PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

78.03

LECONS SUR L'ANALYSE CONVEXE

ET L'APPROXIMATION DES PROBLEMES DE POINT-SELLE

M. FORTIN

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

78.03

LECONS SUR L'ANALYSE CONVEXE

ET L'APPROXIMATION DES PROBLEMES DE POINT-SELLE

M. FORTIN

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

LECONS SUR L'ANALYSE CONVEXE

ET L'APPROXIMATION DES PROBLEMES DE POINT-SELLE

M. FORTIN

Avant-propos :

Ce travail est une rédaction d'un cours de troisième cycle donné au premier semestre de l'année 1975-76. Le but n'était pas ici de donner un aperçu complet de l'analyse convexe, sur laquelle il existe d'excellents traités, mais de mettre en évidence certaines approches un peu moins classiques. La plupart des résultats du Chapitre I figurent déjà dans la littérature, dans un ordre parfois dispersé. Nous avons tenté de les regrouper en donnant pour la convergence des algorithmes des démonstrations qui semblent nouvelles.

Le Chapitre II contient davantage de résultats originaux, bien qu'extrêmement élémentaires. En effet, si la convergence des approximations aux problèmes de point-selle a déjà été étudiée, nous donnons ici des caractérisations de certains résultats abstraits, qui permettent dans la pratique de traiter des approximations dites mixtes en éléments finis.

CHAPITRE I - ANALYSE CONVEXE, PERTURBATIONS, ET VARIANTES.

Le but de ce chapitre est, après avoir rappelé les méthodes classiques de l'analyse convexe pour les problèmes variationnels, d'en donner une formulation, équivalente dans les cas habituels, qui permette d'appliquer les techniques générales au cas des inéquations variationnelles. Nous supposerons le lecteur familier avec les notions fondamentales sur la convexité pour lesquelles nous renvoyons aux ouvrages d'EKELAND-TEMAM [1] et de ROCKAFELLAR [1].

1. Introduction.

Soit V un espace de Hilbert réel et soit $\Gamma_o(V)$ l'ensemble des fonctions définies sur V , semi-continues inférieurement, convexes propres. Selon les définitions habituelles ces fonctions prennent donc leurs valeurs dans $[-\infty,+\infty]$ et ne sont pas identiquement égales à $+\infty$.

Soit $F \in \Gamma_o(V)$. Nous notons

$$\text{dom } F = \{v \in V | F(v) \neq +\infty\} \tag{1.1}$$

et nous considérons le problème primal (P)

$$\inf_{v \in V} F(v) . \tag{1.2}$$

Nous considérons alors dans un autre espace de Hilbert réel H , l'espace des perturbations. Dans la plupart des cas que nous traiterons, H sera identifié à son dual, mais cette restriction n'est nullemnet nécessaire. En fait nous pourrions étendre ce qui suit au cas où V et H sont des espaces de Banach réflexifs. A la fonction $F \in \Gamma_o(V)$ nous associons la fonction perturbée

$$\Phi(v,p) \in \Gamma_o(V \times H) \tag{1.3}$$

telle que

$$\Phi(v,0) = F(v) . \tag{1.4}$$

On définit alors

(1.5) $$h(p) = \inf_{v\in V} F(v,p) \ .$$

On montre alors (EKELAND-TEMAM [1]) que h est une fonction convexe mais n'appartient pas en général à $\Gamma_o(H)$.

Notons alors

(1.4) $$h^*(q) = \sup_{p\in H} (p,q)_H - h(p)$$

la fonction conjuguée de h . Si l'on pose

(1.7) $$g(q) = h^*(q)$$

on désigne sous le nom de <u>problème dual</u> (P^*)

(1.8) $$\inf_{q\in H} g(q) \ .$$

Considérons par ailleurs le <u>Lagrangien</u>

(1.9) $$\mathcal{L}(v,q) = \inf_{p\in H} (p,q) + \Phi(v,p) = \Phi_p^*(v,-q)$$

où Φ_p^* désigne la conjuguée de Φ par rapport à la variable p .
Problème primal, problème dual et Lagrangien sont intimement liés.
Nous résumons ici les principaux résultats pour la commodité du lecteur, qui se reportera avec profit aux ouvrages cités ci-dessus pour les démonstrations et des compléments.

<u>Proposition 1.1.</u> Il y a équivalence entre les énoncés suivants :

(1.10) u est solution de (P), p est solution de (P^*), $\inf(P) = \sup(P^*)$

et

(1.11) Le couple (u,p) est point-selle du lagrangien $\mathcal{L}(v,q)$.

(1.12) $$\begin{cases} u \text{ est solution de } (P),\ p \text{ est solution de } (P^*) \text{ et} \\ \Phi(u,0) + \Phi^*(0,p) = 0 \ . \end{cases}$$

La condition $\Phi(u,0) + \Phi^*(0,p) = 0$ porte le nom de relation d'extrémalité.

Ce résultat est démontré dans EKELAND-TEMAM [1], parmi d'autres résultats liés. Par la suite nous allons considérer des cas particuliers et tenter de montrer le cas échéant l'existence d'un point-selle.

2. Cas de la dualité de Fenchel-Rockafellar.

Nous considérons ici un cas particulier important pour les applications où la fonctionnelle à minimiser est la somme de deux fonctions convexes.

Soit donc $f \in \Gamma_0(V)$, $g \in \Gamma_0(H)$, $B \in \mathcal{L}(V,H)$.

Nous considérons alors le problème primal (P)

(2.1) $$\inf_{v \in V} f(v) + g(Bv) .$$

On pourrait dans un cadre légèrement plus général (EKELAND-TEMAM [1]) considérer

(2.2) $$\inf_{v \in V} F(v,Bv) \ , \quad F \in \Gamma_0(V \times H) .$$

Il est alors classique de définir comme fonctionnelle perturbée

(2.3) $$\Phi(v,p) = F(v,Bv-p)$$

d'où dans le cas particulier (2.1)

(2.4) $$\Phi(v,p) = F(v) + g(Bv-p) .$$

On trouvera dans EKELAND-TEMAM [1] la démonstration du résultat suivant :

Théorème 2.1. Le problème dual (P^*) de (2.2) est

(2.5) $$\sup_{p \in H} \left[-F^*(B^*p,-p)\right] .$$

Si l'on a

(2.6) $$\begin{cases} \text{Il existe } u_0 \in V \text{ tel que } F(u_0,Bu_0) < +\infty, \text{ la fonction} \\ p \longrightarrow F(u_0,p) \text{ étant continue en } Bu_0 . \end{cases}$$

Alors on a

$$(2.7) \qquad \inf(P) = \sup(P^*)$$

et le problème dual (P^*) possède au moins une solution.
De plus si $u \in V$, $p \in H$ sont respectivement solutions de (P) et de (P^*) avec $\inf(P) = \sup(P^*)$, on a la relation d'extrémalité

$$(2.8) \qquad \mathcal{F}(u,Bu) + \mathcal{F}^*(B^*p,-p) = 0$$

équivalente à

$$(2.9) \qquad (B^*p,-p) \in \partial\mathcal{F}(u,Bu) \ .$$

<u>Corollaire</u> : Le problème dual de (2.1) s'écrit

$$(2.10) \qquad \sup_p \left[-f^*(B^*p) - g^*(-p)\right] \ .$$

Si l'on a

$$(2.11) \qquad \begin{cases} \text{Il existe } u_o \in V \text{ tel que } f(u_o) < +\infty \ , \ g(Bu_o) < +\infty \\ g \text{ étant continue en } Bu_o \end{cases}$$

alors $\inf(P) = \sup(P^*)$, le problème dual possède au moins une solution et l'on a les relations d'extrémalité

$$(2.12) \qquad f(u) + f^*(B^*p) = \langle B^*p,u\rangle_{V' \times V}$$

$$(2.13) \qquad g(Bu) + g^*(-p) = (-p,Bu)$$

équivalentes à

$$(2.14) \qquad B^*p \in \partial f(u)$$

$$(2.15) \qquad -p^* \in \partial g(Bu) \ .$$

Nous allons montrer que l'on peut étendre ces résultats au cas de certaines inéquations variationnelles.

Nous considérons donc un opérateur $A : V \longrightarrow V'$ non nécessairement linéaire et l'inéquation variationnelle

(2.16) $$\langle Au-f,v-u\rangle + g(Bv) - g(Bu) \geq 0 \qquad \forall v \in V .$$

Si A est un opérateur monotone, dérivée d'une fonctionnelle $h(v)$ ce problème contient le problème (2.1) dans le cas où f est dérivable.
Nous supposerons connue l'existence d'une solution u à ce problème variationnel.
Ce sera le cas par exemple si l'opérateur A est linéaire et coercif i.e.

(2.17) $$\langle Av,v\rangle \geq \alpha \|v\|^2 .$$

Nous voulons obtenir ici un analogue du problème dual (2.10) et des relations d'extrémalité (2.14)-(2.15).
Pour ce, considérons $u^* = f - Au \in V'$, l'inéquation (2.16) peut s'écrire

(2.18) $$g(Bv) \geq g(Bu) + \langle u^*,v-u\rangle$$

ou encore

(2.19) $$u^* \in \partial g \circ B(u) .$$

Nous utilisons alors le résultat classique suivant, que l'on démontre par le théorème de Hahn-Banach.

Lemme 2.1. S'il existe un point p_o où g est finie et continue alors $\forall u^* \in \partial(g \circ B)(u)$, il existe $p \in H$ tel que $u^* = B^*p$ et $p \in \partial g(Bu)$.

On a donc l'existence de $p \in H$ tel que

(2.20) $$f - Au = B^*p$$

ou encore écrivant $\bar{p} = -p$

(2.21) $$Au - f = B^*(\bar{p})$$

(2.22) $$-\bar{p} \in \partial g(Bu)$$

conditions qui ne sont autres que (1.14)-(1.15) dans le cas classique.

Pour obtenir un problème dual, nous allons écrire (2.22) sous la forme équivalente.

$$Bu \in \partial g^*(p) \tag{2.23}$$

ou de façon explicite

$$g^*(q) \geqslant g^*(p) + (q-p,Bu) \quad \forall q \in H \,. \tag{2.24}$$

Dans le cas classique, (2.20) et (2.24) sont les conditions d'optimalité du lagrangien. A p donné, notons

$$A^+(f-B^*p) \tag{2.25}$$

une solution (que nous supposons exister toujours) du problème

$$Au = f - B^*p \,. \tag{2.26}$$

Utilisant (2.25), nous pouvons éliminer u de (2.24) obtenant

$$g^*(q) \geqslant g^*(p) + (q-p,BA^+(f-B^*p)) \tag{2.27}$$

i.e. l'inéquation variationnelle

$$(A^+B^*p,B^*q-B\ p) + g^*(q) - g^*(p) \geqslant (BA^+f,q-p) \,, \qquad \forall q \in H \,. \tag{2.28}$$

On retrouve bien la condition d'optimalité de (2.10) dans le cas standard.

L'intérêt de la démonstration qui précède est de montrer que les propriétés essentielles pour l'obtention du résultat sont liées à la notion de sous-différentiel.

3. Une variante de la méthode des perturbations.

Nous reprenons ici les résultats du N°2 dans un cadre légèrement différent. Le point essentiel du développement sera de montrer que pour une classe assez générale de problèmes variationnels, l'existence d'un multiplicateur de Lagrange se ramène au cas d'une contrainte linéaire d'égalité. Nous aborderons aussi le cas des lagrangiens augmentés. La présentation donnée ici permet de rendre plus intuitif le fait que le problème dual augmenté soit un problème sans contrainte.

Nous considérons donc le problème variationnel sur V

(3.1) $$\inf_{v \in V} f(v) + g(Bv)$$

sous les mêmes hypothèses qu'au N°2.

Une façon classique et immédiate de dualiser ce problème est de l'écrire sous la forme évidemment équivalente,

(3.2) $$\inf_{(v,q)\in Z} f(v) + g(q) \ ,$$

(3.3) $$Z = \{(v,q) \mid v \in V \ , \ q \in H \ , \ Bv = q\} \quad .$$

L'idée essentielle est évidemment ici de chercher à découpler la partie dépendant de v de celle dépendant de Bv. Ce découplage prend un intérêt certain lorsque la fonction g contient des contraintes portant sur Bv.

Pour obtenir le découplage recherché nous relaxons le problème (3.2)-(3.3) en cherchant à satisfaire la contrainte $Bv = q$ au moyen d'un multiplicateur de Lagrange. Nous considérons donc le lagrangien

(3.4) $$\mathcal{L}(v,q,\lambda) = f(v) + g(q) + (\lambda, Bv-q) \ ,$$

Nous avons donc (formellement pour l'instant) ramené le problème (3.1) à un problème de point selle : trouver $(u,p,\lambda) \in V \times H \times H$

(3.5) $$\mathcal{L}(u,p,\mu) \leq \mathcal{L}(u,p,\lambda) \leq \mathcal{L}(v,q,\lambda), \forall (v,q) \in V \times H, \ \forall \mu \in H \ ,$$

ou encore

(3.6) $$\inf_{(v,q)} \sup_{\lambda} \mathcal{L}(v,q,\lambda) \ .$$

Pour justifier cette démarche, nous devons montrer que le problème (3.5) possède une solution ou encore que l'on a

(3.7) $$\inf_{(v,q)} \sup_{\lambda} \mathcal{L}(v,q) = \sup_{\lambda} \inf_{(v,q)} \mathcal{L}(v,q)$$

et que le multiplicateur de Lagrange λ existe.

Remarquons que le problème $\inf_{(v,q)} \mathcal{L}(v,q)$ peut dans certains cas se découpler en un problème en v et un problème en q indépendants. Ce sera le cas si f

et g sont convexes propres s.c.i. et coercives.

Remarquons aussi que la question de l'existence du multiplicateur se trouve ramenée au cas d'un problème à contrainte linéaire d'égalité. Nous aborderons un peu plus loin ce problème. Auparavant nous allons montrer que la démarche suivie ici est formellement la même que la démarche classique de ROCKAFELLAR [1] et EKELAND - TEMAM [1] du N°2.

En effet le problème perturbé classique est ici

$$\phi(v,p) = f(v) + g(Bv-p) \ . \tag{3.8}$$

Le lagrangien classique $L(v,q)$ est alors défini par

$$\begin{aligned} L(v,\lambda) &= \inf_p \, (p,\lambda) + \phi(v,p) \\ &= \inf_p \, (p,\lambda) + f(v) + g(Bv-p) \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Posons alors $q = Bv - p$.
On peut alors écrire (3.9) sous la forme

$$L(v,\lambda) = \inf_q \, (Bv-q,\lambda) + f(v) + g(q) = \inf_q \mathcal{L}(v,q,\lambda) \ . \tag{3.10}$$

Le problème

$$\sup_\lambda \inf_v L(v,\lambda) = \sup_\lambda \{\inf_v \{\inf_q f(v) + g(q) + (Bv-q,\lambda)\} \tag{3.11}$$

est donc bien le même que le problème (3.6).

Le lagrangien $\mathcal{L}(v,q,\lambda)$ peut être considéré comme une forme en quelque sorte explicite de $L(v,\lambda)$ défini par (3.10). Nous verrons plus loin que cette forme présente dans certains cas un intérêt dans la construction d'algorithmes.

Ayant construit le lagrangien $\mathcal{L}(v,q,\lambda)$ il est naturel de considérer un lagrangien augmenté

$$\mathcal{L}_r(v,q,\lambda) = f(v) + g(q) + (\lambda,Bv-q) + \frac{r}{2} |Bv-q|^2 \ . \tag{3.12}$$

Ce lagrangien augmenté est du type le plus classique introduit par HESTENES [1]. Il est remarquable que cette forme soit encore équivalente à la façon standard de définir un lagrangien augmenté $L_r(v,q)$.

En effet suivant ROCKAFELLAR [1] et FORTIN [1], nous considérons

(3.13) $$\phi_r(v,p) = \phi(v,p) + \frac{r}{2}\,|p|^2$$

et nous définissons

(3.14) $$L_r(v,\mu) = \inf_p \; \phi(v,p) + \frac{r}{2}\,|p|^2 + (p,\mu) \; .$$

On vérifie comme ci-haut que l'on a

(3.15) $$\sup_\mu \inf_v L_r(v,\mu) = \sup_\mu \inf_{(v,q)} \mathcal{L}_r(v,q,\mu) \; .$$

Il découle immédiatement des résultats classiques que l'on a la

<u>Proposition 3.1.</u> <u>Soit</u> $\{u,p,\lambda\}$ <u>un point-selle de</u> $\mathcal{L}(v,q,\mu)$ <u>alors</u> u <u>est solution du problème</u> (P) <u>et</u> $p = Bu$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit d'interpréter les inégalités

(3.16) $$\mathcal{L}(u,p,\mu) \leqslant \mathcal{L}(u,p,\lambda) \leqslant \mathcal{L}(v,p,\lambda) \; , \quad \forall \{v,q\} \in V \times H \; , \quad \forall \mu \in H \; .$$

L'inégalité de gauche donne immédiatement $p = Bu$. Prenant $q = Bv$ dans l'inégalité de droite on vérifie que u est solution de (P) .

Le résultat fondamental justifiant l'utilisation de $\mathcal{L}_r$ est évidemment la

<u>Proposition 3.2.</u> <u>Tout point-selle de</u> $\mathcal{L}$ <u>est point-selle de</u> $\mathcal{L}_r$, <u>pour tout</u> $r>0$ <u>et réciproquement</u>.

<u>Démonstration</u> : Soit $\{u,p,\lambda\}$ un point-selle de $\mathcal{L}_r$, on a donc

(3.17) $$\mathcal{L}_r(u,p,\mu) \leqslant \mathcal{L}_r(u,p,\lambda) \leqslant \mathcal{L}_r(v,q,\lambda) \; , \quad \forall \mu \in H, \; \forall \{v,q\} \in V \times H \; .$$

L'inégalité de gauche donne immédiatement $p = Bu$. Compte tenu de la convexité de $\mathcal{L}_r$ en $\{v,q\}$, l'inégalité de droite est équivalente, λ étant connu à un système d'inéquations variationnelles.

(3.18) $$f(v) - f(u) + (\lambda, Bv-Bu) + r(Bu-p, Bv-Bu) \geqslant 0 \; , \quad \forall v \in V$$

(3.19) $\qquad g(q) - g(p) - (\lambda,q-p) - r(Bu-p,q-p) \geqslant 0 \ , \quad \forall q \in H \ .$

Compte tenu du fait que $Bu = p$, ces inéquations sont aussi équivalentes à

(3.20) $\qquad \mathscr{L}(u,p,\lambda) \leqslant \mathscr{L}(v,q,\lambda) \ , \quad \forall \{v,q\} \in V \times H \ ,$

et l'inégalité,

(3.21) $\qquad \mathscr{L}(u,p,\mu) \leqslant \mathscr{L}(u,p,\lambda) \ , \quad \forall \mu \in H$

est immédiate.

Le raisonnement est évidemment le même dans l'autre sens.

Remarque 3.1. Le fait que les points-selles soient les mêmes peut se déduire de façon plus intrinsèque des définitions de base.

En effet, soit $\phi(v,p)$ la fonction de perturbation, $\phi_r(v,p)$ son analogue augmentée. On définit alors

(3.22) $$h(p) = \inf_{v \in V} \phi(v,p)$$

(3.23) $$h_r(p) = \inf_{v \in V} \phi_r(v,p) = h(p) + \frac{r}{2}|p|^2 \ .$$

Une solution du problème dual est alors un élément du sous-différentiel $\partial h(0)$ dans le cas usuel et $\partial h_r(0)$ dans le cas augmenté. Il est clair que h et h_r ont les mêmes sous-différentiels en 0 .

Remarque 3.2. Le fait que l'on puisse écrire le problème dual correspondant à $L_r(v,\mu)$ au moyen de $\mathscr{L}_r(v,q,\mu)$ "explique" le fait que le lagrangien augmenté $L_r(v,\mu)$ soit différentiable en μ (cf. FORTIN [1]) et sans contrainte sur μ . En effet le lagrangien $\mathscr{L}_r(v,q,\lambda)$ est associé à un problème de minimisation sans contrainte linéaire d'égalité.

On vérifie par ailleurs que $L_r(v,\mu) = L(v,\mu) \overset{\mu}{\square} w(\mu)$ le signe $\square$ désignant une inf-convolution (cf. ROCKAFELLAR [1], MOREAU [1]) et la fonction $w(\mu)$ étant $\frac{1}{2r}|\mu|^2$. On montre qu'il s'agit là d'une régularisation de $L(v,\mu)$.

Nous avons montré que formellement l'utilisation des lagrangiens L et $\mathscr{L}$ était équivalente. De façon plus précise nous avons le résultat suivant :

<u>Proposition 3.3</u>. <u>Soit</u> $\{u,\lambda\}$ <u>un point-selle de</u> $L(v,\mu)$, <u>alors</u> $\{u,Bu,\lambda\}$ <u>est point-selle de</u> $\mathcal{L}(v,q,\mu)$. <u>Réciproquement, si</u> $\{u,p,\lambda\}$ <u>est point-selle de</u> $\mathcal{L}$ $\{u,\lambda\}$ <u>est point-selle de</u> $L(v,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Soit $\{u,\lambda\}$ point-selle de L . Posant $p = Bu$ on a évidemment

$$(3.24) \qquad \mathcal{L}(u,p,\mu) \leqslant \mathcal{L}(u,p,\lambda) = L(u,\lambda) = f(u) + g(Bu) .$$

Par ailleurs on a

$$(3.25) \qquad \mathcal{L}(u,p,\lambda) = L(u,\lambda) \leqslant L(v,\lambda) \quad \forall v \in V ,$$

mais d'après (3.10) on a,

$$(3.26) \qquad L(v,\lambda) \leqslant \mathcal{L}(v,q,\lambda) , \quad \forall q \in H ,$$

d'où

$$(3.27) \qquad \mathcal{L}(u,p,\lambda) \leqslant \mathcal{L}(v,q,\lambda) \quad \forall v \in H , \quad \forall q \in H .$$

Réciproquement, soit $\{u,p,\lambda\}$ un point-selle de $\mathcal{L}(v,q,\mu)$.
On sait alors que $p = Bu$. On a alors

$$\mathcal{L}(u,p,\mu) \leqslant \mathcal{L}(u,p,\lambda) \leqslant \mathcal{L}(v,q,\lambda) \quad \forall \{v,q\} \in V \times H , \quad \forall \mu \in H .$$

Posons $v = u$ dans l'inégalité de droite, on a

$$(3.28) \qquad \mathcal{L}(u,p,\lambda) \leqslant \mathcal{L}(u,q,\lambda) , \quad \forall q .$$

Considérant (3.10) on en tire

$$(3.29) \qquad \mathcal{L}(u,p,\lambda) = L(u,\lambda) = f(u) + g(Bu) .$$

Par ailleurs on peut écrire

$$(3.30) \qquad L(u,\lambda) = \mathcal{L}(u,p,\lambda) \leqslant \mathcal{L}(v,q,\lambda) \leqslant \inf_q \mathcal{L}(v,q,\lambda) = L(v,\lambda) .$$

De même on a

$$(3.31) \qquad L(u,\mu) = \inf_q \mathcal{L}(u,q,\mu) \leq \mathcal{L}(u,p,\mu) \leq \mathcal{L}(u,p,\lambda) = L(u,\lambda)$$

d'où le résultat.

Nous avons donc montré que les lagrangiens L et $\mathcal{L}$, (donc L_r et $\mathcal{L}_r$) possèdent les mêmes points-selles. On peut donc pour établir l'existence d'un point-selle de $\mathcal{L}$ utiliser les résultats du N°2. Il est cependant intéressant de remarquer que nous avons ramené le problème à celui de l'existence d'un multiplicateur de Lagrange dans le cas d'une contrainte linéaire d'égalité. Nous considérons donc cette question du N°4 ci-après.

Auparavant nous allons voir pour terminer, que la variante de la méthode des perturbations que nous avons utilisée ici peut s'étendre au cas des inéquations variationnelles, ce qui n'est pas à notre connaissance le cas de l'approche classique. Cette remarque qui n'est peut-être pas très importante permet néanmoins de ramener une certaine unité dans un ensemble de méthodes apparemment disparates. Considérons donc, comme au N°2 le problème

$$(3.32) \qquad \langle Au-f, v-u\rangle + g(Bv) - g(Bu) \geq 0 , \quad \forall v \in V .$$

On peut évidemment l'écrire sous la forme

$$(3.33) \qquad \langle Au-f, v-u\rangle + g(q) - g(p) \geq 0 , \quad \forall \{v,q\} \in Z$$

Z étant toujours défini par (3.3).

Le raisonnement suivi est alors le même qu'au N°2. Posant $u^* = f - Au \in V'$ on déduit de (3.33) pour $q = Bv$ et compte tenu du fait que $p = Bu$ que l'on a

$$(3.34) \qquad u^* \in \partial(g \circ B)(u) .$$

On en déduit alors que s'il existe un point p_o où g est finie et continue alors, il existe un $\lambda \in H$ avec d'une part

$$(3.35) \qquad f - Au = B^*\lambda$$

et d'autre part

$$(3.36) \qquad \lambda \in \partial g(Bu)$$

ce que l'on peut écrire,

$$(3.37) \qquad \langle Au-f,v\rangle + (\lambda,Bv) = 0 \ , \quad \forall v \in V$$

$$(3.38) \qquad g(q) - g(p) - (\lambda,q-p) \geqslant 0 \ , \ \forall q \in H$$

conditions auxquelles on peut adjoindre

$$(3.39) \qquad (Bu-p,\mu) = 0 \ , \quad \forall \mu \in H \ .$$

On reconnait là l'analogue des conditions d'optimalité (3.18)-(3.19) pour le lagrangien (avec $r = 0$) dans le cas standard.

On constate une fois de plus que la notion de sous-différentiel est fondamentale.

4. Quelques résultats sur l'existence des multiplicateurs.

Notre but est ici de démontrer en dimension infinie l'existence, sous certaines conditions, d'un multiplicateur de Lagrange pour un problème de minimisation sous une contrainte linéaire d'égalité. Le résultat est classique en dimension finie et ne fait intervenir dans ce cas que des notions purement algébriques. Nous devons dans le cas général, utiliser comme on peut s'y attendre le théorème de Hahn-Banach.

Nous aurons besoin de façon essentielle du

Lemme 4.1. *Soit* V *et* H *deux espaces de Hilbert et* $B \in \mathcal{L}(V,H)$; *si l'image de* B *est fermée dans* H , B *est un isomorphisme de* $V/\mathrm{Ker}\,B$ *sur* $\mathrm{Im}\,B$ *et il existe une constante* k *telle que*

$$(4.1) \qquad \inf_{v_o \in \mathrm{Ker}\,B} \|v+v_o\|_V < k|Bv|_H \ .$$

Le résultat est une conséquence immédiate du théorème du graphe fermé, il est encore vrai pour des espaces de Banach réflexifs.

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème 4.1. *Soit le problème de minimisation* (P)

(4.2) $$\inf_{v \in Z} F(v)$$

(4.3) $$Z = \{ v \mid v \in V,\ Bv = 0\}$$

Si le problème (P) possède une solution, si l'image de B est fermée et s'il existe $u_0 \in V$ où F est finie et continue, alors il existe un $\lambda \in H$ tel que (u,λ) soit un point-selle du Lagrangien.

(4.4) $$\mathcal{L}(v,\mu) = F(v) + (\mu, Bv)$$

Démonstration : Soit u solution de (P), on a alors

(4.4) $$0 \in \partial (F + \delta)(u)$$

où

(4.5) $$\delta(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } Bv = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

S'il existe un u_0 où F est finie et continue, on peut alors écrire d'après les résultats classiques sur le sous-différentiel d'une somme (cf. EKELAND-TEMAM [1]),

(4.6) $$\begin{cases} 0 = u^*_1 + u^*_2 \\ u^*_1 \in \partial F(\mu) \\ u^*_2 \in \partial\delta(\mu) \end{cases}$$

Mais $u^*_2 \in \partial\delta(u)$ peut s'écrire simplement

(4.7) $$(u^*_2, v) = 0, \quad \forall v \in Z$$

Considérons sur Im B, la forme linéaire

(4.8) $$L(q) = (u^*_2, v) \quad , \quad \forall q = Bv .$$

D'après (4.7), L(q) est bien définie et par le lemme 4.1 on a

(4.9) $$|L(q)| \leqslant k \|u^*_2\|_V \, |Bv|_H$$

c'est-à-dire que L est continue sur l'image de B. Par le théorème de Hahn-Panach, il existe un $\lambda \in H$ prolongeant L i.e.

(4.10) $$L(q) = (\lambda, q) \qquad \forall q \in H$$

si $q \in \text{Im } B$ on a donc

(4.11) $$(u^*_2, v) = (\lambda, Bv) \qquad \forall v \in V$$

c'est-à-dire

(4.12) $$u^*_2 = B^* \lambda \quad .$$

Mais d'après (4.6), on a

(4.13) $$-B^* \lambda \in \partial F(u)$$

d'où, explicitement,

(4.14) $$F(v) \geq F(u) - (B^* \lambda, v-u)$$

i.e. d'après (4.4)

(4.15) $$\mathcal{L}(u,\lambda) \leq \mathcal{L}(v,\lambda) \qquad \forall v \in V.$$

Par ailleurs, comme $Bu = 0$, on a évidemment

(4.16) $$\mathcal{L}(u,\mu) \leq \mathcal{L}(u,\lambda) \ , \quad \forall \ \mu \in H \ ,$$

d'où le résultat.

Remarque 4.1 : La condition sur l'existence d'un u_0 où F est finie et continue est suffisante mais n'est pas nécessaire. Dans un cas où on pourrait écrire (4.6) sans que cette condition soit vérifiée, le théorème serait évidemment vrai.

Le résultat démontré ci-dessus s'applique évidemment au Lagrangien $\mathcal{L}(v,q, \ )$ du N°3. Les conditions seraient alors

(4.17) (P) possède une solution

(4.18) il existe (u_0, p_0) où $f(u_0) + g(p_0)$ est finie et continue

(4.19) Im B est fermée dans H.

On remarquera que ces conditions sont plus restrictives que celles du N°2.

Remarque 4.2 : La démonstration du Théorème 4.1 s'adapte sans aucune difficulté au cas d'une inéquation de la forme

(4.20) $$< Au - f, v-u> \geqslant 0 \qquad \forall v \in \text{Ker } B.$$

5. Algorithmes pour la recherche d'un point-selle de $\mathcal{L}_r(v,q,\mu)$

L'intérêt de l'introduction du lagrangien et d'un problème dual est évidemment la possibilité de les utiliser pour la résolution du problème. Nous allons présenter ici deux algorithmes. Le premier qui est un algorithme de type Uzawa est tout à fait classique dans sa conception et ne diffère des techniques classiques que par un jeu d'écriture. Le second tire explicitement parti de la structure particulière du problème; il est peut-être considéré comme une approximation du premier. Pour montrer la convergence de ces algorithmes, nous devrons faire quelques hypothèses supplémentaires :

(5.1) g est différentiable.

(5.2) $$f = f_0 + f_1$$

où

f_1 est différentiable et uniformément strictement convexe.

Algorithme I : Soit μ^0 choisi arbitrairement,

On calcule (v^{n+1}, q^{n+1}), solution de

(5.3) $$r(Bv^{n+1}, Bv) = r(q^{n+1}, Bv) - (\mu^n, Bv) - (g'(v^{n+1}), v), \ \forall v \in V,$$

(5.4) $$\begin{cases} (f'_0(q^{n+1}), q-q^{n+1}) + j(q) - j(q^{n+1}) + (rq^{n+1} - rBv^{n+1} - \mu^n, q-q^{n+1}) \geqslant 0, \\ \forall q \in H \end{cases}$$

ou encore

(5.5) $$\mathcal{L}(v^{n+1}, q^{n+1}, \mu^n) \leqslant \mathcal{L}(v,q,\mu^n), \ \forall (v,q) \in V \times H.$$

On calcule alors μ^{n+1} par

(5.6) $$(\mu^{n+1} - \mu^n, \mu) = \rho(Bu^{n+1} - q^{n+1}, \mu), \ \forall \mu \in H$$

Remarquons que, sous les hypothèses faites, la solution p de (P) est unique. Nous avons alors la

<u>Proposition 5.1.</u> : <u>Soit</u> $\{u,p,\lambda\}$ <u>un point-selle de</u> $\mathcal{L}(v,q,\mu)$, <u>pour tout</u> $0 < \rho < 2r$, on a

(5.7) $q^{n+1} \rightarrow p$ dans H fort

(5.8) $Bv^{n+1} \rightarrow p$ dans H fort

(5.9) $\mu^{n+1} - \mu^{n} \rightarrow 0$ dans H fort

(5.10) μ^{n} reste borné dans H .

<u>De plus, toute sous-suite faiblement convergente extraite de</u> μ^n <u>converge vers un</u> λ <u>tel que</u> $\{u,p,\lambda\}$ <u>soit point-selle de</u> $\mathcal{L}(v,q,\mu)$.

Pour montrer la convergence, on pose

$$(5.11)\qquad \begin{cases} u^{n+1} = v^{n+1} - \mu \\ p^{n+1} = q^{n+1} - p \\ \lambda^{n} = \mu^{n} - \lambda \end{cases}$$

Considérant les inéquations (3.18) - (3.19) vérifiées par (μ,p) et faisant $v = v^{n+1}$ dans celles-ci ; faisant d'autre part $v = u$, $q = p$, dans (5.3) et (5.4) et soustrayant, on obtient immédiatement de (3.18) et (5.3),

$$(5.12)\qquad r|Bu^{n+1}|^{2} + (g'(v^{n+1}) - g'(u),\, v^{n+1} - u) - r(p^{n+1},\, Bu^{n+1}) + (\lambda^{n},Bu^{n+1}) = 0$$

Mais g', dérivée d'une fonction convexe, est monotone. Par conséquent, on tire de (5.12)

$$(5.13)\qquad r|Bu^{n+1}|^{2} - r(p^{n+1},\, Bu^{n+1}) + (\lambda^{n},\, Bu^{n+1}) \leqslant 0 .$$

De même, on tire de (3.19) et (5.4)

$$(5.14)\qquad (f^{1}_{0}(q^{n+1}) - f^{1}_{0}(p),\, q^{n+1}-p) + r|p^{n+1}|^{2} - r(Bu^{n+1},p^{n+1}) - (\lambda^{n},p^{n+1}) \leqslant 0$$

Nous avons supposé f_0 uniformément strictement convexe. Nous avons donc pour un $s \geqslant 1$, et un $\gamma > 0$,

$$(5.15)\qquad (f^{1}_{0}(q^{n+1}) - f^{1}_{0}(p),\, q^{n+1} - p) \geqslant \gamma\, |q^{n+1} - p|^{s} = \gamma |p^{n+1}|^{s} .$$

Utilisant (5.15), sommant (5.13) et (5.14) et regroupant les termes, on a

$$(5.16) \quad \gamma \, | p^{n+1} |^s + r | Bu^{n+1} - p^{n+1} |^2 + (p^n , Bu^{n+1}) \leq 0$$

De (5.7), on déduit, compte tenu de $Bu = p$,

$$(5.17) \quad |\lambda^{n+1}|^2 - |\lambda^n|^2 + |\lambda^{n+1} - \lambda^n|^2 - 2\rho \, (Bu^{n+1} - p^{n+1}, \lambda^{n+1}) = 0$$

d'où enfin en regroupant avec (5.16)

$$(5.18) \quad 2\rho\gamma \, | p^{n+1} |^s + 2\rho r \, | Bu^{n+1} - p^{n+1} |^2 + |\lambda^{n+1}|^2 - |\lambda^n|^2 + |\lambda^{n+1} - \lambda^n|^2 - 2\rho \, (Bu^{n+1} - p^{n+1}, \lambda^{n+1} - \lambda^n) \leq 0$$

Mais on a

$$(5.19) \quad |2\rho \, (Bu^{n+1} - p^{n+1}, \lambda^{n+1} - \lambda^n)| \leq \frac{\rho^2}{\varepsilon} |Bu^{n+1} - p^{n+1}|^2 + \varepsilon \, |\lambda^{n+1} - \lambda^n|^2 \quad ,$$

d'où

$$(5.20) \quad 2\rho\gamma \, | p^{n+1} |^s + (2\rho r - \frac{\rho^2}{\varepsilon}) | Bu^{n+1} - p^{n+1} |^2 + |\lambda^{n+1}|^2 - |\lambda^n|^2 + (1 - \varepsilon) | \lambda^{n+1} - \lambda^n |^2 \leqslant 0$$

Par conséquent, si l'on a, pour $0 < \varepsilon < 1$,

$$(5.21) \quad \begin{cases} 0 < \rho < 2r\,\varepsilon & \text{, ou de façon abrégée} \\ 0 < \rho < 2r \end{cases}$$

les coefficients $(2\rho r - \frac{\rho^2}{\varepsilon})$ et $(1 - \varepsilon)$ demeurent positifs.

Sommant alors ces inégalités de 0 à N-1, nous avons, quel que soit N,

$$(5.22) \quad \begin{cases} 2\rho\gamma \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |p^{n+1}|^s + (2\rho r - \frac{\rho^2}{\varepsilon}) \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |Bu^{n+1} - p^{n+1}|^2 + \\ \quad + (1-\varepsilon) \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} | \lambda^{n+1} - \lambda^n|^2 + |\lambda^N| \leqslant |\lambda^0|^2 \end{cases}$$

Nous avons à gauche des séries de nombres positifs, bornées, donc convergentes. Nous en concluons que le terme général doit tendre vers zéro d'où les résultats de convergence annoncés. D'autre part (5.22) montre que λ^N reste borné. La convergence du multiplicateur s'obtient en passant à la limite dans (5.3), (5.4), (5.6), ce qui est possible grâce au fait que $\lambda^{n+1} - \lambda^n \to 0$.

Nous avons donc montré la convergence de l'algorithme I. Il convient de noter toutefois que sa mise en oeuvre suppose la résolution simultanée de (5.3)-(5.4). On montrerait que cette résolution peut se faire par itération, en résolvant successivement (5.3) puis (5.4) par un procédé de relaxation.

<u>Remarque 5.1</u>.- Compte tenu des notations du n° 3, on vérifie aisément que l'algorithme I est l'algorithme d'Uzawa appliqué du lagrangien $L(v,\mu)$, i.e. l'algorithme du gradient appliqué au problème dual. En fait (5.3)-(5.4) peuvent s'écrire

$$(5.23) \qquad L(v^{n+1},\mu^n) \leqslant L(v,\mu^n), \ \forall v \in V.$$

Le découplage en deux conditions (liées) peut donc être vu ici comme un moyen commode d'effectuer cette minimisation, v^{n+1} étant en fait solution d'un problème non-linéaire (cf. FORTIN [1]).

Nous allons maintenant considérer une <u>version approchée</u> de l'algorithme I, dans laquelle les conditions (5.3)-(5.4) sont découplées. Au niveau de la mise en oeuvre, cet algorithme ne demandera à chaque itération qu'une seule résolution de (5.3) et (5.4), indépendantes l'une de l'autre, ou encore à n'effectuer, à chaque étape, qu'une seule itération de relaxation pour la résolution du système couplé.

<u>Algorithme II</u> : Soient μ^0 et q^0 arbitrairement donnés, on calcule v^{n+1}, q^{n+1} solutions de :

$$(5.24) \qquad r(Bv^{n+1}, Bv) + (g'(v^{n+1}),v) = r(q^n,Bv) - (\mu^n,Bv), \ \forall v \in V,$$

$$(5.25) \qquad \begin{cases} (f'_0(q^{n+1}), q-q^{n+1}) + f_1(q) - f_1(q^{n+1}) + (r\, q^{n+1} - rBv^{n+1} - \mu^n, q-q^{n+1}) \geqslant 0 \\ \forall q \in H \end{cases}$$

$$(5.26) \qquad (\mu^{n+1} - \mu^n,\mu) = \rho(Bv^{n+1} - q^{n+1},\mu), \ \forall \mu \in H.$$

Par rapport à l'algorithme I, (5.24) est analogue à (5.3), q^{n+1} étant remplacé par q^n. Nous avons alors la

<u>Proposition 5.2</u>.- <u>Pour</u> $0 < \rho < r$, <u>on a les mêmes résultats de convergence que pour l'algorithme I</u>.

<u>Démonstration</u> : on montre comme à la proposition 5.1 et dans les mêmes notations, que l'on a l'inégalité

$$(5.27)\qquad \begin{cases} 2\rho\gamma|p^{n+1}|^s + 2\rho r|Bu^{n+1} - p^{n+1}|^2 + |\lambda^{n+1}|^2 - |\lambda^n|^2 + |\lambda^{n+1} - \lambda^n|^2 - \\ -2\rho\,(Bu^{n+1} - p^{n+1}, \lambda^{n+1} - \lambda^n) + 2\rho r\,(Bu^{n+1}, p^{n+1} - p^n) \leqslant 0. \end{cases}$$

Par rapport à (5.18), nous avons un terme supplémentaire à majorer. On écrit donc

$$(5.28)\quad 2\rho r(Bu^{n+1}, p^{n+1} - p^n) = 2\rho r(Bu^{n+1} - p^{n+1}, p^{n+1} - p^n) + 2\rho r\,(p^{n+1}, p^{n+1} - p^n).$$

Or, on a,

$$(5.29)\quad |2\rho r(p^{n+1}, p^{n+1} - p^n)| = \rho r|p^{n+1}|^2 - \rho r|p^n|^2 + \rho r|p^{n+1} - p^n|^2,$$

et

$$(5.30)\quad |2\rho r(Bu^{n+1} - p^{n+1}, p^{n+1} - p^n)| \leqslant \rho r(Bu^{n+1} - p^{n+1})^2 + \rho r|p^{n+1} - p^n|^2 .$$

Reportant ces résultats dans (5.27), on a

$$(5.31)\qquad 2\rho\gamma\,|p^{n+1}|^s + \rho r|Bu^{n+1} - p^{n+1}|^2 + |\lambda^{n+1}|^2 - |\lambda^n|^2 + |\lambda^{n+1} - \lambda^n|^2$$

$$- 2\rho\,(Bu^{n+1} - p^{n+1}, \lambda^{n+1} - \lambda^n) \leqslant 0$$

Cette inégalité est maintenant semblable à (5.18), à ceci près que le coefficient de $|Bu^{n+1} - p^{n+1}|^2$ est maintenant ρr au lieu de $2\rho r$. On termine la démonstration comme à la proposition 5.1, obtenant la condition $0 < \rho < r$.

<u>Remarque 5.2</u>.- Pour $\rho = r$, on voit qu'on a encore la convergence de q^{n+1} et λ^n borné. On montre, dans Gabay-Mercier [1], dans un cas <u>légèrement moins général</u> qu'on a encore la convergence pour $0 < \rho < 2r$. Il est donc probable que la proposition 5.2 n'est pas le résultat optimal.

<u>Remarque 5.3</u>.- Nous avons déjà montré que chercher un point-selle de $\mathcal{L}(v,q,\mu)$ était équivalent à chercher un point-selle de $L(v,\mu)$. Soit :

$$(5.22)\qquad M(q,\mu) = \inf_v \mathcal{L}(v,q,\mu).$$

On pourrait aussi, pour résoudre le problème, chercher un point-selle de $M(q,\mu)$, ce qui conduirait à des algorithmes différents, bien que du même type que ceux utilisés pour $L(v,\mu)$.

Les algorithmes que nous avons présenté sont liés à l'introduction du LAGRANGIEN AUGMENTÉ. De nombreux exemples d'application sont donnés dans GABAY-MERCIER [1] . Le lecteur trouvera dans FORTIN-GLOWINSKI [1] de nombreux algorithmes et des applications à des problèmes de la mécanique et de la physique. Signalons que les méthodes de lagrangien augmenté font l'objet d'une littérature abondante parmi laquelle nous retiendrons les travaux de ROCKAFELLAR [2] et de BERTSEKAS [1].

CHAPITRE II - SUR LA CONVERGENCE DES METHODES D'ELEMENTS FINIS MIXTES

1. Introduction

Le but de ce travail est d'étudier la convergence, dans un cadre général, des approximations par des méthodes d'éléments finis de problèmes de point-selle associés à des problèmes de minimisation sous contrainte linéaire. Nous nous placerons dans le cadre défini par Brezzi [1] et Brezzi-Ravviart [1]. Nous donnerons dans ce contexte, des conditions équivalentes aux conditions données dans les références précitées, et qui seront dans certains cas importants plus faciles à vérifier que celles-ci.

Nous considérons donc deux espaces de Hilbert V et W, munis respectivement des normes $|.|_V$ et $|.|_W$.

On se donne sur $V \times V$ une forme bilinéaire $a(u,v)$, continue, symétrique, et sur $V \times W$ une forme bilinéaire $b(v,\phi)$, elle aussi continue, i.e.

$$(1.1) \qquad |b(v,\phi)| \leq B\,|v|_V\,|\phi|_W$$

Soit alors, pour $f \in V'$, $g \in W'$, la fonctionnelle

$$(1.2) \qquad \mathcal{L}(v,\phi) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle_{V'xV} + b(v,\phi) - \langle g,\phi\rangle_{W'xW}$$

Le problème est alors de trouver un couple $(u,\lambda) \in VxW$, point-selle de $\mathcal{L}(v,\phi)$, i.e.

$$(1.3) \qquad \mathcal{L}(u,\phi) \leq \mathcal{L}(u,\lambda) \leq \mathcal{L}(v,\lambda) \qquad \forall v \in V, \quad \forall q \in W \quad .$$

On peut évidemment écrire les conditions d'optimalité de ce problème sous la forme

$$(1.4) \qquad a(u,v) + b(v,\lambda) = \langle f,v\rangle \qquad \forall v \in V$$

$$(1.5) \qquad b(u,\phi) = \langle g,\phi\rangle \qquad \forall q \in W$$

$$(1.6) \qquad u \in V, \ \lambda \in W.$$

Nous considérons d'abord des conditions générales d'existence pour la solution de ce problème, conditions qui nous serviront de guide intuitif pour l'obtention des conditions dans l'étude de l'approximation.

2. Existence et unicité de la solution de (1.4)-(1.6)

Nous voulons montrer ici que sous certaines conditions que nous préciserons, le problème (1.4)-(1.6) possède une solution, éventuellement unique. Pour ce, nous rappellerons d'abord quelques notations et propriétés. Rappelons d'abord que la forme bilinéaire $b(v,\phi)$ définit un opérateur B continu de V dans W' par

(2.1) $$\langle Bv,\phi\rangle_{W'\times W} = b\,(v,\phi) \qquad \forall\phi\in W$$

De même, on définit l'opérateur transposé B^* de W dans V'

(2.2) $$\langle v,B\phi\rangle_{V\times V'} = b(v,\phi) \qquad \forall v\in V.$$

Le problème (1.4)-(1.6) est alors clairement équivalent à

(2.3) $$\inf_{v\in V} \frac{1}{2}\, a(v,v) - \langle f\,,v\rangle$$

sous la contrainte linéaire

(2.4) $$Bv = g$$

Une condition nécessaire d'existence sera donc évidemment

(2.5) $$g\in \operatorname{Im} B$$

Soit donc cette condition réalisée et soit v_g un élément de V tel que $Bv_g = g$. Le problème (2.3)-(2.4) peut encore s'écrire (en posant $v = v_o - v_g$).

(2.6) $$\inf_{v_o\in V} \frac{1}{2}\, a(v_o,v_o) - a(v_g,v_o) - \langle f,v_o\rangle$$

(2.7) $$Bv_o = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad v_o\in \operatorname{Ker} B$$

Nous avons donc pour l'existence d'une solution à (2.3)-(2.4), où à (2.6)-(2.7) la condition classique de coercivité :

(2.8) $$a(v_o,v_o) \geqslant \alpha\|v_o\|^2 \qquad \forall v_o\in \operatorname{Ker} B.$$

La condition (2.8) entraîne classiquement l'existence d'une solution unique à (2.6)-(2.7) donc à (2.3)-(2.4), que nous nommerons problème primal. Nous devons, pour terminer, montrer l'existence d'un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte (2.4). Nous devrons pour cela faire sur B une hypothèse supplémentaire, à savoir :

H.2.1.- L'image Im B de l'opérateur B est fermée dans W.

Nous pouvons alors montrer la

Proposition 2.1.- Si l'hypothèse H.2.1. est vérifiée, et si le problème primal (2.3)-(2.4) possède une solution, alors le problème (1.4)-(1.6) possède une solution (u,λ). Si B^* est injectif, la solution est unique. Dans le cas contraire, λ est unique dans le quotient $W/\mathrm{Ker}\ B^*$

Démonstration : La solution de (2.3)-(2.4) vérifie d'après (2.6)

(2.9) $$a(u,v_0) - \langle f,v_0\rangle = 0 \qquad \forall v_0 \in \mathrm{Ker}\ B$$

i.e. $u^* = Au - f \in V'$ est dans l'ensemble polaire de Ker B, i.e.

(2.10) $$\langle u,v_0\rangle = 0 \qquad \forall v_0 \in \mathrm{Ker}\ B.$$

Définissons sur $\mathrm{Im}(B) \in W'$ la forme linéaire

(2.11) $$L(\phi') = \langle u^*, v\rangle , \quad \forall \phi \in \mathrm{Im}(B),\ \text{i.e.}\ \forall \phi = Bv,\ v \in V.$$

Cette forme linéaire est bien définie car comme $\langle u^*,v_0\rangle = 0 \ \forall v_0 \in \mathrm{Ker}\ B$ sa valeur ne dépend pas du choix de v tel que $Bv = \phi'$. D'autre part, elle est continue sur Im(B). En effet, l'image de B est fermée et d'après le théorème de Banach B est un isomorphisme de $V/\mathrm{Ker}\ B \to \mathrm{Im}\ (B)$. On a alors $\forall \phi' \in \mathrm{Im}(B)$ l'existence d'un relèvement continu, i.e. l'existence d'un $\hat{v} \in V$ tel que $B\hat{v} = \phi'$ et d'une constante indépendante de ϕ' tel que

(2.12) $$|\hat{v}|_V < C\ |\phi'|_{W'}$$

Dans ces conditions, on a

(2.13) $$|L\ (\phi')| = |\langle u^*,\hat{v}\rangle| \leqslant C\ |u^*|_{V'}\ |\phi'|_{W'} \leqslant C_1|\ \phi'|_{W'}$$

On peut donc, par le théorème de Hahn-Banach prolonger cette forme linéaire en une forme linéaire continue sur W', i.e. trouver un élément $\lambda \in W$ (grâce à la réflexivité) qui vérifie par la définition de $L(\phi')$

(2.14) $$\langle u^*,v\rangle = \langle \lambda,Bv\rangle \quad \forall v \in V, \text{ d'où}$$

(2.15) $$u^* = B^* \lambda$$

ce qui n'est autre que (1.4). La condition d'unicité est triviale.

<u>Remarque 2.1.</u>- On a donc en particulier l'existence d'une solution si B est surjectif. Par ailleurs, comme B^* est injectif si B surjectif, on a alors l'unicité de λ. On retrouve un résultat énoncé par Brezzi dans [1] .

En fait, Brezzi montre l'existence d'une solution (unique) sous la condition

(2.16) $$\sup_{v\in V} \frac{|b(v,\phi)|}{|v|_V} \geqslant k\,|\phi|_W$$

Cette condition implique évidemment que l'on a (par la définition même de B^*)

(2.17) $$|B^*\phi|_{V'} \geqslant k\,|\phi|_W$$

d'où l'injectivité de B^*. Ceci entraîne la surjectivité de B d'où le résultat.

<u>Remarque 2.2.</u>- Rappelons pour terminer que d'après le théorème de l'image fermée de Banach (cf. e.g. Yosida [1] , l'image de B est fermée si et seulement si l'image de B^* est fermée, ce qui est équivalent à l'existence d'un relèvement continu pour B^*. Nous pouvons donc écrire une condition du type (2.16) généralisée à savoir

(2.18) $$\sup_{v\in V} \frac{|b(v,\phi)|}{|v|_V} \geqslant k \inf_{\phi_0\in \mathrm{Ker}\, B^*} |\phi+\phi_0|_W$$

ou encore

(2.19) $$|B^*\phi|_{V'} \geqslant k\,|\phi|_{W/\mathrm{Ker}\, B^*} .$$

3. Approximation et estimation de l'erreur sur u

Nous nous plaçons pour cette étude dans un cadre d'approximations internes qui seront dans la pratique obtenues par des éléments finis. Nous nous donnons donc deux espaces de dimension finie

(3.1) $$V_h \subset V \quad ; \quad W_h \subset W$$

munis respectivement de la topologie enduite par V et W.

Nous posons alors le problème de point-selle approché

(3.2) $$\mathcal{L}(u_h,\phi_h) \leqslant \mathcal{L}(u_h,\lambda_h) \leqslant \mathcal{L}(v_h,\lambda_h),\quad \forall v_h\in V_h,\ \forall\phi_h\in W_h$$

dont on peut écrire les conditions d'optimalité

(3.3) $$a(u_h,v_h) + b(v_h,\lambda_h) = \langle f,v_h\rangle \quad \forall v_h \in V_h$$

(3.4) $$b(u_h,\phi_h) = \langle g,\phi_h\rangle \quad \forall \phi_h \in W_h$$

On peut encore définir ici un opérateur $B_h : V_h \to W'_h$ et son transposé $B_h^* : W_h \to V'_h$. En général, on ne peut pas identifier B_h à la restriction de B à V_h.

Si nous supposons pour l'instant que l'on a

(3.5) $$a(v,v) \geqslant \alpha|v|_V^2 \quad , \quad \forall v \in V$$

on a immédiatement l'existence d'une solution (u_h,λ_h) par la proposition 2.1. En effet, en dimension finie, l'image de B_h est évidemment fermée.

Le problème est maintenant de savoir si (u_h,λ_h) est une approximation de (u,λ). Nous voulons reprendre ici l'étude de Brezzi [1] et donner une caractérisation nécessaire et suffisante des espaces vérifiant les conditions données par cet auteur.

La première étape de notre démarche est de ramener le problème à un problème d'approximation. En fait, nous verrons que les résultats de convergences peuvent être scindés en plusieurs résultats indépendants et qu'ils seront d'autant plus fins que la "compatibilité" entre le problème discret et le problème continu sera plus grande. Suivant Brezzi-Raviart [1] , nous démontrerons d'abord la

Proposition 3.1. Sous la condition (3.5), on a

(3.6) $$|u - u_h|_V \leqslant C \left(\inf_{v_h \in Z_h(g)} |u - v_h|_V + \inf_{\lambda_h \in W_h} |\lambda - \lambda_h|_W \right.$$

où

(3.7) $$Z_h(g) = \{v_h \in V_h \mid b(v_h,\phi_h) = \langle g,\phi_h\rangle \ , \quad \phi_h \in W_h\}$$

La constante C étant indépendante de h.

Démonstration : La condition (3.4) implique que $u_h \in Z_h(g)$.

De plus, on a par (3.3)

(3.8) $$a(u_h,v_h) = \langle f,v_h\rangle \quad \forall v_h \in \mathrm{Ker}\, B_n \quad .$$

Par conséquent, par (1.4) et (3.8), on a

$$(3.9)\qquad a(v_h-u_h,v_h-u_h) = a(v_h-u,\ v_h-u_h) + a(u-u_h,\ v_h-u_h)$$

$$= a(v_h-u,v_h-u_h) + b(v_h-u_h,\lambda-\lambda_h),\ \forall v_h\in Z_h(g)\quad \forall\lambda_h\in W_h$$

D'où

$$(3.10)\qquad \alpha|v_h-u_h|_V^2 < \|a\|\ |u-v_h|_V\ |v_h-u_h|_V + \|b\|\ |v_h-u_h|_V|\lambda-\lambda_h|_W,\ \forall v_h\in Z_h(g)\quad \forall\lambda_h\in W_h$$

ce qui entraîne par l'inégalité du triangle

$$(3.11)\qquad |u-u_h|_V < (1+\frac{\|a\|}{\alpha})|\inf_{v_h\in Z_h(g)} |u-v_h|_V + \frac{\|b\|}{\alpha}\inf_{\lambda_h\in W_h} |\lambda-\lambda_h|_W$$

Il reste à estimer la quantité $\inf\limits_{v_h\in Z_h(g)} |u-v_h|$

Nous donnerons d'abord à cet effet une condition abstraite que nous chercherons ensuite à caractériser. Nous avons donc la

<u>Proposition 3.2. S'il existe une constante k indépendante de h telle que</u>

$$(3.12)\qquad \inf_{\phi_0\in \operatorname{Ker} B} |\phi_h+\phi_0|_W < k|\ B_h^*\ \phi_h|\ _{V'_n}$$

<u>alors il existe une constante C indépendante de h telle que</u>

$$(3.13)\qquad \inf_{v_h\in Z_h(g)} |u-v_h|_V < C\inf_{W_h\in V_h} |u-w_h|_V$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\tilde{w}_h$ la projection de u sur V_h, i.e. $|u-\tilde{w}_h| = \inf\limits_{w_h\in V_h} |u-w_h|$

On a pour tout $v_h\in Z_h(g)$

$$(3.14)\qquad |u-v_h| < |u-\tilde{w}_h| + |\tilde{w}_h-v_h|$$

Nous allons montrer que $\inf\limits_{v_h\in Z_h(g)} |\tilde{w}_h-v_h| < C\ |u-\tilde{w}_h|$

Pour ce faire, considérons le problème dans V_h

(3.15) $$\inf_{v_h} \frac{1}{2} |w_h - v_h|^2$$

sous la contrainte linéaire

(3.16) $$b(v_h, \phi_h) = <g,\phi_h> \quad , \quad \forall \phi_h \in W$$

Ce problème, en dimension finie, est alors équivalent à un problème de point-selle,

(3.17) $$\inf_{v_h \in V_h} \sup_{\phi_h \in W_h} \frac{1}{2} |v_h - w_h|^2_{V_h} + b(v_h, \phi_h) - <g,\phi_h>$$

qui possède une solution $(\bar{u}_h, \bar{\phi}_h)$. De plus, on a

(3.18) $$(\bar{u}_h - w_n, v_h)_{V_h} = - b(v_h, \bar{\phi}_h) \quad \forall v_h \in V_h \; ,$$

d'où

(3.19) $$|\bar{u}_h - w_h| < | B_h^* \phi_h |_{V_h'}$$

Cherchons maintenant à évaluer $| B_h^* \phi_h^* |_{V_h'}$. On sait que $\bar{\phi}_h$ est solution du problème dual dans W_h

(3.20) $$\inf_{\phi_h \in W_h} \frac{1}{2} | B_h^* \phi_h|^2_{V_h'} - b (\tilde{w}_h, \phi_h) + < g, \phi_h >$$

Ecrivons la condition d'optimalité pour (3.20) et remarquons que $g = Bu$. On a

(3.21) $$(B^*_h \bar{\Phi}_h, B^*_h \phi_h)_{V_h'} = < B \tilde{w}_h - Bu, \phi_h>_{W' \times W}$$

d'où pour $\phi_h = \bar{\Phi}_h$

(3.22) $$| B^*_h \bar{\Phi}_h |^2_{V'_h} \leqslant | B \tilde{w}_h - Bu |_{W'} \inf_{\phi_0 \in \ker B^*} | \phi_h + \phi_0 |$$
$$\leqslant k \| b \| \tilde{w}_h - u|_V | B^*_h \phi_h |_{V'_h}$$

d'où (3.13) avec $c = k \| b \|$

Remarque 3.1.- Dans le cas où $\mathrm{Ker}\, B^*_h \subset \mathrm{Ker}\, B$, que nous caractérisons plus loin la condition (3.12) est moins restrictive que la condition a priori plus naturelle

$$(3.23) \qquad \inf_{\phi_{0h}\in \mathrm{Ker}\, B^*_h} |\phi_h + \phi_{0h}|_{W_h} < k\, |B^*_h\, \phi_h|_{V'_h}$$

En effet, on a dans ce cas $\inf_{\phi_0\in \mathrm{Ker}\, B^*} |\phi_h + \phi_0|_W \leqslant \inf_{\phi_{0h}\in B^*_h} |\phi_h + \phi_{0h}|_W$

Nous montrerons un peu plus loin que les conditions (3.12) et (3.23) sont dans certains cas équivalentes. Ce sera au moins le cas si Ker B^*_h = Ker B^*. En particulier, si Ker B^*_h = Ker B^* = $\{0\}$, on retrouve la condition

$$(3.24) \qquad |\phi_h|_{W_h} < k\, |B^*_h\, \phi|_{V'_h}$$

donnée par Brezzi (qui implique bien B^*_h injectif).

Remarque 3.2.- Dans le cas où g_h, la projection de g sur W'_h appartient à l'image de B_h, il est possible d'énoncer la proposition avec (3.23) au lieu de (3.12). En effet, on peut alors remplacer (3.21) par

$$(3.25) \qquad (B^*_h\, \bar{\phi}_h, B^*_h\, \phi_h)_{V'_h} = \langle B_h\, \tilde{w}_h - g_h, \phi_h\rangle$$

et, comme g_h Im B_h, on peut écrire

$$(3.26) \qquad |B^*_h\, \bar{\phi}_h|^2_{V'_h} \leqslant |B_h\, \tilde{w}_h - g_h|_{W'_h}\, |\phi_h|_{W_h/\mathrm{Ker}\, B^*_h} \,.$$

Par ailleurs, on a

$$(3.27) \qquad |B_h w_h - g_h|_{W'_h} = \sup_{\phi_h\in W_h} \frac{b(w_h,\phi_h) - \langle g,\phi_h\rangle}{|\phi_h|_{W_h}} \leqslant \sup_{\phi\in W} \frac{b(\tilde{w}_h,\phi) - \langle g,\phi\rangle}{|\phi|_W}\, |B\,\tilde{w}_h - Bu|_{W'} \,.$$

En particulier, dans le cas $g = 0$, on a $g_h = 0 \in$ Im B_h et on peut utiliser la condition (3.23), ce point ne prend son intérêt bien sûr que si l'on n'a pas Ker $B^*_h \subset$ Ker B^*.

Remarque 3.3.- On montrerait aisément, par un raisonnement analogue à celui de la proposition (3.2) que la condition (3.23) implique (et est équivalente à)

$$(3.28) \qquad \inf_{v_{0h}\in \mathrm{Ker}\, B_h} |u_h + v_{0h}| < C\, |B_h\, u_h|_{W'_h}$$

pour tout $u_h \in V_h$, la constante C ne dépendant pas de h.

La propriété (3.28) affirme en fait que l'on a l'existence d'un relèvement uniformément continu pour B_h. Ce point sera extrêmement important pour obtenir des résultats d'approximation pour le multiplicateur λ_h.

Nous allons maintenant chercher à caractériser les espaces vérifiant les conditions (3.12) ou (3.23) et (3.28). Nous nous placerons pour simplifier dans le cas où les espaces W et W_h sont identifiés à leur dual par le même isomorphisme. Le premier résultat dont nous aurons besoin sera la

Proposition 3.3.- Les énoncés suivants sont équivalents.

(3.29) Quel que soit $u \in V$, il existe $\hat{u}_h \in V_h$, tel que $b(u-\hat{u}_h, \phi_h) = 0$, pour tout $\forall \phi_h \in W_h$ (i.e. $\hat{u}_h \in Z_h\ (Bu)$)

(3.30) $\text{Im } B_h = P_{W_h}\ (\text{Im } B)$, où P_{W_h} est l'opérateur de projection de W sur W_h.

(3.31) $\text{Ker } B^*_h = \text{Ker } B^* \cap W_h$

Démonstration : L'équivalence de (3.29) et de (3.30) est triviale ; en effet on a par définition $\text{Im } B_h = P_{W_h}\ (B\ V_h) \subset P_{W_h}\ (\text{Im } B)$, il suffit donc de montrer l'inclusion inverse qui n'est qu'une autre formulation de (3.29).

Pour montrer l'équivalence avec (3.21), supposons d'abord (3.29) vérifiée et donnons-nous $\bar{\phi}_h \in \text{Ker } B^*_h$, i.e. tel que $b(v_h, \bar{\phi}_h) = 0$, $\forall v_h \in V_h$. Nous devons montrer que $b(v, \bar{\phi}_h) = 0$, $\forall v \in V$, ce qui impliquera $\bar{\phi}_h \in \text{Ker } B^*$. Or, pour v donné, on a par (3.29) un $\hat{v}_h$ tel que $b(v, \phi_h) = b(\hat{v}_h, \phi_h), \forall \phi_h$. La relation est en particulier vraie pour $\bar{\phi}_h$, d'où $b(v, \bar{\phi}_h) = b(\hat{v}_h, \bar{\phi}_h) = 0$:

Réciproquement, donnons-nous u arbitraire dans V et considérons $P_{W_h} \in Bu$. (Rappelons qu'on suppose $W = W'$, et donc que $Bu \in W$). On a alors par définition de la projection

(3.32) $$(\phi_h, Bu - P_{W_h} Bu)_{W_h} = 0, \forall \phi_h \in W.$$

Nous voulons montrer que $P_{W_u} Bu \in \text{Im } B_h$. Pour ce, on doit avoir $P_{W_u} Bu \in (\text{Ker } B^*_h)^{\perp}$. Soit donc $\bar{\phi}_h \in \text{Ker } B^*_h \subset \text{Ker } B^*$, que l'on porte dans (3.32), on obtient

(3.33) $$(\bar{\phi}_h, P_{W_h} Bu) = (\phi_h, Bu) = (B^* \phi_h, u) = 0$$

car $\bar{\phi}_h \in \text{Ker } B^*$.

Remarque 3.4.- On a en fait montré que (3.29) entraîne Ker $B_h^* \subset$ Ker $B^* \cap W_h$, l'inclusion inverse étant toujours vérifiée. D'autre part, il n'est nécessaire d'identifier W et W', on doit dans le cas contraire identifier W_h' à un sous-espace de W'.

Remarque 3.5.- En échangeant le rôle de V et de W, et compte tenu de la remarque précédente, on a aussi montré l'équivalence entre les énoncés :

(3.34) Quel que soit $\lambda \in W$, il existe $\hat{\lambda}_h \in W_h$ tel que $b(v_h, \lambda - \hat{\lambda}_h) = 0$, pour tout $v_h \in V_h$

(3.35) $\mathrm{Im}\, B_h^* = P_{V_h'}\,(\mathrm{Im}\, B^*)$

(3.36) $\mathrm{Ker}\, B_h = \mathrm{Ker}\, B \cap V_h$

De même, on a équivalence entre

(3.37) Quel que soit $\tilde{\lambda} \in \tilde{W} \subset W$, il existe $\hat{\lambda}_h \in W_h$, tel que $b(v_h, \tilde{\lambda} - \hat{\lambda}_h) = 0$ pour tout $v_h \in V_h$.

(3.38) $(b(v_h, \lambda_h) = 0,\ \forall \lambda_h \in W_h) \Rightarrow (b(v_h, \tilde{\lambda}) = 0, \forall \tilde{\lambda} \in W)$

Les conditions (3.36) et (3.38), qui sont ici caractérisées, nous seront utiles pour affiner certains résultats lorsque la forme bilinéaire a(u,v) n'est pas coercive sur V(§ 4).

Notons $\Pi_h\ u \to \hat{u}_h$, l'opérateur qui dans (3.29) fait correspondre $\hat{u}_h$ à $u \in V$. Nous avons alors la

Proposition 3.4.- Si Im B est fermée, et si (3.29) est vérifiée, l'opérateur $\Pi_h : V \to V_h$ étant continu, i.e.

(3.39) $$|\hat{u}_h|_{V_h} = |\Pi_h\ u|_{V_h} < C\ |u|_V \ ,\quad C \text{ indépendant de } h,$$

alors la condition (3.12) est vérifiée.

Démonstration : On doit montrer $\inf\limits_{\phi_0 \in \mathrm{Ker}\, B^*} |\phi_h + \phi_0| < C\ |B_h^* \phi_h|_{V'_h}$, la constante C étant indépendante de h. Or

$$(3.40)\qquad |B_h^* \phi_h|_{V'_h} = \sup_{v_h} \frac{|b(v_h,\phi_h)|}{|v_h|_{V_h}} \geqslant \sup_{v\in V} \frac{|b(\Pi_h v,\phi_h)}{|\Pi_h v|}$$

Mais par (3.29) et (3.39), on a

$$(3.41)\qquad \sup_{v\in V} \frac{|b(\Pi_h v,\phi_h)}{|\Pi_h v|} \geqslant \sup_{v\in V} \frac{1}{C} \frac{|b(v,\phi_h)|}{|v|}$$

et l'image de B étant fermée, on a par (2.18)

$$(3.42)\qquad \sup_{v\in V} \frac{|b(v,\phi_h)|}{|v|} \geqslant k \inf_{\phi_0\in \operatorname{Ker} B^*} |\phi_0 + \phi_h|$$

<u>Remarque 3.6</u>.- Les conditions (3.29) et (3.39) sont un moyen commode, dans certains cas, de vérifier la condition (3.12). Le problème est en effet ramené à la construction effective de l'opérateur Π_h. La proposition 3.3 montre que cela n'est possible que si $\operatorname{Ker} B_h^* \subset \operatorname{Ker} B^*$. Le cas où cette inclusion n'a pas lieu semble ouvert.

Par ailleurs, dans certains exemples, on peut obtenir sur $|u - \Pi_h u|_V$ une majoration de l'erreur (si u est régulière), du même ordre que celle obtenue sur $\inf_{v_h\in V_h} |u - v_h|_{V_h}$. Comme $\Pi_h u \in Z_h(g)$, où $g = Bu$, on peut reporter directement le résultat dans (3.6) pour estimer $|u - u_h|_V$.

<u>Remarque 3.7</u>.- La construction de $\Pi_h u$ se fait généralement par un procédé d'interpolation qui peut exiger sur u plus de régularité que la simple appartenance à V. Supposons par exemple que la construction de $\tilde{\Pi}_h u$ soit possible dans $\tilde{V} < V$, avec

$$(3.3)\qquad |\tilde{\Pi}_h \tilde{u}|_{V_h} < C\, |\tilde{u}|_{\tilde{V}},$$

et que l'on ait

$$(3.44)\qquad \forall u\in V,\ \exists \tilde{u}\in \tilde{V} \text{ tel que } B\tilde{u} = Bu,\ |\tilde{u}|_{\tilde{V}} < C\, |u|_V$$

Il est clair qu'alors (3.29) et (3.39) sont vérifiées, $\Pi_h : V \to V_h$ étant en quelque sorte défini indirectement par $\tilde{\Pi}_h$.

Pour fixer les idées, considérons un exemple où (3.44) est vérifiée. Soit $V = H(\operatorname{div};\Omega) = \{v \mid v \in (L^2(\Omega))^n,\ \operatorname{div} v \in L^2(\Omega)\}$

$\tilde{V} = (H^1(\Omega))^n$

Pour tout $v\in V$, le problème de Dirichlet,

$$(3.45) \qquad \begin{cases} -\Delta\phi = \operatorname{div} v \\ \phi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

admet (si $\partial\Omega$ est assez régulier) une solution unique dans $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Soit alors $\tilde{v} = \operatorname{grad} \phi \in (H^1(\Omega))^n$. On a alors

$$(3.46) \qquad \operatorname{div} \tilde{v} = \operatorname{div} v \quad \text{et} \quad |\tilde{v}|_{(H^1(\Omega))^n} < c\,|v|_V$$

Il suffit donc si $B = \operatorname{div}$, de savoir construire un opérateur $\tilde{\Pi}_h$ sur $(H^1(\Omega))^n$.

Nous avons donc obtenu une condition suffisante pour la vérification de (3.12) et par conséquent pour l'obtention d'une estimation de l'erreur $|u - u_h|$. La condition (3.12) ne nous permet cependant pas d'affirmer l'existence d'un relèvement continu pour B_h, condition indispensable pour obtenir une estimation de l'erreur sur le multiplicateur λ. Nous allons donc maintenant chercher sous quelles conditions (3.12) et (3.23) sont équivalentes (hors des cas triviaux de la remarque 3.1). Nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant :

<u>Proposition 3.5.- Les énoncés suivants sont équivalents</u> :

$$(3.47) \qquad \operatorname{Im} B_h \subset (\operatorname{Im} B) \cap W_h$$

$$(3.48) \qquad P_{W_h}(\operatorname{Ker} B^*) \subset \operatorname{Ker} B_h^*$$

<u>Démonstration</u>.- Soit (3.41) et soit $\phi \in \operatorname{Ker} B^*$, on veut montrer que $\bar{\phi}_h = P_{W_h}(\phi) \in \operatorname{Ker} B^*_h$. Or, on a par définition, $(\phi,\lambda_h) = (\bar{\phi}_h,\lambda_h)$, $\forall \lambda_h \in W_h$

Nous voulons montrer que $(\bar{\phi}_h,\lambda_h) = 0$ si $\lambda_h \in \operatorname{Im} B_h$. Mais dans ce cas, on a $\lambda_h \in \operatorname{Im} B$ de sorte que $(\phi,\lambda_h) = 0$ car $\phi \in \operatorname{Ker} B^*$.

<u>Réciproquement</u> soit (3.42) et soit $\lambda_h \in \operatorname{Im} B_h$, nous devons montrer que $\lambda_h \in \operatorname{Im} B$ i.e. que λ_h est orthogonal à $\operatorname{Ker} B^*$; Or pour $\phi \in \operatorname{Ker} B^*$, on a

$$(\phi,\lambda_h) = (\bar{\phi}_h,\lambda_h) = 0, \qquad \text{car} \quad \bar{\phi}_h = P_{W_h}\phi \in \operatorname{Ker} B^*_h \quad .$$

<u>Remarque 3.8</u>.- La condition (3.48) est évidemment vérifiée si $\operatorname{Ker} B^* = \operatorname{Ker} B^*_h$ en particulier si B et B_h sont surjectifs. D'autre part, si $\operatorname{Ker} B^*_h \subset \operatorname{Ker} B^*$ on peut remplacer dans (3.47), (3.48) les inclusions par des égalités.

Remarque 3.9.- Supposons que (3.31) et (3.47) soient simultanément vérifiées, i.e. que l'on ait $\text{Ker } B_h^* = (\text{Ker } B^*) \cap W_h$ et $\text{Im } B_h = (\text{Im } B) \cap W_h$. La décomposition $W_h = (\text{Im } B_h) \oplus (\text{Ker } B_h^*)$ n'est, dans ce cas, que la restriction à W_h de la décomposition $W = (\text{Im } B) \oplus (\text{Ker } B^*)$, i.e. si $\phi_h \in W_h$ peut s'écrire $\phi_h = \phi_h^I + \phi_h^K$, avec $\phi_h^I \in \text{Im } B_h$ et $\phi_h^K \in \text{Ker } B_h^*$, alors $\phi_h^I \in \text{Im } B$ et $\phi_h^K \in \text{Ker } B^*$. Le résultat suivant montre l'intérêt de ce cas.

Proposition 3.6.- Si $\text{Im } B_h \subset \text{Im } B \cap W_h$, la condition (3.12) implique (3.23). Si, de plus, $\text{Ker } B_h^* = \text{Ker } B^* \cap W_h$, (3.12) et (3.23) sont équivalentes.

Démonstration : Soit (3.12) et considérons $\phi_0 \in \text{Ker } B^*$. Si $\text{Im } B_h \subset \text{Im } B \cap W_h$, d'après la proposition 3.5, $P_{W_h} \phi_0 \in \text{Ker } B_h^*$. Par ailleurs, on a $P_{W_h} (\phi_h + \phi_0) = \phi_h + P_{W_h} \phi_0$ et $|\phi_h + P_{W_h} \phi_0| = |P_{W_h}(\phi_h + \phi_0)| \leq |\phi_h + \phi_0|$. On a donc

$$(3.49) \qquad \inf_{\phi_{0h} \in \text{Ker } B_h^*} |\phi_h + \phi_{0h}| \leq \inf_{\phi_0 \in \text{Ker } B^*} |\phi_h + \phi_0| \leq k \, |B_h^* \phi_h|_{V'_h}$$

Réciproquement, si $\text{Ker } B_h^* \subset \text{Ker } B^*$, on a évidemment

$$\inf_{\phi_0 \in \text{Ker } B^*} |\phi_h + \phi_0| \leq \inf_{\phi_{0h} \in \text{Ker } B_h^*} |\phi_h + \phi_0|$$

L'existence d'un relèvement continu pour B_h, qui est équivalente à (3.23) peut donc s'obtenir à partir de (3.29)-(3.39), si on peut vérifier l'une ou l'autre des conditions équivalentes (3.47) ou (3.48). Par ailleurs, il ressort de notre analyse, que dans les cas non surjectifs, les approximations mixtes les plus faciles à manipuler sont celles où l'on a simultanément $\text{Ker } B_h^* \subset \text{Ker } B^*$ et $\text{Im } B_h \subset \text{Im } B$, caractérisées par les propositions 3.3 et 3.6.

Pour terminer cette étude, nous allons montrer que dans le cas canonique décrit ci-haut, on a en fait équivalence entre l'existence d'un relèvement pour B_h et l'existence d'un opérateur $\Pi_h u$ vérifiant (3.29)-(3.39).

Proposition 3.7.- Si $\text{Ker } B_h^* = \text{Ker } B^* \cap W_h$ et $\text{Im } B_h = \text{Im} \cap W_h$, alors les énoncés suivants sont équivalents :

(3.50) Quel que soit $u \in V$, il existe $\hat{u}_h = \Pi_h u \in V_h$ tel que
$b(u - \Pi_h u, \phi_h) = 0, \forall \phi_h \in W_h$, et
$|\Pi_h u|_{V_h} < C |u|_V$

(3.51) L'opérateur B_h possède un relèvement uniformément continu, i.e.

$$\inf_{v_{0h} \in \operatorname{Ker} B_h} |v_h + v_{0h}| < C\, |B_h v_h|_{W_h}$$

Démonstration.- Nous avons déjà montré que (3.50) implique (3.51), en effet, (3.50) implique (3.12) qui est équivalent à (3.23) si $\operatorname{Im} B_h \in \operatorname{Im} B$, et par ailleurs (3.23) est équivalent à (3.51).

Réciproquement, soit $u \in V$. Alors, par la proposition 3.3. $P_{W_h} B_h \in \operatorname{Im} B_h$, et on a évidemment $|P_{W_h} Bu|_{W_h} \leqslant Bu|_W \leqslant \|b\|.\ |u|_V$. D'autre part, il existe un $\tilde{u}_h \in V_h$ tel que $B_h \tilde{u}_h = P_{W_h} Bu$ et (3.50) suit en prenant $\tilde{u}_h = \tilde{u}_h + v_{0h}$ pour v_{0h} bien choisi.

En particulier, le résultat est valable dans le cas $\operatorname{Ker} B_h^*$ et a fortiori si $\operatorname{Ker} B_h^* = \operatorname{Ker} B^* = \{0\}$ étudié par Brezzi [1] .

Nous allons, pour compléter, chercher un résultat d'approximation sur le multiplicateur et considérer quelques variantes, en particulier le cas où la forme $a(u,v)$ n'est pas coercive sur V.

4 . Estimation de l'erreur sur le multiplicateur, variantes

Rappelons d'abord qu'en général λ et λ_h sont définis respectivement à un élément de $\operatorname{Ker} B^*$ et $\operatorname{Ker} B_h^*$ près. Par conséquent, pour obtenir une estimation de l'erreur, il est naturel de choisir un λ et un λ_h de normes minimales i.e. de considérer $\bar{\lambda} \in \operatorname{Im} B$ et $\bar{\lambda}_h \in \operatorname{Im} B_h$ qui sont uniques et qui vérifient

(4.1) $$a(u,v) + b(v,\bar{\lambda}) = \langle f,v \rangle , \quad \forall v \in V,$$

(4.2) $$a(u_h,v_h) + b(v_h,\bar{\lambda}_h) = \langle f,v_h \rangle \quad , \quad \forall v_h \in V_h.$$

Soustrayant (4.2) de (4.1) avec $v = v_h$, il vient

(4.3) $$a(u-u_h,v_h) + b(v_h, \bar{\lambda}- \bar{\lambda}_h) = 0 \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Soit alors $\tilde{\lambda}_h$ quelconque dans $\operatorname{Im} B_h$. On peut écrire (4.3) sous la forme

(4.4) $$a(u-u_h,v_h) + b(v_h, \bar{\lambda}-\tilde{\lambda}_h) + b(v_h,\tilde{\lambda}_h-\bar{\lambda}_h) = 0$$

Comme $\tilde{\lambda}_h - \bar{\lambda}_h \in \text{Im } B_h$, il existe donc, si on suppose que B_h possède un relèvement uniformément continu en h, un élément $\bar{v}_h \in V_h$ tel que $B_h \bar{v}_h = \tilde{\lambda}_h - \lambda_h$ et vérifiant

(4.5) $$|\bar{v}_h|_{V_h} < C\, |\tilde{\lambda}_h \lambda_h|_{W_h} .$$

Faisant $v_h = \bar{v}_h$ dans (4.4), on obtient

(4.6) $$|\tilde{\lambda}_h - \bar{\lambda}_h|^2_{W_h} = a(u_h - u, \bar{v}_h) + b(\tilde{\lambda}_h - \bar{\lambda}\ ,\ \bar{v}_h)$$

d'où

(4.7) $$|\tilde{\lambda}_h - \bar{\lambda}_h|^2_{W_h} \leqslant \|a\|\ |u_h - u|_V\ |\bar{v}_h|_V + \|b\|\ |\tilde{\lambda}_h - \bar{\lambda}|_W\ |\bar{v}_h|_V$$

et utilisant (4.5)

(4.8) $$|\tilde{\lambda}_h - \bar{\lambda}_h|_{W_h} \leqslant C\ \|a\|\ |u_h - u|_V + c\ \|b\|\ |\tilde{\lambda}_h - \bar{\lambda}|_W$$

Par l'inégalité du triangle, on a alors $\tilde{\lambda}_h$ étant quelconque dans $\text{Im } B_h$

(4.9) $$|\bar{\lambda}_h - \bar{\lambda}|_W \leqslant C\ \|a\|\ |u_h - u| + (1 + c\ \|b\|) \inf_{\lambda_h \in \text{Im } B_h} |\tilde{\lambda}_h - \bar{\lambda}|$$

En particulier, on a montré à la proposition 3.3 que si $\text{Ker } B_h^* \subset \text{Ker } B^*$, la projection $P_{W_h} \bar{\lambda} \in \text{Im } B_h$. On a donc démontré la

<u>Proposition 4.1</u>.- Si $\text{Ker } B_h^* \subset \text{Ker } B^*$ et si B_h possède un relèvement uniformément continu en h, il existe une constante C indépendante de h telle que

(4.10) $$|\bar{\lambda}_h - \bar{\lambda}| < C\ \Big(|u - u_h|_V + \inf_{\lambda_h \in W_h} |\bar{\lambda} - \lambda_h|\Big) .$$

L'énoncé suivant résume les divers résultats du N° 3 et la proposition 4.1.

<u>Théorème 4.1</u>.- <u>Si $\text{Ker } B_h^* = \text{Ker } B^* \cap W_h$ et $\text{Im } B_h = \text{Im } B \cap W_h$: si a est V-coercive et si la condition (3.50) est vérifiée, il existe une constante C indépendante de h telle que</u>

(4.11) $$|u - u_h|_V + |\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_h|_W \leqslant C\ \Big(\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_V + \inf_{\lambda_h \in W_h} |\bar{\lambda} - \lambda_h|_W\Big)$$

<u>En particulier (3.50) implique (4.11) si B et B_h sont surjectifs.</u>

Pour terminer, nous allons considérer une variante du cas précédent dans laquelle on a $V \hookrightarrow H$ et où la condition (3.5) est remplacée par

(4.12) $$a(v,v) > \alpha |v|_H^2$$

et où a est continu sur H, i.e.

(4.13) $$|a(u,v)| \leq \|a\|_H \, |u|_H \, |v|_H$$

En reprenant la démonstration de la proposition (3.1) on obtiendrait

(4.14) $$|u-u_h|_H \leq \left(1 + \frac{\|a\|_H}{\alpha}\right) \inf_{v_h \in Z_h(g)} |u-v_h|_H + \frac{\|b\| \, S(h)}{\alpha} \inf_{\lambda_h \in W_h} |\lambda-\lambda_h|_W$$

où la constante S(h) exprime l'équivalence sur V_h des normes induites par V et H, i.e.

(4.15) $$|u_h|_V \leq S(h) \, |u_h|_H \, .$$

Dans la pratique, en éléments finis, on a généralement $S(h) = \frac{\smile}{h}$ d'où la perte d'un ordre de précision. Le résultat suivant permet de contourner cette difficulté.

<u>Proposition 4.2.- Si on a (4.12) et si Ker $B_h \subset$ Ker B, on a</u>

(4.16) $$|u-u_h|_H \leq C \inf_{v_h \in Z_h(g)} |u-v_h| \, .$$

<u>Démonstration</u> : On considère de nouveau (4.3) que l'on écrit avec $\tilde{u}_h \in Z_h(g)$

(4.17) $$a(u-\tilde{u}_h, v_h) + a(\tilde{u}_h - u_h, v_h) + b(v_h, \lambda-\lambda_h) = 0$$

Par définition, $u_h \in Z_h(g)$ de sorte que $u_h - \tilde{u}_h \in \text{Ker } B_h$, donc est dans Ker B. Faisant $v_h = u_h - \tilde{u}_h$ dans (4.17), il vient donc

(4.18) $$\alpha |u_h - u_h|_H^2 \leq \|a\|_H \, |u-\tilde{u}_h| \, |u_h - \tilde{u}_h|$$

d'où le résultat par l'inégalité du triangle.

Remarque 4.1.- La condition Ker $B_h \subset$ Ker B est caractérisée à la remarque 3.5 par (3.34). Si on a un résultat de régularité sur λ, on peut démontrer le même résultat en se contentant des conditions (3.37) ou (3.38).

On a donc un résultat analogue au Théorème 4.1, à savoir le

Théorème 4.2.- Si Ker $B_h^* = \text{Ker } B^* \cap W_h$ et Im B_h = Im $B \cap W_h$, si Ker $B_h \subset$ Ker B, si a est H-coercive, et si la condition (3.50) est vérifiée, il existe une constante C indépendante de h, telle que

(4.19) $$|u - u_h|_H + |\bar\lambda - \bar\lambda_h|_W \leqslant C \left(\inf_{v_h \in V_h} |u-v_h|_V + \inf_{\lambda_h \in W_h} |\bar\lambda - \lambda_h|_W \right)$$

Le théorème 4.2. est en fait un résumé des résultats obtenus. On y a majoré $\inf_{v_h \in Z_h(g)} |u-v_h|_H$ par $\inf_{v_h \in Z_h(g)} |u-v_h|_V$.

Remarque 4.2.- Un cas particulier important est celui où V est défini par

(4.20) $$V = \{v \mid H, Bv \in W\}$$

et est muni de la norme

(4.21) $$|v|_V^2 = |v|_H^2 + |Bv|_W^2$$

Si la forme bilinéaire a est H-coercive, elle est donc coercive sur Ker B. Considérons alors

(4.22) $$V_h = \{v_h \mid v_h \in H_h, Bv_h \in W_h\}$$

avec

(4.23) $$H_h \subset H, \text{ et } W_h \subset W.$$

On a bien alors $V_h \hookrightarrow V$, et B_h est simplement la restriction à V_h de l'opérateur B de sorte que l'on a bien Ker $B_h \subset$ Ker B.

Supposons remplies les conditions du théorème (4.2), de sorte que l'on a la majoration de l'erreur (4.19). Nous pouvons en fait remplacer le terme $|u-u_h|_H$ par $|u-u_h|_V$ de sorte que l'on a

(4.24) $$|u-u_h|_V + |\bar\lambda-\bar\lambda_h|_W \leqslant C \left(\inf_{v_h \in V_h} |u-v_h|_V + \inf_{\lambda_v \in W_h} |\lambda_h-\bar\lambda|_W \right)$$

En effet, on a

$$(4.25) \qquad |u-u_h|_V = \sqrt{|u-u_h|_H^2 + |Bu-Bu_h|_W^2}$$

Mais on a

$$(4.26) \qquad b(u-u_h,\phi_h) = 0, \quad \forall \phi_h \in W_h$$

De sorte que, comme $Bu_h \in W_h$

$$(4.27) \qquad Bu_h = P_{W_h} Bu.$$

On peut donc écrire

$$(4.28) \qquad |Bu-Bu_h|_W = \inf_{\lambda_h \in W_h} |Bu-\lambda_h|_W \leq \inf_{v_h \in V_h} |Bu-Bv_h|_W$$

d'où le résultat

Nous avons considéré dans ce travail un cadre d'approximation interne. Il est probable que des résultats semblables soient encore valables dans le cas d'approximations externes, par exemple si V_h est approché par des éléments finis non-conformes. Nous espérons pouvoir aborder cette situation dans un travail ultérieur.

5. Exemples

Le résultat fondamental dans les résultats qui précèdent est la possibilité de pouvoir vérifier la condition abstraite de Brezzi au moyen de la construction d'un opérateur $\Pi_h : V \to V_h$, vérifiant (3.50). Signalons que ce résultat a été utilisé par Brezzi-Raviart [1] pour démontrer la convergence du schéma d'Hermann-Johnson pour le problème biharmonique. Nous voulons donner ici deux exemples très simples illustrant la construction d'un tel opérateur Π_h. Le premier exemple se rapporte à l'approximation des équations de Stokes et le second à l'approximation du problème de Dirichlet par des éléments finis mixtes.

Exemple 5.1.- Nous considérons le problème de Stokes, dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de frontière polygonale.

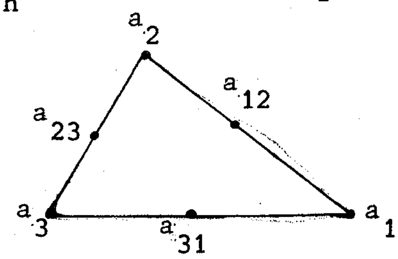
(5.1) $$\int_\Omega \operatorname{grad} \vec{u} . \operatorname{grad} \vec{v} \, dx - \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx = \int_\Omega \vec{f}.\vec{v} \, dx, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2,$$

(5.2) $$\int_\Omega \operatorname{div} u . q \, dx = 0 \quad , \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

(5.3) $$u \in (H_0^1(\Omega))^2, \quad p \in L^2(\Omega)$$

On a donc $\quad V = (H_0^1(\Omega))^n \quad , \quad W = L^2(\Omega)$

Considérons une approximation de $H_0^1(\Omega)$, par des éléments finis conformes formés de fonctions quadratiques par morceaux sur une triangulation de Ω. Sur chaque triangle, une fonction de V_h sera donc définie par 12 degrés de liberté, à savoir les valeurs de u_1 et u_2 aux sommets du triangle et aux milieux des côtés, les noeuds étant numérotés comme sur la figure.



Nous considérons alors comme dans Fortin [2] et Crouzeix-Raviart [1] , une approximation de $L^2(\Omega)$ par des fonctions constantes par morceaux sur les triangles. L'opérateur B_h associe alors à $v_h \in V_h$ sa divergence moyenne sur chaque triangle.

Etant donné $u \in V$, il serait donc naturel de définir $\Pi_h \hat{u} = u_h$ en

(5.4) $$\begin{cases} \hat{u}_{kh}(a_i) = u_k(a_i) \; , & i = 1,2,3 \; ; \; k = 1, 2 \\ \hat{u}_{kh}(a_{ij}) = \dfrac{1}{|a_i \, a_j|} \displaystyle\int_{a_i}^{a_j} u_k \, d\sigma & ; \; i,j = 1,2,3 \; ; \; k = 1, 2 \, . \end{cases}$$

On vérifie aisément que l'on a alors

(5.5) $$b(u-u_h, \phi_h) = \int_\Omega \operatorname{div} (u-u_h) \, \phi_h \, dx = 0 \qquad \forall \phi_h \in W_h \quad .$$

La propriété (3.50) n'est cependant pas vérifiée car les fonctions de V ne sont pas assez régulières pour pouvoir définir une valeur ponctuelle $u(a_i)$.

Cependant Crouzeix et Raviart ont montré qu'on peut construire un Π_h vérifiant (3.50) en posant d'abord

(5.5) $$\tilde{u}_h = P_{V_h}(u)$$

(5.6) $$\begin{cases} \hat{u}_{kh}(a_i) = \tilde{u}_{kh}(a_i), \quad i = 1,2,3 \\ \hat{u}_{kh}(a_{ij}) = \dfrac{1}{|a_i a_j|} \displaystyle\int_{a_i}^{a_j} u_k \, d\sigma \,, \end{cases}$$

La propriété (3.50) est alors démontrée dans Crouzeix-Raviart [1] , dans un cadre un peu plus général.

<u>Exemple 5.2</u>.- Nous considérons ici l'espace $H(\mathrm{div};\,\Omega)$ utilisé par Raviart-Thomas [1] pour l'approximation par des éléments finis mixtes du problème de Dirichlet. Ces auteurs construisent une approximation interne V_h de cet espace, les éléments finis utilisés ayant pour degré de liberté dans chaque triangle des moments de p_h et des moments de la trace-normale au bord.

La construction de Π_h est alors immédiate pour une fonction $u \in (H^1(\Omega))^2$. Il suffit d'interpoler u par u_h ayant les mêmes moments. Pour $u \in H(\mathrm{div};\Omega)$ il n'est pas possible de définir localement la trace au bord qui n'est que dans $H^{-1/2}(\partial K)$ pour chaque triangle K. La construction de Π_h peut cependant se faire en utilisant la Remarque 3.7.

En conclusion, disons donc que la caractérisation que nous avons obtenue de la condition de Brezzi [1] , permet dans beaucoup de cas de la vérifier de façon très simple. De plus, les diverses équivalences que nous avons établies au N° 3 pourront sans doute servir de guide pour aborder des situations nouvelles, en particulier les cas où l'opérateur B ne serait pas surjectif.

B I B L I O G R A P H I E

BERTSEKAS D.P.- Combined primal-dual and peralty methods for constrained minimization, SIAM, J. Control, vol. 13, n° 3, May 1975, pp. 521-544.

BREZZI F. [1] - On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers, R.A.I.R.O., 8ème année, août 1974, R.2, pp. 129-151.

BREZZI F.-RAVIART P.A. [1] - Méthodes d'éléments finis mixtes pour les problèmes d'ordre 4 (à paraître).

EKELAND I.- TEMAM R. [1] - Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod-Gauthiers Villars, Paris 1974.

FORTIN M. [1] - Minimization of some non-differentiable functionals by the augmented lagrangian method of Hestenes and Powell. Applied Math. and Opt. 1976.

FORTIN M. [2] - Utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des fluides. CALCOLO, 1975, p. 431...

FORTIN M., GLOWINSKI R. [1] - Résolution de problèmes variationnels par la méthode du lagrangien augmenté (à paraître).

GABAY D.- MERCIER B. [1] - A dual algorithm for the solution of non linear variational problems via finite element approximation. Rapport LABORIA n° 126.

HESTENES M.R. [1] - Multiplier and gradient Method,JOTA 4 (1969) pp. 303-320.

MOREAU J.J. [1] - Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965) 372-399.

RAVIART P.A.- THOMAS J.M. [1] - A mixed Finite Element method for 2nd order elliptic problems (à paraître).

ROCKAFELLAR R.T. [1] - Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.

ROCKAFELLAR R.T. [2] - A dual approach to solving non-linear programming problems by unconstrained optimization, Mathematical Programming 5, (1973), pp. 354-373.

YOSIDA K. [1] - Functional Analysis, Springer Berlag, 1965