tout* $u \in L^2$.

(d) $\mathcal{N}(f) = 0$, *i.e.* $f(u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Soit $u \in \mathcal{C}(I, L^2)$, *avec* $I = [T, \infty)$, *solution de l'équation*

$$i\,\partial_t u = -\frac{1}{2}\,\Delta u + f(u)$$

telle qu'il existe $u_+ \in L^2$ *tel que* $\tilde{u}(t) \to u_+$ *fortement dans* L^2 *quand* $t \to \infty$. *Alors* $u = 0$ *(et* $u_+ = 0$*).*

Preuve. Soit φ fonction d'essai dans $L^2 \cap L^{\bar{r}}$. On considère pour $T \leq t_1 \leq t_2$

$$\langle \varphi, \tilde{u}(t_2) - \tilde{u}(t_1) \rangle = -i \int_{t_1}^{t_2} dt\, \langle \varphi, U(-t)\, f(u(t)) \rangle$$

qui tend vers zéro quand $t_1, t_2 \to \infty$ par hypothèse. On décompose l'intégrand comme suit, avec $U = U(t)$, $M = M(t)$ et $D = D(t)$:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, U(-t)\, f(u(t)) \rangle &= \langle U(t)\varphi, f(u(t)) \rangle \\
&= \langle U(t)\varphi, f(u(t)) - f(U(t)u_+) \rangle + \langle U(\mathbf{1} - M^{-1})\varphi, f(U\, u_+) \rangle \\
&\quad + \langle U\, M^{-1}\varphi, f(U\, u_+) - f(U\, M^{-1} u_+) \rangle + \langle U\, M^{-1}\varphi, f(U\, M^{-1} u_+) \rangle\, .
\end{aligned}$$

On majore les trois premiers termes en utilisant (a), la majoration ponctuelle (3.5) de $U(t)$, l'unitarité de M et de U dans L^2 et le fait que la norme L^2 de u est constante, par

$$(2\pi t)^{-\delta(r)}\, C(||u||_2) \Big\{ ||\varphi||_{\bar{r}} (||\tilde{u}(t) - u_+||_2 + ||(M - \mathbf{1})u_+||_2) + ||(M - \mathbf{1})\varphi||_{\bar{r}}\, ||u||_2 \Big\}\, .$$

Le dernier terme se calcule exactement :

$$\begin{aligned}
\langle U\, M^{-1}\varphi, f(U\, M^{-1} u_+) \rangle &= \langle M\, D\, \hat{\varphi},\ f(M\, D\, \hat{u}_+) \rangle \\
&= \langle \hat{\varphi},\ D^{-1}\ f(D\, \hat{u}_+) \rangle \quad \text{par (b)}\, , \\
&= t^{-\delta(r)} \langle \hat{\varphi},\ f(\hat{u}_+) \rangle \quad \text{par (c)}\, .
\end{aligned}$$

Par suite quand $t \to \infty$

$$\langle \varphi, U(-t)\, f(u(t)) \rangle = t^{-\delta(r)} \big(\langle \hat{\varphi}, f(\hat{u}_+) \rangle + o(1) \big)$$

car $||\tilde{u}(t) - u_+||_2 \to 0$ par hypothèse, et $M(t)$ tend fortement vers $\mathbf{1}$ dans L^2 et dans $L^{\bar{r}}$, par le théorème de la convergence dominée. Mais $t^{-\delta(r)}$ n'est pas intégrable à l'infini, donc $\langle \hat{\varphi}, f(\hat{u}_+) \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in L^2 \cap L^{\bar{r}}$, donc $f(\hat{u}_+) = 0$, donc $u_+ = 0$ par *(d)* et $u = 0$ par la convergence $\tilde{u}(t) \to u_+$ dans L^2 et la conservation de la norme L^2.

La limitation $p-1 > 2/n$ se comprend bien par analogie avec l'équation de Schrödinger linéaire

$$i\,\partial_t u = -\frac{1}{2}\,\Delta u + Vu \quad \text{avec} \quad V(x) = |x|^{-\gamma}\,.$$

Avec la décroissance optimale connue sur u, à savoir $u \in L^\infty(L^2)$, on a dimensionnellement $|u| \sim |x|^{-n/2}$, donc l'équation ci-dessus correspond à l'équation SNL avec $p-1 = 2\gamma/n$. On sait que les opérateurs d'onde dans le cas linéaire existent pour $\gamma > 1$ mais non pour $\gamma \leq 1$, ce qui redonne la limitation $p-1 > 2/n$.

Dans le cas de l'équation de Schrödinger linéaire, on sait construire pour $0 < \gamma \leq 1$ des opérateurs d'onde modifiés où on utilise comme évolution de référence $v(t)$ une évolution modifiée qui approxime mieux les comportements asymptotiques que l'évolution libre. L'extension de ces opérateurs d'onde modifiés au cas non linéaire est difficile. Il existe une telle extension seulement dans le cas critique $p-1 = 2/n$, en basse dimension $1 \leq n \leq 3$ et pour des données initiales petites et assez régulières ($u_+ \in \mathcal{F}H^2$ pour $n = 2$).

Signalons pour terminer que les méthodes de cette section s'appliquent avec des modifications mineures à l'équation de Hartree (1.4), avec des résultats un peu meilleurs car cette dernière équation est moins singulière que l'équation SNL. En particulier avec un potentiel $V(x) = |x|^{-\gamma}$ qui doit être comparé là encore à une puissance $p = 1 + 2\gamma/n$, les opérateurs d'onde existent dans H^1 pour $\gamma > 2$, et en outre existent dans Σ pour tout $\gamma > 1$ en toute dimension $n \geq 2$. Comme déjà signalé, la Proposition 10.11 s'applique telle quelle au cas $0 < \gamma \leq 1$.

Note bibliographique.

La théorie de la diffusion (Scattering en Anglais) tient une place importante en Physique. L'un des ouvrages de référence est [Ne]. Les opérateurs d'ondes ont été introduits par C. Møller en 1945 et l'opérateur de diffusion (Matrice S) par J. Wheeler en 1937 et W. Heisenberg en 1943 (voir [Ne]). Dans le cas des équations non linéaires, le problème a été étudié dès les années 1960 par I. Segal. Voir [Sta1] pour un exposé général et une bibliographie préliminaire. L'existence des opérateurs d'ondes $\Omega_\pm$ dans H^1 se trouve dans [GV2], mais avec une preuve plus compliquée que celle donnée ici. L'existence des opérateurs d'onde dans Σ se trouve dans [GV1] avec une preuve valable pour $p > p_0(n)$ (mais la valeur $p_0(n)$ n'est explicitement identifiée que dans [Sta3]), et dans [CW3] pour $p > 1+4/(n+2)$. La preuve donnée ici sous cette hypothèse suit [GOV], où on trouvera également l'extension décrite dans la sous section (3). Le résultat négatif de la Proposition 10.11 se trouve dans [Sta1] complété par [Ba] et la preuve donnée ici vient de [HyTs2] où le résultat est appliqué à l'équation de Hartree (1.4). Pour cette dernière, la situation est meilleure que pour l'équation SNL. On peut montrer l'existence des opérateurs d'onde dans H^1 pour un potentiel $V(x) = \lambda |x|^{-\gamma}$ avec $\gamma > 2$ par une variante facile de la Proposition 10.5, et dans Σ dans toute la région à courte portée $\gamma > 1$ par une variante de la Proposition 10.10 [NwO].

Dans le cas de l'équation SNL à longue portée avec $p \leq 1 + 2/n$, il existe seulement des résultats préliminaires. L'existence des opérateurs d'ondes modifiés est démontrée seulement dans le cas limite $p = 1 + 2/n$, pour des données petites, et en dimension $1 \leq n \leq 3$ [O], [GO]. Là encore, la situation est meilleure pour l'équation de Hartree. D'une part le résultat précédent est valable en toute dimension $n \geq 2$. D'autre part on peut montrer l'existence des opérateurs d'ondes modifiés pour $n \geq 3$ et $1/2 < \gamma \leq 1$ sans restriction de taille sur les données dans l'espace $\mathcal{F} H^k$ pour k assez grand [GV6].

11. Complétude asymptotique dans Σ

Dans cette section, on continue l'étude des comportements asymptotiques en temps des solutions de l'équation SNL en abordant la deuxième question considérée dans la Section 1.3 b, *i.e.* le problème de la complétude asymptotique, dans le cadre de la théorie de la Section 10.2 à données initiales dans Σ.

On a montré précédemment sous des conditions convenables que pour toute donnée initiale, *i.e.* tout état asymptotique, dans Σ, soit u_+, il existe une solution u de l'équation SNL asymptote à $U(t)\, u_+$ à $+\infty$. En particulier $u \in Y^1(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{u}(t) \to u_+$ dans Σ quand $t \to \infty$ (Proposition 10.10). On a la même propriété à $t \to -\infty$. On a défini les opérateurs d'onde $\Omega_\pm$ dans Σ comme les applications $u_\pm \to u(0)$ ainsi obtenues.

On montre maintenant, sous des hypothèses plus fortes, que dans certains cas les constructions précédentes épuisent les solutions de l'équation SNL à données initiales dans Σ, *i.e.* que pour toute solution u à donnée initiale $u(0) = u_0 \in \Sigma$, il existe u_+ et u_- tel que u soit la solution de SNL obtenue par les constructions de la Proposition 10.10. En raison du résultat d'unicité de cette proposition, il suffit de montrer que cette solution est dans $Y^1_{(p+1)}(\mathbb{R})$. On en déduira alors par la Proposition 10.7 l'existence des $u_\pm = \tilde{u}(\pm\infty)$ et on concluera en appliquant la Proposition 10.10. Il en résultera en particulier que les $\Omega_\pm$ sont des bijections de Σ, ce qui est précisément la complétude asymptotique dans Σ.

Pour montrer que $u \in Y^1_{(p+1)}(\mathbb{R})$, on traite séparément les cas $t \to \pm\infty$, et en fait on se limite à $t \to +\infty$ (en fait $t \geq 0$). Le résultat ne peut être vrai que si l'interaction est **répulsive** en un sens convenable, de façon à interdire, entre autres possibilités, l'existence de solutions localisées s'éloignant à l'infini sans se disperser. La condition de répulsivité se formule de la façon suivante en termes de la fonction V introduite dans (H2). On rappelle que $V(u) = V(|u|)$ et on note $V'(R) = dV(R)/dR$ pour $R \geq 0$, si bien que $|u|\, V'(|u|) = 2\, \overline{u}\, f(u)$.

(H5) V satisfait les inégalités $V \geq 0$ et

$$R\, V'(R) - (p_3 + 1)\, V(R) \geq 0 \tag{11.1}$$

pour tout $R \geq 0$.

On utilisera cette hypothèse avec des restrictions convenables sur p_3. Cette condition dit que $R^{-(p_3+1)}\, V(R)$ est positive et croissante. Il en résulte en particulier que si la limite suivante est strictement positive

$$\lim_{R \to 0} R^{-(p_3+1)}\, V(R) > 0\,, \tag{11.2}$$

alors

$$V(R) \geq C\, R^{p_3+1} \,. \tag{11.3}$$

Si f satisfait (H2) et (H4), il résulte alors de (11.3) que

$$C\, R^{p_3+1} \leq V(R) \leq C(R^{p_1+1} + R^{p+1}) \tag{11.4}$$

donc $p_1 \leq p_3 \leq p$.

L'hypothèse (H5) est satisfaite et saturée par $f(u) = \lambda\, |u|^{p_3-1} u$ pourvu que $\lambda \geq 0$. Noter aussi que (H5) $\Rightarrow$ (H3) car (H5) contient la condition $V \geq 0$.

On étudie maintenant les solutions de l'équation SNL à données initiales dans Σ. On rappelle que sous des hypothèses convenables, ces solutions sont dans $Y^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et satisfont l'identité pseudoconforme (Propositions 9.1 et 9.2). Le problème est donc un problème de décroissance à l'infini. L'estimation de base de décroissance est donnée par la loi pseudoconforme.

Proposition 11.1. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$, (H2) et (H5) avec $1 \leq p_3 \leq p$. Soit $u_0 \in \Sigma$ et $u \in Y^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ la solution de l'équation SNL à donnée initiale $u(0) = u_0$. Alors*

(1) Si $p_3 - 1 \geq 4/n$, u satisfait pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$||J(t)\, u(t)||_2 \leq ||x\, u_0||_2 \,, \tag{11.5}$$

$$||u(t)||_r \leq C\, |t|^{-\delta(r)}\, ||x\, u_0||_2 \;\; \text{pour } 0 \leq \delta(r) \leq 1 \,. \tag{11.6}$$

(2) Si $p_3 - 1 < 4/n$, u satisfait pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$||J(t)\, u(t)||_2 \leq C\, m_0^{1/2}\, (1 + |t|)^{1-\gamma/2} \,, \tag{11.7}$$

$$||u(t)||_r \leq C\, m_0^{1/2}\, (1 + |t|)^{-\gamma\delta(r)/2} \;\; \text{pour } 0 \leq \delta(r) \leq 1 \,, \tag{11.8}$$

$$\int dx\, V(u(t)) \leq m_0\, (1 + t^2)^{-\gamma/2} \,, \tag{11.9}$$

avec

$$\gamma = (p_3 - 1)\, \frac{n}{2} \equiv (p_3 + 1)\, \delta(p_3 + 1) \,,$$

$$m_0 = \frac{1}{2}\, ||x\, u_0||_2^2 + E(u_0) \,.$$

Si de plus V satisfait (11.2) ou (11.3), alors

$$||u(t)||_{p_3+1} \leq C\, m_0^{1/(p_3+1)}\, (1 + |t|)^{-\delta(p_3+1)} \,. \tag{11.10}$$

Preuve.

(1) Ce cas résulte immédiatement de la loi pseudoconforme (Proposition 9.2), du fait que (H5) avec $p_3 - 1 \geq 4/n$ entraîne $R(u) \leq 0$ et du Lemme 10.1.

(2) On pose

$$m(t) = \frac{1}{2}\, ||J(t)\, u(t)||_2^2 + \frac{1}{2}\, ||\nabla u(t)||_2^2 + (1+t^2) \int V(u(t))\, dx\,.$$

Alors de la conservation de l'énergie, de la loi pseudoconforme et de l'hypothèse (H5), il suit que

$$\begin{aligned}\partial_t m(t) = t\, R(u) &= t \int dx \Big[(n+2)\, V(u) - \frac{n}{2}\, |u|\, V'(|u|)\Big] \\ &\leq t \Big[2 - \frac{n}{2}\, (p_3 - 1)\Big] \int dx\, V(u) \leq (2-\gamma)\, \frac{t}{1+t^2}\, m(t)\,.\end{aligned}$$

On en déduit

$$m(t) \leq m_0 (1+t^2)^{1-\gamma/2}$$

par intégration, d'où (11.7) et (11.9), dont (11.8) résulte par le Lemme 10.1. Enfin (11.10) résulte de (11.9) et (11.3).

On peut maintenant démontrer le résultat annoncé. Ce résultat nécessite des bornes inférieures sur la puissance de u qui figure dans f, comme dans la Proposition 10.6. Ces bornes interviennent sous deux formes différentes par l'intermédiaire des hypothèses (H4) (borne sur p_1) et (H5) (borne sur p_3). On prend pour simplifier $p_1 = p_3$, ce qui est adapté au cas où f est une somme de puissances. Les bornes se réduisent alors à la condition (10.24), *i.e.*

$$\begin{aligned}p\, \delta(p+1) > 1 &\Leftrightarrow n\, p(p-1) > 2(p+1) \\ &\Leftrightarrow p > p_0(n) = (2n)^{-1} \Big(n + 2 + \sqrt{n^2 + 12n + 4}\Big)\,. \qquad (10.24)\end{aligned}$$

Proposition 11.2. *Soit f satisfaisant (H4), (H2) et (H5) avec $p_1 = p_3 > p_0(n)$, où $p_0(n)$ est la racine positive de l'équation $p\, \delta(p+1) = 1$, et en outre (11.3) si $p_3 - 1 < 4/n$. Soit $u_0 \in \Sigma$ et $u \in Y^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ la solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$. Alors $u \in Y^1(\mathbb{R})$.*

Preuve. Il suffit de démontrer des estimations *a priori* de u qui assurent les décroissances de Y^1. C'est encore le même calcul que celui effectué précédemment dans la

Proposition 6.2 pour estimer la norme de $\partial_t u$, et dans la Proposition 9.1 pour estimer la norme de u dans Y^1 à temps fini, mais en injectant maintenant les estimations de la Proposition 11.1. On sait déjà que la solution est dans $Y^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, donc il n'y a pas besoin de résolution locale préalable. On découpe $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{j\geq 0} I_j$, $I_j = [t_j, t_{j+1}]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j < \ldots$ et on estime u à partir de l'équation intégrale avec donnée initiale $u(t_j)$ au temps t_j comme d'habitude. On se limite au cas d'une seule puissance $p_1 = p_3 = p$ pour simplifier. On obtient

$$\begin{aligned} \|u; Y^1_{p+1}(I_j)\| &\leq \|U(\cdot - t_j)\, u(t_j); Y^1_{p+1}(I_j)\| + \|F_{t_j}(u); Y^1_{p+1}(I_j)\| \\ &\leq C\, \|u; Y^1_{p+1}(I_{j-1})\| + C\, \|u; Y^1_{p+1}(I_j)\|\, \|u; L^k(I_j, L^s)\|^{p-1} \end{aligned}$$

où k et s satisfont (10.10). On choisit successivement les I_j, c'est-à-dire les t_{j+1} à t_j fixé, de façon que $C\, \|u; L^k(I_j, L^s)\|^{p-1} \leq 1/2$, obtenant ainsi

$$\|u; Y^1_{p+1}(I_j)\| \leq 2C\, \|u; Y^1_{p+1}(I_{j-1})\| \leq (2C)^j\, \|u_0; \Sigma\|\,.$$

Le point crucial est que, si $u \in L^k(\mathbb{R}^+, L^s)$, alors on épuise $\mathbb{R}^+$ en un nombre **fini** de pas, et on obtient, en ajoutant les contributions des intervalles successifs, une estimation globale de u dans $Y^1_{p+1}(\mathbb{R}^+)$.

Il reste donc à exploiter les majorations *a priori* de la Proposition 11.1 pour assurer que $u \in L^k(\mathbb{R}, L^s)$ avec comme précédemment (cf. (10.10)), $0 \leq \delta < 1$ et

$$\begin{cases} (p-1)\Big(\dfrac{n}{2} - \delta(s)\Big) = 2\delta \\ (p-1)\Big(\dfrac{n}{2} - \delta(s) + \dfrac{2}{k}\Big) = 2\,. \end{cases}$$

Le meilleur choix consiste à prendre $\delta = \delta(s) = \delta(p+1)$, pour lequel on dispose toujours de la décroissance libre d'après (11.6) ou (11.10), *i.e.* de tout k satisfaisant $1/k < \delta(p+1)$. Il vient alors la condition

$$(p-1)\Big(\frac{n}{2} + \delta(p+1)\Big) > 2 \Leftrightarrow (p-1)\Big(\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\,\frac{p-1}{p+1}\Big) > 2 \Leftrightarrow p\,\delta(p+1) > 1\,.$$

Remarques.

La puissance haute p venant de (H4) a une meilleure décroissance à l'infini que la puissance basse $p_1 (= p_3)$ et ne perturbe pas l'argument.

Dans le problème de la résolution locale dans Y^1, on faisait le même calcul que ci-dessus, mais en autorisant $\delta(s) = 1$ au lieu de $\delta(s) = \delta(p+1) < 1$, ce qui donnait une limite plus basse $p - 1 > 4/(n+2)$. Le problème de la complétude asymptotique pour $4/(n+2) < p < p_0(n)$ est une question ouverte.

Par les arguments du début de cette section, on conclut :

Proposition 11.3. *Sous les hypothèses de la Proposition 11.2, les opérateurs d'ondes $\Omega_\pm$ sont des homéomorphismes de Σ sur Σ, bornés et à inverses bornés.*

Preuve. La preuve combine les Propositions 10.10 et 11.2. Les continuités s'obtiennent par itération finie de continuités dans les résolutions locales, et les bornes en rassemblant celles des diverses estimations.

En conclusion, sous les hypothèses de la Proposition 11.2, on a classé toutes les solutions de l'équation SNL à données dans Σ par leurs comportements asymptotiques, qui sont ceux des solutions de l'équation libre.

Le résultat précédent de complétude asymptotique est valable, dans le cas d'une seule puissance p, pour $p > p_0(n)$. Il peut être étendu au cas limite $p = p_0(n)$, mais la démonstration est plus compliquée. Pour $1 + 2/n < p < p_0(n)$, le problème de la complétude asymptotique est ouvert. Néanmoins, pour $p > 1 + 2/n$, on peut démontrer un résultat plus faible, à savoir le fait que les solutions dans $Y^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ considérées ici admettent des états asymptotiques dans un sens plus faible, à savoir fortement dans L^2 et faiblement dans H^1. Par contre on ne sait pas si ces états asymptotiques sont dans Σ. Au niveau de généralité considéré précédemment, le résultat est le suivant.

Proposition 11.4. *Soit f satisfaisant (H4), (H2) et (H5) avec $p_1 = p_3 > 1 + 2/n$ et en outre (11.3) si $p_3 < 1 + 4/n$. Soit $u_0 \in \Sigma$ et $u \in Y^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ la solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$. Alors il existe $u_\pm \in H^1$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

$$\tilde{u}(t) \to u_\pm \text{ fortement dans } L^2 \text{ et faiblement dans } H^1 \text{ quand } t \to \pm\infty\,,$$

$$\|u_\pm\|_2 = \|u\|_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\,\|\nabla u_\pm\|_2^2 \le E(u)\,.$$

Preuve. On se limite au cas où $p_1 = p_3 \le 1 + 4/n$, car le cas complémentaire est déjà (beaucoup mieux) couvert par les Propositions 11.2 et 11.3. On utilise la représentation (10.26) de $U = U(t)$ avec $M = M(t)$ donné par (9.7) et $D = D(t)$ donné par (10.27) et on introduit

$$v = v(t) = M(t)\,\tilde{u}(t) = M\,U^* u\,. \tag{11.11}$$

v satisfait l'équation

$$i\,\partial_t v = M\,U^*\,f(u) + \frac{x^2}{2t^2}\,v\,. \tag{11.12}$$

De plus par (9.2) et (11.7), on a

$$\|x\,v(t)\|_2 = \|J(t)\,u(t)\|_2 \le C\,m_0^{1/2}\,(1+|t|)^{1-\gamma/2}\,. \tag{11.13}$$

On montre d'abord que $v(t)$ converge fortement dans L^2. On se limite au cas $t > 0$. Soit $1 < t_1 < t_2$. Par la conservation de la norme L^2 et l'équation (11.12), on a

$$\begin{aligned}\|v(t_1) - v(t_2)\|_2^2 &= 2\ \mathrm{Re}\,\langle v(t_1), v(t_1) - v(t_2)\rangle \\ &= -2\int_{t_1}^{t_2} dt\ \mathrm{Im}\,\langle v(t_1), i\,\partial_t\,v(t)\rangle \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} dt\ t^{-2}\ \mathrm{Im}\,\langle x\,v(t_1), x\,v(t)\rangle \\ -\,2\int_{t_1}^{t_2} dt\ \mathrm{Im}\,&\langle v(t_1), (M\,U^*\,f(u))(t)\rangle\,.\end{aligned} \tag{11.14}$$

La première intégrale du MD est majorée grâce à (11.13) par

$$\begin{aligned}|\cdot|\ &\le C\,m_0\int_{t_1}^{t_2} dt\ t_1^{1-\gamma/2}\,t^{-1-\gamma/2} \\ &= 2C\,\gamma^{-1}\,m_0\big(t_1^{1-\gamma} - t_1^{1-\gamma/2}\,t_2^{-\gamma/2}\big)\,.\end{aligned} \tag{11.15}$$

Il résulte de (10.26) que

$$M\,U^* = i^{n/2}\,\mathcal{F}\,D^*\,M^*\,,$$

ce qui permet de majorer la dernière intégrale de (11.14) par

$$\begin{aligned}|\cdot| &\le 2\int_{t_1}^{t_2} dt\,\big|\langle D^*(t_1)\,M^*(t_1)\,u(t_1),\ D^*(t)\,M^*(t)\,f(u(t))\rangle \\ &\le 2\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{t_1}{t}\right)^{\delta(r)}\|u(t_1)\|_r\,\|f(u(t))\|_{\bar r}\end{aligned} \tag{11.16}$$

où en réalité on sépare les contributions des deux puissances qui figurent dans (H4), qu'on traite séparément comme dans le dernier membre ci-dessus, avec $r = p+1$. Le terme dangereux est évidemment celui contenant la puissance basse $p_1 = p_3$. Avec $r = p_3 + 1$, la contribution de ce terme est estimée par (11.10), pour $(p_3+1)\,\delta(p_3+1) = \gamma > 1$, comme

$$C\,m_0\int_{t_1}^{t_2} dt\ t^{-(p_3+1)\delta(p_3+1)} = C\,m_0(\gamma-1)^{-1}\big(t_1^{1-\gamma} - t_2^{1-\gamma}\big)\,. \tag{11.17}$$

Le terme venant de (11.16) et contenant la puissance haute p est estimé en prenant $r = p + 1$ et en utilisant l'estimation

$$||u(t)||_r \leq C\,(1 + m_0)^{1/2}\,(1 + |t|)^{-\nu(r)}$$

obtenue pour $p_3 + 1 \leq r \leq 2^*$ par interpolation entre (11.8) pour $r = 2^*$ (ou (11.7)) et (11.10)

$$\delta(p_3 + 1) \leq \nu(r) = \big(1 - \delta(p_3 + 1)\big)^{-1}\Big\{\delta(p_3 + 1)(1 - \delta(r)) + (\delta(r) - \delta(p_3 + 1))\,\frac{\gamma}{2}\Big\} \leq 1 - \frac{\gamma}{2}\,.$$

On laisse en exercice la vérification du fait que la contribution de ce terme à (11.16) a une meilleure décroissance que celle du terme en p_3. Il résulte de (11.14–17) et de ce dernier fait que pour $\gamma = (p_3 - 1)n/2 > 1$, $||v(t_1) - v(t_2)||_2 \to 0$ quand $t_1, t_2 \to \infty$, et par suite que $v(t)$ a une limite forte u_+ dans L^2 quand $t \to \infty$.

On a d'autre part

$$||\tilde{u}(t) - u_+||_2 = ||v(t) - M(t)\,u_+||_2 \leq ||v(t) - u_+||_2 + ||(M(t) - \mathbf{1})\,u_+||_2$$

et par suite $u(t) \to u_+$ fortement dans L^2, car l'opérateur $M(t)$ tend vers $\mathbf{1}$ fortement dans L^2.

Il résulte ensuite de la conservation de l'énergie, de la positivité de V et de (11.9) que

$$\exists \lim_{t\to\infty} ||\nabla\,\tilde{u}(t)||_2^2 = \lim_{t\to\infty}\sup ||\nabla\,\tilde{u}(t)||_2^2 = \operatorname*{Sup}_t ||\nabla\,\tilde{u}(t)||_2^2 = 2E(u)$$

et en particulier $\tilde{u}(t)$ est borné dans H^1. Par la convergence dans L^2 et le Lemme 7.2 avec $Y = H^1$ et $Z = L^2$, il en résulte que $u_+ \in H^1$, que $\tilde{u}(t)$ tend vers u_+ faiblement dans H^1 et par suite que

$$||\nabla u_+||_2^2 \leq \lim\,||\nabla\,\tilde{u}(t)||_2^2 = 2E(u)\,. \tag{11.18}$$

Remarque. La convergence forte de $\tilde{u}(t)$ dans L^2 résulte également de celle de $v(t)$ par l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} ||\tilde{u}(t) - v(t)||_2 &= ||(M - \mathbf{1})\,\tilde{u}(t)||_2 \leq t^{-1/2}\,||x\,\tilde{u}(t)||_2 \\ &= t^{-1/2}\,||J(t)\,u(t)||_2 \leq C\,m_0^{1/2}\,t^{(1-\gamma)/2} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de (11.7) et le dernier membre tend vers 0 pour $\gamma > 1$.

On notera que les estimations précédentes ne permettent pas de savoir si la convergence est forte dans H^1 et si l'égalité a lieu dans (11.18). En raison de la convergence faible dans H^1, ces deux propriétés sont équivalentes.

Enfin le cas $p \leq 1 + 2/n$ a déjà été traité négativement par la Proposition 10.11.

Note bibliographique.

La complétude asymptotique dans Σ est démontrée en utilisant l'invariance pseudo-conforme dans [GV1] pour $p \geq 1 + 4/n$, dans [Ts] pour $p > p_0(n)$ et dans [CW3] pour $p = p_0(n)$. La preuve pour $p > p_0(n)$ a été simplifiée dans [HyTs1] et c'est essentiellement cette preuve simplifiée qui est exposée ici. La complétude asymptotique dans Σ pour $p \geq 1+4/n$ est également démontrée dans [LiSta] en suivant la méthode de [MoSta]. Cependant le cadre naturel de cette méthode est l'espace d'énergie H^1 plutôt que Σ (voir Section 12).

L'existence d'états asymptotiques dans L^2 pour $p > 1+2/n$ se trouve dans [TsYa]. La preuve donnée ici est légèrement différente et montre en outre que ces états asymptotiques sont dans H^1.

Dans le cas de l'équation de Hartree, on dispose de résultats analogues. En particulier la complétude asymptotique est démontrée pour $\gamma > 4/3$ et il existe des états asymptotiques dans L^2 (en fait dans H^1) pour $\gamma > 1$ [HyTs2]. D'autre part, la complétude asymptotique pour données petites est démontrée pour $\gamma > 0$ [HyNm1][HyNm2].

12. Complétude asymptotique dans H^1

Dans cette section, on continue l'étude du problème de la complétude asymptotique. On traite maintenant ce problème dans le cadre de la théorie dans H^1 de la Section 11.1.

On a montré que toute donnée initiale $u_+ \in H^1$ définit une solution u de l'équation SNL asymptote à $U(t)\, u_+$ pour $t \to \infty$, telle que $u \in X^1(\mathbb{R}^+)$ et $\tilde{u}(t) \to u_+$ dans H^1 quand $t \to \infty$ (Proposition 10.5). Le même résultat vaut pour $t \to -\infty$. On a défini les opérateurs d'ondes $\Omega_\pm : u_\pm \to u(0)$.

On va maintenant, sous des hypothèses plus fortes, montrer la réciproque, *i.e.* le fait que pour toute solution $u \in X^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ à donnée initiale $u(0) = u_0 \in H^1$, il existe $u_\pm \in H^1$ tels que u puisse être obtenue par la construction précédente. Comme précédemment, il suffit de montrer que $u \in X^1(\mathbb{R})$.

On se limite encore au cas $t \geq 0$. On aura encore besoin d'une condition de répulsivité, qui se formule en terme de la fonction V introduite dans (H2) et du potential auxiliaire $W_1(u) = W_1(|u|)$ défini par

$$W_1(R) \equiv \frac{1}{2} R\, V'(R) - V(R) \quad \text{pour tout} \quad R \geq 0\,. \tag{12.1}$$

Cette condition prend la forme suivante.

(H6) V satisfait les inégalités $V \geq 0$ et

$$W_1(R) \geq C\, R^{p_3+1} \tag{12.2}$$

pour un $C > 0$, un p_3 tel que $2 < p_3 + 1 < 2^*$ et tout $R \in \mathbb{R}^+$.

Si f satisfait (H2), (H4) et (H6), alors $p_1 \leq p_3 \leq p$. L'hypothèse (H6) est satisfaite et saturée par $f(u) = \lambda\, |u|^{p_3-1}\, u$ avec $\lambda \geq 0$. De plus (H6) $\Rightarrow$ (H3), par l'intermédiaire de la condition $V \geq 0$.

On rassemble d'abord quelques résultats préliminaires sur les solutions à donnée initiale dans H^1.

Lemme 12.1. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$ et (H2) et soit $u \in (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}, H^1)$ solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0 \in H^1$. Alors*

(1) u est uniformément Hölder continue d'exposant $(1-\delta(r))/2$ dans L^r pour $2 \leq r < 2^*$.

(2) Si $\|u(t)\|_r \to 0$ quand $t \to \infty$ pour **un** *$r \in (2, 2^*)$, alors la même propriété est vraie pour* **tout** *$r \in (2, 2^*)$.*

(3) Si $u_0 \in H^1$, $U(t)\, u_0 \to 0$ dans L^r quand $t \to \infty$ pour tout $r \in (2, 2^*)$.

Preuve.

(1) Le résultat a déjà été démontré sous des hypothèses plus faibles dans le Lemme 7.4, partie (1), qu'on applique avec ici $s = 2^*$.

(2) Etant donné le résultat pour $r_0 \in (2, 2^*)$, on l'obtient pour tout $r \in (2, 2^*)$ en interpolant la norme de $u(t)$ dans L^r entre la norme dans L^{r_0} et la norme dans L^2 (pour $r \leq r_0$) ou la norme de ∇u dans L^2 (pour $r \geq r_0$).

(3) $U(t)\, u_0 \in L^q(\mathbb{R}, L^r)$ pour $0 \leq 2/q = \delta(r) < 1$ par la Proposition 3.1 et $U(t)\, u_0$ est uniformément continue dans L^r par la partie (1) appliquée avec $f = 0$, d'où le résultat par un argument élémentaire.

On définit

$$\varepsilon_{0,r}(t) \equiv ||U(\cdot)\, u_0; L^\infty([t, \infty), L^r)|| \tag{12.3}$$

qui est une fonction décroissante de t, et tend vers 0 quand $t \to \infty$ par la partie (3) du lemme précédent.

Contrairement aux équations hyperboliques comme l'équation des ondes, l'équation de Schrödinger n'a pas une vitesse de propagation finie. Elle satisfait cependant des propriétés plus faibles de propagation en moyenne, qui joueront le même rôle pour les besoins de cette section.

Lemme 12.2. *Soit f satisfaisant (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$ et (H2) et soit $u \in (\mathcal{C} \cap L^\infty)(\mathbb{R}, H^1)$ solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0 \in H^1$. Alors*

(1) pour tout $a > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, u satisfait

$$\int_{|x| \geq a} dx\, |u(t,x)|^2 \leq \int dx \ \mathrm{Min}\left(1, \frac{|x|}{a}\right) |u_0(x)|^2 + |t|\, a^{-1}\, ||u||_2\, M \tag{12.4}$$

avec

$$M = ||\nabla u; L^\infty(\mathbb{R}, L^2)||\,.$$

(2) On définit pour $t \geq 1$

$$u_{\gtrless}(t,x) = u(t,x)\, \chi(|x| \gtrless t\ \mathrm{Log}\, t)\,. \tag{12.5}$$

Alors $||u_>(t)||_r \to 0$ quand $t \to \infty$ pour $2 \leq r < 2^*$.

Preuve.

(1) résulte du Lemme 9.3 avec $h(x) = \text{Min}(1, |x|/a)$, qui donne par intégration

$$\int dx \ \text{Min}\left(1, \ \frac{|x|}{a}\right) |u(t,x)|^2 \leq \int dx \ \text{Min}\left(1, \ \frac{|x|}{a}\right) |u_0(x)|^2$$
$$+ \int_0^t dt' \ \text{Im}\left\langle u(t'), \chi(|x| \leq a)(a\,|x|)^{-1}\, x \cdot \nabla u(t')\right\rangle$$
$$\leq \ldots + |t|\, a^{-1} \, ||u; L^\infty(L^2)|| \ \ ||\nabla u; L^\infty(L^2)|| \,.$$

(2) Le résultat pour $r = 2$ résulte du cas particulier $a = t \ \text{Log}\, t$ de (12.4)

$$||u_>(t)||_2^2 \leq \int dx \ \text{Min}\left(1, \ \frac{|x|}{t \ \text{Log}\, t}\right) |u_0(x)|^2 + (\text{Log}\, t)^{-1} \, ||u||_2 \, M$$

où le premier terme du MD tend vers zéro quand $t \to \infty$ par le théorème de la convergence dominée.

Le résultat pour r quelconque s'obtient par interpolation entre le résultat pour $r = 2$ et le fait que $\nabla u \in L^\infty(L^2)$.

On commence maintenant la preuve du résultat principal. Dans tout ce qui suit on suppose $n \geq 3$ car la preuve ne marche que dans ce cas. On suppose que f satisfait (H1) avec $p - 1 < 4/(n-2)$ et (H2) avec $V \geq 0$. On prend $u_0 \in H^1$ et on considère la solution u de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$ construite dans la Proposition 5.5. On sait que cette solution est dans $L^\infty(\mathbb{R}, H^1) \cap X^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et le but est de démontrer qu'en fait $u \in X^1(\mathbb{R})$. Les hypothèses ci-dessus sont en facteur dans tous les résultats qui suivent et ne seront pas répétées en général. On pourra avoir besoin en plus d'hypothèses de répulsivité portant sur W_1 ou sur p_1 dans (H4), variables selon les cas et données dans chaque cas particulier.

L'information de décroissance fondamentale est l'inégalité de Morawetz, qui est une variante de l'invariance par dilatation.

Lemme 12.3. *Soit f et u comme ci-dessus avec de plus $W_1 \geq 0$. Alors pour tous t_1 et $t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, on a*

$$(n-1) \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \, |x|^{-1} \, W_1(u(t,x)) \leq - \text{Im} \left\langle u, \ \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u \right\rangle \Bigg|_{t_1}^{t_2}$$
$$\leq 2 \, ||u||_2 \, \sqrt{2E(u)} \,. \qquad (12.6)$$

Preuve. On applique le Lemme 9.4 avec $h = \sqrt{x^2 + a^2}$,

$$\begin{aligned}
\nabla h &= \frac{x}{h}\,, \\
\nabla^2_{ij}\, h &= \frac{1}{h}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i\, x_j}{h^2}\right) \geq 0\,, \\
\Delta h &= \frac{1}{h}\, n - \frac{x^2}{h^2} = \frac{n-1}{h} + \frac{a^2}{h^3} \geq \frac{n-1}{h}\,.
\end{aligned}$$

On calcule

$$\Delta^2 h = -\frac{(n-1)(n-3)}{h^3} - \frac{6(n-3)\, a^2}{h^5} - \frac{15\, a^4}{h^7} \leq 0 \text{ pour } n \geq 3\,.$$

On écrit (9.14) sous forme intégrale et on minore la contribution du MD en omettant les termes cinétiques et en minorant Δh comme ci-dessus, d'où

$$(n-1) \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx\, h^{-1}\, W_1(u(t,x)) \leq -\,\mathrm{Im} \left\langle u,\ \frac{x}{h} \cdot \nabla u \right\rangle \Big|_{t_1}^{t_2}\,.$$

On prend ensuite la limite inoffensive $a \downarrow 0$.

Pour comprendre que l'inégalité (12.6) est une estimation de décroissance, on regarde ce qu'elle interdit : elle interdit l'existence d'une solution localisée qui s'éloigne à une vitesse pas trop grande. Par exemple si φ est une fonction de x à support compact, ou du moins à décroissance rapide, une solution de la forme $u(t,x) = \varphi(x - c\,t\ \mathrm{Log}\, t)$ est interdite. Dans le cas d'une seule puissance, on voit en effet dans ce cas que le MG de (12.6) se comporte comme $C \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t\ \mathrm{Log}\, t}\, ||\varphi||_{p+1}^{p+1}$ et tend vers l'infini quand $t_1 \to -\infty$, $t_2 \to \infty$, en contradiction avec la borne uniforme du MD. Malheureusement, cette information, *i.e.* un cas limite de divergence d'intégrale, est assez difficile à exploiter, et la suite de la preuve est un peu compliquée. On commence par déduire de (12.6) une conséquence plus utilisable.

Lemme 12.4. *Soit f et u comme ci-dessus avec $W_1 \geq 0$. Alors pour tout $t_1 > 1$, $\varepsilon > 0$ et $\ell > 0$, il existe $t_2 \geq t_1 + \ell$ tel que*

$$\int_{t_2-\ell}^{t_2} dt \int dx\, W_1(u_<(t,x)) \leq \varepsilon\,. \tag{12.7}$$

On peut trouver un tel t_2 satisfaisant

$$t_2 \leq \exp\left\{ \mathrm{Log}(t_1 + \ell)\ \exp\left(\frac{2\ell}{\varepsilon(n-1)}\, ||u||_2\, \sqrt{2E}\right)\right\}.$$

Preuve. On rappelle que $u_<$ est défini par (12.5) et on déduit de (12.6) que

$$2(n-1)^{-1}\,||u||_2\,\sqrt{2E} \equiv C \geq \int_{t_1}^{t_1+N\ell} \frac{dt}{t\ \mathrm{Log}\, t} \int dx\, W_1(u_<(t,x))$$

en restreignant le domaine d'intégration en x et en utilisant le fait que $|x| \leq t\ \mathrm{Log}\, t$ sur le support de $u_<$,

$$\ldots \geq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(t_1+j\ell)\ \mathrm{Log}(t_1+j\ell)} \int_{t_1+(j-1)\ell}^{t_1+j\ell} dt\, dx\, W_1(u_<(t,x))\,.$$

Soit a_j la dernière intégrale. Supposons que $a_j \geq \varepsilon$ pour $j = 1,\ldots,N$. Alors on peut continuer la chaîne d'inégalités précédente par

$$\ldots \geq \frac{\varepsilon}{\ell} \int_{t_1+\ell}^{t_1+(N+1)\ell} \frac{dt}{t\ \mathrm{Log}\, t} = \frac{\varepsilon}{\ell}\ \mathrm{Log}\ \frac{\mathrm{Log}(t_1+(N+1)\ell)}{\mathrm{Log}(t_1+\ell)}$$

qui donne une borne supérieure sur N. Pour le plus petit N ne satisfaisant pas cette borne, il existe donc au moins un intervalle $\left[t_1+(j-1)\ell, t_1+j\ell\right]$ avec $1 \leq j \leq N+1$ dans lequel l'intégrale de $W_1(u_<)$ est inférieure à ε. D'où l'existence d'un t_2 comme annoncé avec

$$t_2 \leq t_1 + (N+1)\,\ell \leq \exp\left\{ \mathrm{Log}(t_1+\ell)\ \exp\left(\frac{\ell}{\varepsilon}\, C\right)\right\}.$$

On va maintenant exploiter les estimations des Lemmes 12.2 et 12.4 pour démontrer des décroissances de u à l'infini en temps. On procède en trois étapes. On montre d'abord que $||u(t)||_r$ est petit dans de grands intervalles pour un (et par conséquent pour tout, par le Lemme 12.1) $r \in (2, 2^*)$, puis que $||u(t)||_r \to 0$ quand $t \to \infty$ pour un (tout) tel r, et enfin que $u \in X^1(\mathbb{R}^+)$. Les hypothèses de répulsivité et de décroissance à l'infini de f vont être de plus en plus fortes au fur et à mesure qu'on avance. Jusqu'ici, on a utilisé seulement les conditions $V \geq 0$ et $W_1 \geq 0$. Dans le cas d'une seule puissance p, ces hypothèses sont satisfaites pour tout $p > 1$, ainsi d'ailleurs que (H6) avec $p_3 = p$. On s'attend cependant à (et on va effectivement) terminer avec (H4) et $p_1 > 1 + 4/n$ comme le laisse prévoir la Proposition 10.5. Les bornes inférieures sur p_1 vont être de plus en plus fortes ci-dessous.

Dans tout ce qui suit, M désigne une constante dépendant de u par l'intermédiaire de $||u; L^\infty(H^1)||$ ou, ce qui est équivalent de $||u||_2$ et de $E(u)$.

Lemme 12.5. *Soit f et u comme ci-dessus. On suppose de plus que f satisfait (H4) avec $p_1 - 1 > 2/n$ et (H6). Soit $2 < r < 2^*$. Alors pour tous $\varepsilon > 0$ et $\ell_1 > 0$, il existe $t_2 \geq \ell_1$ tel que*

$$||u; L^\infty([t_2 - \ell_1, t_2], L^r)|| \leq \varepsilon . \tag{12.8}$$

Preuve. $\varepsilon > 0$ et $\ell_1 > 0$ sont donnés. On prend $\ell_2 > 0$ et $t_2 \geq \ell_1 + \ell_2$, à fixer plus tard, et $t \in [t_2 - \ell_1, t_2]$. On considère

$$\begin{aligned} u(t) = U(t)\, u_0 - i \int_0^{t-\ell_2} dt'\, U(t-t')\, f(u(t')) - i \int_{t-\ell_2}^{t} dt'\, U(t-t')\, f(u_>(t')) \\ -i \int_{t-\ell_2}^{t} dt'\, U(t-t')\, f(u_<(t')) \equiv u^{(0)}(t) + v(t) + v_>(t) + v_<(t) \end{aligned}$$

et on estime les différents termes dans L^r pour un r, $2 < r < 2^*$. Ce r devra satisfaire quelques restrictions faibles par rapport à p_1 et p, qui sont automatiquement satisfaites par $r = p+1$, mais l'argument est plus clair si on garde r comme paramètre indépendant. Voir la Figure 12.1 pour le partage de la région d'intégration ci-dessus.

Estimation de $u^{(0)}(t)$. Par la définition (12.3)

$$||u^{(0)}(t)||_r \leq \varepsilon_{0,r}(t) \leq \varepsilon_{0,r}(t_2 - \ell_1) \leq \varepsilon_{0,r}(\ell_2) . \tag{12.9}$$

Ceci tend vers zéro quand $\ell_2 \to \infty$ par la partie (3) du Lemme 12.1.

Estimation de $v(t)$. On estime v dans L^r par interpolation entre L^2 et L^{r_1} pour un $r_1 > 2^*$ à choisir plus tard.

dans L^2 :

$$\begin{aligned} v(t) &= -i\, U(\ell_2) \int_0^{t-\ell_2} dt'\, U(t-\ell_2-t')\, f(u(t')) \\ &= U(\ell_2)\, u(t-\ell_2) - U(t)\, u_0 , \end{aligned}$$

donc

$$||v(t)||_2 \leq 2\, ||u||_2 . \tag{12.10}$$

dans L^{r_1} : par l'estimation ponctuelle (3.5), avec $\delta_1 = \delta(r_1)$,

$$||v(t)||_{r_1} \leq \int_0^{t-\ell_2} dt'(t-t')^{-\delta_1}\, ||f(u); L^\infty([0, t-\ell_2], L^{\bar{r}_1})|| .$$

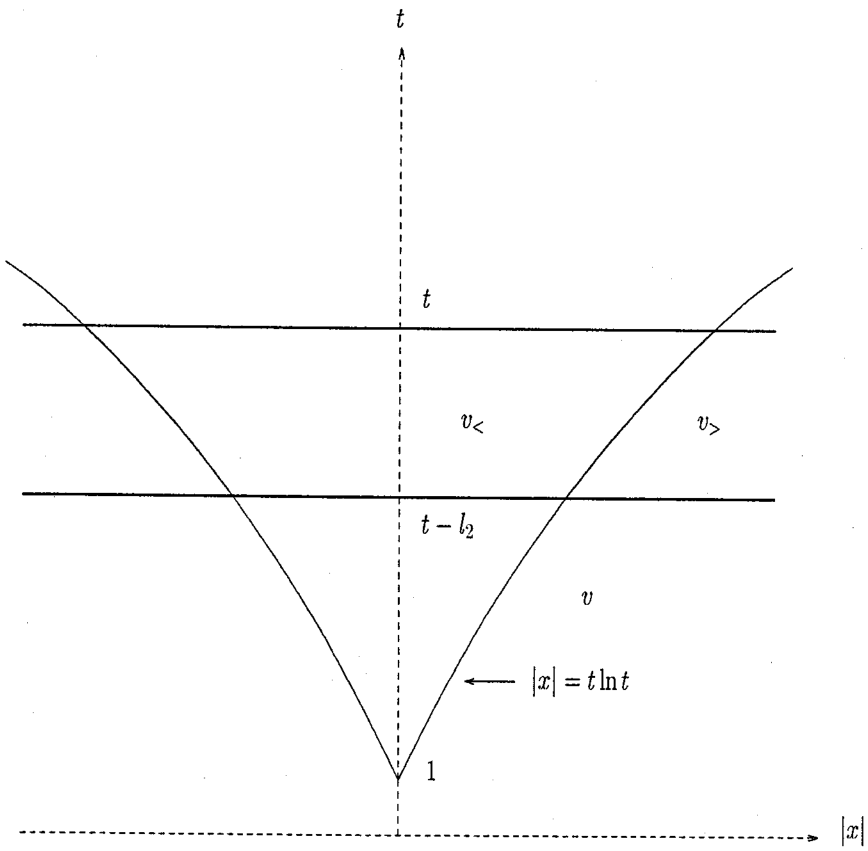

Fig. 12.1 *Partage de la région d'intégration dans le Lemme 12.5 .*

La dernière norme est contrôlée par $||u; L^\infty(H^1)||$ sous l'hypothèse (H4) pourvu que

$$\begin{aligned} & 2 \le p_1\, \bar{r}_1 \le p\, \bar{r}_1 \le 2^* \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2\delta_1}{n} \le p_1 - 1 \le p - 1 \le \frac{2(1+\delta_1)}{n-2} \end{aligned}$$

La dernière condition est automatique car le dernier membre est $> 4/(n-2)$ et la première est compatible avec $\delta_1 > 1$ car $p_1 - 1 > 2/n$. On peut prendre par exemple, mais sans obligation,

$$\delta_1 = \frac{n}{2}\ \mathrm{Min}(1, p_1 - 1) > 1\,.$$

On obtient

$$||v(t)||_{r_1} \le (\delta_1 - 1)^{-1}\, \ell_2^{1-\delta_1}\ ||f(u); L^\infty(\mathbb{R}, L^{\bar{r}_1})||\,. \tag{12.11}$$

dans L^r : par interpolation entre (12.10) et (12.11), on obtient avec $\delta = \delta(r)$,

$$||v(t)||_r \leq M\, \ell_2^{\delta(1/\delta_1 - 1)} \tag{12.12}$$

pour tout $t \geq \ell_2$ et en particulier pour tout $t \geq t_2 - \ell_1$.

Estimation de $v_>(t)$. On estime directement par (3.5), avec $p_2 = p$,

$$\begin{aligned} ||v_>(t)||_r &\leq C \int_{t-\ell_2}^t dt'\,(t-t')^{-\delta}\, ||f(u_>(t'))||_{\overline{r}} \\ &\leq C\, \ell_2^{1-\delta} \sum_{i=1,2} \left|\left|u_>; L^\infty\left([t-\ell_2, t], L^{p_i \overline{r}}\right)\right|\right|^{p_i} \\ &\leq C\, \ell_2^{1-\delta} \sum_{i=1,2} \left|\left|u_>; L^\infty\left([t_2 - \ell_1 - \ell_2, \infty), L^{p_i \overline{r}}\right)\right|\right|^{p_i}. \end{aligned} \tag{12.13}$$

Pour ℓ_2 fixé, ceci tend vers zéro quand $t_2 \to \infty$ par le Lemme 12.2 pourvu que

$$\begin{aligned} & 2 \leq p_1\, \overline{r} \leq p\, \overline{r} < 2^* \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2\delta}{n} \leq p_1 - 1 \leq p - 1 < \frac{2(1+\delta)}{n-2}. \end{aligned}$$

Cette fois c'est l'inégalité de gauche qui est automatique car $2\delta/n < 2/n < p_1 - 1$ par hypothèse. Celle de droite est une faible contrainte satisfaite par exemple pourvu que $p + 1 \leq r$. On peut prendre si on veut $r = p + 1$.

Estimation de $v_<(t)$. C'est le terme crucial, traité par le Lemme 12.4. On estime encore par (3.5)

$$||v_<(t)||_r \leq C \int_{t-\ell_2}^t dt'\,(t-t')^{-\delta}\, ||f(u_<(t'))||_{\overline{r}}.$$

Ensuite, on estime

$$||f(u_<)||_{\overline{r}} \leq C \sum_{i=1,2} ||u_<||_{p_i \overline{r}}^{p_i} \leq M\,(||u; H^1||)\, ||u_<||_{p_3+1}^{(p_3+1)/s}$$

pour un s suffisamment grand, $s < \infty$, $\overline{s}\,\delta < 1$. Pour cela, on interpole de façon redondante $L^{p_i \overline{r}}$ entre L^2, L^{2^*} et L^{p_3+1}, ce qui est possible pourvu que $2 < p_1\, \overline{r} \leq p\, \overline{r} < 2^*$, *i.e.* sous les mêmes conditions que pour l'estimation de $v_>$.

On estime enfin l'intégrale en temps par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}||v_<(t)||_r &\leq M\ \ell_2^{1/\bar{s}-\delta}\left\{\int_{t-\ell_2}^{t} dt'\ ||u_<(t')||_{p_3+1}^{p_3+1}\right\}^{1/s}\\ &\leq M\ \ell_2^{1/\bar{s}-\delta}\left\{\int_{t_2-\ell}^{t_2} dt'\ ||u_<(t')||_{p_3+1}^{p_3+1}\right\}^{1/s} \qquad (12.14)\end{aligned}$$

pour $t_2 - \ell_1 \leq t \leq t_2$ et avec $\ell = \ell_1 + \ell_2$. La dernière intégrale va être contrôlée par le Lemme 12.4.

On choisit maintenant ℓ_2 puis t_2 de façon à assurer la conclusion du lemme. On prend successivement

ℓ_2 assez grand pour que $||u^{(0)}(t)||_r \leq \varepsilon/4$ grâce à (12.9) et $||v(t)||_r \leq \varepsilon/4$ grâce à (12.12),

à ℓ_2 fixé, t_1 assez grand pour que $||v_>(t)||_r \leq \varepsilon/4$ pour $t_2 - \ell_1 - \ell_2 \geq t_1$ grâce à (12.13),

à ℓ_2 et t_1 fixés et aussi $\ell = \ell_1 + \ell_2$ fixé, on détermine t_2 par le Lemme 12.4 pour assurer que $||v_<(t)||_r \leq \varepsilon/4$ grâce à (12.14).

Remarque. Dans le cas d'une seule puissance p avec $2/n < p - 1 < 4/(n-2)$, *i.e.* $p_1 = p_3 = p$, la preuve n'est pas essentiellement plus simple. Si on prend de plus $r = p + 1$, la seule puissance qui apparaît comme $p_i\,\bar{r}$ est $p + 1$ et l'interpolation dans l'estimation de $v_<$ est triviale

$$||u_<||_{p+1}^{p} \leq ||u_<||_{p+1}^{(p+1)/s}\ ||u||_{p+1}^{p-(p+1)/s} \leq ||u_<||_{p+1}^{(p+1)/s}\ ||u; H^1||^{p-(p+1)/s}$$

L'étape suivante est de montrer que $u(t) \to 0$ dans L^r quand $t \to \infty$.

Lemme 12.6. *Soit f et u comme ci-dessus. On suppose de plus que f satisfait (H4) avec $p_1 - 1 > 4/n$ et (H6). Soit $2 < r < 2^*$. Alors $||u(t)||_r \to 0$ quand $t \to \infty$.*

Preuve. L'essentiel de la preuve consiste à montrer que si

$$\Big|\Big|u; L^\infty([t_2 - \ell_1, t_2], L^r)\Big|\Big| \leq \varepsilon \qquad (12.15)$$

pour un $\varepsilon > 0$ assez petit et un $\ell_1 > 0$ assez grand et $t_2 \geq \ell_1$, alors

$$\Big|\Big|u; L^\infty([t_2 - \ell_1, t_2 + a], L^r)\Big|\Big| \leq \varepsilon \qquad (12.16)$$

pour un a, $0 < a \leq 1$, ne dépendant que de ε.

On choisit r et r_1 tels que $p+1 \leq r < 2^* < r_1$ et $p_1 - 1 > 4\,\delta_1/n$, par exemple $r = p+1$ et

$$\delta_1 = \mathrm{Min}\left\{\frac{n}{2}\,,\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n}{4}(p_1 - 1)\right)\right\} > 1 \ \text{ pour } \ p_1 - 1 > \frac{4}{n}\,.$$

Ce choix de r et r_1 assure entre autres que

$$2 \leq p_1\,\bar{r}_1 \leq \left\{\begin{matrix} p\ \bar{r}_1 \\ p_1\ \bar{r} \end{matrix}\right\} \leq p\,\bar{r} \leq r < 2^* < r_1\,. \tag{12.17}$$

On suppose que u satisfait (12.15) pour $\varepsilon > 0$ et $\ell_1 > 0$ à préciser ci-dessous, et on estime $u(t)$ dans L^r pour $t_2 \leq t \leq t_2 + a \leq t_2 + 1$. On décompose (voir Figure 12.2)

$$u(t) = u^{(0)}(t) + \sum_{i=1}^{4} v_i(t)$$

où les v_i sont les contributions à l'intégrale $\int_0^t dt'\,U(t - t')\,f(u(t'))$ des régions (1) $\to [0, t_2 - \ell_1]$; (2) $\to [t_2 - \ell_1, t-1]$; (3) $\to [t-1, t_2]$ et (4) $\to [t_2, t]$. Le découpage en 4 régions correspond à 2×2 possibilités :

Pour v_1 et v_4, on dispose seulement de l'information $u \in L^\infty(H^1)$.

Pour v_2 et v_3, on dispose en outre de (12.15), *i.e.* $||u(t')||_r \leq \varepsilon$.

Pour v_1 et v_2, $(t - t')$ est grand. On passe par une interpolation de L^r entre L^2 et L^{r_1}, faisant apparaître $(t - t')^{-\delta_1}$ intégrable pour $(t - t')$ grand car $\delta_1 > 1$.

Pour v_3 et v_4, on estime directement dans L^r, faisant apparaître $(t - t')^{-\delta}$ intégrable pour $(t - t')$ petit car $\delta < 1$.

Estimation de v_1. Comme précédemment pour v, on interpole L^r entre L^2 et L^{r_1}.

$$\begin{aligned}
&v_1(t) = U(t - t_2 + \ell_1)\,u(t_2 - \ell_1) - U(t)\,u_0\,,\\
&||v_1(t)||_2 \leq 2\,||u||_2\,,\\
&||v_1(t)||_{r_1} \leq C\ \ell_1^{1-\delta_1}\,||f(u); L^\infty(\mathbb{R}^+, L^{\bar{r}_1})||\,,\\
&||v_1(t)||_r \leq M\ \ell_1^{\delta(1/\delta_1 - 1)}\,.
\end{aligned} \tag{12.18}$$

Estimation de v_2. On interpole encore entre L^2 et L^{r_1} :

$$\begin{aligned}
&v_2(t) = U(1)\,u(t-1) - U(t - t_2 + \ell_1)\,u(t_2 - \ell_1)\,,\\
&||v_2(t)||_2 \leq 2\,||u||_2\,,\\
&||v_2(t)||_{r_1} \leq C \int_{t_2 - \ell_1}^{t-1} dt'\,(t - t')^{-\delta_1}\,||f(u); L^\infty([t_2 - \ell_1, t-1], L^{\bar{r}_1})||\,.
\end{aligned}$$

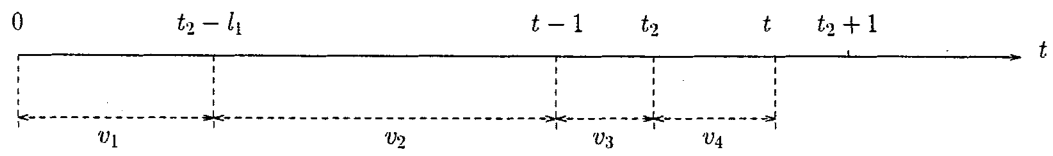

Fig. 12.2 *Partage de la région d'intégration dans le Lemme 12.6 .*

Mais

$$||f(u)||_{\bar{r}_1} \leq C \sum_i ||u||^{p_i}_{p_i\,\bar{r}_1} \leq M \sum_i ||u||_r^{p_i \delta(p_i\,\bar{r}_1)/\delta}$$

et comme l'intégrale sur t est convergente à l'infini,

$$||v_2(t)||_{r_1} \leq M\, \varepsilon^{p_i \delta(p_i\,\bar{r}_1)/\delta}\,,$$
$$||v_2(t)||_r \leq ||v_2(t)||_2^{1-\delta/\delta_1}\, ||v_2(t)||_{r_1}^{\delta/\delta_1} \leq M\, \varepsilon^{p_1\delta(p_1\,\bar{r}_1)/\delta_1}$$

en utilisant le fait que $p \geq p_1$ et $\varepsilon \leq 1$ et en gardant la plus basse puissance de ε.

On calcule facilement

$$\frac{p_1\, \delta(p_1\,\bar{r}_1)}{\delta_1} = (p_1 - 1)\,\frac{n}{2\delta_1} - 1 = 1 + \beta \text{ avec } \beta = (p_1 - 1)\,\frac{n}{2\delta_1} - 2 > 0 \tag{12.19}$$

pour $p_1 - 1 > 4/n$ et δ_1 assez voisin de 1.

Estimation de v_3. On estime directement v_3 dans L^r par (3.5)

$$||v_3(t)||_r \leq \int_{t-1}^{t_2} dt'(t-t')^{-\delta}\, M\;\, \varepsilon^{p_1\delta(p_1\,\bar{r})/\delta}$$

et par un calcul analogue

$$\ldots \leq M\;\, \varepsilon^{1+\beta}$$

car $\varepsilon \leq 1$ et $\bar{r} > \bar{r}_1$.

Finalement en combinant cette estimation avec (12.19), on obtient

$$||(v_2 + v_3)(t)||_r \leq M\;\, \varepsilon^{1+\beta} \tag{12.20}$$

Estimation de v_4. On estime directement v_4 dans L^r par (3.5)

$$||v_4(t)||_r \leq C \int_{t_2}^{t} dt'(t-t')^{-\delta}\, ||f(u); L^\infty(\mathbb{R}^+, L^{\bar{r}})||\,,$$
$$||v_4(t)||_r \leq M\, a^{1-\delta} \tag{12.21}$$

pour $t_2 \leq t \leq t_2 + a \leq t_2 + 1$.

On choisit maintenant ε assez petit pour que $M\,\varepsilon^\beta \leq 1/4$ dans (12.20) si bien que $||(v_2+v_3)(t)||_r \leq \varepsilon/4$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ satisfaisant cette condition, qui ne dépend ni de ℓ_1 ni de t_2, on choisit ℓ_1, dépendant de ε mais non de t_2 tel que

$$||u^{(0)}(t)||_r \leq \varepsilon_{0,r}(t) \leq \varepsilon_{0,r}(\ell_1) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

et $||v_1(t)||_r \leq \varepsilon/4$ par (12.18). On choisit enfin a, dépendant de ε, mais indépendant de ℓ_1 et t_2, pour assurer $||v_4(t)||_r \leq \varepsilon/4$ par (12.21).

Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\ell_1(\varepsilon)$ ainsi choisi, il existe $t_2 \geq \ell_1$ qui assure (12.15), et par le calcul précédent, on a

$$||u(t)||_r \leq \varepsilon$$

pour $t_2 \leq t \leq t_2 + a$, donc on a aussi (12.16). *A fortiori*, on a (12.15) avec t_2 remplacé par $t_2 + a$ avec le même ℓ_1, le même ε et $a = a(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε. On peut donc itérer l'opération et on en déduit

$$||u; L^\infty([t_2 - \ell_1, \infty), L^r)|| \leq \varepsilon\,.$$

Le résultat précédent est valable pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, donc $||u(t)||_r \to 0$ quand $t \to \infty$.

Avec le Lemme 12.6 disponible, on peut conclure par des estimations très voisines de celles des sections précédentes.

Proposition 12.1. *Soit f satisfaisant (H4) avec $p_1 - 1 > 4/n$, (H2) et (H6). Soit $u_0 \in H^1$ et $u \in X^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ la solution de l'équation SNL avec $u(0) = u_0$. Alors $u \in X^1(\mathbb{R})$.*

Preuve. Soit $0 < t_1 < t_2$. On estime u dans $X^1_{p+1}([t_1, t_2])$ en utilisant l'équation intégrale avec temps initial t_1

$$u(t) = U(t-t_1)\, u(t_1) - i \int_{t_1}^{t_2} dt'\, U(t-t')\, f(u(t'))\,.$$

Par les mêmes estimations que dans la preuve de la Proposition 10.1 (voir en particulier (10.8)-(10.9)), en se limitant comme dans celle-ci à une seule puissance dans l'interaction, et en choisissant également $r = r' = s = p+1$, on obtient

$$\begin{aligned} \left|\left|u; X^1_{p+1}([t_1,t_2])\right|\right| \leq C \,||u(t_1); H^1|| + C\Big\{\left|\left|u; L^q([t_1,t_2], L^{p+1})\right|\right| \\ + \left|\left|\nabla u; L^q([t_1,t_2], L^{p+1})\right|\right|\Big\} \left|\left|u; L^k([t_1,t_2], L^{p+1})\right|\right|^{p-1} \end{aligned} \tag{12.22}$$

avec

$$\begin{cases} \dfrac{2}{q} = \delta(p+1) \\ (p-1)\,\dfrac{2}{k} = 2(1-\delta(p+1))\,. \end{cases} \tag{12.23}$$

L'hypothèse $p-1 > 4/n$ entraîne $k > q$. En effet cette dernière condition est équivalente à $(p-1)\,\delta(p+1) > 2(1-\delta(p+1)) \Leftrightarrow (p+1)\,\delta(p+1) \equiv (p-1)\,n/2 > 2$. On interpole alors L^k entre L^q et L^∞ dans la dernière norme de (12.22). Omettant l'intervalle $[t_1, t_2]$ on a

$$||u; L^k(L^{p+1})|| \leq ||u; L^q(L^{p+1})||^{q/k}\, ||u; L^\infty(L^{p+1})||^{1-q/k}\,.$$

Substituant ce résultat dans (12.22), on obtient

$$||u; X^1_{p+1}|| \leq M + C\,||u; X^1_{p+1}||^\alpha\, ||u; L^\infty(L^{p+1})||^{p-\alpha}$$

avec

$$1 < \alpha = 1 + (p-1)\,\frac{q}{k} = 1 + \frac{2(1-\delta(p+1))}{\delta(p+1)} < p\,,$$
$$M = C\,||u; L^\infty(\mathbb{R}, H^1)||\,.$$

On obtient donc pour la quantité $y = ||u; X^1_{p+1}([t_1,t_2])||$ une estimation du type

$$y \leq a + b\,y^\alpha \tag{5.6}$$

où $a = M$ est indépendant de t_1, t_2 et où

$$b = ||u; L^\infty([t_1,t_2], L^{p+1})||^{p-\alpha}\,.$$

Par le Lemme 12.6, b tend vers zéro quand $t_1 \to \infty$, uniformément par rapport à t_2. D'autre part y est une fonction croissante continue de t_2 à t_1 fixé, inférieure à a pour $t_2 = t_1$. Par le même argument que dans la preuve de la Proposition 5.6, pour b assez petit pour que le sous ensemble de $\mathbb{R}^+$ défini par (5.6) ait deux composantes connexes, *i.e.* pour t_1 assez grand et uniformément en t_2, y reste dans la composante connexe de 0 de cette région, et reste donc borné uniformément par rapport à t_2. Par suite $u \in X^1_{p+1}(\mathbb{R}^+)$. L'extension du résultat de $X^1_{p+1}(\mathbb{R}^+)$ à $X^1(\mathbb{R})$ est immédiate.

Par les mêmes arguments que dans la Section 11, on conclut :

Proposition 12.2. *Sous les hypothèses de la Proposition 12.1, les opérateurs d'onde et leurs inverses sont des bijections de H^1 sur H^1, continues et bornées.*

On doit noter cependant que la méthode de cette section est trop détournée pour fournir une estimation de $||u; X^1(\mathbb{R})||$ en fonction de $||u_0; H^1||$. Ceci se voit dans la preuve de la Proposition 12.1 par le fait qu'on n'a pas d'estimation de t_1 en fonction de $||u_0; H^1||$.

Néanmoins, on a classé toutes les solutions de l'équation SNL à données dans H^1 par leurs comportements asymptotiques, qui sont ceux des solutions de l'équation libre.

Note bibliographique.

La méthode utilisée dans cette section est celle de [MoSta], appliquée à l'origine à l'équation de Klein-Gordon. Le cadre naturel de cette méthode est l'espace d'énergie, en l'occurrence H^1, et c'est la seule méthode qui marche à ce niveau de généralité. Elle a été appliquée à l'équation SNL dans Σ dans [LiSta]. La complétude asymptotique dans H^1 pour $p > 1 + 4/n$ se trouve dans [GV2] et la preuve a été simplifiée dans [C1]. l'exposé ci-dessus suit [GV2] et [C1].

Bibliographie

[A] R.A. Adams : *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York (1975).

[Ba] J.E. Barab : *Nonexistence of asymptotically freee solutions of a nonlinear Schrödinger equation,* J. Math. Phys. **25** (1984), 3270–3273.

[Bag] V. Bargmann : *On unitary ray representations of continuous groups,* Ann. Math. **59** (1954), 1–46.

[Bau] A. O. Barut: *Conformal group, Schrödinger group, Dynamical group. The maximal kinematical group of the massive Schrödinger particle,* Helv. Phys. Acta **46** (1973), 493–503.

[Be] L. Bergé : *Wave collapse in Physics : Principles ans applications to light and plasma waves,* Phys. Rep. (1998) sous presse.

[Bo] J. Bourgain : *New global wellposedness results for nonlinear Schrödinger equations,* Prétirage IAS, Princeton (1998).

[C1] T. Cazenave : *An introduction to nonlinear Schrödinger equations,* Text. Met. Mat. **26**, Univ. Fed. Rio de Jan. (1993).

[C2] T. Cazenave : *Blow up and scattering in the nonlinear Schrödinger equation,* Text. Met. Mat. **30**, Univ. Fed. Rio de Jan. (1994).

[CHa] T. Cazenave, A. Haraux : *Introduction aux problèmes d'évolution semilinéaires,* Math. & Appl. **1**, SMAI, Ellipses (1990).

[CW1] T. Cazenave, F. Weissler : *The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in H^1,* Manuscripta Math. **61**, (1988), 477–494.

[CW2] T. Cazenave, F. Weissler : *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s,* Nonlin. Anal. TMA **14**, (1990), 807–836.

[CW3] T. Cazenave, F. Weissler : *Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation,* Commun. Math. Phys. **147**, (1992), 75–100.

[CoHi] R. Courant, D. Hilbert : *Methods of Mathematical Physics, Vol. I,* Interscience, New York (1962).

[DS] N. Dunford, J.T. Schwartz : *Linear Operators, Vol. I,* Interscience, New York (1958).

[F] A. Friedmann : *Partial Differential Equations,* Holt Rinehart & Winston, New York (1969).

[GO] J. Ginibre, T. Ozawa : *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$,* Commun. Math. Phys. **151** (1993), 619–645.

[GOV] J. Ginibre, T. Ozawa, G. Velo : *On the existence of the wave operators for a class of nonlinear Schrödinger equations,* Ann. IHP (Phys. Théor.), **60** (1994), 211–239.

[GV1] J. Ginibre, G. Velo : *On a class of nonlinear Schrödinger equations, I. The Cauchy problem, II. Scattering theory,* J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–71.

[GV2] J. Ginibre, G. Velo : *Scattering Theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations,* J. Math. Pur. Appl. **64** (1985), 363–401.

[GV3] J. Ginibre, G. Velo : *The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited,* Ann. IHP (Anal. nonlin.) **2** (1985), 309–327.

[GV4] J. Ginibre, G. Velo : *Time decay of finite energy solutions of the nonlinear Klein Gordon and Schrödinger equations,* Ann. IHP (Phys. Théor.) **43** (1985), 399–442.

[GV5] J. Ginibre, G. Velo : *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation,* J. Funct. Anal. **133** (1995), 50–68.

[GV6] J. Ginibre, G. Velo : *Long range scattering and modified wave operators for some Hartree type equations,* prétirage, Orsay (1998).

[Gl] R.T. Glassey : *On the blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations,* J. Math. Phys. **18** (1977), 1794–1797.

[Ht] P. Hartman : *Ordinary differential equations,* Birkhäuser, Boston (1982).

[Hy] N. Hayashi : *Classical solutions of nonlinear Schrödinger equations,* Manuscripta Math. **55** (1986), 171–190.

[HyNm1] N. Hayashi, P.I. Naumkin : *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equation,* Am. J. Math. **120** (1998), 369–389.

[HyNm2] N. Hayashi, P.I. Naumkin : *Scattering theory and large time asymptotics of solutions to Hartree type equations with a long range potential,* prétirage (1997).

[HyTs1] N. Hayashi, Y. Tsutsumi : *Remarks on the Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations,* Lect. Notes Math. (Springer) **1285** (1987), 162–168.

[HyTs2] N. Hayashi, Y. Tsutsumi : *Scattering theory for Hartree type equations,* Ann. IHP (Phys. Théor.) **46** (1987), 187–213.

[Hö1] L. Hörmander : *The analysis of linear partial differential operators,* Vol. I, Springer, Berlin (1983).

[Hö2] L. Hörmander : *Lectures on nonlinear hyperbolic equations,* Math. & Appl. **26**, Springer, Berlin (1997).

[K1] T. Kato : *On nonlinear Schrödinger equations,* Ann. IHP (Phys. Théor.) **46** (1987), 113–129.

[K2] T. Kato : *Nonlinear Schrödinger equations,* in Schrödinger Operators, Lect. Notes. Phys. (Springer) **345** (1989), 218–263.

[K3] T. Kato : *An $L^{q,r}$–theory for nonlinear Schrödinger equations,* in Spectral and Scattering theory and Applications, Adv. Stud. Pure Math. **23** (1994), 223–238.

[K4] T. Kato : *On nonlinear Schrödinger equations II. H^s– solutions and unconditional wellposedness,* J. Anal. Math. **67** (1995), 281–306.

[LiSta] J.E. Lin, W.A. Strauss : *Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equations,* J. Funct. Anal. **30** (1978), 245–263.

[Lio] J.-L. Lions : *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires,* Dunod, Paris (1969).

[Me] F. Merle : *Nonexistence of minimal blow up solutions of equations $i\,u_t = -\Delta u - k(x)|u|^{4/N}u$ in $\mathbb{R}^N$,* Ann. IHP (Phys. Théor.) **64** (1996), 33–85.

[MoSta] C. Morawetz, W.A. Strauss : *Decay and Scattering of Solutions of a nonlinear relativistic wave equation,* Comm. Pure. Appl. Math. **25** (1972), 1–31.

[NkO] M. Nakamura, T. Ozawa : *Low energy scattering for nonlinear Schrödinger equations in fractional order Sobolev spaces,* Rev. Math. Phys. **9** (1997), 397–410.

[NwO] H. Nawa, T. Ozawa : *Nonlinear scattering with nonlocal interaction,* Commun. Math. Phys. **146** (1992), 259–275.

[Ne] R.G. Newton : *Scattering theory of waves and particles,* Mc Graw Hill, New York (1966).

[O] T. Ozawa : *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension,* Commun. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[P] H. Pecher : *Solutions of semilinear Schrödinger equations in H^s,* Ann. IHP (Phys. Théor.) **67** (1997), 259–296.

[PW] H. Pecher, W. von Wahl : *Time dependent nonlinear Schrödinger equations,* Manuscripta Math. **27** (1979), 125–157.

[RaRy] J.J. Rasmussen, K. Rypdal : *Blow up in nonlinear Schrödinger equations, I. A general review, II. Similarity structure of the blow up singularity,* Physica Scripta **33** (1986), 481–504.

[Re] M. Reed : *Abstract nonlinear wave equations,* Lect. Notes. Math. (Springer) **507** (1976).

[ReSi] M. Reed, B. Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics Vol I,* Functional Analysis, Academic Press, New York (1972).

[So] C.D. Sogge : *Lectures on nonlinear wave equations,* Monographs in Analysis II, International Press, (1995).

[Ste] E.M. Stein : *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton University Press, Princeton (1970).

[Sta1] W.A. Strauss : *Nonlinear Scattering Theory,* in Scattering Theory in Mathematical Physics, Reidel, Dordrecht (1974).

[Sta2] W.A. Strauss : *Nonlinear invariant wave equations,* in Invariant wave equations, Lect. Notes Phys. (Springer) **73** (1978), 197–249.

[Sta3] W.A. Strauss : *Nonlinear Scattering at low energy,* J. Funct. Anal. **41** (1981), 110–133, Id, Sequel, J. Funct. Anal. **43** (1981), 281–293.

[Sta4] W.A. Strauss : *Nonlinear wave equations,* Regional Conf. Ser. Math. **73**, AMS, Providence, (1989).

[Sti] R.S. Strichartz : *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations,* Duke Math. J. **44** (1977), 705–714.

[Ta] L. Tartar: *Topics in nonlinear Analysis,* Publ. Math. Orsay (1978).

[Tr] A. Trautman : *Invariance of Lagrangian systems,* in Studies in Relativity, Clarendon Press, Oxford (1972).

[Tri] H. Triebel : *Theory of Function Spaces,* Birkhäuser, Basel (1983).

[TsHy] M. Tsutsumi, N. Hayashi : *Classical solutions of nonlinear Schrödinger equations in higher dimensions,* Math. Z. **177** (1981), 217–234.

[Ts1] Y. Tsutsumi : *Scattering problem for nonlinear Schrödinger equations,* Ann. IHP (Phys. Théor.) **43** (1985), 321–347.

[Ts2] Y. Tsutsumi : *L^2 solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups,* Funk. Ekva. **30** (1987), 115–125.

[TsYa] Y. Tsutsumi, K. Yajima : *The asymptotic behaviour of nonlinear Schrödinger equations,* Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 186–188.

[Ya] K. Yajima : *Existence of solutions for Schrödinger evolution equations,* Commun. Math. Phys. **110** (1987), 415–426.

[Yo] K. Yosida : *Functional Analysis,* Springer, Berlin (1968).

Dépot Légal : 10.98

ISBN 2–87800–147–8
Paris Onze édition *L 161*

Paris Onze édition - Université de Paris-Sud - Bât. 338 - 91405 ORSAY Cédex