PUBLICATIONS

MATHÉMATIQUES

D'ORSAY

Décompositions de mesures
et
Recouvrements aléatoires

par

FAN Ai Hua

89 - 03

Université de PARIS-SUD

Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHÉMATIQUES

D'ORSAY

Décompositions de mesures
et
Recouvrements aléatoires

par

FAN Ai Hua

89 - 03

Université de PARIS-SUD

Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY France

TITLE : DECOMPOSITIONS OF MEASURES AND RANDOM COVERINGS

ABSTRACT.- First a measure is decomposed into regular part and singular part. Two methods of decomposition are given, one is deterministic and the other stochastic. Several quantities, called dimensions of a measure, are introduced. They give a quantitative measurement of how singular is a measure. The class of unidimensional measures is considered. Several examples are given : Riesz products, harmonic measures, Wiener and Lévy chaos, etc...

Secondly we study random coverings of certain groups; This is related to the previous theory. A complete solution is given for the groups $(Z/cZ)^N$ and T. We also study the rarity of covering intervals and the convergence of the martingale associated to the covering.

Nom : FAN Ai hua

Titre : DECOMPOSITIONS DE MESURES ET RECOUVREMENTS ALEATOIRES

RESUME : On étudie d'une part la décomposition d'une mesure en parties régulière et singulière. Deux méthodes sont données, l'une déterministe, l'autre probabiliste. On introduit plusieurs quantités, appelées dimensions d'une mesure, qui en donne une mesure quantitative de la singularité. On introduit aussi la notion de mesure unidimensionnelle. Plusieurs exemples sont traités : produits de Riesz, mesures harmoniques, chaos de Wiener et chaos de Lévy, etc..

On étudie d'autre part des problèmes de recouvrement aléatoire de certains groupes , problèmes liés à la théorie précédente. On donne une réponse complète pour le groupe $(Z/cZ)^N$ et pour le cercle. En outre, on étudie la rareté des intervalles couvrants et la convergence de la martingale associée au recouvrement.

MOTS CLES : Capacité - décompositions de mesures - dimensions de mesures - α-dimensionnalité - produits de Riesz - chaos de Lévy - recouvrements aléatoires - rareté.

Code matière AMS (1980) : 10K50 - 28A12 - 28A99 - 60D05 - 60G44 - 60G55 60G57 - 60J65 - 60J80.

INTRODUCTION

Ce travail a pour objectif de mettre en lumière la liaison entre la théorie probabiliste de décomposition de mesures et la théorie déterministe. Dans les deux cas il s'agit de la régularisation des mesures. Ces deux théories sont en apparence tout-à-fait différentes. En réalité, comme on verra, elles coïncident cependant dans certains cas comprenant ceux qui nous intéressent le plus, citons, le problème de recouvrement ([7], [15], [20], [42]), le chaos multiplicatif de Gauss ([8], [18]) et le chaos multiplicatif de Lévy ([9]), etc..

Le chapitre I est une présentation de ces deux théories générales. D'une part, à partir d'une suite de poids positifs indépendants et normalisés définis sur un espace localement compact T, est défini un opérateur de projection $\mathbb{E}Q$ dans l'espace des mesures bornées M(T), qui est appelé un opérateur de chaos multiplicatif. Autrement dit, l'espace M(T) est décomposé en deux :

$$M(T) = \mathrm{Img}(\mathbb{E}Q) \oplus \mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q).$$

D'autre part, étant donné un noyau de potentiel Φ défini sur T, si Φ satisfait à un certain principe du maximum, toute mesure s'écrit uniquement en somme de deux mesures, dont l'une est une somme de mesures de Φ-énergie finie (dite Φ-régulière) et l'autre est concentrée sur un borélien de Φ-capacité nulle (dite Φ-singulière). On appelle ceci la décomposition de Kahane car c'est lui qui semble avoir pour la première fois observé ce phénomène. Pour la commodité, désignons par $\mathfrak{R}_\Phi$ l'ensemble des mesures Φ-régulières et par $\mathfrak{S}_\Phi$ l'ensemble des mesures Φ-singulières. Dans cette terminologie, l'espace M(T) est décomposé encore en deux :

$$M(T) = \mathfrak{R}_\Phi \oplus \mathfrak{S}_\Phi.$$

La projection de M(T) dans $\mathfrak{R}_\Phi$ est d'ailleurs appelée l'opérateur de Φ-régularisation. Voilà les deux méthodes de décomposition. En dépit de leur dissemblance, elles coïncident de temps en temps. Pour plus d'informations, le lecteur peut consulter les chapitres III, IV, V et VIII.

En tant qu'application de la décomposition de Kahane et d'un théorème de P. Assouad (on peut se passer de ce dernier théorème si l'on admet un autre de R. Kaufman, qui dit que dans tout espace métrique la dimension de Hausdorff et la dimension capacitaire sont égales pour tout borélien), est développée au chapitre II une théorie des dimensions des mesures définies sur un espace métrique. On y introduit sept quantités pour mesurer la taille des boréliens portant une mesure donnée. Bien que ces quantités se définissent de manières différentes, il n'y en a que trois qui sont distinctes. On les appelle respectivement (dans l'ordre croissant) l'exposant énergique, la dimension inférieure et la dimension supérieure. Chaque mesure possède alors trois valeurs éventuellement distinctes. L'égalité de la plus petite et de la plus grande définit donc une classe fine de mesures que l'on appelle atomes faibles, tandis que l'égalité des deux dimensions définit une autre classe de mesures, que l'on appelle mesures α-dimensionnelles si la valeur commune est α.

Un problème très naturel, que nous posons alors, est de savoir les dimensions de l'image par une certaine application d'une mesure dès que l'on connait les dimensions de cette dernière. Il est facile de démontrer qu'un plongement lipschitzien préserve les dimensions à une constante multiplicative près, ainsi qu'un mouvement brownien fractionnaire dans un espace de dimension assez grande. De même, les opérateurs de chaos multiplicatif partagent la même propriété mais à une constante additive près. Pourtant, en sens opposé, une mesure harmonique sur une courbe de Jordan, l'image par application conforme de la mesure de Lebesgue sur le cercle, qui est toujours 1-dimensionnelle (Makarov), peut être non-atomique.

Un autre problème, que nous posons également, est de reconnaître les dimensions d'une mesure donnée, tout particulièrement de savoir si une mesure donnée est unidimensionnelle ou non. De ce point de vue, certains produits de Riesz sont construits et étudiés sur différents groupes. Sauf les cas extrêmes, il est plausible que les produits de Riesz soient toujours unidimensionnels, mais jamais atomiques. Cela est confirmé par les produits de Riesz dyadiques définis sur $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, et aussi par des produits de Riesz aléatoires définis sur $\mathbb{T}$. Les produits de Riesz aléatoires sont d'ailleurs un outil dans l'étude des produits de Riesz déterministes. Il en est ainsi, par exemple, pour la convergence presque partout d'une série trigonométrique lacunaire (définie sur un groupe compact quelconque) relativement à un produit de Riesz déterministe ([10]).

Telle est la matière des chapitres I et II. Dans ce qui suit, plusieurs cas concrets sont mis à l'étude.

Le chapitre III est consacré à un processus de naissance et de mort à savoir la martingale c-adique de Mandelbrot dont la variable déterminante obéit à la loi

$$P(W = c^{\alpha}) = c^{-\alpha}\ ,\ P(W = 0) = 1 - c^{-\alpha}.$$

(La martingale générale avec W positive quelconque a été construite par B. Mandelbrot en 1974 comme un modèle de turbulence, puis étudiée par d'autres auteurs ([16], [21], [26], [34], [39])). On démontre que la décomposition selon la martingale envisagée est tout justement la décomposition selon le noyau de Riesz d'ordre α du groupe c-adique.

Le chapitre IV est une version détaillée d'une note ([9]) relative aux constructions et études des chaos de Lévy additifs et multiplicatifs, qui servent comme modèles de l'analyse ou la simulation de champs atmosphériques ou géographiques fortement fluctuants sur de très grandes gammes d'échelles, où interviennent des exponentielles de variables de Lévy. On ne démontre ici que l'existence des opérateurs pour l'indice de Lévy compris entre 0 et 1. Faute du théorème de comparaison qu'a le chaos gaussien, on a donné quand même certains résultats, par exemple, la valeur critique pour expliciter la régularité et la singularité. Nous reviendrons ailleurs sur le problème : comment construire le chaos de Lévy d'ordre α $(1 \leqslant \alpha < 2)$?

C'est en utilisant la même idée qu'au chapitre IV, que l'on a obtenu des analogues pour une martingale liée au recouvrement sur le tore $\mathbb{T}^d$ $(d \geqslant 2)$. C'est l'affaire du chapitre V.

Les trois derniers chapitres traitent le problème de recouvrement sur le cercle $\mathbb{T}$. Ce sujet a été donné en 1956 par Dvoretzky ([7]), à la suite duquel on s'est engagé dans la recherche de la réponse complète ([2], [15], [32], [41]). Il faut attendre jusqu'en 1972 où L. Shepp ([42]) a trouvé une réponse exacte concernant le recouvrement du cercle tout entier. Le problème d'un compact quelconque est alors posé, et puis résolu par J.-P. Kahane ([20]).

Si le cercle est recouvert, chaque point du cercle sera recouvert par un nombre infini d'intervalles jetés au hasard. Combien y en a-t-il en fait ? C'est une question posée par L. Carleson (communication orale). On répond qu'il y en a très peu. Précisément, considérons le cas où les longueurs des intervalles jetés est la suite $\{\frac{\alpha}{n}\}$ $(\alpha > 1)$. Alors parmi les n premiers intervalles jetés, il y en a au moins $O(\log\log n)$ et au plus $O(\log n)$ qui recouvrent un point fixé quelconque.
C'est le contenu principal du chapitre VI.

Le théorème de Shepp a une autre conséquence : pour la mesure de Lebesgue λ, la martingale $Q_n\lambda(\mathbb{T})$ converge dans L^1 et L^2 en même temps. Prenons le cas particulier traité au chapitre précédent avec $0 < \alpha < 1$. On démontre qu'à ce moment, la martingale converge dans L^p pour tout $p > 0$, et même que la fonction caractéristique de la limite est une fonction entière d'ordre $\frac{1}{1-\alpha}$. Cela est fait au chapitre VII.

Au chapitre VIII, on s'occupe du problème de recouvrement par des intervalles de longueurs aléatoires. On y étend le résultat de Kahane en suivant les idées de Shepp et de Kahane.

CHAPITRE I.- DEUX PROCEDES DE DECOMPOSITION DE MESURES

Dans ce chapitre on va exposer deux procédés de décomposition de mesures. Nous rappelons d'abord la théorie de Kahane de martingale indexée à laquelle se ramènent tous les problèmes étudiés par la suite. Cette théorie peut être considérée comme un procédé de décomposition d'une mesure en deux parties dont l'une est sa partie régulière et l'autre est sa partie singulière. Nous démontrons ensuite que, dans un ordre d'idées différent, du moins en apparence, nous pouvons aussi décomposer une mesure en deux morceaux selon un noyau de potentiel Φ satisfaisant à un certain principe du maximum. Cette fois-ci, l'un des morceaux est Φ-régulier et l'autre est Φ-singulier.

Ces deux procédés ayant été indiqués, on va exhiber certaines martingales et certains noyaux.

Le fait le plus important est que, dans certains cas, ces deux procédés de décomposition coïncident.

1. DECOMPOSITION SELON UNE MARTINGALE INDEXEE

Nous travaillons toujours dans un espace localement compact, disons X. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer X compact. Désignons par $M^+(X)$ le cône des mesures de Radon positives (bornées) sur X. Nous allons construire des opérateurs dans $M^+(X)$, qui seront ensuite étendus aisément sur M(X), l'ensemble de toutes les mesures de variation totale finie sur X. Ces opérateurs sont souvent des opérateurs de projection qui permettent donc de décomposer chaque mesure en deux, dont l'une est dans l'image, et l'autre est dans le noyau de l'opérateur.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité. Supposons que l'on ait une suite croissante de sous-tribus $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{A}$ et une suite de fonctions aléatoires $(Q_n(x,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$, telles que

a) Pour tout $x\in X$, la suite $(Q_n(x,.))_{n\in\mathbb{N}}$ soit une martingale positive adaptée à $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

b) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, les fonctions $Q_n(.,\omega))$ ($n \in \mathbb{N}$) soient boréliennes et positives.

Nous appelons ce couple $(Q_n(x,\omega),\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplement $(Q_n(x,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$, une martingale positive indexée par X.

Ecrivons $Q_n = Q_n(x) = Q_n(x,\omega)$, et notons son espérance

$$\mathbb{E}\, Q_n(x) = q(x).$$

D'après la propriété de martingale, cette quantité ne dépend pas de n.

Par ailleurs, soit σ un élément de $M^+(X)$. Pour tout n, nous considérons une mesure aléatoire $Q_n\sigma$ définie par

$$Q_n\sigma(A) = \int_A Q_n(x)d\sigma(x)$$

où A ($\subset$ X) est borélien. A partir d'une martingale indexée $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'une mesure σ, nous avons ainsi obtenu une suite de mesures aléatoires Il existe un théorème fondamental de Kahane qui assure la convergence faible de la suite $(Q_n\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$.

THEOREME 1.1 ([19]). Supposons $q \in L^1(\sigma)$. Alors presque sûrement la suite de mesures aléatoires $(Q_n\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans la topologie faible vers une mesure aléatoire S.

Dans la suite, nous écrivons

$$S = Q\sigma$$
$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}Q\sigma$$

pour indiquer que S et $\mathbb{E}S$ sont produits à partir de la mesure σ et de la martingale $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors Q est un opérateur qui transforme chaque mesure σ dans $M^+(X)$ (ou dans $M(X)$) en une mesure aléatoire $Q\sigma$. Et $\mathbb{E}Q$ est un opérateur dans $M^+(X)$ (étendu aisément dans $M(X)$) qui transforme σ en $\mathbb{E}Q\sigma$.

Il existe deux cas extrêmes. Le premier est que $Q\sigma = 0$ p. s., dans ce cas-là on dit que Q est dégénéré sur σ, ou bien Q tue σ. Le second est que $\mathbb{E}Q\sigma = q\sigma$, à ce moment on dit que Q agit pleinement sur σ. Voici une observation simple, mais très importante qui constate que le cas général peut être décomposé en ces deux cas extrêmes, ce que dit le théorème suivant.

THEOREME 1.2 (Kahane [19]). Etant données une martingale indexée $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une mesure $\sigma \in M^+(X)$, on peut écrire Q_n, d'une seule manière, comme une somme de deux martingales positives indexées

$$Q_n = Q'_n + Q''_n,$$

telles que l'opérateur correspondant Q' (resp. Q") agisse pleinement (resp. soit dégénéré) sur σ. Si, de plus, $q(x) \equiv 1$ sur X, l'opérateur $\mathbb{E}Q$ est une contraction sur $M^+(X)$.

Maintenant, considérons un cas particulier. C'est aussi un procédé simple de construire des martingales positives indexées, à savoir la multiplication aléatoire. Une suite $(P_n(x,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ $(x\in X\ ,\ \omega\in\Omega)$ de poids indépendants et normalisés est - par définition - telle que

a) Pour tout $x\in X$, $P_n(x,.)$ $(n\in\mathbb{N})$ soient variables aléatoires positives avec $\mathbb{E}P_n(x,.) = 1$;

b) Pour presque tout $\omega\in\Omega$, $P_n(.,\omega)$ $(n\in\mathbb{N})$ soient fonctions boréliennes positives ;

c) Les sous-tribus $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrées par $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soient indépendantes.

Posons ensuite

$$Q_n(x,\omega) = \prod_{m=1}^{n} P_m(x,\omega).$$

Nous obtenons une martingale indexée par X telle que $q(x) \equiv 1$. Ecrivons $P_n = P_n(x) = P_n(x,\omega)$. Nous avons alors une amélioration du théorème 1.2.

THEOREME 1.3 (Kahane [19]). Etant données une suite de poids $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus et une mesure $\sigma\in M^+(X)$, il existe un borélien B dans X tel que

$$\sigma = \sigma' + \sigma''$$

avec

$$\sigma' = \sigma 1_B \ ,\ \sigma'' = \sigma\, 1_{B^c}$$

et que Q agit pleinement sur σ' et tue σ''. De plus

$$\sigma' = \mathbb{E}Q\sigma.$$

L'opérateur $\mathbb{E}Q$ est donc une projection.

Désormais on ne considère que des martingales positives indexées par X produites par multiplications aléatoires. $\mathbb{E}Q$ est donc toujours une projection. Du théorème 1.3, il est facile de déduire que l'espace M(X) peut s'écrire sous la forme de somme directe

$$M(X) = \mathrm{Img}\, \mathbb{E}Q \oplus \mathrm{Ker}\, \mathbb{E}Q.$$

Toute mesure appartenant à l'image de $\mathbb{E}Q$ sera dite Q-régulière, et toute mesure appartenant au noyau de $\mathbb{E}Q$ sera dite Q-singulière. En ces termes, on peut interpréter le théorème 1.3 en disant que toute mesure peut se décomposer en deux morceaux, l'un est Q-régulier et l'autre est Q-singulier. Ainsi se réalise le premier procédé de décomposition.

2. DECOMPOSITION SELON UN NOYAU DE POTENTIEL

Un noyau de potentiel, dit simplement un noyau, dans un espace localement compact X est une application Φ de $X \times X$ dans $\bar{\mathbb{R}}+$ (c'est-à-dire $[0,+\infty]$) telle que, pour tout $x \in X$, $\Phi(x,.)$ soit une fonction mesurable. D'ailleurs supposons que Φ soit symétrique et semi-continue inférieurement.

Pour toute mesure $\mu \in M^+(X)$, son potentiel relatif à Φ est défini par la fonction

$$U^\mu(x) = \int \Phi(x,y)d\mu(y).$$

Son énergie relative à Φ est définie par l'intégrale double

$$I^\mu = \iint \Phi(x,y)d\mu(y)d\mu(x).$$

Soit K un compact dans X. On définit

$$I(K) = \inf_\mu I^\mu(K)$$

la borne étant prise pour toutes les probabilités concentrées sur K. La capacité de K relative à Φ est définie par

$$\mathrm{Cap}\ K = I^{-1}(K).$$

Pour un borélien quelconque E, on définit sa capacité comme

$$\mathrm{Cap}\ E = \sup_{K \subset E} \mathrm{Cap}\ K$$

la borne supérieure étant prise pour tous les compacts contenus dans E.

On notera, si nécessaire, $U^\mu_\Phi(x) = U^\mu(x)$, $I^\mu_\Phi = I^\mu$,... etc. pour insister sur leur relation avec Φ.

Dans la théorie du potentiel, les principes du maximum jouent des rôles essentiels. Il y en a plusieurs pris comme hypothèse ou axiome par les uns ou les autres. On va en rappeler quelques-uns.

On dit qu'un noyau Φ dans X satisfait au principe du maximum de Frostman si pour toute mesure $\mu \in M^{+}(X)$ à support compact S_{μ}, on a

$$\sup_{x \in X} U^{\mu}(x) \leqslant \sup_{x \in S_{\mu}} U^{\mu}(x).$$

Qu'un noyau Φ dans X satisfait au principe du maximum λ-dilaté (λ constante $\geqslant 1$) signifie que, pour toute mesure $\mu \in M^{+}(X)$ à support compact S_{μ}, on a

$$\sup_{x \in X} U^{\mu}(x) \leqslant \lambda \sup_{x \in S_{\mu}} U^{\mu}(x).$$

Si une telle constante existe pour tout compact K ($\subset$ X) considéré comme espace original au lieu de X, on dit que Φ satisfait au principe local du maximum dilaté.

Un noyau Φ dans X est dit satisfaire au principe de borne supérieure si pour toute mesure $\mu \in M^{+}(X)$ à support compact S_{μ},

$$\sup_{x \in S_{\mu}} U^{\mu}(x) < \infty \quad \text{entraine} \quad \sup_{x \in X} U^{\mu}(x) < \infty.$$

De même, si ce fait vaut pour tout compact K ($\subset$ X) considéré comme l'espace original au lieu de X, on dit que Φ satisfait au principe local de borne supérieure.

Un noyau Φ dans X satisfait au principe de continuité si, pour toute mesure $\mu \in M^{+}(X)$ à support compact S_{μ}, "$U^{\mu}(x)$ est continue sur S_{μ}" entraîne "$U^{\mu}(x)$ est continue sur X".

Evidemment, si l'espace est compact, les principes locaux coïncident avec les principes correspondants.Si l'espace considéré est σ-compact, beaucoup de problèmes intéressants peuvent se ramener au cas où l'espace est compact.

Il est facile de voir que le principe local de borne supérieure est le plus faible parmi tous ceux cités au-dessus. Néanmoins, même si un noyau ne satisfait qu'au principe le plus faible, le deuxième procédé de décomposition se réalisera quand même.

THEOREME 2.1. Soit Φ un noyau défini dans un espace de Hausdorff X localement compact et σ-compact. Supposons que Φ satisfasse au principe local de borne supérieure. Alors toute mesure $\mu \in M(X)$ peut s'écrire, d'une façon unique,

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

où μ_1 est une somme (éventuellement infinie) de mesures de Φ-énergie finie, et μ_2 est une mesure concentrée sur un borélien de Φ-capacité nulle.

Démonstration. L'unicité d'écriture de μ est évidente car, si

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \mu_1' + \mu_2'$$

alors

$$\mu_1 - \mu_1' = \mu_2' - \mu_2 .$$

Si, au contraire de notre affirmation, $\mu_2 \neq \mu_2'$, il existe un compact K de Φ-capacité nulle tel que

$$(\mu_2' - \mu_2)(K) \neq 0.$$

Par conséquent, l'une des deux mesures μ_1 et μ_1', disons μ_1, n'est pas nulle, à savoir

$$\mu_1(K) > 0.$$

Comme μ_1 est une somme de mesures de Φ-énergie finie, la Φ-capacité de K ne s'annule pas. C'est une contradiction.

Puisque l'espace est σ-compact, ayant l'unicité d'écriture, on peut supposer que l'espace soit compact et que le noyau satisfasse au principe de borne supérieure.

Posons alors

$$S = S(\Phi,\mu) = \{x \in X : U_\Phi^\mu(x) = +\infty\}.$$

On constate que $\mathrm{Cap}_\Phi S = 0$. En effet, si $\mathrm{Cap}_\Phi S > 0$, il existe un compact $F \subset S$ tel que $\mathrm{Cap}_\Phi F > 0$. D'après la définition de la capacité d'un compact, il existe alors une mesure non nulle $\tau \in M^+(F)$ telle que

$$0 < I_\Phi^\tau < +\infty.$$

Ensuite, on choisit un compact $K \subset F$ tel que

$$\tau(K) > 0$$

$$\sup_{x \in K} U_\Phi^\tau(x) < \infty.$$

Posons maintenant

$$\sigma = \tau \, 1_K .$$

Alors, d'après le principe de borne supérieure, on a

$$\sup_{x \in X} U_\Phi^\sigma(x) < \infty.$$

Enfin

$$\int U_\Phi^\sigma(x)\, d\mu(x) < \infty.$$

D'autre part, par la définition de l'ensemble S, on a

$$\int U_\Phi^\mu(x)\, d\sigma(x) = +\infty.$$

Or, grâce à la symétrie de Φ, on a

$$\int U_\Phi^\sigma(x)\, d\mu(x) = \int U_\Phi^\mu(x)\, d\sigma(x) .$$

Les trois dernières expressions contredisent le fait que $\mathrm{Cap}_\Phi S > 0$. Posons ensuite

$$\mu_2 = \mu \, 1_S$$
$$\mu_1 = \mu \, 1_{S^c} .$$

μ_2 est évidemment concentrée sur un borélien de Φ-capacité nulle, et μ_1 est telle que

$$U_\Phi^{\mu_1}(x) \leqslant U_\Phi^\mu(x) < \infty$$

si $x \in S^c$. Alors il est évident que μ_1 peut s'écrire comme une somme de mesures de Φ-énergie finie. CQFD.

Il sera commode de nommer deux sortes de mesures. Une mesure est dite Φ-régulière si elle peut s'écrire comme une somme (forte) de mesures de Φ-énergie finie. Une mesure est dite Φ-singulière si elle se concentre sur un borélien de Φ-capacité nulle. On notera $\mathfrak{R}_\Phi$ l'ensemble des mesures Φ-régulières, et $\mathfrak{S}_\Phi$ l'ensemble des mesures Φ-singulières. Ainsi, le théorème 2.1 peut s'écrire comme

$$M(X) = \mathfrak{R}_\Phi \oplus \mathfrak{S}_\Phi .$$

C'est cela que l'on appelle le deuxième procédé de décomposition.

L'exposé que nous venons de faire généralise un peu celui de [23].

3. CERTAINES MARTINGALES

La théorie de la multiplication aléatoire repose sur l'existence de poids indépendants et normalisés. Voici quelques poids qui feront l'objet d'études par la suite.

Rappelons d'abord le problème de recouvrement. Soit G un groupe compact avec la mesure de Haar normalisée m. (G,m) étant considéré comme un espace de probabilité, considérons ensuite l'espace produit $(\Omega,p) = (G^{\mathbb{N}},m^{\mathbb{N}})$. Alors les coordonnées $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constituent une suite de variables indépendantes et uniformément distribuées sur G. Par ailleurs, soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts propres de G. Considérons maintenant les translatées des g_n par ω_n

$$O_n = g_n + \omega_n \qquad (n \geqslant 1).$$

C'est une suite d'ouverts aléatoires indépendants. Le problème de recouvrement se pose ainsi : étant donné un fermé F de G, quand a-t-on $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ p.s. ? Dans le cas affirmatif, on dit que F est recouvert. Cela revient à dire que $F \subset \limsup_{n\to\infty} O_n$ p. s.

Ce problème est un sujet vaste. Sa résolution générale est lointaine. Sur certains groupes spéciaux pourtant, on peut le résoudre. La résolution fera appel à une martingale construite ci-dessous :

$$Q_n(t) = \prod_{j=1}^{n} P_j(t) \qquad \text{avec} \qquad P_j(t) = \frac{1 - \chi_j(t-\omega_j)}{1 - m(g_j)}$$

où χ_j est la fonction indicatrice de g_j.

On peut s'apercevoir sans grande difficulté que le fait du recouvrement de F est décrit par

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in F} Q_n(t) = 0 \quad \text{p. s.}$$

On rappellera brièvement l'histoire du sujet au chapitre VIII.

Ensuite nous allons envisager certaines martingales de Mandelbrot [26] [34].

Supposons l'espace

$$T = \{1,\ 2,\ \dots,\ C\}^{\mathbb{N}} \quad (C \text{ un entier} \geq 2)$$

dont les éléments s'écrivent $t = (t_0,\ t_1, \dots,\ t_n, \dots)$, et dont la distance est celle de l'ultramétrique ordinaire :

$$d(t,s) = C^{-n} \iff t_j = s_j \quad \text{pour tout } j < n, \text{ et } t_n \neq s_n.$$

On désigne par I_n une boule quelconque de rayon C^{-n} (il y en a C^n). On se donne de l'autre côté une variable $W \geq 0$ avec l'espérance $\mathbb{E}W = 1$.

Construisons alors le poids P_n, constant sur chaque boule I_n, tel que ses C^n valeurs soient des variables aléatoires indépendantes de même loi que W. En parlant plus quantitativement, soit $I_n(j_1 \dots j_n)$ la boule constituée des points dont leurs n premières coordonnées soient $j_1, \dots, j_n$. Soient $W_{j_1 \dots j_n}$ $(1 \leq j_1, \dots, j_n \leq C,\ n \geq 1)$ des variables indépendantes dont chacune est une copie de W. Alors le n-ième poids est défini par

$$P(t) = W_{j_1 \dots j_n} \quad \text{si} \quad t \in I_n(j_1 \dots j_n).$$

Donc la martingale indexée correspondante s'écrit

$$Q_n(t) = W_{j_1} W_{j_1 j_2} \dots W_{j_1 j_2 \dots j_n} \quad \text{si} \quad t \in I_n(j_1 \dots j_n).$$

La troisième classe de martingales provient de l'idée intuitive de Mandelbrot ([33]), qui ont été introduites et étudiées par J.-P. Kahane ([18]). Cette fois-ci, le poids est défini par

$$P_n(t) = \exp(X_n(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}X_n^2(t))$$

dont les $X_n(t)$ $(n \geq 1)$ sont des processus gaussiens centrés et indépendants, définis sur un espace localement compact. Les propriétés statistiques de $P_n(t)$ ne dépendent que de la fonction de corrélation $p_n(t,s) = \mathbb{E}\, X_n(t)\, X_n(s)$.

Un fait basique est que les propriétés statistiques de l'opérateur Q, par exemple toute distribution jointe de $Q\sigma_1(B_1), \dots, Q\sigma_n(B_n)$ pour tout choix de $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, $B_1, \dots, B_n$, ne dépendent que de

$$q(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t,s)$$

à condition que p_n soient positives.

4. CERTAINS NOYAUX

Le théorème 2.1 se survit à condition que le noyau satisfasse à un certain principe du maximum.

Nous nous bornons aux espaces métriques ou même pseudo-métriques. Soit (T,d) un tel espace, d étant la pseudodistance. Cela veut dire que pour tout triple (x,y,z) on a

$$d(x,y) \leqslant K(d(x,z) + d(z,y)) \qquad (K \geqslant 1).$$

Pour une pseudométrique, il y a un fait simple mais très important : tout point hors d'un disque est plus éloigné du centre qu'un point quelconque au bord. Autrement dit, si $d(z,y) \geqslant d(z,x)$, on a

$$d(x,y) \leqslant 2K\, d(z,y).$$

Rappelons d'autre côté qu'une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ lentement décroissante au voisinage de l'origine est - par définition - décroissante telle que

$$\varphi(\delta x) \leqslant A\, \varphi(x) \qquad (x \geqslant 0)$$

pour certaines constantes $0 < \delta < 1$ et $A \geqslant 1$. La dernière inégalité entraîne que pour tout $\Delta > 0$ on ait

$$\varphi(\Delta x) \leqslant A^{C(\Delta)}\, \varphi(x) \qquad (x \geqslant 0)$$

avec $C(\Delta) = 1 + [\log^+\frac{1}{\Delta}/\log\frac{1}{\delta}]$, [ ] signifiant la partie entière du nombre entre crochets.

Voici des noyaux satisfaisant le principe du maximum dilaté.

THEOREME 4.1. Soit (T,d) un espace pseudométrique. Soit $\varphi = \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction lentement décroissante. Alors le noyau

$$\Phi(x,y) = \varphi(d(x,y))$$

satisfait au principe du maximum dilaté.

Démonstration. Soit $\mu \in M^+(T)$ une mesure à support compact S_μ. Supposons

$$\sup_{x\in S_\mu} \int \Phi(x,y)d\mu(y) < +\infty.$$

Soit $z \in T\backslash S_\mu$. D'après la compacité de S_μ et la continuité de d, il existe un point $x \in S_\mu$ tel que le minimum suivant soit atteint

$$d(z,x) = \inf_{y\in S_\mu} d(z,y) > 0.$$

Par conséquent, pour tout $y \in S_\mu$ on a

$$d(x,y) \leqslant 2K\, d(z,y).$$

De ce fait et la décroissance lente de φ résulte que pour $y \in S_\mu$

$$\Phi(z,y) \leqslant A^{C(\frac{1}{2K})}\Phi(x,y).$$

Enfin on a

$$\begin{aligned} U^\mu(z) &= \int_{S_\mu} \Phi(z,y)d\mu(y) \\ &\leqslant A^{C(\frac{1}{2K})}\int_{S_\mu} \Phi(x,y)d\mu(y). \end{aligned}$$

Cela veut dire que Φ satisfait au principe du maximum λ-dilaté avec $\lambda = A^{C(\frac{1}{2K})}$. CQFD.

Remarque 1. La condition de décroissance lente de φ est parasite si l'espace est euclidien ([45]).

Remarque 2. Il existe un équivalent de la satisfaction du principe du maximum dilaté ([6]). C'est que l'ensemble des points d'ondulation forte est vide.

Remarque 3. Tout noyau sur $\mathbb{T}$ convexe et symétrique satisfait au principe du maximum de Frostman ([25]).

CHAPITRE II.- DIMENSIONS DE MESURES

INTRODUCTION

Ce chapitre comprend deux parties. La première expose une théorie des dimensions des mesures de Radon, définies sur les espaces où le lemme de Frostman est valable, et la deuxième présente des mesures concrètes, soit les images de mesures par une application ou un opérateur, soit des mesures spécialement construites.

Au moyen de la terminologie de la théorie du potentiel, nous définissons successivement (§ 1), pour une mesure μ, son exposant énergique, sa dimension énergique et ses dimensions spectrales inférieure et supérieure comme suit :

$$e(\mu) = \sup\{\alpha \geqslant 0 \ : \ I_\alpha^\mu < \infty\}$$

$$\dim_e \mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 \ : \ \mu = \sum_1^\infty \mu_i \ \text{ avec } I_\alpha^{\mu_i} < \infty\}$$

$$\dim_* \mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 \ : \ U_\alpha^\mu(t) < \infty \ \ \mu\text{-p. p.}\}$$

$$\dim^* \mu = \inf\{\alpha \geqslant 0 \ : \ U_\alpha^\mu(t) = \infty \ \ \mu\text{-p. p.}\}.$$

I_α^μ et U_α^μ désignant l'intégrale énergique et le potentiel de μ. Par ailleurs, en vue de savoir quand la mesure donnée est absolument continue ou singulière par rapport à une mesure de Hausdorff, nous définissons l'indice de continuité et l'indice de singularité de μ comme ci-dessous

$$\mathrm{Ind}_c \ \mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 \ : \ \mu \ll H_\alpha\}$$

$$\mathrm{Ind}_s \ \mu = \inf\{\alpha > 0 \ : \ \mu \perp H_\alpha\}.$$

$H_\alpha$désignant la mesure de Hausdorff d'ordre α. Depuis longtemps on s'est intéressé à la grandeur des boréliens portant une mesure donnée. Il est donc très naturel de définir la dimension portante de μ comme la plus petite des dimensions des boréliens portant μ :

$$\dim_p \mu = \inf\{\dim F \ : \ F \text{ porte toute la masse de } \mu\}$$

dim F désignant la dimension de Hausdorff du borélien F.

Très clairement nous avons

$$e(\mu) \leqslant \dim_* \mu \leqslant \dim^* \mu .$$

Nous démontrons dans les §§ 2 et 3 que

$$\dim_* \mu = \dim_e \mu = \mathrm{Ind}_c \mu$$
$$\dim^* \mu = \dim_p \mu = \mathrm{Ind}_s \mu .$$

Nous étudions dans le § 5 les mesures vérifiant

$$\dim_* \mu = \dim^* \mu$$

que nous disons unidimensionnelles. Les atomes définis par la condition

$$e(\mu) = \dim^* \mu \ (= \dim_* \mu)$$

sont considérés dans le § 4. Un coup d'oeil sur l'exposant énergique est donné dans le § 6 où un problème intéressant se pose relativement au produit de Riesz.

La deuxième partie commence par des plongements lipschitziens. Nous démontrons qu'un β-plongement lipschitzien conserve l'exposant énergique et les dimensions spectrales, à une constante multiplicative près (§ 7), et nous donnons le résultat correspondant pour un mouvement brownien fractionnaire (§ 8). Pourtant, quoiqu'une application conforme définie sur le disque unité conserve les dimensions spectrales de la mesure de Lebesgue sur le cercle (Makarov), la mesure harmonique peut être non atomique. C'est ce qu'on établit dans le § 9. Le § 10 concerne certains opérateurs produits de multiplications aléatoires. Nous y démontrons que ces opérateurs concervent la dimension portante à une constante additive près et l'unidimensionnalité. Dans le § 11 nous introduisons des produits de Riesz dyadiques. Nous démontrons qu'ils sont unidimensionnels, mais ne sont pas atomiques. Nous nous occupons dans le § 12 de produits de Riesz aléatoires, et démontrons les mêmes résultats que dans le cadre déterministe, sans conditions imposées sur les spectres. Nous pouvons même trouver explicitement les dimensions spectrales et l'exposant énergique pour une mesure de Riesz aléatoire, sous condition de l'existence de la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log \lambda_n}$$

Nous en déduisons que la mesure est unidimensionnelle et non atomique.

1. PRELIMINAIRES ET DEFINITIONS

(E,d) étant un espace métrique localment compact de Hausdorff, supposons qu'il soit de type homogène au sens de Coifman et Weiss ([5]), c'est-à-dire

$$N(\epsilon,B,d) < Cte$$

pour toute boule B de diamètre 2ϵ, $N(\epsilon,B,d)$ désignant le nombre minimum de d-boules de diamètre ϵ recouvrant B. Cette condition est une condition nécessaire et suffisante, introduite par P. Assouad, pour que (E,d) admette un plongement lipschitzien dans un espace de dimension finie ([1]). Dans un tel espace, la dimension capacitaire et la dimension de Hausdorff deviennent égales (par une lettre R. Kaufman nous signale que cette égalité vaut sans condition. Par conséquent, on peut se passer de l'homogénéité). Ce fait, assuré par la condition de P. Assouad, est un point essentiel dans la suite car il nous permet d'employer des outils analytiques dans le calcul de dimension.

Nous nous limitons aux mesures positives bornées de Radon. L'ensemble de ces mesures est noté $M^+(E)$, et la partie constituée des probabilités est notée $M_1^+(E)$.

Si F est un borélien, dim F désigne toujours sa dimension de Hausdorff. Soit μ une mesure appartenant à $M^+(E)$. Définissons d'abord sa dimension portante, notée $\dim_p\mu$, par l'égalité suivante

$$\dim_p\mu = \inf\{\dim F : \mu(F) = \mu(E)\}.$$

Pour introduire les dimensions spectrales de μ, rappelons son potentiel d'ordre α $(0 < \alpha < \infty)$, qui est défini par

$$U_\alpha^\mu(t) = \int \frac{d\mu(s)}{(d(t,s))^\alpha} \qquad (t \in E).$$

Un outil puissant et très utile, dans ce qui suit, est la décomposition de Kahane. Posons :

$$S = S(\mu,\alpha) = \{t \in E : U_\alpha^\mu(t) = \infty\}.$$

Ecrivons

$$\mu = 1_S\mu + 1_{S^c}\,\mu.$$

Nous appelons S l'ensemble singulier de μ d'ordre α. Nous savons que S est de α-capacité nulle ([23]). De ces ensembles singuliers dérire une fonction croissante $v(\alpha)$:

$$v(0) = 0 \ , \ v(\alpha) = \mu(S(\mu,\alpha)) \ , \ v(\infty) = \mu(E).$$

Elle s'appelle le spectre de dimension de μ. Maintenant nous pouvons définir, pour la mesure μ, sa dimension spectrale supérieure $\dim^*\mu$ et sa dimension spectrale inférieure $\dim_*\mu$ respectivement par

$$\dim^*\mu = \inf\{\alpha > 0 \ : \ v(\alpha) = \mu(E)\}$$
$$\dim_*\mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 \ : \ v(\alpha) = 0\}.$$

Rappelons l'intégrale d'énergie d'ordre α de μ :

$$I_\alpha^\mu = \int_E\int_E \frac{d\mu(s)\ d\mu(t)}{(d(t,s))^\alpha}.$$

Définissons l'exposant énergique de μ par

$$e(\mu) = \sup\{\alpha \geqslant 0 \ : \ I_\alpha^\mu < +\infty\},$$

puis la dimension énergique de μ par

$$\dim_e\mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 \ : \ \mu = \Sigma\, \mu_i \ \text{ avec } e(\mu_i) \geqslant \alpha\}$$

$\Sigma\, \mu_i$ signifiant une somme dénombrable forte.

Convenons d'utiliser H_α pour la mesure de Hausdorff d'ordre α. Dire que la mesure μ est absolument continue par rapport à H_α, signifie que $H_\alpha(F) = 0$ implique $\mu(F) = 0$. Ce fait est désigné par $\mu \ll H_\alpha$. S'il existe un borélien F tel que $H_\alpha(F) = 0$ et $\mu(F) = \mu(E)$, on dit que μ est singulière par rapport à H_α. Cela est désigné par $\mu \perp H_\alpha$. Moyennant ces deux notions, nous pouvons faire intervenir deux indices concernant μ, l'indice de continuité et l'indice de singularité, qui sont définis respectivement par

$$\mathrm{Ind}_c\mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 \ : \ \mu \ll H_\alpha\}$$
$$\mathrm{Ind}_s\mu = \inf\{\alpha > 0 \ : \ \mu \perp H_\alpha\}$$

Ces notions, dimension, indice ou exposant, sont des moyens pour mesurer, d'une façon ou d'une autre, la grandeur des boréliens qui portent une mesure. On verra qu'au fond il n'y en a que trois qui sont distinctes. Autrement dit, on a

$$\dim_* \mu = \dim_e \mu = \mathrm{Ind}_c \mu$$
$$\dim^* \mu = \dim_p \mu = \mathrm{Ind}_s \mu$$
$$e(\mu) \leqslant \dim_* \mu \leqslant \dim^* \mu.$$

Une fois les égalités précédentes assurées, pour commodité et simplicité, on peut ne parler que de dimension inférieure et dimension supérieure, que l'on désigne respectivement par $\dim_*$ et $\dim^*$.

REMARQUE 1. La situation suivante peut arriver

$$e(\mu) < \dim_* \mu < \dim^* \mu.$$

REMARQUE 2. On sait que chaque mesure possède son support. A priori, on pourrait définir la dimension portante de la mesure comme la dimension du support. Cependant ce n'est pas une bonne définition car, si on l'acceptait, le produit de Riesz aurait 1 pour dimension. Précisément, le support du produit de Riesz $\mu_a = \prod_1^\infty (1 + \mathrm{Re}(a_n + e^{i\lambda_n x}))$ $(\lambda_{n+1} \geqslant 3\lambda_n, |a_n|<1)$ est le cercle tout entier.

REMARQUE 3. A ce propos, le produit $\mu_r = \prod_1^\infty (1+r\cos 3^k x)$ $(0 \leqslant r < 1)$ est une mesure double au sens de $\mu_r(2I) \leqslant c\,\mu_r(I)$ avec une constante c (2I est l'intervalle de même centre que I et de longueur double).

Ensuite deux classes spécifiques de mesures vont être introduites, l'une desquelles realise l'égalité de l'exposant énergique et la dimension supérieure, l'autre réalise l'égalité de la dimension inférieure et la dimension supérieure. Pour cette introduction, on a besoin d'une notion de mesure lipschitzienne. Une mesure μ est dite α-lipschitzienne si elle satisfait

$$\mu(B) \leqslant c(\mathrm{diam}\, B)^\alpha$$

où B désigne une boule quelconque, et c une constante indépendante de B. Il convient de désigner par Λ_α l'ensemble de toutes ces mesures. D'ailleurs, on dit qu'une mesure μ est à peu près α-lipschitzienne, ce que l'on note $\mu \in \Lambda_\alpha^*$, si elle vérifie la condition suivante : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact K tel que la mesure $\mu_K = 1_K \mu$ vérifie

$$\mu_K(E) > \mu(E) - \epsilon$$
$$\mu_K \in \Lambda_\alpha.$$

Soit $0 < \alpha < \infty$. Si une mesure μ vérifie les deux conditions suivantes : pour tout $\epsilon > 0$ assez petit

i) $\mu \in \Lambda_{\alpha-\epsilon}$
ii) $\nu \leqslant \mu$ et $\nu \in \Lambda_{\alpha+\epsilon} \Longrightarrow \nu = 0$,

on l'appelle un α-atome (au sens strict). L'extension aux cas où $\alpha = 0$ et $\alpha = +\infty$ est bien naturelle et nous ne l'explicitons pas. Si une mesure peut s'écrire comme une somme forte d'une suite de α-atomes, elle sera dite α-dimensionnelle (au sens strict).

REMARQUE 4. Evidemment $\Lambda_\alpha \subset \Lambda_\alpha^*$. De plus, $I_\alpha^\mu < \infty$ implique $\mu \in \Lambda_\alpha^*$, et $\mu \in \Lambda_\alpha$ implique $I_{\alpha-\epsilon}^\mu < \infty$ pour tout $\epsilon > 0$. De là on voit que la condition i) est un petit peu plus stricte que la condition suivante :

i)' $$I_{\alpha-\epsilon}^\mu < \infty \quad (\forall\ \epsilon > 0).$$

On peut définir alors un α-atome (au sens large) en employant i)' au lieu de i). Puis on peut définir une mesure α-dimensionnelle (au sens large). Mais ces deux notions de α-dimensionnalité sont équivalentes car un α-atome au sens large est une somme forte d'une suite de α-atomes au sens strict.

On verra que la α-dimensionnalité d'une mesure μ est caractérisée par l'égalité

$$\dim_* \mu = \dim^* \mu$$

tandis qu'un α-atome (au sens large) peut être défini par

$$e(\mu) = \dim^* \mu \ (= \dim_* \mu).$$

2. $\dim_* \mu = \dim_e \mu = \mathrm{Ind}_c \mu$

THEOREME. Pour toute mesure de Radon, on a

$$\dim_* \mu = \dim_e \mu = \mathrm{Ind}_c \mu.$$

Démonstration. On démontre successivement les trois inégalités suivantes :

$$\dim_* \mu \leqslant \dim_e \mu \leqslant \mathrm{Ind}_c \mu \leqslant \dim_* \mu.$$

Soient $\alpha_1 = \dim_* \mu$, $\alpha_2 = \dim_e \mu$ et $\alpha_3 = \mathrm{Ind}_c \mu$.

D'après la définition du spectre de dimension, on sait que, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$U^{\mu}_{\alpha_1 - \epsilon}(t) < \infty \qquad \mu\text{-p. p.}$$

Posons

$$K_n = \{t : n \leqslant U^{\mu}_{\alpha_1 - \epsilon}(t) < n+1\} \quad (n = 0, 1, 2....).$$

Nous pouvons écrire

$$\mu = \Sigma\, 1_{K_n}\mu \qquad \text{avec} \qquad I^{1_{K_n}\mu}_{\alpha_1 - \epsilon} < \infty$$

d'où $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$.

Observons maintenant

$$I^{\mu}_{\alpha} < \infty \Longrightarrow \mu \ll \mathrm{Cap}_{\alpha}.$$

En effet, s'il existe un borélien F tel que $\mathrm{Cap}_{\alpha}(F) = 0$ et $\mu(F) > 0$, alors il existe un compact $K \subset F$ tel que $\mathrm{Cap}_{\alpha}(K) = 0$ et $\mu(K) > 0$, ce qui est contre le fait $I^{\mu}_{\alpha} < \infty$ d'après la définition de capacité. De là, il est facile de déduire que $\alpha_2 \leqslant \alpha_3$.

Soit $\epsilon > 0$. Prenons l'ensemble singulier de μ d'ordre $\alpha_1 + \epsilon$, $F = S(\mu, \alpha_1 + \epsilon)$. On sait que $\mu(F) > 0$ et $\mathrm{Cap}_{\alpha_1 + \epsilon}(F) = 0$. Cela entraîne que μ n'est pas absolument continue par rapport à la capacité d'ordre $\alpha_1 + \epsilon$, d'où $\alpha_3 \leqslant \alpha_1$. C.Q.F.D.

3. $\dim^* \mu = \dim_p \mu = \mathrm{Ind}_s \mu$

Avant d'énoncer le théorème principal, on présente un lemme indispensable dans la démonstration.

LEMME. Pour toute mesure bornée μ, il existe un borélien B tel que

$$\mu(B) = \mu(E) \quad , \quad \dim B = \dim_p \mu.$$

Cela veut dire que l'inf dans la définition de $\dim_p$ est atteint.

Preuve. Pour tout entier positif n, il existe un borélien B_n tel que

$$\mu(B_n) = \mu(E) \quad , \quad \dim_p \mu \leqslant \dim B_n \leqslant \dim_p \mu + \frac{1}{n}.$$

Alors l'intersection

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

convient.

THEOREME. Pour toute mesure de Radon, on a

$$\dim^* \mu = \dim_p \mu = \mathrm{Ind}_s \mu.$$

Démonstration. On achève la démonstration en montrant successivement les inégalités suivantes.

$$\dim^* \mu \leqslant \dim_p \mu \leqslant \mathrm{Ind}_s \mu \leqslant \dim^* \mu.$$

Posons $\beta_1 = \dim^* \mu$, $\beta_2 = \dim_p \mu$ et $\beta_3 = \mathrm{Ind}_s \mu$.

D'après le lemme précédent, on a un borélien B qui satisfait $\mu(B) = \mu(E)$ et $\dim B = \beta_2$. Pour la première inégalité, il suffit de montrer

$$\dim B \geqslant \beta_1 - \epsilon \qquad (\forall \epsilon > 0). \tag{*}$$

D'après la définition de β_1, si l'on prend A comme le complément de l'ensemble singulier de μ d'ordre $\beta_1 - \epsilon$, on a

$$\mu(A) > 0$$
$$U^{\mu}_{\beta_1 - \epsilon}(t) < \infty \qquad \text{si } t \in A.$$

A fortiori

$$\mu(B \cap A) > 0$$
$$U^{\mu}_{\beta_1 - \epsilon}(t) < \infty \qquad \text{si } \quad t \in B \cap A.$$

On en déduit facilement qu'il existe un positif M et un compact $K \subset B \cap A$ tel que

$$\mu(K) > 0$$
$$U^{\mu}_{\beta_1 - \epsilon}(t) \leqslant M \qquad \text{si} \quad t \in K.$$

Cela implique $\mathrm{Cap}_{\beta_1 - \epsilon} K > 0$, d'où (*).

Soit $\epsilon > 0$. Il existe un borélien F tel que $H_{\beta_3 + \epsilon}(F) = 0$ et $\mu(F) = \mu(E)$. Donc $\beta_2 \leqslant \dim F \leqslant \beta_3 + \epsilon$ d'où la deuxième inégalité.

Soit $\epsilon > 0$. Posons $F = S(\mu, \beta_1 + \epsilon)$. On sait bien

$$\mathrm{Cap}_{\beta_1+\epsilon}F = 0 \quad , \quad \mu(F) = \mu(E)$$

d'où $\beta_3 \leqslant \beta_1$. CQFD

4. CARACTERISATION DES ATOMES FAIBLES.

THEOREME. Une mesure μ non nulle est α-atomique au sens large si et seulement si

$$\dim^*\mu = e(\mu) = \alpha.$$

Démonstration. Supposons μ α-atomique au sens large. Pour la nécessité de la condition, il suffit de montrer

$$\alpha \leqslant e(\mu) \quad \text{et} \quad \dim^*\mu \leqslant \alpha.$$

Or la première inégalité résulte immédiatement de la définition de $e(\mu)$. Quant à la deuxième, ce qu'il faut c'est

$$U^{\mu}_{\alpha+\epsilon}(t) = \infty \quad \mu\text{-p. p.} \quad (\forall\epsilon > 0).$$

On constate que c'est vrai. Sinon, il existe un $M > 0$ et un compact K tel que

$$\mu(K) > 0$$
$$U^{\mu}_{\alpha+\epsilon}(t) \leqslant M \quad \text{si} \quad t \in K.$$

Par conséquent

$$I^{1_K\mu}_{\alpha+\epsilon} < \infty.$$

Mais ceci implique que $1_K\mu$ est une mesure à peu près $(\alpha+\epsilon)$-lipschitzienne, il existe donc un autre compact plus petit $K_0 \subset K$ tel que

$$\mu(K_0) > \frac{1}{2}\,\mu(K)$$
$$1_{K_0}\mu \in \Lambda_{\alpha+\frac{\epsilon}{2}}.$$

Comme μ est α-atomique, ces deux derniers faits sont incompatibles.

Prouvons maintenant la suffisance de la condition. D'une part, la première condition 1)' pour que μ soit α-atomique est évidemment satisfaite. Supposons que la deuxième ne soit pas satisfaite. On va en déduire une contradiction. Prenons un borélien B comme dans le lemme du § 3. Prenons encore une mesure non nulle ν telle que $\nu \leqslant \mu$ et $\nu \in \Lambda_{\alpha+\epsilon}$ Alors $\nu(B) \neq 0$, il existe donc un compact $K \subset B$ tel que $\nu(K) > 0$. Par conséquent

$$\dim B \geqslant \dim K \geqslant \alpha+\epsilon .$$

D'après le théorème du § 3, $\dim^*\mu \geqslant \alpha+\epsilon$ est une contradiction. CQFD

COROLLAIRE. Soit μ α-atomique au sens large

a) si $\beta < \alpha$, $I_\beta^\mu < \infty$
b) si $\beta > \alpha$, $U_\beta^\mu(t) = \infty$ μ-p. p.

Remarque. Soit λ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle [0,1]. Evidemment λ est un 1-atome. En plus, on sait que lorsque $0 \leqslant \alpha < 1$,

$$U_\alpha^\lambda(t) = \frac{1}{1-\alpha}(t^\alpha+(1-t)^\alpha), \qquad I_\alpha^\lambda = \frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} ;$$

lorsque $\alpha \geqslant 1$,

$$U_\alpha^\lambda(t) = \infty \quad \text{pour tout} \quad t.$$

J.-P. Kahane a récemment observé que ce phénomène a lieu pour certains produits de Riesz : pour un tel produit μ, son potentiel est soit fini partout, soit infini μ-presque partout.

5. CARACTERISATION DE MESURES α-DIMENSIONNELLES

Rappelons qu'une mesure α-dimensionnelle est une somme forte d'une suite finie ou infinie de α-atomes. Pour une telle mesure, on a d'autres caractérisations.

THEOREME. Le fait qu'une mesure non nulle μ soit α-dimensionnelle est équivalent à l'un des faits suivants :

a) $\dim_*\mu = \dim^*\mu = \alpha$;
b) $\mu \ll H_\beta$ si $\beta < \alpha$, et $\mu \perp H_\beta$ si $\beta > \alpha$;
c) μ est portée par un borélien de dimension α, tandis que la masse, sur tout borélien de dimension strictement inférieure à α, est nulle.

Démonstration. Puisque $\mathrm{Ind}_c\mu = \dim_*\mu$ et $\mathrm{Ind}_s\mu = \dim^*\mu$, a) et b) sont équivalents. Puisque $\dim^*\mu = \dim_p\mu$ et $\dim_*\mu = \mathrm{Ind}_c\mu$, b) et c) sont équivalents. Dans la suite, on montre que μ est α-dimensionnelle si et seulement si c) a lieu.

Supposons μ α-dimensionnelle. D'après la définition de α-dimensionalité et le théorème dans le § 4, on sait que $\dim_p \mu = \alpha$. Pour le reste de la nécessité, on le démontre par l'absurde. Supposons qu'il existe un borélien B tel que dim B < α et $\mu(B) > 0$. Puisque l'on peut écrire

$$\mu = \sum \mu_i \qquad \text{avec} \qquad \mu_i \in \Lambda_{\alpha-\epsilon} \qquad (\forall \epsilon > 0),$$

il existe une mesure μ_i telle que $\mu_i(B) > 0$ et puis un compact $K \subset B$ tel que $\mu_i(K) > 0$. Par suite

$$\dim B \geqslant \dim K \geqslant \alpha-\epsilon \qquad (\forall \epsilon > 0).$$

Ceci contredit dim B < α.

Supposons c). Pour tout $n \geqslant 1$, effectuons la décomposition de Kahane d'ordre $\alpha - \frac{\alpha}{n}$:

$$\mu = 1_{A_n}\mu + 1_{B_n}\mu$$

avec

$$\mathrm{Cap}_{\alpha-\frac{\alpha}{n}} B_n = 0$$

$$U^{\mu}_{\alpha-\frac{\alpha}{n}}(t) < \infty \qquad \text{si} \qquad t \in A_n.$$

Il est clair que $\dim B_n \leqslant \alpha - \frac{\alpha}{n} < \alpha$, donc $\mu(B_n) = 0$. On peut écrire alors

$$\mu = \sum_j \mu_{n,j}$$

avec

$$\mu_{n,j} = 1_{A_{n,j}}\mu \in \Lambda_{\alpha-\frac{\alpha}{n}}$$

où

$$A_n = \bigcup_j A_{n,j} \quad , \quad A_{n,j} \cap A_{n,k} = \emptyset \quad \text{si} \quad j \neq k.$$

Soit

$$\mathfrak{J} = \{J = (j_1, j_2, \ldots) : j_1 \in \mathbb{N}^+,\ j_2 \in \mathbb{N}^+, \ldots\}.$$

Posons maintenant

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Alors on a

$$A = \bigcup_{J \in \mathfrak{J}} I_J \quad , \quad I_J = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,j_n}.$$

Evidemment

$$\mu(A) = \mu(E)$$
$$I_J \cap I_{J'} = \emptyset \qquad \text{si} \qquad J \neq J'.$$

Posons ensuite

$$\mu_J = 1_{I_J}\mu,$$

alors

$$\mu = \sum \mu_J \quad , \quad \mu_J \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_{\alpha - \frac{1}{n}}^{\alpha}. \tag{*}$$

En réalité il n'y a qu'un nombre dénombrable de μ_J qui sont non nulles, et il y en a au moins une qui est non nulle car μ est non nulle. En combinant (*) et le fait que $\dim_p \mu = \alpha$, on obtient que μ_J est soit nulle soit α-atomique. CQFD

COROLLAIRE. μ est α-dimensionnelle si et seulement si

a) si $\beta < \alpha$, $U_\beta^\mu(t) < \infty$ μ-p.p.

b) si $\beta > \alpha$, $U_\beta^\mu(t) = \infty$ μ-p.p.

6. EXPOSANT ENERGIQUE

Si on se trouve sur un groupe métrique, chaque mesure possède sa transformée de Fourier. Il serait souhaitable qu'on puisse exprimer, pour une mesure, son exposant énergique et ses dimensions spectrales en fonction de sa transformée de Fourier. Dans cette section, on s'engage dans l'étude de l'exposant énergique.

D'abord considérons les mesures de Radon à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Pour toute telle mesure μ, et $0 < \alpha < d$,

$$I_\alpha^\mu = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\mu}(\xi)|^2 |\xi|^{\alpha-d} d\xi. \tag{1}$$

La relation entre l'exposant énergique et la transformée de Fourier est bien claire.

Ensuite on passe sur le cercle $\mathbb{T}$. Pour toute $\mu \in M^+(\mathbb{T})$, on a

$$I_\alpha^\mu = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\mu}(n)|^2 |n|^{\alpha-1}. \tag{2}$$

La relation est aussi claire.

Envisageons maintenant les produits de Riesz comme exemples. Sur le cercle $\mathbb{T}$ est défini le produit de Riesz

$$\mu_a = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i\lambda_n\alpha}))$$

pour toute suite de complexes $\{a_n\}$ tels que $|a_n| \leqslant 1$, et suite d'entiers $\{\lambda_n\}$ tels que $\lambda_{n+1} \geqslant 3\lambda_n$.

THEOREME. Soit $0 < \alpha < 1$,

$$I_\alpha^{\mu_a} \approx \lambda_1^{\alpha-1}|a_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n^{\alpha-1}|a_n|^2\prod_{k=1}^{n-1}(1 + \frac{1}{2}|a_k|^2)$$

où le signe $\approx$ signifie que le rapport de deux nombres est compris entre deux nombres strictement positifs.

Démonstration. Posons $a_j = |a_j|e^{i\theta_j}$. Alors

$$\hat{\mu}(n) = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{|a_j|}{2}\right)^{|\epsilon_j|} e^{i\theta_j\epsilon_j} \qquad \text{si} \quad n = \sum_{j=1}^{m}\epsilon_j\lambda_j$$

$$\hat{\mu}(n) = 0 \qquad \text{si} \quad n \neq \sum_{j=1}^{m}\epsilon_j\lambda_j$$

où $\epsilon_j = -1, 0, +1$. Remarquons

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n < \frac{3}{2}\lambda_n$$

$$\lambda_n - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}) > \frac{1}{2}\lambda_n.$$

D'après la formule (2), on a donc

$$\begin{aligned} I_\alpha^{\mu_a} &\approx \frac{1}{2}\lambda_1^{\alpha-1}|a_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{n-1}}\left|\sum_{j=1}^{n-1}(\epsilon_j\lambda_j \pm \lambda_n)^{\alpha-1}\right. \left[\frac{|a_n|}{2}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{|a_j|}{2}\right)^{|\epsilon_j|}\right]^2 \\ &\approx \lambda_1^{\alpha-1}|a_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n^{\alpha-1}|a_n|^2 \sum_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{|a_j|}{2}\right)^{2|\epsilon_j|} \\ &= \lambda_1^{\alpha-1}|a_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n^{\alpha-1}|a_n|^2\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+2\left(\frac{|a_j|}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

COROLLAIRE.

$$e(\mu_a) = \sup\{\alpha \geqslant 0 : \sum \lambda_n^{\alpha-1} |a_n|^2 \prod_1^{n-1} (1 + \frac{1}{2}|a_j|^2) < \infty\}.$$

Considérons en particulier

$$\mu_r = \prod_1^{\infty} (1 + r \cos 3^n t) \quad (0 \leqslant r \leqslant 1).$$

On voit

$$e(\mu_r) = 1 - \frac{\log(1 + \frac{1}{2}r^2)}{\log 3}.$$

En utilisant le théorème ergodique de Birkhoff, Y. Meyer et B. Weiss ([36]) ont démontré qu'il existe une constante C_r telle que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log(1 + r \cos 3^j t) = C_r \qquad \mu_r\text{-p.p.}$$

On en déduit, en utilisant la formule de Peyrière ([38]), que

$$\dim_* \mu_r = \dim^* \mu = 1 - \frac{C_r}{\log 3}.$$

Le problème se pose : quelle est cette constante C_r ? On ne sait que

$$C_r \geqslant \log(1 + \frac{1}{2}r^2).$$

Si ces deux nombres sont égaux, μ_r est un atome. Cela n'est sans doute jamais vrai pour un produit de Riesz, sauf pour un produit dont la dimension est 1. On verra plus tard que certains produits aléatoires sont non-atomiques.

La valeur exacte de C_r reste à étudier.

7. IMAGES DE MESURES PAR UN PLONGEMENT LIPSCHITZIEN

Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, β un nombre strictement positif. Une application $f : X \to Y$ est appelée un β-plongement lipschitzien de (X,d) dans (Y,δ) s'il existe deux nombres $B \geqslant A > 0$ tels que

$$A\, d^{\beta}(x,x') \leqslant \delta(f(x)\ ,\ f(x')) \leqslant B\, d^{\beta}(x,x')$$

quels que soient x et x' appartenant à X.

Nous nous intéressons à savoir quelles sont les propriétés de l'image par f d'une mesure définie sur X lorsque celles de la préimage sont bien connues. Un mot pour résumer : sous un β-plongement lipschitzien l'exposant énergique et les dimensions spectrales sont conservés à un facteur $\frac{1}{\beta}$ près.

THEOREME 1. Soit f un β-plongement lipschitzien de (X,d) dans (Y,δ). Pour toute mesure $\sigma \in M^+(X)$, on a

$$e(f\sigma) = \frac{1}{\beta}\, e(\sigma)$$

$f\sigma$ désignant l'image de σ par f. par conséquent

$$\dim_* f\, \sigma = \frac{1}{\beta} \dim_* \sigma.$$

C'est évident grâce à la formule suivante : $\alpha \geqslant 0$

$$\int_Y\int_Y \frac{df\sigma(y)df\sigma(y')}{(\delta(y,y'))^{\alpha}} \approx \int_X\int_X \frac{d\sigma(x)d\sigma(x')}{(d(x,x'))^{\alpha\beta}}. \tag{*}$$

A propos de β-plongement lipschitzien, son existence est un vrai problème et mérite d'être étudié. P. Assouad a fait sa contribution à ce thème en démontrant que si $\frac{k}{d} < \beta < 1$ il existe un β-plongement lipschitzien de $([0,1]^k, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Maintenant on va donner une condition nécessaire - bien connue d'ailleurs - pour l'existence d'un β-plongement lipschitzien, qui est une conséquence du théorème précédent.

Définissons la dimension de l'espace (X,d) comme la dimension de l'ensemble X, que l'on note par $\dim(X,d)$ ou simplement $\dim X$.

THEOREME 2. Un β-plongement lipschitzien de (X,d) dans (Y,δ) ne peut exister que pour

$$\beta \geqslant \frac{\dim X}{\dim Y}.$$

Démonstration. Quel que soit $\alpha < \dim X$. Comme $H_\alpha(X) > 0$, il existe un compact K tel que $H_\alpha(K) > 0$, et puis une mesure $\sigma \in M^+(K)$ telle que

$$\int_K\int_K \frac{d\sigma(x)d\sigma(x')}{(d(x,x'))^{\alpha-\epsilon}} < \infty \qquad (\forall\, \epsilon > 0).$$

D'après la formule (*),

$$\int_{f(K)}\int_{f(K)} \frac{df\sigma(y)\ df\sigma(y')}{(\delta(y,y'))^{(\alpha-\epsilon)/\beta}} < \infty \qquad (\forall\, \epsilon > 0).$$

Cela entraîne que $\frac{\alpha-\epsilon}{\beta} \leqslant \dim Y$ d'où $\dim X \leqslant \beta \dim Y$. CQFD

Avant d'aborder la dimension spectrale supérieure, nous faisons une observation sur la fonction d'ensembles dim. On constate que dim n'est pas une capacité au sens de Choquet car, en général, l'égalité suivante est fausse :

$$\dim(\cap K_n) = \inf_n \dim K_n \qquad (\text{compacts } K_n \downarrow).$$

Prenons, par exemple, $K_n = [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] \subset \mathbb{R}$. Mais au contraire, en ce qui concerne l'union, on a

LEMME. Soit $\{K_n\}$ une suite d'ensembles quelconques. On a

$$\dim(\cup K_n) = \sup_n \dim K_n .$$

Ce n'est qu'une conséquence de la monotonie et la sous-additivité des mesures de Hausdorff.

THEOREME 3. Soit f un β-plongement lipschitzien de (X,d) dans (Y,δ). Pour toute mesure $\sigma \in M^+(X)$, on a

$$\dim^* f\sigma = \frac{1}{\beta} \dim^* \sigma.$$

Démonstration. Comme f est β-lipschitzienne et que $\frac{1}{\beta} \dim X \leqslant \dim Y$ (Théorème 2), pour tout ensemble (compact) K on a

$$\dim f(K) \leqslant \inf(\frac{1}{\beta} \dim K, \dim Y) = \frac{1}{\beta} \dim K.$$

Soit $\alpha = \dim^* \sigma$. Il existe un G_δ-ensemble $A = \cup K_n$ tel que

$$\dim A = \alpha \quad , \quad \sigma(A) = \sigma(X)$$

(raffinement du lemme du § 3). Posons alors $B = f(A) = \cup f(K_n)$. D'après le lemme précédent et ce qu'on vient de démontrer,

$$\dim B = \sup_n \dim f(K_n) \leqslant \frac{1}{\beta} \sup_n \dim K_n = \frac{1}{\beta} \dim A.$$

Or évidemment $f\sigma(B) = f\sigma(Y)$. Donc

$$\dim^* f\sigma \leqslant \frac{1}{\beta} \dim^* \sigma$$

Inversement, supposons $\alpha = \dim^* \sigma > 0$. Quel que soit $0 < \epsilon < \alpha$, la décomposition de Kahane d'ordre $\alpha - \epsilon$ nous permet d'écrire

$$\sigma = \sigma^{r}_{\alpha-\epsilon} + \sigma^{s}_{\alpha-\epsilon} \qquad \text{avec} \qquad \sigma^{r}_{\alpha-\epsilon} \neq 0$$

Il existe donc un compact $K \subset X$ tel que

$$I^{1_K\sigma}_{\alpha-\epsilon} < \infty.$$

Tenant compte de la formule (*), on sait alors que

$$I^{f\ 1_K\sigma}_{(\alpha-\epsilon)/\beta} < \infty.$$

Cela implique que

$$\dim_p\ f\sigma \geqslant \dim_p f\ 1_K\sigma \geqslant \frac{\alpha-\epsilon}{\beta}$$

d'où

$$\dim_p\ f\sigma \geqslant \frac{\alpha}{\beta}. \qquad \text{CQFD}$$

8. IMAGES DE MESURES PAR UN MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE.

Un mouvement brownien fractionnaire est un (n,d,γ)-processus. Il s'agit d'un processus gaussien X_t défini sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, à accroissements stationnaires et tel que

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^2) = d|t-s|^{\gamma}, \qquad (t,s \in \mathbb{R}^n).$$

Il existe pour $0 < \gamma \leqslant 2$. Si $n = 1$ et $\gamma = 1$, on revient au mouvement brownien usuel. Posons $\beta = \gamma/2$. Il est bien connu que p. s. X_t est $(\beta-\epsilon)$-lipschitzienne. Cependant X_t n'est pas un plongement lipschitzien car tout plongement lipschitzien est un homéomorphisme et qu'un (n,d,γ)-processus admet éventuellement des points doubles. Mais de toute façon, au point de vue de transformation dans l'espace des mesures, un (n,d,γ)-processus a des propriétés très voisines de celles d'un β-plongement lipschitzien.

THEOREME. Soit X_t un (n,d,γ)-processus. Pour toute mesure $\sigma \in M^+_b(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\dim_* X\sigma = d \wedge \frac{1}{\beta} \dim_* \sigma \quad \text{p. s.}$$

$$\dim^* X\sigma = d \wedge \frac{1}{\beta} \dim^* \sigma \quad \text{p. s.}$$

β désignant $\gamma/2$, et $X\sigma$ désignant l'image de σ par X_t. Pour la première égalité on peut dire plus : $X\sigma$ est p. s. $d \wedge \frac{\alpha}{\beta}$ - atome lorsque σ est α-atome.

La deuxième égalité se démontre comme le théorème 3 dans le § 7. La première égalité, ou plutôt la dernière assertion dans le théorème, résulte de deux faits suivants : X_t est p. s. $(\beta-\epsilon)$-lipschitzien ; l'intégrale

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{k}(u)\, |\hat{X\sigma}(u)|^2 du$$

est finie où $k(t) = |t|^{- d \wedge \frac{1}{\beta} e(\sigma)}$.

9. MESURES HARMONIQUES

Soit Ω un domaine de Jordan dans le plan complexe. Soit $w_0 \in \Omega$. On désigne par $\omega = \omega(.,\Omega,w_0)$ la mesure harmonique sur $\partial\Omega$ évaluée en w_0. On peut définir cette mesure comme l'image de la mesure de Lebesgue normalisée par la correspondance frontière induite d'une application conforme f du disque $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sur Ω telle que $f(0) = w_0$.

Soit g un β-plongement lipschitzien. On voit dans le § 7 que, plus éloigné de 1 est β, plus grave est la distorsion d'une mesure sous l'action de g. De ce point de vue de distorsion on verra que l'application conforme est conservatoire : en tant que l'image d'une mesure linéaire, la mesure harmonique ω est "linéaire". Précisément

THEOREME 1. Pour tout domaine de Jordan Ω, la mesure harmonique ω définie sur $\partial\Omega$ est 1-dimensionnelle. Par conséquent

$$\dim_* \omega = \dim^* \omega = 1.$$

Cela résulte immédiatement d'un théorème de Makarov ([29]) en version faible :

$$\omega \ll H_\beta \text{ si } \beta < 1$$
$$\omega \perp H_\beta \text{ si } \beta > 1,$$

et du théorème dans le § 5.

D'autre part, un plongement lipschitzien transforme atomes en atomes, ainsi que le mouvement brownien. Ce n'est plus le cas pourtant pour certaines applications conformes. De ce point de vue, certaines applications conformes ne sont pas conservatoires : l'image d'un atome n'est plus atome.

Pour toute application conforme f, on a toujours

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{d\omega(w)d\omega(z)}{|w-z|^\alpha} = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \frac{dt\ ds}{|f(e^{it}) - f(e^{is})|^\alpha}. \qquad (*)$$

Afin de bien manipuler cette intégrale d'énergie, on ne considère dans la suite que les domaines quasidisques. Un domaine Ω est dit quasidisque s'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout couple de points w', w'' sur $\partial\Omega$ on ait :

$$\min(\text{diam } J', \text{diam } J'') \leqslant K|w'-w''|$$

où J' et J'' désignent les deux arcs constituant $\partial\Omega \setminus \{w',w''\}$.

THEOREME 2. Pour tout domaine de Jordan Ω, la mesure harmonique ω définie sur $\partial\Omega$ satisfait

$$e(\omega) \geqslant \frac{\sqrt{29} - 1}{8} > \frac{1}{2}.$$

D'ailleurs, il existe des domaines de Jordan quasidisque dont la mesure harmonique ω satisfait

$$e(\omega) < 1.$$

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants. Une notation d'abord : si I est un arc sur $\mathbb{T}$ de centre ζ, on désigne par a_I le point $(1-|I|)\zeta$ où $|\cdot|$ signifie la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

LEMME 1. Soit f une application conforme du disque unité D sur un domaine quasidisque Ω. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout arc $I = \{e^{it} : \alpha < t < \beta\}$ $(0 \leqslant |\beta-\alpha| \leqslant \pi)$ on ait

$$C^{-1}|\beta-\alpha||f'(a_I)| \leqslant |f(e^{i\beta}) - f(e^{i\alpha})| \leqslant C|\beta-\alpha||f'(a_I)|.$$

Preuve. La deuxième inégalité est une conséquence immédiate du Lemme 2.1 dans [29], p. 55. Quant à la première, on va utiliser la proposition 1.5 dans le même article de Makarov, p. 53 : pour tout crosscut σ dans Ω joignant les extrémités de f(I), on a

$$\operatorname{diam} \sigma \geqslant C|I||f'(a_I)|$$

où C est une constante absolue.

D'après l'hypothèse de quasidisque,

$$|f(e^{i\beta}) - f(e^{i\alpha})| \geqslant \frac{1}{K} \min(\operatorname{diam} f(I), \operatorname{diam} f(\mathbb{T}\setminus I)). \qquad (1)$$

Soient maintenant

$$I_\epsilon^1 = \{(1-\epsilon)e^{it}:\alpha<t<\beta\} \cup \{re^{i\alpha}:1-\epsilon\leqslant r\leqslant 1\} \cup \{re^{i\beta}:1-\epsilon\leqslant r\leqslant 1\}$$

$$I_\epsilon^2 = \{(1-\epsilon)e^{it}:\ t \notin [\alpha,\beta] \bmod. 2\pi\} \cup \{re^{i\alpha}:1-\epsilon\leqslant r\leqslant 1\} \cup \{re^{i\beta}:1-\epsilon\leqslant r\leqslant 1\}.$$

Comme $f(I_\epsilon^1)$ et $f(I_\epsilon^2)$ sont deux crosscuts, d'après la proposition citée ci-dessus, on a

$$\operatorname{diam} f(I_\epsilon^1) \geqslant C|I||f'(a_I)| \qquad (2)$$

$$\operatorname{diam} f(I_\epsilon^2) \geqslant C(1-|I|)|f'(a_{T\setminus I})|. \qquad (3)$$

Comme

$$f(I_\epsilon^1) \to f(I)$$

$$f(I_\epsilon^2) \to (\mathbb{T} \setminus I)$$

uniformément et que les deux membres à droite dans les expressions (2) et (3) ne dépendent pas de ϵ, laissons ϵ tendre vers zéro, on obtient

$$|f(e^{i\beta}) - f(e^{i\alpha})| \geqslant \frac{C}{K} \min(|I||f'(a_I)|,(1-|I|)|f'(a_{T\setminus I})|). \qquad (1')$$

Observons que

$$(1-|I|)|f'(a_{T\setminus I})| \geqslant \frac{1}{2} \min_{|z|<\frac{1}{2}} |f'(z)| = \delta > 0.$$

Si $|I||f'(a_I)| \leqslant (1-|I|)|f'(A_{T\setminus I})|$, on a

$$|f'(e^{i\beta}) - f'(e^{i\alpha})| \geqslant \frac{C}{K}|I||f'(a_I)|.$$

En cas contraire, on a

$$|f'(e^{i\beta}) - f'(e^{i\alpha})| \geqslant \frac{C}{K}\,\delta.$$

Or, d'après la même proposition,

$$|I||f'(a_I)| \leqslant \frac{1}{C}\,\mathrm{diam}\,\Omega.$$

Donc

$$|f'(e^{i\beta}) - f'(e^{i\alpha})| \geqslant \frac{C^2\delta}{K\,\mathrm{diam}\,\Omega}|I||f'(a_I)|.$$

En résumé : en tout cas, on a

$$|f'(e^{i\beta}) - f'(e^{i\alpha})| \geqslant \min\left(\frac{C}{K},\frac{C^2\delta}{K\,\mathrm{diam}\,\Omega}\right)|I||f'(a_I)|.$$

CQFD

LEMME 2. Sous la même hypothèse que le lemme 1, on a

$$I_\alpha^\omega \approx \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi/2} \frac{du}{|u|^\alpha |f'((1-\frac{u}{2\pi})e^{iv})|^\alpha}. \qquad (**)$$

Preuve. Décomposons $\mathbb{T} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ en

$$T_j = [(j-1)\frac{\pi}{2}, j\frac{\pi}{2}[\qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Soient $\omega_j = 1_{f(T_j)}\omega$. Alors $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$. Evidemment

$$\sup_j I_\alpha^{\omega_j} \leqslant I_\alpha^\omega \leqslant 4(I_\alpha^{\omega_1} + I_\alpha^{\omega_2} + I_\alpha^{\omega_3} + I_\alpha^{\omega_4}).$$

D'après le lemme 1, on sait

$$I_\alpha^{\omega_j} \approx \int_{T_j}\int_{T_j} \frac{dt\,ds}{|t-s|^\alpha |f'((1-\frac{|t-s|}{2\pi})e^{i(t+s/2)})|^\alpha}.$$

Posons $u = t-s$, $v = t+s$. Alors

$$I_\alpha^{\omega_j} \approx \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} dv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{|u|^\alpha |f'((1-\frac{|u|}{2\pi})e^{iv})|^\alpha}$$

d'où résulte le lemme. En réalité, on peut démontrer

$$\frac{1}{2C^\alpha} J_\alpha^\omega \leqslant I_\alpha^\omega \leqslant 8C^\alpha J_\alpha^\omega$$

où C est la constante dans le lemme 1 et

$$J_\alpha^\omega = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi/2} \frac{du}{|u|^\alpha |f'((1-\frac{u}{2\pi})e^{iv})|^\alpha}$$

CQFD

Démonstration du théorème 2. Soit f une fonction univalente définie dans D. Ch. Pommerenke a démontré [40] que : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int |f'(r\zeta)|^\lambda |d\zeta| = o((1-r)^{-\sigma}) \qquad (r \to 1)$$

pour σ vérifiant

$$\sigma > -\frac{1}{2} + \lambda + \sqrt{\frac{1}{2} - \lambda + 4\lambda^2}.$$

Posons $\lambda = -\alpha$ $(\alpha > 0)$. On a alors

$$\int \frac{|d\zeta|}{|f'(r\zeta)|^\alpha} = o((1-r)^{-\sigma}) \qquad (r \to 1)$$

pour σ vérifiant

$$\sigma > -\frac{1}{2} - \alpha + \sqrt{\frac{1}{2} + \alpha + 4\alpha^2}.$$

Tenant compte de (**), on s'aperçoit que

$$e(\omega) \geqslant \sup\{\alpha > 0 : \sqrt{\frac{1}{2} + \alpha + 4\alpha^2} - \frac{1}{2} < 1\} = \frac{\sqrt{29} - 1}{8}.$$

Maintenant envisageons l'application conforme suivante, considérée par Makarov [30] :

$$g(z) = \int_0^z \exp(\frac{i}{5} b(\zeta))d\zeta \qquad (z \in D)$$

où

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Makarov a montré que

$$\int \frac{|d\zeta|}{|g'(r\zeta)|^\alpha} \geqslant (1-r)^{-c\alpha^2}$$

C étant une constante positive. En utilisant (**) on en déduit que

$$e(\omega) \leqslant \inf\{\alpha > 0 : \alpha + c\alpha^2 \geqslant 1\} = \frac{2}{\sqrt{1+4c} + 1} < 1.$$

CQFD

10. CERTAINES MESURES ALEATOIRES

Dans cette section, plusieurs mesures aléatoires vont être envisagées. Nous nous intéressons surtout à leurs dimensions.

D'abord le chaos gaussien Q_u $(u > 0)$ associé au noyau de type σ-positif

$$q_u(t,s) = u \log^+ \frac{1}{d(t,s)} + O(1) \qquad (t,s \in T),$$

défini sur un espace métrique (T,d) de type homogène ([5]). On sait que p. s. $Q_u\sigma = 0$ lorsque $u > 2 \dim^*\sigma$. Dans le cas complémentaire on a

THEOREME 1. Supposons $u < 2 \dim^*\sigma$. On a

$$\dim^* Q_u\sigma = \dim^*\sigma - \frac{u}{2} \quad \text{p. s.}$$

$$\dim_* Q_u\sigma \geqslant \dim_*\sigma - \frac{u}{2} \quad \text{p. s.}$$

En particulier, si σ est α-dimensionnelle $(u < 2\alpha)$, $Q_u\sigma$ est p. s. $(\alpha-\frac{u}{2})$-dimensionnelle.

Avant de démontrer, faisons quelques rappels. $\mathbb{E}Q_u$ est une projection dans l'espace $M^+(T)$. Une mesure dans $\mathrm{Img}(\mathbb{E}Q_u)$ est dite Q_u-régulière. Une mesure dans $\mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q_u)$ est dite Q_u-singulière. Voici un fait utile dans la suite. Si $u = u_1+u_2$ avec u_1, $u_2 > 0$, nous pouvons écrire

$$Q_u = Q_{u_1} Q_{u_2}$$

où Q_{u_1} et Q_{u_2} sont deux chaos gaussiens indépendants de paramètres u_1 et u_2. De plus si $\sigma \in \mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q_u)$, il est p. s. que $Q_{u_2}\sigma$ est Q_{u_1}-singulière ; si $\sigma \in \mathrm{Img}(\mathbb{E}Q_u)$, il est p. s. que $Q_{u_2}\sigma$ est Q_{u_1}-régulière. Rappelons une condition de non-degénérescence : supposons $\sigma \in \Lambda_{\alpha+}$ et $u < 2\alpha$. Alors $\sigma \in \mathrm{Img}(\mathbb{E}Q_u)$, et de plus $Q_u\sigma \in \Lambda_{(\alpha-\frac{u}{2})^+}$. $\Lambda_{\alpha+}$ désignant l'ensemble des mesures $\sigma \in M^+(T)$ vérifiant la condition suivante : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$, un $C > 0$ et un compact K tels que $\sigma_K = 1_K\sigma$ vérifie

$$\sigma_K(T) > \sigma(T) - \epsilon$$

$$\sigma_K(B) \leqslant C(\text{diam } B)^{\alpha+\delta}$$

pour toute B. Comme conséquence de la condition de dégénérescence et de celle de non dégénérescence, l'esquisse de la structure de $\text{Ker}(\mathbb{E}Q_u)$ est bien claire :

$$\{\sigma : \dim^*\sigma < \frac{u}{2}\} \subset \text{Ker}(\mathbb{E}Q_u) \subset \{\sigma : \dim^*\sigma \leqslant \frac{u}{2}\}.$$

Démonstration du théorème 1. Posons $\alpha = \dim^*\sigma$. Etant donné $\epsilon > 0$, la décomposition de Kahane constate qu'il existe un compact K tel que

$$I_{\alpha-\epsilon}^{1_K\sigma} < \infty.$$

Cela, avec la condition de non dégénérescence, entraîne

$$\dim^* Q_u\sigma \geqslant \dim^* Q_u 1_K\sigma \geqslant \alpha - \frac{u}{2} - \epsilon.$$

En ce qui concerne l'inégalité inverse, envisageons

$$Q_\beta Q_u \sigma.$$

Pour que $\sigma \in \text{Ker}(\mathbb{E}Q_{\beta+u})$ il suffit que $\beta+u > 2\alpha$, à savoir $\beta > 2\alpha - u$. Comme $Q_u\sigma$ est Q_β-singulière ($\beta > \alpha - \frac{u}{2}$), on sait

$$\dim^* Q_u\sigma \leqslant \frac{\beta}{2} \quad \text{p. s.}$$

L'inégalité dans l'énoncé du théorème vaut grâce à la condition de non dégénérescence. CQFD

Remarque. Le cas suivant peut arriver

$$\dim_* Q_u\sigma > \dim_*\sigma - \frac{u}{2}.$$

En effet, prenons une mesure σ_1 α_1-dimensionnelle et une autre σ_2 α_2-dimensionnelle. Supposons $2\alpha_1 < u < 2\alpha_2$. On a alors

$$\dim_* Q_u(\sigma_1+\sigma_2) = \alpha_2 - \frac{u}{2}$$

$$\dim_*(\sigma_1+\sigma_2) = \alpha_1 .$$

Considérons ensuite une martingale indexée associée au recouvrement sur le tore $\mathbb{T}^d$ ([17]). Soient $\{I_n\}$ une suite de boules de volumes $\{\frac{\alpha}{n}\}$ dont les fonctions indicatrices soient désignées par $\{\chi_n\}$, et $\{\omega_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées sur $\mathbb{T}^d$.

Introduisons les poids

$$P_n(t) = \frac{1-\chi_n(t-\omega_n)}{1-\frac{\alpha}{n}} \qquad (t \in \mathbb{T}^d),$$

puis les produits

$$Q_n(t) = P_1(t) \ldots P_n(t).$$

Désignons par Q_α l'opérateur correspondant. On sait par ailleurs (cf. chapitre V) que $I^\sigma_{d\alpha} < \infty$ entraîne $\sigma \in \mathrm{Img}(\mathbb{E}Q_\alpha)$, et que toute mesure portée par un borélien de mesure de $d\alpha$-Hausdorff finie appartient à $\mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q_\alpha)$ tandis que toute mesure appartenant à $\mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q_\alpha)$ est portée par un borélien de $d\alpha$-capacité nulle. En particulier, on a

$$\{\sigma : \dim^*\sigma < \alpha\} \subset \mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q_\alpha) \subset \{\sigma : \dim^*\sigma \leqslant \alpha\}.$$

De la même façon que pour démontrer le théorème 1, on peut démontrer

THEOREME 2. Supposons $\alpha < \dim^*\sigma$. On a

$$\dim^* Q_\alpha\sigma = \dim^*\sigma - \alpha \quad \text{p. s.}$$

$$\dim_* Q_\alpha\sigma \geqslant \dim_*\sigma - \alpha \quad \text{p. s.}$$

En particulier, si σ est β-dimensionnelle $(\alpha < \beta)$, $Q_\alpha\sigma$ est p. s. $(\beta-\alpha)$-dimensionnelle.

La troisième machine produisant des mesures aléatoires est la martingale de naissance-mort de Mandelbrot avec W telle que

$$P(W = C^\alpha) = C^{-\alpha} \quad , \quad P(W=0) = 1 - C^{-\alpha}.$$

L'opérateur correspondant est désigné par N_α.

THEOREME 3. Supposons $\alpha < \dim^*\sigma$. On a

$$\dim^* N_\alpha\sigma = \dim^*\sigma - \alpha \quad \text{p. s.}$$

$$\dim_* N_\alpha\sigma \geqslant \dim_*\sigma - \alpha \quad \text{p. s.}$$

Particulièrement, si σ est β-dimensionnelle $(\alpha < \beta)$, $N_\alpha\sigma$ est p. s. $(\beta-\alpha)$-dimensionnelle.

Signalons que le même résultat vaut pour le chaos de Lévy ([9]).

11. PRODUITS DE RIESZ DYADIQUES

Sur le groupe dyadique $D = \{-1,1\}^{\mathbb{N}^*}$ est définie la mesure de Haar par le produit

$$\lambda = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

λ_n étant définie comme ci-dessous :

$$\lambda_n(-1) = \lambda_n(1) = \frac{1}{2}.$$

Soit $I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}$ l'intervalle constitué des points dont chacun a pour n premières coordonnées $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. Avec cette notation on peut définir λ en posant

$$\lambda(I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}) = \frac{1}{2^n} \qquad (n \geqslant 1 \ ; \ \epsilon_1, \dots, \epsilon_n = \pm 1).$$

Prenons sur D la métrique usuelle : par définition, deux points sont à distance 2^{-n} s'ils se trouvent dans le même intervalle $I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}$, et dans aucun intervalle strictement plus petit. C'est bien un espace de type homogène, et on vérifie facilement que

$$\dim_* \lambda = \dim^* \lambda = 1.$$

Envisageons maintenant une généralisation. Soit $-1 \leqslant r \leqslant 1$. Définissons d'abord une suite de probabilités $\{\mu_n\}$ telle que

$$\mu_n(-1) = \frac{1-r}{2} \quad , \quad \mu_n(1) = \frac{1+r}{2}$$

puis leur produit

$$\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n .$$

Autrement dit

$$\mu(I_{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1+\epsilon_j r}{2}.$$

On appelle μ produit de Riesz dyadique.

Remarquons que $\{\epsilon_n\}$ constitue une suite de variables indépendantes, équidistribuées et d'espérance nulle par rapport à la mesure de Haar λ.

Pour la même raison, elle constitue aussi, par rapport à la probabilité μ, une suite de variables indépendantes, équidistribuées telles que

$$\mu(\epsilon_n = -1) = \frac{1-r}{2} \quad , \quad \mu(\epsilon_n = 1) = \frac{1+r}{2}.$$

Donc pour tout n, l'espérance

$$\mathbb{E}_\mu \log(1 + \epsilon_n r) = \frac{1}{2}((1-r)\log(1-r)+(1+r)\log(1+r)).$$

THEOREME 1. Soit $-1 \leqslant r \leqslant 1$. On a

$$\dim_* \mu = \dim^* \mu = 1 - \frac{1}{2 \log 2}((1-r)\log(1-r)+(1+r)\log(1+r)).$$

Par conséquent, μ est unidimensionnelle.

Démonstration. Etant donné $x = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \ldots)$, envisageons le rapport

$$\frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \lambda(I_n(x))} = 1 - \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log(1 + \epsilon_j r)$$

où $I_n(x)$ désigne le n-ième intervalle contenant x. Supposons $-1 < r < 1$ ($r = \pm 1$ correspondant aux cas triviaux). Comme $\{\log(1+\epsilon_n r)\}$ est une suite de variables indépendantes, équidistribuées et d'espérance finie, la loi des grands nombres donne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \lambda(I_n(x))} = 1 - \frac{1}{2 \log 2}((1-r)\log(1-r)+(1+r)\log(1+r)) \quad \mu\text{-p. p.}$$

Ceci, avec un théorème de Billinsley ([3]) achève la démonstration. CQFD

En ce qui concerne l'exposant énergique, on a

THEOREME 2.

$$e(\mu) = 1 - \frac{\log(1+r^2)}{\log 2}.$$

Par conséquent, μ n'est pas atomique.

Démonstration. Calculons l'énergie de μ par rapport au noyau $(d(t,s))^{-\alpha}$. Rappelons que $d(t,s)$ ne prend que les valeurs 2^{-n} ($n=0, 1, \ldots$) et 0. On a

$$
\begin{aligned}
I_\alpha^\mu &= \iint_{D\times D} \frac{d\mu(s)\, d\mu(t)}{(d(t,s))^\alpha} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\alpha} \iint_{d(t,s)=2^{-n}} d\mu(s) d\mu(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\alpha} \sum_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} (\mu(I_{\epsilon_1\ldots\epsilon_n}))^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(1+\alpha)} \mathbb{E}_\lambda \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1+\epsilon_j r}{2}\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1+\alpha}\, \frac{1+r^2}{4}\right)^n
\end{aligned}
$$

donc

$$I_\alpha^\mu < \infty \Leftrightarrow \alpha \leqslant 1 - \frac{\log(1+r^2)}{\log 2}.$$

Le théorème 1 peut s'étendre au groupe $G_c = \{1, 2, \ldots, c\}^{\mathbb{N}^+}$.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_c$ c nombres positifs tels que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_c = 1.$$

Définissons d'abord une fonction (une probabilité) χ sur le groupe $\mathbb{Z}_c$:

$$\chi(j) = p_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant c).$$

Soit $I_{r_1\ldots r_n}$ l'intervalle des points dont chacun a pour ses n premières coordonnées $r_1, \ldots, r_n$. Définissons ensuite une mesure μ sur le groupe G_c de la façon suivante :

$$\mu(I_{r_1\ldots r_n}) = \prod_{j=1}^{n} \chi(r_j).$$

μ est une probabilité par rapport à laquelle les $\chi(r_j)$ sont indépendantes, et

$$\mathbb{E}_\mu \log \chi(r_j) = \sum_{\ell=1}^{c} p_\ell \log \frac{1}{p_\ell}.$$

De la même façon on peut démontrer

THEOREME 3. Pour la mesure μ définie ci-dessus, on a

$$\dim_* \mu = \dim^* \mu = 1 - \frac{1}{\log c} \sum_{\ell=1}^{c} p_\ell \log \frac{1}{p_\ell}.$$

Par conséquent, μ est unidimensionnelle.

Remarque. Le produit de Riesz dyadique correspond au cas où

$$p_1 = \frac{1+r}{2} \quad , \quad p_2 = \frac{1-r}{2}.$$

12. PRODUITS DE RIESZ ALEATOIRES

En ce qui concerne les produits de Riesz déterministes, il faut citer le travail de J. Peyrière ([38]). Un produit de Riesz définit une mesure μ_a. J. Peyrière a trouvé une formule minorant la dimension inférieure de μ_a et une autre majorant la dimension supérieure. Mais toutes les deux font intervenir la mesure μ_a elle-même, ce qui est un des inconvénients pour bien manipuler les dimensions, et elles ne valent que sous certaines hypothèses imposées sur les spectres du produit, qui nous paraissent parasites.

Nous nous proposons d'envisager une classe de produits de Riesz aléatoires. Avantage brièvement dit : les hypothèses, qui apparaissaient dans le cadre déterministe et nous paraissaient parasites, sont toutes supprimées, et le produit lui-même n'intervient plus dans les formules trouvées. Avant d'aboutir à ce résultat nous nous occupons de la convergence presque partout de certaines séries par rapport à un produit de Riesz aléatoire. Notre clé est une probabilité de J. Peyrière. A la suite, nous ramassons divers résultats, fruits de la probabilité de Peyrière.

Sans peine on peut étendre ces résultats aux produits de Riesz aléatoires convenablement définis sur un tore et même sur un groupe compact.

Il serait très souhaitable que l'on puisse obtenir des résultats sur certains produits de Riesz déterministes en se débarrassant de l'élément stochastique.

Soient $\{\omega_n\}$ une suite de variables indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0,2\pi[$ définies dans un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Etant donné une suite d'entiers positifs $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lambda_{n+1} \geq 3\lambda_n$ pour tout n, et une suite de nombres complexes $a = \{a_n\}_{n\geq 1}$ dont les modules sont inférieurs à 1. Au lieu de considérer le produit de Riesz déterministe

$$\mu_a = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \Re e(a_n e^{i\lambda_n t})\right)$$

nous envisageons le produit de Riesz aléatoire

$$\mu_{a\omega} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \Re e(a_n e^{i\omega_n} e^{i\lambda_n t})\right).$$

En posant

$$a_n = r_n e^{i\theta_n} \qquad (r_n \geqslant 0)$$

nous pouvons réécrire

$$\mu_{a\omega} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + r_n \cos(\lambda_n t + \omega_n + \theta_n)).$$

Dans toute la suite, la clé omnipotente est la probabilité de Peyrière q définie sur $\Omega \times \mathbb{T}$ par la relation suivante

$$\iint f(\omega,t)dq(\omega,t) = \mathbb{E}\int f(\omega,t)d\mu_{a\omega}(t)$$

f étant fonction positive mesurable. Pour la commodité on adopte la notation suivante

$$\mathbb{E}_q f = \iint f(\omega,t)dq(\omega,t)$$

en réservant $\mathbb{E}$ à l'espérance relative à la probabilité définie sur Ω.

Définissons, pour $n \geqslant 1$,

$$X_n(\omega,t) = \lambda_n t + \omega_n \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

Ce sont des fonctions définies sur $\Omega \times T$ à valeurs dans $[0,2\pi[$.

LEMME 1. a) Les X_n sont q-indépendantes.

b) Pour toute fonction h 2π-périodique, positive ou bornée, on a

$$\mathbb{E}_q h(\lambda_n t + \omega_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x-\theta_n)(1+r_n \cos x)dx. \qquad (*)$$

Preuve. On prouve le lemme en montrant que quel que soit N, et quelles que soient les fonctions continues et bornées :

$$f_n : [0,2\pi[\to \mathbb{R}^+ \qquad (1 \leqslant n \leqslant N),$$

on a

$$\mathbb{E}_q \prod_1^N f_n(X_n) = \prod_1^N \mathbb{E}_q f_n(X_n). \tag{1}$$

D'après la définition de q, le membre de gauche de (1) est égal à

$$\mathbb{E} \int \prod_1^N f_n(X_n) d\mu_{a\omega}(t)$$

puis par la définition de $\mu_{a\omega}$, celui-ci devient

$$\mathbb{E} \lim_{K\to\infty} \int \prod_1^N f_n(X_n) . \prod_1^K (1 + r_n \cos(X_n + \theta_n)) \frac{dt}{2\pi}.$$

Comme la limite ci-dessus existe pour tout ω et que l'intégrale est majorée par $\prod_1^N \|f_n\|_\infty$, le théorème de Lebesgue nous permet de changer le signe de limite et celui d'espérance. Ainsi le membre envisagé s'écrit comme ci-dessus

$$\lim_{K\to\infty} \mathbb{E} \int \prod_1^N f_n(X_n) . \prod_1^K (1+r_n \cos(X_n+\theta_n)) \frac{dt}{2\pi}$$

$$= \int \prod_1^N \mathbb{E}\, f_n(X_n)(1+r_n \cos(X_n+\theta_n)) \frac{dt}{2\pi}$$

grâce au théorème de Fubini et à l'indépendance des ω_n. Or, pour tout n, en tenant compte de l'invariance par translation de $d\omega_n$, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\, f_n(X_n)(1 + r_n \cos(X_n+\theta_n)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(\lambda_n t + \omega_n)(1 + r_n \cos(\lambda_n t + \omega_n + \theta_n)) d\omega_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(x-\theta_n)(1+r_n \cos x) dx. \end{aligned}$$

Remarquons que cette intégrale ne dépend pas de t. On obtient enfin une expression pour le membre à gauche de (1) :

$$\prod_1^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(x-\theta_n)(1+r_n \cos x) dx.$$

En particulier, pour tout n, on a

$$\mathbb{E}_q\, f_n(X_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(x-\theta_n)(1+r_n \cos x) dx$$

d'où une expression pour le membre à droite de (1). CQFD

La clé étant préparée, nous nous engageons dans l'étude de la convergence de certaines séries. On a besoin de quelques lemmes.

LEMME 2.

$$\mathbb{E}_q e^{in(\lambda_j t + \omega_j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}\bar{a}_j & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2} a_j & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{si } n \neq 0,-1,1. \end{cases}$$

Preuve. D'après la formule (*), on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_q e^{in(\lambda_j t+\omega_j)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(x-\theta_j)}(1+r_j \cos x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-in\theta_j}\int_0^{2\pi}(e^{inx} + \frac{1}{2} r_j e^{i(n+1)x} + \frac{1}{2} r_j e^{i(n-1)x})dx \end{aligned}$$

d'où le résultat. CQFD

LEMME 3. Soit $\{\alpha_j\}_{j\geqslant 1}$ une suite de carré sommable. On a

$$\mathbb{E}\int \sup_{m\geqslant 1} |\sum_{j=1}^{m}\alpha_j (e^{-i(\lambda_j t+\omega_j)} - \frac{1}{2} a_j)|^2 d\mu_{a\omega}(t) \leqslant 4 \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2$$

$$\mathbb{E}\int \sup_{m\geqslant 1} |\sum_{j=1}^{m}\alpha_j (e^{i(\lambda_j t+\omega_j)} - \frac{1}{2} \bar{a}_j)|^2 d\mu_{a\omega}(t) \leqslant 4 \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2$$

$$\mathbb{E}\int \sup_{m\geqslant 1} |\sum_{j=1}^{m}\alpha_j e^{in(\lambda_j t+\omega_j)}|^2 d\mu_{a\omega}(t) \leqslant 4 \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2, \quad (n \neq 0, \pm 1).$$

Preuve. D'après le lemme 2, la suite

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j (e^{-i(\lambda_j t+\omega_j)} - \frac{1}{2}a_j)$$

est une martingale par rapport à la probabilité q. D'ailleurs on a

$$\mathbb{E}_q |e^{-i(\lambda_j t+\omega_j)} - \frac{1}{2} a_j|^2 = 1 - \frac{1}{4}|a_j|^2 \leqslant 1.$$

En tenant compte de l'indépendance des $\lambda_j t + \omega_j$ et en utilisant une inégalité de Doob sur les martingales, on obtient facilement la première inégalité.

De même pour la deuxième et la troisième. CQFD

Enonçons maintenant le résultat concernant la convergence presque partout par rapport à $\mu_{a\omega}$.

THEOREME 1. Soit $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions dans $A(\mathbb{T})$ telle qu'il existe deux nombres strictement positifs, ρ, et C, tels que

$$0 < \rho < 1, \qquad \sup_{n\geqslant 1} |\hat{f}_n(j)| \leqslant C\, \rho^{|j|}.$$

Alors pour toute suite $\{\alpha_j\}_{j\geqslant 1}$ de carré sommable, presque sûrement la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j [f_j(\lambda_j t+\omega_j) - \mathbb{E}_q f_j(\lambda_j t+\omega_j)]$$

converge pour $\mu_{a\omega}$-presque tout t.

Démonstration. D'après le lemme 2,

$$\mathbb{E}_q f_j(\lambda_j t + \omega_j) = \frac{1}{2} a_j \hat{f}_j(-1) + \hat{f}_j(0) + \frac{1}{2} \bar{a}_j \hat{f}_j(1).$$

Posons

$$\varphi_{n,j}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ e^{i(\lambda_j t+\omega_j)} - \frac{1}{2}\bar{a}_j & \text{si } n = 1 \\ e^{-i(\lambda_j t+\omega_j)} - \frac{1}{2} a_j & \text{si } n = -1 \\ e^{in(\lambda_j t+\omega_j)} & \text{si } n \neq 0, -1, 1. \end{cases}$$

On a

$$f_j(\lambda_j t + \omega_j) - \mathbb{E}_q f_j(\lambda_j t + \omega_j) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(n)\, \varphi_{n,j}.$$

Or

$$\Big|\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(n)\varphi_{n,j}\Big| \leqslant \sum_{n\neq 0} \Big|\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \hat{f}_j(n)\varphi_{n,j}\Big|.$$

d'où

$$\sup_{N\geq 1} \Big| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(n)\varphi_{n,j} \Big| \leqslant \sum_{n\neq 0} \sup_{N\geq 1} \Big| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \hat{f}_j(n)\varphi_{n,j} \Big| .$$

Le lemme 3 nous permet d'obtenir

$$\Big\| \sup_{N\geq 1} \Big| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(n)\varphi_{n,j} \Big| \Big\|_{L^2(q)} \leqslant 2 \sum_{n\neq 0} \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 |\hat{f}_j(n)|^2}$$

$$\leqslant 2C\Big(\sum_{n\neq 0} \rho^{|n|}\Big) \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2} .$$

On en déduit facilement la conclusion de cette inégalité. CQFD

Remarque 1. Dans le cadre déterministe, un résultat analogue vaut, mais sous l'hypothèse que λ_n divise λ_{n+1} ([38]). Récemment, J. Peyrière a amélioré ce résultat en se concentrant sur le cas où $f_n(t) = e^{it}$.

Soient $a = re^{i\theta} (r > 0)$, $\rho = r^{-1}(\sqrt{1-r^2}-1)$. En notant que ([38])

$$\log(1+\mathrm{Re}(ae^{it})) = -\log(1+\rho^2) - \sum_{n\neq 0} \frac{\rho^{|n|}}{|n|} e^{in\theta} e^{int} ,$$

$$\mathbb{E}_q \log(1+\mathrm{Re}(a_n e^{i(\lambda_n t+\omega_n)})) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+r_n\cos x)\log(1+r_n\cos(x-\theta_n))dx$$

$$= 1 - \sqrt{1-|a_n|^2} - \log \frac{2(1-\sqrt{1-|a_n|^2})}{|a_n|^2},$$

on a

COROLLAIRE. Presque sûrement la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log \lambda_n} \Big[\log(1+\mathrm{Re}(a_n e^{i(\lambda_n t+\omega_n)})) - \hat{a}_n\Big]$$

converge pour $\mu_{a\omega}$-presque tout t, où

$$\hat{a}_n = 1 - \sqrt{1-|a_n|^2} - \log \frac{2(1-\sqrt{1-|a_n|^2})}{|a_n|^2} \quad \text{si} \quad a_n \neq 0$$

$$\hat{a}_n = 0 \quad \text{si} \quad a_n = 0.$$

Suivant J. Peyrière ([38] pp. 143-145) et utilisant le corollaire précédent, nous pouvons démontrer

THEOREME 2. Supposons $\lambda_{n+1} \geqslant 3\lambda_n$ et $|a_n| \leqslant 1$. On a p. s.

$$\dim_* \mu_{a\omega} \geqslant 1 - \limsup_{n\to\infty} \frac{\hat{a}_1 + \ldots + \hat{a}_n}{\log \lambda_n}$$

$$\dim^* \mu_{a\omega} \leqslant 1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{\hat{a}_1 + \ldots + \hat{a}_n}{\log \lambda_{n+1}}$$

COROLLAIRE. Supposons

$$\lambda_{n+1} \geqslant 3\lambda_n$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = r.$$

On a p. s.

$$\dim_* \mu_{a\omega} \geqslant 1 - \hat{r} \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\log \lambda_n}$$

$$\dim^* \mu_{a\omega} \leqslant 1 - \hat{r} \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\log \lambda_{n+1}}.$$

COROLLAIRE. Le produit de Riesz

$$\mu_{r\omega} = \prod_1^\infty (1 + r\cos(3^n t + \omega_n)) \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1)$$

est unidimensionnel et de dimension

$$1 - \frac{1}{\log 3} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + r\cos x)\log(1+r\cos x)dx.$$

Remarque 2. Il est clair que

$$e(\mu_{r\omega}) = 1 - \frac{\log(1 + \frac{1}{2}r^2)}{\log 3}.$$

Combinant ceci et le deuxième corollaire précédent, on voit que p. s. $\mu_{r\omega}$ n'est pas atomique car les deux quantités suivantes

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1+r\cos X)\log(1+r\cos X)dX = \sum_{m=1}^\infty \frac{(2m-1)!!}{(2m-1)2m(2m)!!} r^{2m}$$

CHAPITRE III.- PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT

Sur l'espace

$$T_c = \{0, 1, \ldots, c-1\}^{\mathbb{N}} \quad (C \geqslant 2 \text{ un entier})$$

sont définies les martingales de Mandelbrot ([34]). On étudie ici celles qui sont associées aux variables W_α définies par

$$P(W_\alpha = c^\alpha) = c^{-\alpha}, \quad P(W_\alpha = 0) = 1 - c^{-\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

On démontre que la décomposition de mesures selon la martingale associée à W_α est tout justement la décomposition selon le α-noyau de Riesz.

Ce sujet de recherche a connu une histoire d'une quinzaine d'années. La construction de Mandelbrot en 1974 - beaucoup plus générale - a été son acte de naissance. En 1976, J.-P. Kahane et J. Peyrière [26] ont démontré (cas particulier d'un théorème général) que la mesure de Haar est dans l'image de l'opérateur projectif si $\alpha < 1$ et qu'elle appartient au noyau si $\alpha \geqslant 1$. Récemment J.-P. Kahane ([21]) a poussé la recherche en partant du fait que toute mesure concentrée sur un borélien de α-mesure finie appartient au noyau et que réciproquement toute mesure dans le noyau est concentrée sur un borélien de $(\alpha+\epsilon)$-mesure nulle pour tout $\epsilon > 0$.

Les idées pour démontrer le résultat annoncé tout au début proviennent de L. Shepp ([41]), S. Janson ([14]) et J.-P. Kahane ([20]). Ce dernier a utilisé la théorie du potentiel pour aboutir à la résolution complète du problème de recouvrement sur le cercle. Comme on l'utilisera aussi, on développe au § 1 une théorie du potentiel sur T_c. Et puis au § 2 on résout un problème de recouvrement associé à un processus de Poisson défini sur $T_c \times \mathbb{R}^+$. A vrai dire, notre problème initial est justement un tel problème de recouvrement, c'est ce qu'on affirme aux §§ 3 et 4. Après cela, certains problèmes relatifs sont envisagés : interprétation en processus de Galton-Watson, réalisation sur l'intervalle $[0,1[$, existence de quasi hélices sur T_c.

1. THEORIE DU POTENTIEL SUR T_c

Soit c ($\geqslant$ 2) un entier fixé. L'ensemble

$$T_c = \{0, 1, \ldots, c-1\}^{\mathbb{N}}$$

possède deux structures, l'une de topologie compacte et l'autre de groupe abélien ([4]). Avant le développement de la théorie du potentiel, rappelons certains éléments concernant le groupe compact T_c.

Il existe une métrique sur T_c compatible à sa topologie que l'on appelle l'ultramétrique, et qui est définie comme ci-dessous :

$$d_c(t,s) = c^{-n}$$

si t et s ont exactement leurs n premières coordonnées en commun. On appelle la boule fermée de rayon c^{-n} contenant t n-cylindre ou n-intervalle, qu'on désigne par $I_n(t)$ et aussi par $I(j_0, \ldots, j_{n-1})$ ou $I_n(j_0, \ldots, j_{n-1})$ si $t = (j_0, \ldots, j_{n-1}, \ldots)$.

La mesure de Haar m = dt sur T_c se définit par

$$m(I_n(t)) = c^{-n}.$$

Posons $\omega = \exp(2\pi i/c)$. Définissons pour tout $n \geqslant 0$

$$\varphi_n(t) = \omega^k \quad \text{si} \quad t_n = k \quad \text{avec } 0 \leqslant k \leqslant c-1.$$

La suite $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ s'appelle la suite de Rademacher d'ordre c. Remarquons qu'un entier n ($\geqslant$ 1) peut s'écrire d'une façon unique

$$n = \lambda_1 c^{n_1} + \ldots + \lambda_m c^{n_m}$$

avec

$$n_1 > n_2 > \ldots > n_m \geqslant 0, \quad 1 \leqslant \lambda_j \leqslant c-1.$$

Définissons ensuite

$$\psi_0(t) = 1$$

$$\psi_n(t) = \varphi_{n_1}^{\lambda_1}(t) \ldots \varphi_{n_m}^{\lambda_m}(t) \qquad (n \geqslant 1).$$

La suite $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ s'appelle le système de Walsh d'ordre c. C'est justement le groupe dual de T_c. Considérons (T_c, dt) comme un espace de probabilité. Il est évident que la suite de Rademacher est une suite de variables indépendantes et d'espérance nulle. Plus généralement, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $\lambda \neq 0$ on a

$$\int_{T_c} \varphi_n^\lambda(t)dt = 0.$$

En conséquence, le système de Walsh est orthogonal et même complet. On peut donc définir les coefficients de Fourier pour les fonctions intégrables, et on les appelle W_cF-coefficients. Voici un théorème de Paley : La W_cF-série d'une fonction bornée à W_cF-coefficients positifs converge absolument et uniformément.

Maintenant on va développer la théorie du potentiel sur T_c.

Le noyau de potentiel de Riesz d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ sur le groupe T_c, ou simplement α-noyau, est défini par

$$K_\alpha(t,s) = (d_c(t,s))^{-\alpha}.$$

Notons $K_\alpha(t) = K_\alpha(0,t)$. On a $K_\alpha(t,s) = K_\alpha(t-s)$. Désignons par $\gamma_n = \gamma_n(\alpha)$ le n-ième W_cF-coefficient du noyau K_α. C'est-à-dire

$$\gamma_n = \int K_\alpha(t)\ \bar{\psi}_n(t)dt.$$

THEOREME 1.1. Si n (≥ 1) s'écrit $n = \lambda_1 c^{n_1} + \ldots + \lambda_{n_m} c^{n_m}$, on a

$$\gamma_n = \frac{c^\alpha - 1}{c - c^\alpha}\ \frac{1}{c^{n_1(1-\alpha)}}.$$

Par conséquent

$$\gamma_n \approx \frac{A}{n^{1-\alpha}} \quad \text{avec} \quad A = \frac{c^\alpha - 1}{c - c^\alpha}.$$

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants.

LEMME 1. Pour $0 < \alpha < 1$ et $n \geq 0$, on a

$$\int_{I_n(0)} K_\alpha(t)dt = \frac{c - 1}{c - c^\alpha}\ c^{-n(1-\alpha)}.$$

On en déduit que K_α est intégrable si $\alpha < 1$.

Preuve. Posons

$$J_{n+j} = I_{n+j}(0) - I_{n+j+1}(0).$$

On a donc

$$I_n(0) = \bigcup_{j=0}^{\infty} J_{n+j}$$

$$J_{n+j'} \cap J_{n+j''} = \emptyset \quad \text{si} \quad j' \neq j''$$

$$m(J_{n+j}) = c^{-(n+j)} - c^{-(n+j+1)}$$

$$K_\alpha(t) = c^{\alpha(n+j)} \quad \text{si} \quad t \in J_{n+j}.$$

L'intégrale à calculer est alors égale à

$$\sum_{j=0}^{\infty} c^{\alpha(n+j)}(c^{-(n+j)} - c^{-(n+j+1)})$$

d'où le résultat. CQFD.

Du point de vue de mesure produit, le lemme suivant est évident.

LEMME 2. Soient $n_1 > n_2 > \ldots > n_m > n$ et $\lambda_k \geqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n_m)$, on a pour tout $t_0 \in T_c$

$$\int_{I_{n+1}(t_0)} \prod_{k=1}^{m} \varphi_{n_k}^{\lambda_k}(t)dt = 0.$$

Démonstration du théorème 1.1. Evidemment on a

$$\gamma_n = \int_{I_1(0)} K_\alpha \bar{\psi}_n + \sum_{j_0=1}^{c-1} \int_{I_1(j_0)} K_\alpha \bar{\psi}_n .$$

Comme $K_\alpha(t) = 1$ lorsque $t \notin I_1(0)$, d'après le lemme 2 on a donc

$$\gamma_n = \int_{I_1(0)} K_\alpha \bar{\psi}_n .$$

Répétons n_1 fois, on obtient

$$\gamma_n = \int_{I_{n_1}} K_\alpha \bar{\psi}_n .$$

Ecrivons maintenant

$$\gamma_n = \int_{I_{n_1+1}(0)} K_\alpha \bar{\psi}_n + \sum_{j_{n_1}=1}^{c-1} \int_{I_{n_1+1}(0,\ldots,0,j_{n_1})} K_\alpha \bar{\psi}_n .$$

Observons que

$$K_\alpha(t) = c^{n_1\alpha} \qquad \text{si} \quad t \notin I_{n_1+1}(0)$$

$$\varphi_n(t) = 1 \qquad \text{si} \quad t \in I_{n_1+1}(0).$$

On a donc

$$\gamma_n = \int_{I_{n_1+1}(0)} K_\alpha + c^{n_1\alpha} \sum_{j_{n_1}=1}^{c-1} \int_{I_{n_1+1}(0,\ldots,0,j_{n_1})} \varphi_{n_1}^{\lambda_1}.$$

D'après le lemme 1 et le fait que l'espérance de $\varphi_{n_1}^{\lambda_1}$ est nulle, on a

$$\gamma_n = \frac{c-1}{c-c^\alpha} c^{-(n_1+1)(1-\alpha)} - c^{\alpha n_1 - (n_1+1)}$$

d'où l'égalité. Quant à l'égalité approximative il suffit de remarquer que $n_1 = [\log_c n]$. CQFD.

On a vu que les W_cF-coefficients du noyau de Riesz sont positifs. Plus généralement soit f une fonction strictement décroissante et convexe sur l'intervalle]0,1]. Définissons

$$K_f(t) = f(d_c(0,t)).$$

De la même façon on peut démontrer

THEOREME 1.1'. Les W_cF-coefficients de K_f, notés par $\gamma_n(f)$, sont strictement positifs.

En effet, on peut obtenir

$$\gamma_n(f) = \int_{I_{n_1}(0)} (K_f(t) - f(c^{-n_1\alpha}))dt.$$

Soit $K = K_\alpha$ ou K_f. Pour une mesure $\mu \in M^+(T_c)$ on peut définir son potentiel U^μ et son énergie I^μ relatifs au noyau K. D'après la positivité de γ_n, la convexité de f et le théorème de Paley, on peut démontrer comme dans ([25]).

THEOREME 1.2.

$$I^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n |\hat{\mu}(n)|^2.$$

La capacité d'un compact E dans T_c est définie par $C(E) = I^{-1}(E)$ avec $I(E) = \inf I^{\mu}$ où la borne inférieure est prise pour toutes les mesures de probabilités portées par E. Comme une conséquence du théorème précédent, le théorème suivant se démontre aisément.

THEOREME 1.3. Si I(E) est finie, il existe une probabilité unique $\mu_e \in M^+(E)$ telle que $I^{\mu_e} = I(E)$.

Cette mesure s'appelle la mesure d'équilibre sur E. Et son potentiel s'appelle le potentiel d'équilibre de E. En vertu de la semi-continuité inférieure du potentiel et de l'unicité de la mesure d'équilibre, on peut démontrer aussi.

THEOREME 1.4. L'ensemble des points $t \in E$ où $U^{\mu_e}(t) < I(E)$ est de mesure nulle par rapport à toute mesure positive d'énergie finie.

2. PROCESSUS DE POISSON SUR $T_c \times \mathbb{R}^+$.

On étudie ici le problème de recouvrement poissonnien sur T_c.

Considérons d'abord l'espace $T_c \times \mathbb{R}^+$ muni de la mesure $\nu = dt \times \mu$ où dt est la mesure de Haar sur T_c et μ est une mesure sur $\mathbb{R}^+$ ou plutôt sur l'ensemble $\{c^{-j} : j \geqslant 1\}$ définie par

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} m_j \, \delta_{c^{-j}} \qquad (m_j \geqslant 0).$$

Construisons ensuite le processus de Poisson sur $T_c \times \mathbb{R}^+$ avec l'intensité ν ([27]), il s'agit d'un ensemble aléatoire Ξ. Soit B un borélien dans $T_c \times \mathbb{R}^+$. Désignons

$$N(B) = \text{Card}(B \cap \Xi).$$

Le processus de Poisson a pour caractérisation les propriétés suivantes : N(B) est une variable de Poisson à paramètre $\nu(B)$; $N(B_1), \ldots, N(B_\ell)$ sont indépendantes si $B_1, \ldots, B_\ell$ sont disjoints.

A tout point $(t, c^{-j}) \in T_c \times \mathbb{R}^+$ on associe la boule $I_j(t)$. De même tout point appartenant à Ξ est attaché à une boule. On obtient ainsi une famille de boules aléatoires dont la réunion sera notée par $\mathcal{G}$.

Le problème de recouvrement se pose : étant donné un fermé $F \subset T_c$, quand a-t-on $F \subset \mathcal{G}$ p. s. ?

Voyons d'abord qu'un point $t \in \mathcal{G}$ si et seulement s'il existe un point $(s, c^{-j}) \in \Xi$ tel que $t \in I_j(s)$, autrement dit $s \in I_j(t)$. Posons alors

$$D_t = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j(t) \times \{c^{-j}\}.$$

Voici une condition pour qu'un point soit recouvert :

$$t \in \mathcal{G} \Leftrightarrow D_t \cap \Xi \neq \emptyset.$$

Par conséquent

$$P(t \notin \mathcal{G}) = \exp(-\nu(D_t)). \tag{2.1}$$

Introduisons maintenant

$$f(x) = \exp \sum_{j=1}^{J(x)} m_j c^{-j} \qquad \text{avec} \qquad J(x) = [\log_c \frac{1}{x}]$$
$$K(t) = f(d_c(0,t)).$$

Remarquons que $K(t) = K_\alpha(t)$ si on prend $m_j = \alpha\, c^j \log c$.

Voici la réponse au problème de recouvrement.

THEOREME 2.1. Pour que $T_c \subset \mathcal{G}$ p. s. il suffit que

$$\int_{T_c} K(t)dt = \infty.$$

Particulièrement la condition devient $\alpha \geqslant 1$ si $m_j = \alpha\, c^j \log c$.

Plus généralement on a

THEOREME 2.2. Supposons que K intégrable. Soit F un fermé dans T_c. Pour que $F \subset \mathcal{G}$ p. s. il suffit que

$$\mathrm{Cap}_K\, F = 0.$$

Particulièrement la condition devient $\mathrm{Cap}_\alpha F = 0$ si $m_j = \alpha\, c^j \log c$.

La démonstration de ces deux théorèmes est fondée sur l'existence d'un ordre total des éléments de T_c. Pour l'introduction de cet ordre, mentionnons d'abord la fonction suivante

$$n(t,s) = \inf\{n \geqslant 0 : t_n \neq s_n\} \qquad (t,s \in T_c).$$

L'ordre est alors défini comme ci-dessous :

$$t = s \text{ si } n(t,s) = +\infty$$
$$t < s \text{ si } n(t,s) < +\infty \text{ et } t_{n(t,s)} < s_{n(t,s)}.$$

A propos, l'ultramétrique peut être définie en fonction de n(t,s) :

$$d_c(t,s) = c^{-n(t,s)}.$$

En plus on a besoin de deux lemmes.

LEMME 1. Soient dans T_c m+2 points $t_1 < t_2 <\ldots< t_m < \xi < x$. On a pour tout i ($1 \leqslant i \leqslant m$)

$$(D_x \setminus D_\xi) \cap D_{t_i} = \varnothing.$$

Preuve. Observons

$$D_x \setminus D_\xi = \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j(x) \setminus I_j(\xi)) \times \{c^{-j}\}.$$

Il suffit donc de prouver que pour tout $j \geqslant 1$ on a

$$(I_j(x) \setminus I_j(\xi)) \cap I_j(t_i) = \varnothing.$$

Cela est vrai. Si $d_c(x,\xi) \leqslant c^{-j}$, x et ξ appartiennent au même j-intervalle. Donc $I_j(x) = I_j(\xi)$. Rien à dire. Supposons alors $d_c(x,\xi) > c^{-j}$. Autrement dit $k = n(x,\xi) < j$. D'une part, $x > \xi$ implique $x_0 = \xi_0, \ldots, x_{k-1} = \xi_{k-1}$; $x_k > \xi_k$. D'autre part, si l'intersection n'est pas vide, x et t_i se trouvent dans le même j-intervalle, particulièrement dans le même (k+1)-intervalle. Enfin on arrive à une contradiction $t_i > \xi$. CQFD.

En conséquence, on a comme dans [41].

LEMME 2. Soient $t_1 < t_2 <\ldots< t_m < \xi < x$,

$$P(x \notin \mathcal{G} \mid t_1, \ldots, t_m \in \mathcal{G} \,;\, \xi \notin \mathcal{G}) = P(x \notin \mathcal{G} \mid \xi \notin \mathcal{G}).$$

Remarquons encore que

$$D_x \backslash D_\xi = \bigcup_{j=n(x,\xi)}^{\infty} (I_j(x) \setminus I_j(\xi)) \times \{c^{-j}\}. \tag{2.2}$$

Par suite on a

$$\nu(D_x \setminus D_\xi) = \sum_{j=n(x,\xi)}^{\infty} m_j c^{-j}. \tag{2.3}$$

Démonstration du théorème 2.1. On va suivre L. Shepp ([41]). Choisissons tout d'abord un ensemble dénombrable dense dans T_c. Par exemple, l'ensemble Q des points dont chacun n'admet qu'un nombre fini de coordonnées non nulles. Désignons par Q_k l'ensemble des points dont chacun admet au plus k+1 premières coordonnées non nulles. Fixons ensuite un entier N. Considérons la mesure μ avec $m_j = 0$ $(j > N)$, puis le processus correspondant. La réunion des boules aléatoires associées à ce processus sera notée par $\mathcal{G}_N$. Maintenant étant donné un entier positif k, définissons une variable aléatoire ξ_k : $\xi_k = \infty$ si tout point dans Q_k est contenu dans $\mathcal{G}_N$; $\xi_k = r$ s'il existe un point dans Q_k qui n'est pas contenu dans $\mathcal{G}_N$ et que r est le plus petit.

Soit χ la fonction indicatrice de l'ensemble des points qui ne sont pas contenus dans $\mathcal{G}_N$. Posons

$$m(T_c) = \int_{T_c} \chi(t)dt.$$

On va calculer $\mathbb{E}m(T_c)$ de deux manières différentes.

D'une part, d'après (2.1) on a

$$\mathbb{E}m(T_c) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{N} m_j c^{-j}\right). \tag{2.4}$$

D'autre part, la formule de la probabilité totale nous donne

$$\mathbb{E}m(T_c) = \sum_{r \in Q_k \cup \{\infty\}} \int_{T_c} P(x \notin \mathcal{G}_N \mid \xi = r) P(\xi_k = r) dx.$$

La minoration suivante est donc évidente

$$\mathbb{E}m(T_c) \geqslant \sum_{r \in Q_k} P(\xi_k = r) \int_{I_1(r)} P(x \notin \mathcal{G}_N \mid \xi = r) dx.$$

D'après le lemme 2, puis l'invariance de la mesure de Haar, on obtient

$$\mathbb{E}m(T_c) \geqslant \sum_{r\in Q_k} P(\xi_k = r)\int_{I_1(0)} P(y\notin \mathcal{G}_N \mid 0\notin \mathcal{G})\,dy. \tag{2.5}$$

Combinant (2.4) et (2.5), on voit

$$P(\exists r\in Q_k \text{ tel que } r\in \mathcal{G}_N) \leqslant \left(\int_{I_1(0)} \exp\Big(\sum_{j=1}^{N} m_j c^{-j} - \sum_{j=n(y,0)}^{N} m_j c^{-j}\Big)dy\right)^{-1}.$$

Remarquons que Q_k tend en croissant vers Q qui est dense dans T_c. Remarquons aussi que $\mathcal{G}_N$ est fermé. Laissons alors k tendre vers ∞, on obtient

$$P(T_c \not\subset \mathcal{G}_N) \leqslant \left(\int_{I_1(0)} \exp \sum_{j=1}^{N\wedge \log_c \frac{1}{d_c(0,y)}} m_j c^{-j}\,dy\right)^{-1}.$$

Laissons ensuite N tendre vers ∞. Tenant compte de l'hypothèse, on a enfin

$$P(T_c \not\subset \mathcal{G}) = 0. \quad \text{CQFD.}$$

Démonstration du théorème 2.2. On va suivre L. Shepp ([41]) et J.-P. Kahane ([20]). Cette fois-ci, on doit choisir un ensemble dénombrable dont l'ensemble des points d'accumulation est exactement F. On peut choisir par exemple

$$Q^F = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k^F$$

avec

$$Q_k^F = \{t=(j_0,\ldots,j_k,0,\ldots) : d_c(t,F) < c^{-k}\}.$$

Au lieu de F on va envisager $\bar{F} = F \cup Q^F$. Comme $\mathrm{Cap}_K F = 0$, $\mathrm{Cap}_K \bar{F} = 0$ également. Donc $\mathrm{Cap}_{K_N} \bar{F} \downarrow 0$ lorsque $N \to \infty$, où

$$K_N = f_N(d_c)\ ,\ f_N(x) = \exp \sum_{j=1}^{J(x)} m_j c^{-j} \quad \text{avec } J(x) = [\log_c \frac{1}{x} \wedge N].$$

D'après les théorèmes 1.3 et 1.4, il existe la mesure d'équilibre σ_N de $\bar{F}$ relative au noyau K_N, telle que

$$A_N = (\mathrm{Cap}_{K_N}\bar{F})^{-1} \leqslant \int_{T_c} K_N(t)\,d\sigma_N(t+u), \quad \forall\, u \in \bar{F}. \tag{2.6}$$

Désignons par $\sigma_N(\bar{F})$ la σ_N-mesure de la partie de $\bar{F}$, non contenue dans $\mathcal{G}_N$. Posons $Q_k = \bigcup_{j=1}^{k} Q_k^F$. Pour tout $k \geqslant 1$ définissons une variable aléatoire ξ_k : $\xi_k = \infty$ si tout point dans Q_k est contenu dans $\mathcal{G}_N$; $\xi_k = r$ s'il existe un point dans Q_k non contenu dans $\mathcal{G}_N$ et que r est le plus petit. De la même façon qu'on démontre le théorème 2.1, on peut démontrer que

$$P(\bar{F} \not\subset \mathcal{G}_N) \leqslant \left(\int_{I_1(0)} K_N(t)d\sigma_N(t+r)\right)^{-1}, \qquad (r \in \bar{F}).$$

D'après (2.6), on a finalement

$$P(\bar{F} \not\subset \mathcal{G}) = 0. \quad \text{CQFD.}$$

3. CERTAINS PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT

Prenons une suite de positifs $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(0 < p_n \leqslant 1)$. Construisons ensuite une suite de variables aléatoires $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ telles que

$$P(W_n = \frac{1}{p_n}) = p_n, \qquad P(W_n = 0) = 1 - p_n.$$

Et puis choisissons une famille de variables indépendantes $\{W(j_0,j_1,\ldots,j_n) : n \geqslant 0 \ ; \ 0 \leqslant j_n \leqslant c-1\}$ dont $W(j_0,\ldots,j_n)$ obéit à la loi de W_n. Enfin introduisons les poids

$$P_n(t) = W(j_0,\ldots,j_n) \quad \text{si} \quad t \in I(j_0,\ldots,j_n) \quad (n \geqslant 0)$$

et les produits

$$Q_n(t) = \prod_{m=0}^{n} P_m(t) \qquad (n \geqslant 0).$$

Autrement dit

$$Q_n(t) = W(j_0)W(j_0,j_1)\ldots W(j_0,j_1,\ldots,j_n) \quad \text{si} \quad t \in I(j_0,\ldots,j_1). \tag{3.1}$$

C'est une martingale indexée. On va la comparer avec une martingale liée au problème de recouvrement poissonnien. Pour cette affaire on écrira $Q_n(t)$ sous une autre forme. Ecrivons d'abord

$$V(j_0,\ldots,j_n) = p_n W(j_0,\ldots,j_n).$$

On s'aperçoit que $V(j_0,\ldots,j_n)$ prend ses valeurs 0 et 1 avec les probabilités $1 - p_n$ et p_n. Et le produit $Q_n(t)$ s'écrit

$$Q_n(t) = \frac{V(j_0)V(j_0j_1)\ldots V(j_0\ldots j_n)}{p_0p_1\ldots p_n} \quad \text{si} \quad t \in I(j_0\ldots j_n). \qquad (3.3)$$

D'autre part, posons

$$m_j = c^j \log \frac{1}{p_{j-1}} \quad (j \geqslant 1).$$

Comme au § 2 on peut construire un processus de Poisson associé à $\{m_j\}$ pour lequel on introduit la martingale suivante

$$\tilde{Q}_n(t) = \frac{1(t \notin \mathcal{G}_{n+1})}{P(t \notin \mathcal{G}_{n+1})}. \qquad (3.3)$$

On voit immédiatement que si $t \in I(j_0\ldots j_n)$ on a

$$P(t \notin \mathcal{G}_{n+1}) = p_0\ p_1\ \ldots\ p_n$$

$$1(t \notin \mathcal{G}_{n+1}) = \tilde{V}(j_0)\ \tilde{V}(j_0j_1)\ \ldots\ \tilde{V}(j_0j_1\ldots j_n)$$

où

$$\tilde{V}(j_0\ldots j_n) = 1(N(I(j_0\ldots j_n) \times \{c^{-n-1}\}) = 0).$$

Il est évident que les $\tilde{V}(j_0j_1\ldots j_n)$ sont indépendantes. D'ailleurs $\tilde{V}(j_0j_1\ldots j_n)$ obéit à la même loi que $V(j_0j_1\ldots j_n)$. On a ainsi vérifié que la V-famille et la $\tilde{V}$-famille sont équivalentes.

Conclusion : les deux martingales $Q_n(t)$ et $\tilde{Q}_n(t)$ sont stochastiquement équivalentes. Autrement dit, la martingale introduite au début de ce paragraphe peut se traduire en processus de Poisson et réciproquement.

A partir du point de vue du processus, on a obtenu dans le paragraphe précédent une condition suffisante pour le recouvrement d'un compact. Maintenant on donne une preuve de la nécessité de cette condition. On tient compte de la relation entre m_j et p_{j-1}. Le noyau s'écrit alors

$$K(t) = \prod_{j=0}^{J(t)} \frac{1}{p_j} \quad \text{avec} \quad J(t) = [\log_c \frac{1}{d_c(0,t)}].$$

THEOREME 3.1. Soit $\sigma \in M^+(T_c)$. Alors

$$(\mathbb{E}(Q\sigma)^2 < +\infty \quad \text{et} \quad Q\sigma \neq 0) \iff I_K^\sigma < \infty.$$

Démonstration. Il suffit d'observer

$$\mathbb{E}(\int Q_n\sigma)^2 = \iint (P(0\notin \mathcal{G}_{n+1}))^{-2} P(t\notin\mathcal{G}_{n+1},\ s\notin \mathcal{G}_{n+1}) d\sigma(t)d\sigma(s)$$
$$= \iint \prod_{j=0}^{n\wedge J(t-s)} \frac{1}{p_j}\, d\sigma(t)d\sigma(s).$$

CQFD

On a vu que F est recouvert signifie (chapitre I)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in F} Q_n(t) = 0 \quad \text{p. s.}$$

En conséquence du théorème précédent, on a

THEOREME 3.2. Soit F un compact dans T_c. Pour que $F \subset \mathcal{G}$ p. s. il est nécessaire que

$$\mathrm{Cap}_K F = 0.$$

La condition devient $\mathrm{Cap}_\alpha F = 0$ si $m_j = \alpha\, c^j \log c$.

C'est la réciproque du théorème 2.2.

4. NOYAU ET IMAGE DE L'OPERATEUR $\mathbb{E}Q$.

Les théorèmes 2.2 et 3.2 s'énoncent ensemble.

THEOREME 4.1. Soit F un fermé dans T_c. Alors

$$F \subset \mathcal{G} \text{ p. s.} \iff \mathrm{Cap}_K F = 0.$$

Particulièrement si $p_j = c^{-\alpha}$ on a

$$F \subset \mathcal{G} \text{ p. s.} \iff \mathrm{Cap}_\alpha F = 0.$$

Correspondant à la martingale indexée $Q_n(t)$ il existe un opérateur $\mathbb{E}Q$ qui est une projection dans $M(T_c)$. Maintenant on va reconnaître son noyau et son image. Etant donné le noyau K, l'espace $M(T_c)$ se décompose :

$$M(T_c) = \mathcal{R}_K \oplus \mathcal{S}_K$$

où $\mathcal{R}_K$ (resp. $\mathcal{S}_K$) désigne le sous-espace des mesures K-régulières (resp. K-singulières). Voyons leurs définitions dans le chapitre I. En utilisant cette décomposition, le théorème précédent et le théorème 3.1, on obtient le théorème suivant qui illustre la cohérence de deux procédés de décomposition.

THEOREME 4.2.
$$\mathrm{Img}(\mathbb{E}Q) = \mathcal{R}_K, \ \mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q) = \mathcal{S}_K$$
$$\mathrm{Img}(\mathbb{E}Q_\alpha) = \mathcal{R}_\alpha, \ \mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q_\alpha) = \mathcal{S}_\alpha.$$

5. INTERPRETATION EN PROCESSUS DE GALTON-WATSON

Les théorèmes 2.1 et 3.1 peuvent se traduire en processus de Galton-Watson. Ce genre de processus est un modèle de l'évolution de population.

Notons X_n le nombre des individus à la n-ième génération.

Supposons $X_0 = 1$. Soit $\Upsilon_{n,i}$ $(n \geq 0,\ i \geq 1)$ le nombre des descendants du i-ième individu à la n-ième génération. Le modèle s'établit alors

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \Upsilon_{n,i} \qquad (n \geq 0). \tag{5.1}$$

Néanmoins quelques hypothèses supplémentaires sont nécessaires. On se donne au préalable une suite de variables aléatoires $\{\Upsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$. Choisissons ensuite une famille indépendante $\{\Upsilon_{n,i}\}$ $(n \geq 0,\ i \geq 1)$ dont $\Upsilon_{n,i}$ obéit à la loi de Υ_n. Le processus classique de Galton-Watson correspond au cas où les Υ_n ont la même loi.

La probabilité d'extinction se définit par

$$\underline{q} = P(\text{il existe } n \text{ tel que } X_n = 0) = P\,(\lim_{n\to\infty} X_n = 0).$$

Si $0 < \mathbb{E}\Upsilon_n < \infty$ pour tout $n \geq 0$, la suite normalisée

$$Z_n = X_n / \prod_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}X_j$$

est une martingale positive. Elle converge donc presque sûrement vers une limite $\mathbb{Z}$ telle que $\mathbb{E}\mathbb{Z} \leqslant 1$. Les problèmes centraux pour ces processus sont d'étudier la distribution limite de la population.

On va étudier dans la suite un seul cas particulier qui peut être ramené au processus de Poisson. Notons $B(c,p)$ la distribution binôme qui prend la valeur k $(0 \leqslant k \leqslant c)$ avec probabilité $\binom{c}{k} p^k (1-p)^{c-k}$. Soit $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite telle que $0 < p_n \leqslant 1$. Choisissons une suite $\{\Upsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ telle que $\Upsilon_n \sim B(c,p_n)$. On peut construire comme ci-dessus un processus X_n associé à $\{\Upsilon_n\}$ et puis Z_n.

THEOREME. Si $\Upsilon_n \sim B(c,p_n)$, on a

$$\underline{q} = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n} \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{p_j} = \infty.$$

Démonstration. Conservons les notations du § 3. On va voir alors

$$X_{n+1} = c^{n+1} \prod_{j=0}^{n} p_j \int_{T_c} Q_n(t)dt. \tag{5.2}$$

En effet, le membre à droite est égal à

$$Y_{n+1} = \sum_{j_0, \ldots, j_n} V(j_0)V(j_0 j_1)\ldots V(j_0 \ldots j_n)$$

où $V(j_0 \ldots j_n) \sim B(1,p_n)$. Or $B(c,p_n)$ est reproductive par rapport à c. Donc $\sum_{j_n} V(j_0 \ldots j_n) \sim B(c,p_n)$. Alors on a

$$Y_{n+1} = \sum_{j=1}^{Y_n} \Upsilon_{n,i} \quad \text{avec} \quad \Upsilon_{n,i} \sim B(c,p_n).$$

On obtient ainsi (5.2). Ayant établi cette égalité, on constate, en vertu du théorème 2.1 et du théorème 3.1, que

$$\underline{q} = 1 \Longleftrightarrow \int_{T_c} K(t)dt = \infty$$

d'où le résultat. CQFD.

6. REALISATION SUR L'INTERVALLE [0,1[.

En tant qu'ensemble, l'intervalle [0,1[peut être muni de différentes distances. S'il est muni de la distance c-adique, on peut le considérer comme un sous-espace de T_c. L'opérateur $\mathbb{E}Q_\alpha^c$ agit donc sur l'espace M([0,1[). Pour insister sur l'intervention de c on a utilisé $\mathbb{E}Q_\alpha^c$ au lieu de $\mathbb{E}Q$.

A première vue, on ne peut pas constater sans explication que $\mathbb{E}Q_\alpha^{c_1} = \mathbb{E}Q_\alpha^{c_2}$ si $c_1 \neq c_2$. Pourtant

THEOREME. Si le rapport $\log c_1/\log c_2$ est rationnel, on a

$$\mathrm{Img}(\mathbb{E}Q_\alpha^{c_1}) = \mathrm{Img}(\mathbb{E}Q_\alpha^{c_2})$$

$$\mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q_\alpha^{c_1}) = \mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q_\alpha^{c_2}).$$

Par conséquent $\mathbb{E}Q_\alpha^{c_1} = \mathbb{E}\, Q_\alpha^{c_2}$.

Démonstration. Selon le théorème 4.2, il suffit que

$$\mathfrak{R}_\alpha^{c_1} = \mathfrak{R}_\alpha^{c_2} \quad , \quad \mathcal{S}_\alpha^{c_1} = \mathcal{S}_\alpha^{c_2}.$$

Or cela est vrai d'après le lemme suivant.

LEMME. Si $\log c_1/\log c_2$ est rationnel, il existe deux constantes positives A et B telles que

$$A\, d_{c_2}(t,s) \leqslant d_{c_1}(t,s) \leqslant B\, d_{c_2}(t,s).$$

Preuve. Sans perdre la généralité, on peut supposer $c_2 = c_1^p$ où p est un entier positif. D'une part

$$d_{c_1}(t,s) = c_1^{-n}$$

si t et s appartiennent au même c_1^{-n}-intervalle mais pas au même $c_1^{-(n+1)}$-intervalle. D'autre part

$$d_{c_2}(t,s) = c_1^{-mp}$$

si t et s appartiennent au même c_2^{-m}-intervalle mais pas au même $c_2^{-(m+1)}$-intervalle. Il en résulte que

$$c_1^{-p} d_{c_2}(t,s) \leqslant d_{c_1}(t,s) \leqslant d_{c_2}(t,s).$$

CQFD

7. QUASI HELICES SUR T_c

Un processus X(t) défini sur le groupe T_c à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est par définition stationnaire si

$$\mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty$$

$$\mathbb{E}\langle X(t), X(s)\rangle = r(t-s)$$

où r est une fonction définie sur T_c que l'on appelle la corrélation de X(t). On définit un (T_c, d, γ)-processus comme un processus gaussien et stationnaire défini sur T_c à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$A d_c^{\gamma}(t,s) \leqslant \mathbb{E}|X(t) - X(s)|^2 \leqslant B d_c^{\gamma}(t,s)$$

pour certains positifs A et B.

THEOREME. Pour tout d ($\geqslant 1$) et tout γ ($0 < \gamma < \infty$) il existe un (T_c, d, γ)-processus.

Pour la démonstration, les deux lemmes suivants sont indispensables. Définissons d'abord

$$r_\gamma(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^{n\gamma}} |1 - \varphi_n(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^{n\gamma}} (1 - \operatorname{Re} \varphi_n(t))$$

$$r_\gamma(t,s) = r_\gamma(t-s).$$

LEMME 1. Il existe deux constantes A et B telles que

$$A d_c^{\gamma}(t,s) \leqslant r_\gamma(t,s) \leqslant B\, d_c^{\gamma}(t,s).$$

LEMME 2. Pour tout $n \geqslant 0$, la fonction suivante

$$1 + \varphi_n(t-s) - \varphi_n(t) - \varphi_n(s)$$

est une fonction de type positif.

Les preuves de ces deux lemmes sont simples. Soit $d_c(t,s) = c^{-n}$. On a

$$r_\gamma(t,s) = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{c^{j\gamma}}(1 - \operatorname{Re} \varphi_j(t-s)) \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{c^{j\gamma}} = Bd_c^\gamma(t,s)$$

dont $B = c^\gamma(c^\gamma-1)^{-1}$. D'autre part on a

$$r_\gamma(t,s) \geqslant \frac{1}{c^{n\gamma}}(1 - \operatorname{Re} \varphi_n(t-s)) \geqslant A\, d_c^\gamma(t,s)$$

dont $A = 1 - \operatorname{Cos} \frac{2\pi}{c}$. Le lemme 1 est ainsi démontré.

Pour le lemme 2, soit $g(t,s)$ la fonction envisagée. On tient compte du fait que $\varphi_n(t-s) = \varphi_n(t)\bar{\varphi}_n(s)$. Pour tout choix $t_1, \dots, t_N \in T_c$ et $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{N} g(t_i, t_j)x_i x_j \\
&= \left(\sum_{i=i}^{N} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \varphi_n(t_i)\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} x_j \varphi_n(t_j) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \varphi_n(t_i)\right)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

D'après la définition, $g(t,s)$ est de type positif.

Voici maintenant la démonstration du théorème. On le démontre pour le cas $d = 1$. Grâce au lemme 1, il suffit de montrer que la fonction

$$\Gamma(t,s) = r_\gamma(t,0) + r_\gamma(s,0) - r_\gamma(t,s)$$

est de type positif. Or

$$\Gamma(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^{n\gamma}} \operatorname{Re}(1 + \varphi_n(t-s) - \varphi_n(t) - \varphi_n(s)).$$

Le lemme 2 nous affirme que $\Gamma(t,s)$ l'est réellement. CQFD.

CHAPITRE IV.- CHAOS DE LEVY

A partir d'un processus de Poisson, un opérateur de chaos, que nous appelons chaos de Lévy, est construit sur $\mathbb{R}^d$. Cet opérateur dépend de trois paramètres α, β et u ($0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, $u > 0$). On démontre qu'il existe une valeur critique déterminant la singularité et la régularité. C'est

$$(1-\alpha)\beta d u^{\alpha}.$$

Précisément, si une mesure est portée par un borélien de dimension inférieure à $(1-\alpha)\beta d u^{\alpha}$, elle est tuée par cet opérateur ; en revanche, si une mesure est d'énergie finie d'ordre $(1-\alpha)\beta\, u^{\alpha}$, elle est préservée. Grosso modo, l'image et le noyau de cet opérateur sont déterminés.

1. ENSEMBLES $\mathcal{L}_{\alpha}^{+}$, L_{α}^{+} et L_{α}.

Soit $0 < \alpha < 1$. Une variable positive X, définie dans un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$, est dite α-stable positive si elle satisfait, pour une certaine constante $\xi \geqslant 0$, à l'équation suivante

$$\mathbb{E}\, e^{-uX} = e^{-\xi^{\alpha}u^{\alpha}} \quad (u \geqslant 0).$$

Cette constante s'appelle le paramètre de X, que l'on note par $\|X\|_{\alpha}$. On dit que X est standard si $\|X\|_{\alpha} = 1$.

Désignons par $\mathcal{L}_{\alpha}^{+}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les variables α-stables positives. Cet ensemble n'est ni un espace linéaire ni un cône linéaire.

L'espérance d'une variable appartenant à $\mathcal{L}_{\alpha}^{+}(\Omega)$, est infinie sauf si la variable est nulle. On a cependant

PROPOSITION 1. Soit X une variable α-stable de paramètre ξ. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathbb{E}\, X^n e^{-X} = \frac{d^n}{dt^n} \exp(-(1-t)^\alpha \xi^\alpha)\,|_{t=0}. \tag{1.1}$$

En particulier,

$$\mathbb{E}\, X\, e^{-X} = \alpha\xi^\alpha\, e^{-\xi^\alpha} \tag{1.2}$$

$$\mathbb{E}\, X^2\, e^{-X} = \alpha\, \xi^\alpha\, e^{-\xi^\alpha}(1 - \alpha + \alpha\xi^\alpha). \tag{1.3}$$

Preuve. On utilise simplement l'expression

$$e^{-(1-t)X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n\, e^{-X}\, \frac{t^n}{n!}$$

et la définition de X.

Considérons maintenant l'espace $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 1)$ muni de la mesure de Lebesgue dt. Définissons d'abord le cône

$$L_\alpha^+ = \{f \geqslant 0 : \|f\|_\alpha^\alpha = \int f^\alpha\, dt < \infty\}$$

puis l'espace linéaire

$$L_\alpha = \{f : f^+ \in L_\alpha^+ \quad \text{et} \quad f^- \in L_\alpha^+\}.$$

Autrement dit $L_\alpha = L_\alpha^+ - L_\alpha^+$. Pour $f \in L_\alpha$, on définit encore $\|f\|_\alpha^\alpha = \|f^+\|_\alpha^\alpha + \|f^-\|_\alpha^\alpha$. Ainsi L_α devient un espace métrique muni de la distance

$$d(f,g) = \|f - g\|_\alpha^\alpha \qquad (f,g \in L_\alpha).$$

2. OPERATEUR W_α.

PROPOSITION 2. Il existe un opérateur $W_\alpha : L_\alpha^+(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{L}_\alpha^+(\Omega)$ tel que

(a) W_α soit linéaire

(b) $\|W_\alpha(g)\|_\alpha = \|g\|_\alpha$

(c) Soient g_1, $g_2 \in L_\alpha^+(\mathbb{R}^d)$. Pour que $W_\alpha(g_1)$ et $W_\alpha(g_2)$ soient indépendantes, il faut et il suffit que l'ensemble $\{g_1 \neq 0$ et $g_2 \neq 0\}$ soit de mesure nulle.

Preuve. Soit μ_ω le processus de Poisson défini sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ avec l'intensité

$$\sigma = C_\alpha \frac{dt\ du}{u^{1+\alpha}} \qquad (t\in\mathbb{R}^d\ ,\ u\in\mathbb{R}^+)$$

$$C_\alpha^{-1} = \int_0^\infty (1-e^{-u})\frac{du}{u^{1+\alpha}}.$$

Pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, $\mu_\omega(A)$ est une variable de Poisson de paramètre $\sigma(A)$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}\, e^{-\lambda\mu_\omega(A)} = e^{-\sigma(A)(1-e^{-\lambda})}.$$

A partir de là on peut définir $\int f\, d\mu_\omega$ pour $f \geqslant 0$ et les f telles que l'une des deux intégrales suivantes soit finie :

$$\int (1 - e^{-\lambda f^+})d\sigma \quad , \quad \int (1 - e^{-\lambda f^-})d\sigma.$$

Définissons

$$W_\alpha(g) = \iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+} ug(t)\ d\mu_\omega(t,u).$$

Evidemment, W_α est linéaire. Pour (b), il suffit de voir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, e^{-\lambda W_\alpha(g)} &= \exp\{-C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} dt \int_{\mathbb{R}^+} (1 - e^{-\lambda u g(t)})\frac{du}{u^{1+\alpha}}\} \\ &= \exp\{-C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^\alpha g(t)^\alpha dt . \int_{\mathbb{R}^+} (1-e^{-v})\frac{dv}{v^{1+\alpha}}\} \\ &= \exp(-\lambda^\alpha \|g\|_\alpha^\alpha).\end{aligned}$$

Pour (c), on tient compte du fait que

$$\mathbb{E}\, e^{-\lambda(W_\alpha(g_1)+W_\alpha(g_2))} = e^{-\|g_1+g_2\|_\alpha^\alpha \lambda^\alpha}.$$

On a utilisé la linéarité de W_α. Alors pour que $W_\alpha(g_1)$ et $W_\alpha(g_2)$ soient indépendantes il faut

$$\|g_1 + g_2\|_\alpha^\alpha = \|g_1\|_\alpha^\alpha + \|g_2\|_\alpha^\alpha$$

i. e.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (g_1^\alpha + g_2^\alpha - (g_1+g_2)^\alpha)dt = 0.$$

Comme l'intégrand est toujours non-négatif, la dernière égalité signifie que

$$g_1^\alpha + g_2^\alpha = (g_1 + g_2)^\alpha \qquad \text{p. p. sur } \mathbb{R}^d.$$

Le reste ne repose que sur le fait suivant : soient $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $0 < \alpha < 1$, alors

$$a^{\alpha} + b^{\alpha} = (a+b)^{\alpha} \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

En effet, ce fait équivaut à celui-ci : $0 < h \leqslant 1$, $0 < \alpha < 1$

$$h^{\alpha} + 1 = (h+1)^{\alpha} \Leftrightarrow h = 0.$$

Or, ce dernier est vrai car $1 + h^{\alpha} - (1+h)^{\alpha}$ est strictement croissante. Quant à la réciproque, elle est évidente.

COROLLAIRE. Les $W_{\alpha}(g_1)$, ..., $W_{\alpha}(g_n)$ sont indépendantes si et seulement si p. p. il y a au plus une fonction de g_1, ..., g_n qui ne s'annule pas.

Preuve. L'idée est dans la preuve précédente. Il nous suffit de savoir que pour que l'on ait

$$a_1^{\alpha} + \ldots + \alpha_n^{\alpha} = (a_1 + \ldots + a_n)^{\alpha} \qquad (a_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

il faut et il suffit qu'il y en ait au plus un qui ne s'annule pas. En effet, la condition est bien suffisante. La nécessité peut être démontrée par récurrence. Le cas $n = 2$ est fait. Supposons que c'est vrai pour $n = m$. Supposons que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{m+1} > 0$. Alors la fonction

$$f(x) = a_1^{\alpha} + \ldots + a_m^{\alpha} + x^{\alpha} - (a_1 + \ldots + a_m + x)^{\alpha} \qquad (x \geqslant 0)$$

satisfait à

$$f(0) = a_1^{\alpha} + \ldots + a_m^{\alpha} - (a_1 + \ldots + a_m)^{\alpha} > 0$$

$$f'(x) = \alpha\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}} - \frac{1}{(a_1 + \ldots + a_m + x)^{1-\alpha}}\right) > 0 \qquad (x > 0).$$

Par là on voit que, pour que

$$a_1^{\alpha} + \ldots + a_{m+1}^{\alpha} = (a_1 + \ldots + a_{m+1})^{\alpha}$$

il faut que le plus petit a_{m+1} soit nul.

REMARQUE 1. Si on définit

$$\mathcal{L}_{\alpha} = \{X : X^+, X^- \in \mathcal{L}_{\alpha}^+ ;\ X^+ \text{ et } X^- \text{ indépendantes}\}$$

$$\|X\|_{\alpha}^{\alpha} = \|X^+\|_{\alpha}^{\alpha} + \|X^-\|_{\alpha}^{\alpha} \qquad (X \in \mathcal{L}_{\alpha}).$$

On peut étendre $W_{\alpha} : L_{\alpha} \to \mathcal{L}_{\alpha}$ en définissant

$$W_{\alpha}(g) = W_{\alpha}(g^+) - W_{\alpha}(g^-).$$

Cette extension satisfait aussi à (a), (b) et (c).

REMARQUE 2. Nous n'avons pas besoin de nous limiter à l'espace euclidien. Par exemple on peut envisager un groupe métrique muni de la mesure de Haar. Dans ce cas, la plupart des détails dans la suite pourra être gardée.

3. CONSTRUCTION DU CHAOS MULTIPLICATIF DE LEVY

Soient $W_\alpha^{(n)}$ une suite de copies indépendantes de W_α. Soient $B_n(t)$ une suite de boules de même centre t et de volume v_n tels que

$$v_n = \frac{\beta}{n} \quad (\beta > 0).$$

Soit $u > 0$. Posons maintenant

$$X_n(t) = W_\alpha^{(n)}(u\, \mathbb{1}_{B_n(t)}).$$

Construisons ensuite le poids positif

$$P_n(t) = \exp(\frac{\beta}{n} u^\alpha - X_n(t)).$$

Puis faisons la multiplication

$$Q_n(t) = \prod_{m=1}^{n} P_m(t).$$

Ainsi on obtient une martingale indexée. On peut se ramener au cadre de multiplications indépendantes dont J.-P. Kahane a fondé la base ([19]).

Il existe donc un opérateur que l'on note par $Q_{(\alpha,\beta,u)}$ car il dépend de α, β et u.

D'après un théorème de Kahane (chapitre I, théorème 1.3), l'opérateur $\mathbb{E}\, Q_{(\alpha,\beta,u)}$ est une projection dans l'espace $M(\mathbb{R}^d)$. Notre but principal dans ce qui suit est d'essayer de déterminer l'image et le noyau de cet opérateur.

4. APPROCHE DU NOYAU.

Rappelons que la dimension portante d'une mesure $\sigma \in M^+(\mathbb{R}^d)$, que l'on note par Dim σ, est définie comme la plus petite des dimensions des boréliens portant cette mesure.

THEOREME 1. L'opérateur $Q_{(\alpha,\beta,u)}$ est dégénéré en $\sigma \in M^+(\mathbb{R}^d)$ dès que

$$\text{Dim } \sigma < (1-\alpha)\beta \, du^{\alpha}.$$

Démonstration. Sans perdre la généralité, on peut supposer que σ est portée par un compact K dont la dimension de Hausdorff dim K $< \lambda$ avec Dim $\sigma < \lambda < (1-\alpha)\beta \, du^{\alpha}$. D'après le théorème 3 dans [19], il suffit de démontrer qu'il existe un certain $0 < h < 1$ tel que

$$\mathbb{E} \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leqslant C(\text{diam } B)^{(1-h)\lambda} \tag{4.1}$$

vaille pour toute boule B et un certain $n = n(B)$ dépendant de B.

Soit r_n le rayon de la boule $B_n(t)$. Comme le volume de $B_n(t)$ égale à $\frac{\beta}{n}$, on sait

$$r_n = \left(\frac{\beta}{C_d n}\right)^{\frac{1}{d}} \quad \text{où} \quad C_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$$

Soit $B = B(t_0, r)$. Supposons que $r_{n+1} < r \leqslant r_n$. D'après le fait que, pour tout $m \leqslant n$ on a

$$B_m(t) \supset B(t_0, r_m - r_n) \qquad \text{si} \qquad t \in B(t_0, r)$$

et le fait que

$$W_{\alpha}(g_1) \leqslant W_{\alpha}(g_2) \qquad \text{si} \qquad g_1 \leqslant g_2,$$

pour tout $0 < h < 1$, on a

$$\mathbb{E} \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leqslant C \exp(h\, u^{\alpha}\beta \log n - h^{\alpha}u^{\alpha} \sum_{m=1}^{n} |B(t_0, r_m - r_n)|).$$

C étant une constante et $|\ \ |$ signifiant le volume.

Or

$$\sum_{m=1}^{n} |B(t_0, r_m - r_n)| = \beta \log n + O(1)$$

car

$$|B(t_0, r_m - r_n)| = \beta \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \, C_d^j \, n^{-j/d} \, m^{-(d-j)/d}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E} \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leqslant C \, n^{-(h^\alpha - h)\beta u^\alpha}.$$

C étant une constante qui diffère de la précédente.

Comme $\frac{1}{n} \approx (\text{diam } B)^d$, on a alors

$$\mathbb{E} \sup_{t \in B} (Q_n(t))^h \leqslant C(\text{diam } B)^{\frac{h^\alpha - h}{1-h} \beta d u^\alpha (1-h)}$$

Pour l'obtention de (4.1), il suffit donc de remarquer

$$\lim_{h \to 1} \frac{h^\alpha - h}{1 - h} = 1 - \alpha$$

et de choisir un h suffisamment proche de 1. CQFD

5. L^2-THEORIE

PROPOSITION 3. La martingale $Q_n\sigma$ converge dans L^2 si et seulement si

$$I_{(2-2^\alpha)\beta d u^\alpha}(\sigma) = \iint \frac{d\sigma(t) \, d\sigma(s)}{|t-s|^{(2-2^\alpha)\beta d u^\alpha}} < \infty. \tag{5.1}$$

Preuve. Il suffit de démontrer que

$$\mathbb{E}\left(\int Q_n d\sigma\right)^2 \longrightarrow I_{(2-2^\alpha)\beta d u^\alpha} \quad (n \longrightarrow \infty).$$

En utilisant

$$\mathbb{1}_{B_n(t)} + \mathbb{1}_{B_n(s)} = \mathbb{1}_{B_n(t) \triangle B_n(s)} + 2 \, \mathbb{1}_{B_n(t) \cap B_n(s)}$$
$$|B_n(t) \triangle B_n(s)| = |B_n(t)| + |B_n(t)| - 2|B_n(t) \cap B_n(s)|.$$

On obtient facilement

$$\mathbb{E}\Big(\int Q_n d\sigma\Big)^2 = \iint \exp\left((2-2^\alpha)u^\alpha \sum_{m=1}^{n} |B_n(t)\cap B_n(s)|\right) d\sigma(t)d\sigma(s).$$

Moyennant la conjecture suivante

$$\text{(C)} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} |B_m(t) \cap B_m(s)| = \beta\, d \log \frac{1}{|t-s|} + O(1).$$

On achève la preuve au moyen du lemme suivant.

LEMME. Soit $B_r(t)$ la boule de centre t et de rayon r dans $\mathbb{R}^d$. On a

$$|B_r(t) \cap B_r(s)| = |B_r(0)| + O(|t-s|r)^{d-1}. \qquad (5.2)$$

Preuve. On calcule directement, en supposant $|t-s| \leqslant 2r$,

$$\begin{aligned} |B_r(t) \cap B_r(s)| &= 2 \int \cdots \int_{x_d \geqslant \frac{|t-s|}{2},\, x_1^2+\ldots+x_{d-1}^2 \leqslant r^2 - x_d^2} dx_1 \ldots dx_d \\ &= 2\, C_{d-1} \int_{|t-s|/2}^{r} (r^2 - x_d^2)^{(d-1)/2}\, dx_d \end{aligned}$$

où

$$C_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \qquad (d \geqslant 1).$$

Or,

$$\int_{|t-s|/2}^{r} (r^2 - x_d^2)^{\frac{d-1}{2}} dx_d = r^d \int_0^{\pi/2} \cos^d y\, dy + O(|t-s|r)^{d-1}$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 4. Sous la condition (5.1), l'égalité

$$\mathbb{E} \iint k(t,s)dQ(t)dQ\sigma(s) = \iint \frac{k(t,s)}{|t-s|^{(2-2^\alpha)\beta d u^\alpha}} d\sigma(t)d\sigma(s)$$

est valable pour k positive ou bornée, Q étant $Q(\alpha,\beta,u)$.

En particulier,

$$\mathbb{E} I_\theta(Q\sigma) < \infty \Leftrightarrow I_{\theta+(2-2^\alpha)\beta d u^\alpha}(\sigma) < \infty.$$

6. PROBABILITE DE PEYRIERE

Supposons $\sigma(\mathbb{R}^d) = 1$. La probabilité de Peyrière $\underline{q}$ est définie sur l'espace $\Omega \times \mathbb{R}^d$ par

$$\iint f(\omega,t)d\underline{q}(\omega,t) = \mathbb{E} \int f(\omega,t)Q\sigma(dt)$$

pour toute fonction mesurable positive $f(\omega,t)$. Comme $X_n(t)$, $P_n(t)$, $Q_n(t)$ deviennent des variables aléatoires sur l'espace de probabilité $(\Omega \times \mathbb{R}^d, \underline{q})$, on les désigne simplement par X_n, P_n, Q_n.

PROPOSITION 5. Si $\mathbb{E}\, Q\, \sigma = \sigma$, les X_n sont $\underline{q}$-indépendantes.

Outre l'hypothèse et l'indépendance des $W_\alpha^{(n)}$, il y a un autre élément qui joue un rôle essentiel dans la preuve de cette proposition. C'est que, pour tout n et toute f_n, l'espérance

$$\mathbb{E}\, P_n(t)\ f_n(X_n(t))$$

ne dépend pas de t. En passant, on obtient la formule

$$\int f(X_n)d\underline{q} = \mathbb{E}\, P_n(t)\ f(X_n) \tag{6.1}$$

En particulier, on a, d'après (1.2) et (1.3)

$$\mathbb{E}_{\underline{q}} \log P_n(t) = \frac{u^\alpha\beta}{n}(1-\alpha) \tag{6.2}$$

$$\mathbb{E}_{\underline{q}}\ (\log P_n)^2 = \left(\frac{u^\alpha\beta}{n}(1-\alpha)\right)^2 + \frac{u^\alpha\beta}{n}\,\alpha(1-\alpha) \tag{6.3}$$

donc la variance de $\log P_n$

$$V_q(\log P_n) = \frac{u^\alpha\beta}{n}\,\alpha(1-\alpha). \tag{6.4}$$

LEMME.

$$\frac{1}{\log N}\sum_1^N \log P_n \longrightarrow u^\alpha(1-\alpha)\beta \quad \underline{q}\text{-p. s.} \tag{6.5}$$

Preuve. Comme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{\log P_n - \mathbb{E} \log P_n}{\log^\alpha n}\right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u^\alpha \alpha(1-\alpha)\beta}{n \log^{2\alpha} n} < \infty \qquad (\alpha > \frac{1}{2}),$$

on sait, pour $\alpha > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log P_n - \mathbb{E} \log P_n}{\log^\alpha n} \quad \text{converge } \underline{q} \text{ - p.s.}$$

Prenons $\alpha = 1$. Le lemme de Kronecker nous assure que

$$\frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} (\log P_n - \mathbb{E} \log P_n) \to 0 \ \underline{q}\text{-p. s.}$$

Observons que $\mathbb{E} \log P_n = \dfrac{u^\alpha \beta(1-\alpha)}{n}$, d'où le lemme.

7. APPROCHE DE L'IMAGE

Rappelons la signification de $M^+_{D+}(\mathbb{R}^d)$. Que σ appartient à $M^+_{D+}(\mathbb{R}^d)$ signifie que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ et un compact K tel que $\sigma(\mathbb{R}^d \backslash K) < \epsilon$ et que

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log \sigma 1_K(B(t,e^{-n}))}{n} < -D-\delta \tag{7.1}$$

ou bien, pour une suite $r_n \to 0$ telle que $\lim(\log r_n / \log r_{n+1}) = 1$,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log \sigma 1_K(B(t,r_n))}{\log 1/r_n} < -D-\delta. \tag{7.2}$$

THEOREME 2. Supposons $\sigma \in M^+_{D+}(\mathbb{R}^d)$ et $D \geqslant (1-\alpha)\beta\, du^\alpha$. Alors l'opérateur $Q_{(\alpha,\beta,u)}$ est fortement non dégénéré en σ, et de plus, si $D > (1-\alpha)\beta\, du^\alpha$,

$$Q_{(\alpha,\beta,u)}\sigma \in M^+_{(D-(1-\alpha)\beta du^\alpha)+}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{p. s.}$$

Démonstration. On le démontre par deux étapes en suivant Kahane ([18]), et on peut se borner au cas $D > (1-\alpha)\beta\, du^\alpha$. D'après (7.1),

$$I_\eta(\sigma 1_K) = \int_K\int_K \frac{d\sigma(t)\ d\sigma(s)}{|t - s|^\eta} < \infty \quad \text{si} \quad D < \eta < D+\delta.$$

Selon la proposition 3, $\mathbb{E}\ Q_{(\alpha,\beta,u)}\sigma = \sigma$. Donc la probabilité de Peyrière est bien définie. Soit R_n l'opérateur produit des poids P_m ($m \geqslant e^{dn}$). Considérons d'abord

$$\rho_n(t) = R_n\sigma(B(t,e^{-n})).$$

Soit $\chi_n(t,s)$ la fonction indicatrice de l'ensemble des points (t,s) tels que $|t-s| \leqslant e^{-n}$. On peut écrire

$$\rho_n(t) = \int \chi(t,s)\ R_n\sigma(ds)$$

d'où, et d'après la définition de la probabilité de Peyrière et la proposition 4,

$$\int \rho_n d\underline{q} = \iint \chi(t,s)\exp\left((2-2^\alpha)u^\alpha \sum_{m=[e^{dn}]}^{\infty} |B_m(t)\cap B_m(s)|\right) d\sigma(t)\ d\sigma(s).$$

Puisque

$$\sum_{m=1}^{[e^{dn}]} |B_m(t) \cap B_m(s)| = \beta dn + O(1) \quad \text{si} \quad |t-s| = O(e^{-n}),$$

on a

$$\int \rho_n d\underline{q} \leqslant C \iint e^{-(2-2^\alpha)\beta u^\alpha dn}\chi_n(t,s)\exp\left((2-2^\alpha)u^\alpha \sum_{m=1}^{\infty} |B_m(t)\cap B_m(s)|\right) d\sigma(t)d\sigma(s)$$

$$= C\iint e^{-(2-2^\alpha)\beta d u^\alpha} \frac{\chi_n(t,s)}{|t-s|^{(2-2^\alpha)\beta d u^\alpha}} d\sigma(t)\ d\sigma(s).$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{(\eta-(2-2^\alpha)\beta d u^\alpha)n} \frac{\chi_n(t,s)}{|t-s|^{(2-2^\alpha)\beta d u^\alpha}} \leqslant \frac{O(1)}{|t-s|^\eta}$$

on a

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} e^{\eta n}\rho_n d\underline{q} < \infty,$$

et par conséquent $\rho_n = o(e^{-\eta n})$ $\underline{q}$-p. s. Donc presque sûrement

$$\rho_n(t) = o(e^{-\eta n}) \qquad Q\sigma\text{-p.p.}$$

Il est donc presque sûr que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ^1 contenu dans K, tel que

$$Q\sigma(K \backslash K_\epsilon^1) < \epsilon \tag{7.3}$$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log \rho_n(t)}{n} \leqslant -\eta \text{ uniformément sur } K_\epsilon^1. \tag{7.4}$$

Considérons maintenant (6.5). On peut en déduire que, presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ^2 contenu dans K tel que

$$Q\sigma(K \backslash K_\epsilon^2) < \epsilon \tag{7.5}$$

$$\frac{\log Q_n(t)}{\log n} \to u^\alpha \beta(1-\alpha) \text{ uniformément sur } K_\epsilon^2. \tag{7.6}$$

Posons maintenant

$$S_\epsilon = 1_{K_\epsilon^1 \cap K_\epsilon^2} Q\sigma.$$

D'après (7.3) et (7.5)

$$Q\sigma(K \backslash K_\epsilon^1 \cap K_\epsilon^2) < 2\epsilon,$$

et d'après (7.4) et (7.6),

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log S_\epsilon(B(t,e^{-n}))}{n} \leqslant \limsup_n \frac{\log Q_{[e^{dn}]}(t)}{n} + \limsup_n \frac{\log \rho_n(t)}{n}$$

$$\leqslant -\eta + (1-\alpha)\beta\, du^\alpha$$

uniformément sur $K_\epsilon^1 \cap K_\epsilon^2$. Cela entraîne que $Q_{(\alpha,\beta,\omega}\sigma \in M^+_{(D-(2-2^\alpha)\beta u_d^\alpha)+}$.

Deuxième étape. Observons d'abord que, si u se décompose comme

$$u^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha$$

alors il existe deux copies indépendantes de W_α, W'_α et W''_α, telles que

$$W_\alpha(u\, 1_{B(t,r)}) = W'_\alpha(u_1 1_{B(t,r)}) + W''_\alpha(u_2 1_{B(t,r)}).$$

Cette égalité signifie que les deux processus des deux côtés du signe = ont la même loi jointe. Pour éclaircir ce point, il suffit de rappeler la linéarité et l'isométrie de W_α. Par conséquent, et généralement, si

$$u^{\alpha} = u_1^{\alpha} + u_2^{\alpha}+\ldots+ u_{\ell}^{\alpha} \tag{7.7}$$

alors on peut décomposer $Q_{(\alpha,\beta,u)}$ en un produit d'opérateurs indépendants

$$Q_{(\alpha,\beta,u)} = Q_{(\alpha,\beta,u_1)}Q_{(\alpha,\beta,u_2)}\cdots Q_{(\alpha,\beta,u_{\ell})}. \tag{7.8}$$

Supposons maintenant

$$\left.\begin{array}{r} (2-2^{\alpha})\beta d u_1^{\alpha} \leqslant D \\ (2-2^{\alpha})\beta d u_2^{\alpha} \leqslant D - (1-\alpha)\beta d u_1^{\alpha} \\ \\ (2-2^{\alpha})\beta d u_{\ell}^{\alpha} \leqslant D - (1-\alpha)\beta d(u_1^{\alpha}+u_2^{\alpha}+\ldots+u_{\ell-1}^{\alpha}) \end{array}\right\} \qquad (7.9$$

Tour à tour, en appliquant ce que nous avons démontré à la première étape et (7.8), on obtient finalement

$$Q_{(\alpha,\beta,u)}\sigma \in M^{+}_{(D-(1-\alpha)\beta u^{\alpha})+}.$$

Il est simple de vérifier qu'il existe $u_1,\ldots,u_{\ell}$ satisfaisant (7.7) et (7.9).

CHAPITRE V.- MARTINGALE INDEXEE LIEE AU RECOUVREMENT SUR LE TORE $\mathbb{T}^d$.

INTRODUCTION

Sur le tore $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ on définit une suite de cubes

$$g_n = \mathop{\times}_{j=1}^{d} \left]-\frac{1}{2}\ell_{n,j} \;,\; \frac{1}{2}\ell_{n,j}\right[\qquad (n \geqslant 1)$$

dont le volume $v_n = \sum_{j=1}^{d} \ell_{n,j}$. On se donne de l'autre côté une suite de variables indépendantes $\{\omega_n\}$ uniformément distribuées sur $\mathbb{T}^d$. Soit $G_n = g_n + \omega_n$, la translatée de g_n par ω_n. Le problème de recouvrement est de demander, pour un compact F donné dans $\mathbb{T}^d$, quand on a $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ p.s.

Soit χ_n la fonction indicatrice de g_n. Une martingale indexée est attachée au problème précédent :

$$Q_n(t) = \prod_{m=1}^{n} P_m(t) \quad \text{où} \quad P_m(t) = (1-v_m)^{-1}(1-\chi_m(t-\omega_m)).$$

Cette martingale Q_n définit un opérateur aléatoire Q opérant sur les mesures $\sigma \in M^+(\mathbb{T}^d)$. Et l'opérateur $\mathbb{E}Q : \sigma \to \mathbb{E}Q\sigma$ est une projection dans $M^+(\mathbb{T}^d)$.

Prenons, comme exemple, $\ell_{n,j} = (\frac{\alpha}{n})^{1/d}$. On démontre que

$$\mathcal{R}_\alpha \subset \mathrm{Img}(\mathbb{E}Q) \subset \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{R}_{\alpha-\epsilon}$$

$$\bigcup_{\epsilon>0} \mathcal{S}_{\alpha-\epsilon} \subset \mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q) \subset \mathcal{S}_\alpha$$

où $\mathcal{R}_\alpha$ désigne l'ensemble des mesures α-régulières (s'écrivant comme somme de mesures de α-énergie finie) et $\mathcal{S}_\alpha$ désigne l'ensemble des mesures α-singulières (portées par un borélien de α-capacité nulle). En passant, on démontre aussi que $\mathrm{Cap}_\alpha F = 0$ est une condition nécessaire pour le recouvrement de F. Il nous semble, comme le résultat concernant le noyau l'indique aussi, que cette condition pourrait être suffisante.

Le "cubisme" imposé comme hypothèse n'est pas essentiel. Cette restriction a tout simplement pour but la simplicité. Ce qui importe, c'est la convexité et la forme non plate des objets recouvrants.

1. CERTAINS NOYAUX SUR LE TORE $\mathbb{T}^d$

Soit G un groupe compact dont le groupe dual $\Gamma = \hat{G}$. Soit m la mesure de Haar normalisée. Une fonction Φ définie sur G s'appelle noyau de Fourier si elle satisfait aux hypothèses suivantes :

(H_1) Φ est positive, semi-continue inférieurement et intégrale. Et sa transformée de Fourier est strictement positive, i. e. $\hat{\Phi}(\gamma) > 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$;

(H_2) Il existe une suite de fonctions $\{\Phi_N\}$ positives, bornées et de transformée de Fourier non négative qui s'approchent de Φ de façon que

$$\hat{\Phi}_N(\gamma) \uparrow \hat{\Phi}(\gamma) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma$$
$$I^{\mu}_{\Phi_N} \to I^{\mu}_{\Phi} \quad \text{pour toute } \mu \in M^+(G)$$

I^{μ}_{Φ} désignant l'énergie de μ relative à Φ.

Suivant ([25]), on peut établir les théorèmes suivants.

THEOREME A. Pour toute $\mu \in M(G)$ on a

$$I^{\mu} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{\Phi}(\gamma)\, |\hat{\mu}(\gamma)|^2 \qquad (I^{\mu} = I^{\mu}_{\Phi}).$$

THEOREME B. Si Cap E > 0, il existe une mesure de probabilité unique $\mu_e \in M^+(E)$ telle que $I^{\mu_e} = I(E)$ où $I(E)$ est la borne inférieure des énergies des probabilités portées par E.

Cette mesure μ_e est appelée la mesure d'équilibre sur E et son potentiel est appelé le potentiel d'équilibre de E.

THEOREME C. L'ensemble des points où $U^{\mu_e}(t) < I(E)$ est négligeable par rapport à toute mesure d'énergie finie. D'autre part $U^{\mu}(t) \leqslant \lambda I(E)$ pour tout $t \in G$ si le noyau Φ satisfait au principe du maximum λ-dilaté.

Le reste du présent paragraphe est consacré à l'étude de certains noyaux convexes sur le tore $\mathbb{T}^d$ qui servent à la recherche du problème de recouvrement.

$\mathbb{T}^d$ ayant été défini par $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$, une fonction périodique Φ s'appelle noyau convexe si elle vérifie

a) Φ est positive, non constante et sommable sur $[0,1[^d$;
b) Φ est une fonction paire par rapport à toute variable ;
c) Quelles que soient k ($1 \leqslant k \leqslant d$) variables distinctes $t_{j_1},\dots,t_{j_k}$, on a

$$\frac{\partial^{2k}\Phi}{\partial t_{j_1}^2 \dots \partial t_{j_k}^2} \geqslant 0 \quad \text{pour } t = (t_1,\dots,t_j) \in]0,1[^d.$$

Cette inégalité est stricte sur un ensemble de mesure positive.

THEOREME 1. Les coefficients de Fourier d'un noyau convexe sont strictement positifs.

Les noyaux convexes de dimension 1 sont étudiés dans [25]. Ce théorème se démontre de la même façon que dans [25] en faisant appel à la notion de différence : pour $1 \leqslant j \leqslant d$ et $a \geqslant 0$ l'opérateur de différence Δ_a^j est défini par

$$\Delta_a^j\Phi(t_1,\dots,t_d) = \Phi(t_1,\dots,t_j+a,\dots,t_d) - \Phi(t_1,\dots,t_j,\dots,t_d).$$

Il est facile de vérifier les commutativités suivantes

$$\Delta_a^i\Delta_b^j = \Delta_b^j\Delta_a^i$$
$$\frac{\partial}{\partial t_i}\Delta_b^j = \Delta_b^j\frac{\partial}{\partial t_j}.$$

Voici un procédé engendrant des noyaux de Fourier sur $\mathbb{T}^d$.

i) Soit f une fonction telle que $f' \geqslant 0$ et $f'' \geqslant 0$. Si φ est un noyau convexe sur $\mathbb{T}$, la composée $f \circ \varphi$ l'est aussi ;

ii) Si $\varphi_1,\dots,\varphi_d$ sont des noyaux convexes sur $\mathbb{T}$, alors le produit $\Phi(t_1,\dots,t_j) = \varphi_1(t_1)\dots\varphi_d(t_d)$ est un noyau convexe sur $\mathbb{T}^d$;

iii) Si $\{\Phi_n\}$ est une suite de noyaux convexes sur $\mathbb{T}^d$, leur somme

$\Phi(t) = \sum \Phi_n(t)$, si intégrable, est aussi un noyau convexe sur $\mathbb{T}^d$.

Un exemple très important de noyau de Fourier est

$$k(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{d} (\ell_{n,j} - |t_j|)_+ .$$

C'est lui qui intervient dans la résolution du problème de recouvrement. Maintenant on va le comparer avec le noyau de Riesz. Rappelons que le noyau de Riesz d'ordre β est défini par

$$R_\beta(t) = |t|^{-\beta} \qquad (|t|^2 = \sum_{j=1}^{d} t_j^2).$$

Désignons par k_α le noyau k correspondant aux $\ell_{n,j} = \alpha_j n^{-1/d}$ avec $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_d$.

THEOREME 2. $k_\alpha \approx R_{\alpha d}$ $\quad (0 < \alpha < 1)$.

Démonstration. Supposons

$$0 \leqslant \frac{t_1}{\alpha_1} \leqslant \frac{t_2}{\alpha_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{t_d}{\alpha_d}$$

$$(n+1)^{-1/d} \leqslant \frac{t_d}{\alpha_d} < n^{-1/d} .$$

on a

$$k_\alpha(t) = \exp \alpha \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{d} (k^{-1/d} - t_j/\alpha_j).$$

Or, k étant fixé

$$\prod_{j=1}^{d} (k^{-1/d} - t_j/\alpha_j) = \frac{1}{k} + 0\left(\sum_{j=1}^{d} k^{-1+j/d}\, t_d^j\right).$$

Faisant la sommation, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{d} (k^{-1/d} - t_{j/\alpha_j}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 0\left(\sum_{j=1}^{d} n^{j/d} t_d^j\right) \\ &= \log n + 0(1) \\ &= \log\left(\max_j \frac{t_j}{\alpha_j}\right)^{-d} + 0(1). \end{aligned}$$

CQFD

2. ACTION PLEINE DE L'OPERATEUR $\mathbb{E}Q$.

Soit $\chi_{n,j}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $]-\frac{1}{2}\ell_{n,j}\ ,\ \frac{1}{2}\ell_{n,j}[$. Alors la fonction indicatrice de g_n s'écrit

$$\chi_n(t) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{n,j}(t_j) \qquad (t=(t_1,\dots,t_d)).$$

D'ailleurs posons

$$\xi_n(t) = \int_{\mathbb{T}^d} \chi_n(t+s)\chi_n(s)ds.$$

On a, grâce à l'indépendance de $\chi_{n,j}$ $(j = 1,\dots,d)$,

$$\xi_n(t) = \prod_{j=1}^{d} (\ell_{n,j} - |t_j|)_+ \qquad (\text{si } \ell_{n,j} < \frac{1}{2}) \tag{2.1}$$

car

$$\int_{\mathbb{T}} \chi_{n,j}(t_j+s_j)\chi_{n,j}(s_j)ds_j = (\ell_{n,j} - |s_j|)_+.$$

THEOREME. Supposons $\ell_{n,j} < \frac{1}{2}$ $(n \geqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant d)$ et $\sum v_n^2 < \infty$. Quelle que soit $\sigma \in M^+(\mathbb{T}^d)$. Alors

$$I_k^\sigma < \infty \Longrightarrow \int Q_n d\sigma \quad L^2\text{-converge}$$

où

$$k(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{d} (\ell_{n,j} - |t_j|_+).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}\left(\int Q_n d\sigma\right)^2 = O(1). \tag{2.2}$$

En vertu de l'indépendance des ω_n, on a

$$\mathbb{E}\left(\int Q_n d\sigma\right)^2 = \iint \prod_{m=1}^{n} \mathbb{E}P_m(t)P_m(s)d\sigma(t)d\sigma(s). \tag{2.3}$$

Tenant compte de (2.1), on sait

$$\mathbb{E}\, P_m(t)P_m(s) = (1-v_m)^{-2}\left(1-2v_m + \prod_{j=1}^{d}(\ell_{m,j} - |t_j - s_j|)_+\right).$$

Remplaçons ceci dans (2.3), on peut obtenir la majoration suivante

$$\mathbb{E}\left(\int Q_n d\sigma\right)^2 \leqslant I_k^\sigma \exp(\Sigma\, v_m^2)$$

d'où (2.2). CQFD.

COROLLAIRE. Si σ est k-régulière, $\mathbb{E}Q$ agit pleinement sur σ.

3. DEGENERESCENCE DE L'OPERATEUR $\mathbb{E}Q$.

Introduisons tout d'abord la norme suivante.

$$|t| = 2^{-d} \max_{1\leqslant j\leqslant d} |t_j|.$$

La constante 2^{-d} permet d'écrire le volume d'une boule de rayon r $|B(0,r)| = r^d$. Soit B_0 une boule fixée. Soit r_n $(n \geqslant 1)$ une suite tendant vers zéro. Posons

$$g_n = r_n B_0 \quad (n \geqslant 1)$$
$$v_n = |B_n|.$$

C'est un cas particulier de ce que l'on décrit dans l'introduction.

THEOREME. Supposons

$$v_1+\ldots+ v_n - \alpha \log\frac{1}{v_{n+1}} = O(1) \tag{3.1}$$

$$v_1^{1-j/d} +\ldots+ v_n^{1-j/d} = O(v_n^{-j/d}) \quad (1 \leqslant j \leqslant d) \tag{3.2}$$

Si σ est une mesure portée par un borélien de αd-mesure finie, on a $Q\sigma = 0$ p. s.

Démonstration. D'après un théorème dans [19] (p. 4), il suffit de trouver un réel $0 < h < 1$ et une constante $C > 0$ tels que l'on ait

$$\mathbb{E} \sup_{t\in B} (Q_n(t))^h \leqslant C(\operatorname{diam} B)^{(1-h)\alpha d} \tag{3.3}$$

pour toute boule B et certain $n = n(B)$ dépendant de B.

Soit $B = B(t_0, r)$. Supposons $r_{n+1} < r \leqslant r_n$, r_n désignant le rayon de B_n. D'après le fait que pour tout $m \leqslant n$

$$|t-t_0| < r \ , \ t_0 \in B(\omega_m, r_m - r_n) \Longrightarrow t \in B(\omega_m, r_m),$$

on a

$$1_{B(\omega_m, r_m - r_n)}(t_0) \leqslant 1_{B(\omega_m, r_m)}(t) \quad \text{si} \quad |t-t_0| \leqslant r.$$

Donc pour tout $h > 0$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \sup_{t\in B} (Q_n(t))^h &\leqslant \left(\prod_{m=1}^{n}(1-v_m)\right)^{-h} \mathbb{E} \prod_{m=1}^{n}\left(1 - 1_{B(\omega_m, r_m - r_n)}(t_0)\right) \\ &= \left(\prod_{m=1}^{n}(1-v_m)\right)^{-h} \prod_{m=1}^{n}(1-|B(0, r_m - r_n)|).\end{aligned}$$

A la condition que $\sum v_n^2 < \infty$, on trouve

$$\mathbb{E} \sup_{t\in B}(Q_n(t))^h \leqslant C \exp\left(h \sum_{m=1}^{n} v_m - \sum_{m=1}^{n} |B(0, r_m - r_n)|\right).$$

C étant une constante. Tenant compte du fait que $|B(0,r)| = r^d$ et de l'hypothèse (3.2), on a

$$\sum_{m=1}^{n} |B(0, r_m - r_n)| = \sum_{m=1}^{n} v_m + O(1).$$

Puis utilisant l'hypothèse (3.1), on obtient

$$\mathbb{E} \sup_{t\in B} (Q_n(t))^h \leqslant C \, v_{n+1}^{(1-h)\alpha}. \tag{3.4}$$

C étant une autre constante. Comme $v_{n+1} < r^d$, (3.3) résulte de (3.4). CQFD

4. NOYAU ET IMAGE

Nous nous bornons momentanément au cas que l'on décrit au § 3. Nous supposons (3.1) et (3.2) vraies. En ce qui concerne le noyau et l'image de la projection $\mathbb{E}Q$ on a

THEOREME.

$$\mathcal{R}_\alpha \subset \mathrm{Img}(\mathbb{E}Q) \subset \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{R}_{\alpha-\epsilon} \tag{4.1}$$

$$\bigcup_{\epsilon>0} \mathcal{S}_{\alpha-\epsilon} \subset \mathrm{Ker}(\mathbb{E}Q) \subset \mathcal{S}_\alpha \tag{4.2}$$

Démonstration. La première inclusion dans (4.1) est le corollaire à la fin du § 2. Supposons $\sigma \in \mathrm{Img}(\mathbb{E}Q)$. On la décompose en suivant Kahane

$$\sigma = \sigma^r_{\alpha-\epsilon} + \sigma^s_{\alpha-\epsilon} \qquad (\sigma^r_{\alpha-\epsilon} \in \mathcal{R}_{\alpha-\epsilon} \ , \ \sigma^s_{\alpha-\epsilon} \in \mathcal{S}_{\alpha-\epsilon}).$$

Faisons agir $\mathbb{E}Q$ sur σ. La deuxième inclusion résulte du fait que

$$\sigma = \mathbb{E}\sigma^r_{\alpha-\epsilon} \leqslant \sigma^r_{\alpha-\epsilon}.$$

(4.2) se démontre de la même façon, ou bien par dualité à partir de (4.1). CQFD.

5. GENERALISATIONS

Le "cubisme" imposé dans tout ce qui précède peut être relaché. Les théorèmes se généralisent au cas où les objets recouvrants sont des convexes symétriques et de formes non plates. Supposons que

i) K soit convexe et symétrique par rapport à l'origine ;

ii) K soit compact et $0 \in \overset{\circ}{K}$.

Il existe alors une norme sur $\mathbb{R}^d$ dont K est la boule unité fermée. Pour cela on pose

$$\|x\| = \inf\{a>0 \ : \ x \in aK\}.$$

Dans le fond la réciproque est aussi vraie. Supposons de plus que

iii) $|K| = 1$ ($|.|$ désignant le volume).

Sinon, multiplions K par une constante. Alors la norme vérifie

$$B(0,r) = rK \quad , \quad |B(0,r)| = r^d.$$

Prenons maintenant une suite K_n $(n \geqslant 1)$ dont chacun satisfait à i), ii) et iii). Prenons d'ailleurs une suite de positifs r_n. Posons

$$g_n = r_n \overset{o}{K_n}$$
$$v_n = |g_n|.$$

Une martingale indexée se construit comme dans l'introduction.

Le théorème au § 3 se généralise à condition que

$$\rho_n'' = O(\rho_n').$$

ρ_n' étant le rayon euclidien de la boule la plus grande contenue dans K_n de centre 0 ; ρ'' étant le rayon euclidien de la boule la plus petite contenant K_n de centre 0. En réalité, ce qui joue, c'est l'inégalité triangulaire. Ce théorème s'étend aussi sur un groupe compact métrisé. Soit $B(e,r_n)$ la boule de centre e, l'unité du groupe, et de rayon r_n. Posons

$$\varphi(r) = |B(e,r)|.$$

Le théorème s'étend à condition que

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi(r_m - r_n) = \sum_{m=1}^{n} \varphi(r_m) + O(1)$$

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi(r_m) = \alpha \log \frac{1}{\varphi(r_{n+1})} + O(1).$$

Quant au théorème du § 2, il peut s'énoncer avec

$$k(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t).$$

CHAPITRE VI.- RARETE DES INTERVALLES RECOUVRANTS

RESUME.- On considère le modèle de recouvrement de Dvoretzky. Il est démontré dans ce chapitre que les intervalles recouvrant un point sont rares.

1. NOTIONS DE RARETE ET ENONCES DE RESULTATS

Considérons le modèle de recouvrement de Dvoretzky (cf. [7], [17]). Il a été démontré en 1972 par L. Shepp [42] que le cercle $\mathbb{T}$ est recouvert par les intervalles jetés au hasard définis par $I_n =]0,\ell_n[+ \omega_n$, et même une infinité de fois pour chaque point, si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \ldots + \ell_n) = \infty$$

où la suite $\{\ell_n\}$, constituée des longueurs, tend en décroissant vers zéro et les ω_n sont indépendantes, chacune d'elles se distribuant uniformément sur $\mathbb{T}$.

Autrement dit, quand cette condition de Shepp est réalisée, alors presque sûrement pour tout point $t \in \mathbb{T}$, il y a un nombre infini d'intervalles qui le recouvrent. Combien y-a-t-il en fait d'intervalles recouvrant un point ? Est-ce une suite rare ou épaisse ? C'est une question posée par L. Carleson, qui m'a été communiquée par J.-P. Kahane.

Pour des raisons techniques, supposons désormais

$$\sum \ell_n^2 < \infty.$$

Tout naturellement, il nous faut tout d'abord expliciter la rareté et l'épaisseur. Soit Λ une sous-suite de $\mathbb{N}^+$. Nous introduisons ici deux moyens de décrire la rareté ou l'épaisseur de Λ.

Prenons premièrement une série divergente de termes positifs

$$S : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \qquad (a_n > 0)$$

disons une série étalon. On sait que Λ est S-rare ou (a_n)-rare si

$$\sum_{n\in\Lambda}^{\infty} a_n < \infty.$$

En cas contraire, on dit que Λ est S-épaisse ou (a_n)-épaisse. C'est le premier moyen de description.

Passons ensuite au deuxième. Au lieu d'utiliser des séries étalons, prenons une suite $\{\sigma_n\}$ positive croissante tendant vers l'infini. Pour la suite Λ, introduisons

$$N_n(\Lambda) = \mathrm{Card}(\Lambda \cap [1,n]) \qquad (n \geqslant 1).$$

La (σ_n)-densité inférieure et la (σ_n)-densité supérieure de Λ sont définies respectivement par les deux quantités suivantes

$$\underline{d}(\Lambda,\sigma_n) = \liminf_{n \to \infty} \frac{N_n(\Lambda)}{\sigma_n}$$
$$\bar{d}(\Lambda,\sigma_n) = \limsup_{n \to \infty} \frac{N_n(\Lambda)}{\sigma_n}.$$

Grosso modo, plus grandes sont les quantités $\underline{d}$ ou $\bar{d}$, plus épaisse la suite Λ.

Revenons maintenant au problème initial. Voici deux notations :

$$\Lambda_t = \{n\in\mathbb{N}^+ : I_n \ni t\} \qquad (t\in\mathbb{T})$$
$$N_n(t) = N_n(\Lambda_t) \qquad (t\in\mathbb{T}).$$

Λ_t est l'ensemble des indices des intervalles qui recouvrent le point t tandis que $N_n(t)$ est le nombre des intervalles parmi les n premiers intervalles jetés au hasard qui recouvrent le point t.

Du premier point de vue, on a le théorème suivant démontré facilement comme une conséquence du théorème des trois séries.

THEOREME 1. Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres positifs constituant une série étalon. Le point t $(\in \mathbb{T})$ étant fixé, on a

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ell_n < \infty \Longrightarrow$ p. s. Λ_t est (a_n)-rare.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ell_n = \infty \Longrightarrow$ p. s. Λ_t est (a_n)-épaisse.

c) En fait, la condition a) (resp. b)) implique que p. s. pour presque tout point t, Λ_t est (a_n)-rare (resp. épaisse).

COROLLAIRE. Supposons que $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ $(\alpha > 0)$. t étant fixé, la suite Λ_t est $(\frac{1}{\log n})$-épaisse et $(\frac{1}{\log^{1+\epsilon} n})$-rare $(\epsilon > 0)$.

Du deuxième point de vue, on a aussi un théorème qui se démontre aussi facilement.

THEOREME 2. Supposons que $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \ell_k$ tende vers l'infini. Pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, on a p. s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(t)}{\sigma_n} = 1.$$

Autrement dit,

$$\underline{d}(\Lambda_t, \sigma_n) = \bar{d}(\Lambda_t, \sigma_n) = 1.$$

COROLLAIRE. Soit $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ $(\alpha > 0)$. Pour t fixé, on a p. s.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(t)}{\log n} = \alpha.$$

En terminologie de densité,

$$\underline{d}(\Lambda_t, \log n) = \bar{d}(\Lambda_t, \log n) = \alpha.$$

Un point t étant fixé, on a déjà de bonnes informations sur la rareté. de Λ. Néanmoins le plus intéressant est de savoir la rareté uniforme pour tous les points. Dans la suite on va s'engager dans ce problème, mais dans le cas bien particulier où $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$. Les résultats obtenus sont énoncés en forme des deux théorèmes suivants.

Soit f(x) une fonction définie sur R^+ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, f(n)} < \infty \tag{F_1}$$

et que pour tout $\delta > 0$ il existe une constante $C = C(\delta)$ telle que

$$f(\delta n) \geqslant C\, f(n) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{F_2}$$

Voici deux telles fonctions

$$f(x) = \log^p x \quad (p > 1)$$
$$f(x) = \log x \log_2 x \cdots \log_T x (\log_{T+1} x)^p \quad (p > 1)$$

où $\log_1 x = \log x$ et $\log_{T+1} x = \log \log_T x$ (x assez grand).

THEOREME 3. Soit $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ $(\alpha > 0)$.
a) Si $f(x)$ satisfait (F_1) et (F_2), presque sûrement on a

$$\max_{t \in \mathbb{T}} \sum_{n \in \Lambda_t,\, n \geqslant n_0} \frac{1}{\log n \log \log n\, f(\log \log n)} < \infty. \tag{1.1}$$

b) Si $\alpha > 1$, presque sûrement on a

$$\min_{t \in \mathbb{T}} \sum_{n \in \Lambda_t} \frac{1}{\log \log n} = \infty \tag{1.2}$$

Ce théorème implique que, si $\alpha > 1$, presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{T}$, la suite Λ_t est $(\log \log n)^{-1}$-épaisse et $(\log n)^{-1-\epsilon}$-rare $(\epsilon > 0)$.

THEOREME 4. Supposons $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ $(\alpha > 0)$.
a) Pour n'importe quel $\alpha > 0$, on a p. s.

$$\alpha < \limsup_{n \to \infty} \frac{\max_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log n} \leqslant 2\alpha(1+e^{1+2/\alpha}) \tag{1.3}$$

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\max_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log n} \leqslant 2, \text{ si } \alpha \leqslant e^{-3}. \tag{1.4}$$

b) Pour $\alpha > 1$, on a p. s.

$$1 - \frac{1}{\alpha} \leqslant \liminf_{n \to \infty} \frac{\min_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log \log n} \tag{1.5}$$

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\min_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log n} < \alpha \tag{1.6}$$

REMARQUE 1. (sur les parties les plus intéressantes du théorème 4). Le corollaire du théorème 2 entraîne déjà

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\min_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log n} \leqslant \alpha \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\max_{t \in \mathbb{T}} N_n(t)}{\log n}.$$

La première inégalité dans (1.3) et l'inégalité (1.6) assurent seulement que ces deux inégalités sont strictes, alors que la deuxième inégalité dans (1.3) et l'inégalité (1.5) affirment que p. s. pour tout $t \in T$

$$\log \log n \ll N_n(t) \ll \log n.$$

REMARQUE 2. (sur quelques aspects restant à améliorer). Le terme log log n dans l'inégalité précédente, peut-il être remplacé par log n ? Ou bien, est-ce que log n dans (1.6), peut-il être remplacé par log log n ? La majoration dans (1.3) est mauvaise quand α est petit, tandis que (1.4) en est une amélioration. On espère encore que la quantité 2 pourrait être remplacé par $A\alpha$ avec une certaine constante A.

REMARQUE 3. La paramètre α, considéré comme la grandeur de la suite $\{\frac{\alpha}{n}\}$, n'émerge pas dans la conclusion du corollaire du théorème 1, ni dans celle du théorème 3, tandis qu'elle apparaît dans la conclusion du corollaire du théorème 2 et dans celle du théorème 4. De ce point de vue, on peut dire que la deuxième description de rareté est plus précise que la première.

REMARQUE 4. Pour bien comprendre le théorème 1, particulièrement son corollaire, il n'est pas inutile de présenter une suite à la fois $(\log n)^{-1}$-épaisse et $(\log n)^{-1-\epsilon}$-rare :

$$\lambda_n = \exp(n) \quad (n \geqslant 1).$$

REMARQUE 5. Si $\ell_n = \dfrac{\beta}{n^{1-\delta}}$ $(\beta > 0,\ 1 < \delta < 1)$, pour tout $t \in \mathbb{T}$, Λ_t est p. s. $(1/n^{1-\delta}\log n)$-épaisse et $(1/n^{1-\delta}\log^{1+\epsilon} n)$-rare.

2. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1 ET 2.

Si l'on veut adopter le premier moyen de description de rareté, la formule suivante est incontestablement bonne

$$\sum_{n\in\Lambda_t} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \chi_n(t-\omega_n). \tag{2.1}$$

Démonstration du théorème 1. La formule (2.1) nous informe que la (a_n)-rareté (resp. la (a_n)-épaisse) de Λ_t correspond juste à la convergence (resp. la divergence) de la série se trouvant à droite dans la formule. Comme les termes de cette série sont bornés, il suffit d'envisager, d'après le théorème des trois séries, les deux séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ell_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 \ell_n - a_n^2 \ell_n^2 \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \ell_n$$

d'où résultent a) et b), car la première série au-dessus majore la deuxième.

Quant à c), il résulte du théorème de Fubini. CQFD

Si l'on adopte le deuxième moyen de décrire la rareté, l'expression suivante de $N_n(t)$ est commode

$$N_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \chi_j(t-\omega_j). \tag{2.2}$$

Puisque les χ_j sont majorées par le 1, le théorème 2 provient directement du théorème des grands nombres car $\ell_j = \mathbb{E}\,\chi_j$.

3. DEUX LEMMES

Les théorèmes 3 et 4 reposent tous les deux sur les deux lemmes suivants.

Etant donné p et q tels que $1 \leqslant p < q$, posons

$$S_{p,q}(t) = \sum_{k=p+1}^{q} \chi_k(t-\omega_k)$$
$$M_{p,q} = \max_{t\in T} S_{p,q}(t)$$
$$L_{p,q} = \sum_{k=p+1}^{q} \ell_k .$$

Etablissons d'abord une relation entre $S_{p,q}$ et $M_{p,q}$, ω étant fixé. La quantité $M_{p,q}$ signifie qu'il existe un point $t_0 = t(\omega)$ qui est recouvert à $M_{p,q}$ reprises par des intervalles I_k $(p+1 \leqslant k \leqslant q)$. Si t_0 se trouve à droite du centre d'un intervalle, on dit que t_0 est recouvert à droite par cet intervalle. On peut supposer alors qu'il y a $\frac{1}{2}M_{p,q}$ intervalles recouvrant le point t_0 à droite. Cela implique qu'il existe un intervalle $I(\omega)$ de longueur $\frac{1}{2}\ell_q$ qui est recouvert par $\frac{1}{2}M_{p,q}$ intervalles (supposé ℓ_k décroissante), c'est-à-dire que, pour tout ω, on a

$$|\{t : S_{p,q}(t) \geqslant \frac{1}{2}M_{p,q}\}| \geqslant \frac{1}{2}\ell_q \tag{3.1}$$

$|.|$ signifiant la mesure de Lebesgue.

De l'autre côté on peut facilement calculer la transformée de Laplace de $S_{p,q}$: pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} \exp \lambda\, S_{p,q} = \prod_{p+1}^{q} (1 - \ell_k + e^{\lambda}\ell_k).$$

On en déduit une expression plus simple

$$\mathbb{E} \exp \lambda\, S_{p,q} \leqslant \exp[(e^{\lambda}-1)L_{p,q}]. \tag{3.2}$$

LEMME 1. Supposons $r \geqslant L_{p,q}$. On a

$$P(M_{p,q} \geqslant 2r) \leqslant \frac{2}{\ell_q}\exp[r(1 - \log\frac{r}{L_{p,q}}) - L_{p,q}].$$

Preuve. Considérons d'abord l'intégration de $\exp \lambda\, S_{p,q}$ par rapport à t. Si l'on tient compte de (3.1), on obtient immédiatement

$$\frac{1}{2}\ell_q \exp \frac{1}{2}\lambda M_{p,q} \leqslant \int_T \exp \lambda\, S_{p,q}\, dt \qquad (\lambda \geqslant 0).$$

Ensuite prenons l'espérance. A l'aide de (3.2), on obtient l'expression suivante

$$\mathbb{E}\, \exp\frac{1}{2}\lambda M_{p,q} \leqslant \frac{2}{\ell_q}\exp[(e^{\lambda}-1)L_{p,q}].$$

C'est une information sur les moments de $M_{p,q}$. Maintenant faisant appel à l'inégalité de Chebychev on obtient une information sur sa distribution :

$$P(M_{p,q} \geqslant 2r) \leqslant \frac{2}{\ell_q} \exp[(e^{\lambda}-1)L_{p,q} - \lambda r].$$

Posons alors

$$g(\lambda) = (e^{\lambda}-1)L_{p,q} - \lambda r.$$

On s'aperçoit que $g(\lambda)$ atteint son minimum au point λ tel que

$$e^{\lambda}L_{p,q} = r \qquad (\lambda \geqslant 0).$$

Un tel λ existe car on a supposé que $r \geqslant L_{p,q}$. On prend ce λ minimisant, on obtient finalement ce que l'on veut. CQFD.

COROLLAIRE. Si $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ $(\alpha > 0)$, pour $r \geqslant \alpha \log \frac{q}{p}$ on a

$$P(M_{p,q} \geqslant 2r) \leqslant Cp^{\alpha}q^{1-\alpha}\exp[r(1-\log\frac{r}{\alpha \log q/p})]$$

où C est une constante.

La probabilité dans le lemme 1 est la probabilité de l'événement qu'il existe un point qui est recouvert au moins 2r fois par les intervalles $I_{p+1},\dots,I_q$. En ce qui concerne la probabilité de l'événement que tout point du cercle est recouvert au moins r fois, on a le lemme suivant si $r = 1$.

LEMME 2. Supposons $\ell_n \geqslant \frac{1}{2n}$. Si $1 \leqslant p < q$, on a

$$P\left(\min_{t\in T} S_{p,q}(t) = 0\right) \leqslant C(q-p)\exp\left(-\sum_{n=p+1}^{q} \ell_n\right)$$

où C est une constante.

Puisque $\min_{t\in T} S_{p,q}(t) = 0$ signifie que $T \not\subset \bigcup_{n=p+1}^{q} I_n$, l'argument dans [17] à la page 145 nous permet de faire la conclusion dans ce lemme.

COROLLAIRE. Supposons $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ $(\alpha \geqslant 1)$. Il existe une constante C telle que si $1 \leqslant p \leqslant q$, on ait

$$P(\min_{t \in T} S_{p,q}(t) = 0) \leqslant C(q - p(\frac{p}{q})^{\alpha}.$$

4. DEMONSTRATION DU THEOREME 3.

La formule (2.1) joue un rôle indispensable dans cette démonstration.

Pour a) on utilise le corollaire du lemme 1. Soit $a > 1$. Prenons $N_0 = 1$, $N_m = [\exp a^m]$ $(m \geqslant 1)$. Posons $p = N_m$, et $q = N_{m+1}$. Alors

$$\frac{p}{q} \approx \exp[-a^m(a-1)]$$
$$p^{\alpha}q^{1-\alpha} \approx \exp[a^m(a - (a-1)^{\alpha})].$$

Choisissons $r = \gamma a^m$. Ajustons maintenant a et γ de telle façon que l'on puisse utiliser le corollaire pour p, q et r, c'est-à-dire que a et γ doivent satisfaire

$$\gamma \geqslant \alpha(a - 1). \tag{4.1}$$

Et le corollaire nous permet de dire

$$P(M_{p,q} \geqslant 2r) \leqslant C \exp\{a^m[a - (a-1)\alpha+\gamma(1 - \log \frac{\gamma}{\alpha(a-1)})]\}.$$

Supposons que

$$a - (a-1)\alpha+\gamma(1 - \log\frac{\gamma}{\alpha(a-1)}) < 0. \tag{4.2}$$

Le lemme de Borel-Cantelli affirme que p. s. pour m suffisamment grand on a

$$M_{N_m, N_{m+1}} \leqslant 2\gamma a^m. \tag{4.3}$$

Envisageons maintenant la série suivante

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\chi_n(t - \omega_n)}{\log n \log \log n f(\log \log n)} \quad (n_0 \text{ assez grand}).$$

Elle est contrôlée par

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{M_{N_m,N_{m+1}}}{a^m m \log a\ f(m \log a)}.$$

D'après (4.3), celle-ci est contrôlée par

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\ f(m \log a)} < \infty.$$

Ce qui reste à faire, c'est de prendre $\gamma = 1$ et a assez proche de 1 tels que l'on ait (4.1) et (4.2).

La partie a) est ainsi démontrée. Pour b), le corollaire du lemme 2 va être utilisé. Définissons d'abord une suite $\{p_m\}$ par récurrence :

$$p_0=1,\ p_{m+1}^{\alpha-1} = ((m+1)p_m)^{\alpha} \quad (m \geqslant 0). \tag{4.4}$$

Il est facile d'en déduire que

$$p_{m+1} = \prod_{j=1}^{m} (1+j)^{(\alpha/(\alpha-1))^{m+1-j}}.$$

Par conséquent, on a

$$\log p_{m+1} \approx m(\frac{\alpha}{\alpha-1})^{m+1}. \tag{4.5}$$

Posons maintenant

$$N_m = [P_m] \quad ([\ \ ] \text{ signifie la partie entière}).$$

Envisageons ensuite un découpage analogue à celui dans a), on s'aperçoit que grâce à (4.5), on a

$$\min_{t\in T} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi_n(t-\omega_n)}{\log \log n} \gg \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \min_{t\in T} S_{N_m,N_{m+1}}(t). \tag{4.6}$$

Or le corollaire dit qu'à cause de (4.4) on a

$$P(\min_{t\in T} S_{N_m,N_{m+1}}(t) = 0) \leqslant C\,\frac{1}{(m+1)^{\alpha}}. \tag{4.7}$$

Donc le lemme de Borel-Cantelli assure p. s. $\min_{t\in T} S_{N_m,N_{m+1}} \geqslant 1$ lorsque m est suffisamment grand. Ceci, avec (4.6), termine la démonstration. CQFD.

5. DEMONSTRATION DU THEORME 4.

Nous commençons par la démonstration de la deuxième inégalité dans (1.3) et celle de (1.4). Dans la section précédente, on a déjà démontré que si a et γ satisfont (4.1) et (4.2), on a (4.3). Remarquons

$$N_m < n \leqslant N_{m+1} \quad \text{ssi} \quad a^m \leqslant \log n < a^{m+1}.$$

D'après (4.3), on a

$$\begin{aligned}\max_{t\in T} N_n(t) &\leqslant 2\gamma\sum_{k=0}^{m} a^k + O(1)\\ &\leqslant 2\gamma\frac{a}{a-1}\log n + O(1)\end{aligned}$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\max_{t\in T} N_n(t)}{\log n} \leqslant 2\gamma\left(1 + \frac{1}{a-1}\right). \tag{5.1}$$

Maintenant on va choisir a et γ le mieux possible. Prenons $\gamma = \alpha$. (4.1) et (4.2) deviennent alors

$$\begin{cases}1 < a \leqslant 2\\ a - (a-1)\alpha + \alpha(1 + \log(a-1)) < 0.\end{cases}$$

Pour avoir ceci il suffit que

$$\begin{cases}1 < \alpha \leqslant 2\\ 2 + \alpha(1 + \log(a-1)) < 0.\end{cases}$$

Il suffit de choisir donc

$$1 < a < 1 + e^{-1-2/\alpha}.$$

Dans (5.1) prenons $\gamma = \alpha$ et $a \uparrow 1 + e^{-1-2/\alpha}$.

Quant à (1.4), prenons $\gamma = a - 1 = 1$. (4.1) et (4.2) deviennent

$$\begin{cases}\alpha \leqslant 1\\ 3 - \alpha + \log\alpha < 0.\end{cases}$$

Ceci est vrai si $\alpha \leqslant e^{-3}$.

De même, c'est de manière analogue à la preuve du théorème 3.b) que l'on démontre (1.5). Conservons les mêmes notations dans la preuve du théorème 3.b). Supposons $N_m \leqslant n < N_{m+1}$. On a alors

$$\min_{t\in T} N_n(t) \geqslant \sum_{j=1}^{m} \min_{t\in T} S_{N_{j-1},N_j}(t) \sim m.$$

La dernière relation résulte de (4.7). Maintenant il suffit de remarquer que

$$\log\log n = \frac{\alpha}{\alpha - 1}m + O(1).$$

C'est une conséquence de (4.5).

Pour démontrer la première inégalité dans (1.3) et (1.6), on a besoin de ceci.

LEMME. Etant donné $a > 0$, considérons la martingale indexée

$$Q_n^a(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a^{X_j(t-\omega_j)}}{1+\frac{\alpha(a-1)}{j}} \qquad (t\in\mathbb{T},\ n\geqslant 1).$$

i) $\int Q_n^a(t)dt$ converge dans $L^2 \iff \alpha(1-a)^2 < 1$

ii) $Q_n^a(t) \approx n^{\alpha(1-a)} a^{N_n(t)}$.

Ce lemme va être démontré dans le chapitre VIII.

Démonstration de (1.3). Selon la loi de zéro-un, on sait

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\max_{t\in\mathbb{T}} N_n(t)}{\log n} = C^{te} \quad (\geqslant \alpha) \quad \text{p. s.}$$

Supposons que cette constante soit égale à α. Quel que soit $\eta > 0$, on a alors

$$\max_{t\in\mathbb{T}} N_n(t) \leqslant \log n^{\alpha+\eta} \qquad (n \geqslant n(\omega)).$$

Tenant compte de l'inégalité

$$\log(1+\epsilon) \leqslant \epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{3}\epsilon^3 \qquad (0 < \epsilon < 1)$$

et posant $a = 1 + \epsilon$, on a donc

$$Q_n^{1+\epsilon}(t) = O(1)n^{\alpha\epsilon+(\alpha+\eta)(\epsilon-\frac{1}{2}\epsilon^2+\frac{1}{3}\epsilon^3)}$$

Choisissons $\eta = \frac{1}{3}\epsilon\alpha$. L'expression précédente devient

$$Q_n^{1+\epsilon}(t) = O(1)\ n^{-\frac{1}{3}\alpha\epsilon^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\epsilon-\frac{1}{3}\epsilon^2)}$$

A partir de là on s'aperçoit que, lorsque ϵ est assez petit, la martingale indexée sera fort complètement dégénérée sur le cercle. Par conséquent, la martingale $\int Q_n^{1+\epsilon}(t)dt$ ne peut pas converger dans L^2. Mais elle converge dans L^2 dès que $\epsilon^2 < \frac{1}{\alpha}$, d'après le lemme i). Cette contradiction signifie que la constante est strictement supérieure à α.

Dans ce qui précède, on a choisi un a assez proche de 1 et supérieur à 1. Dans la suite, on choisira un a assez proche de 1, mais cette fois-ci inférieur à 1.

Démonstration de (1.6). Supposons que la limite envisagée soit égale à α. Quel que soit $\xi > 0$, on aurait

$$\min_{t\in\mathbb{T}} N_n(t) \geqslant \log n^{\alpha-\xi} \qquad (n \geqslant n(\omega)).$$

Maintenant tenant compte de l'inégalité

$$\log(1-\epsilon) \geqslant -\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 \qquad (0 < \epsilon < 1).$$

On a en posant $a = 1 - \epsilon$,

$$Q_n^{1-\epsilon}(t) = O(1)n^{\alpha\epsilon-(\alpha-\xi)(\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon^2)}.$$

Choisissons $\xi = \alpha\epsilon$. On aurait enfin

$$Q_n^{1-\epsilon}(t) = O(1)n^{-\frac{1}{2}\alpha\epsilon^2(1-\epsilon)}$$

A partir de cela, tout le reste du raisonnement est pareil. CQFD.

CHAPITRE VII.- SUR LES CONVERGENCES DES MARTINGALES LIEES AU RECOUVREMENT

1. RESUME

Considérons par exemple le modèle de recouvrement établi par Dvoretzky sur le cercle avec longueurs $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ ($\alpha > 0$; $n = 1, 2, \ldots$), auquel est associé une martingale indexée qui peut se considérer comme une suite de densités aléatoires par rapport à la mesure de Lebesgue dont la limite est une mesure aléatoire (cf. Chapitre I). Les masses totales de la suite constituent une nouvelle martingale. D'un théorème de L. Shepp on déduit facilement que cette martingale ne converge dans aucun espace L^p ($p \geqslant 1$) si $\alpha \geqslant 1$ et qu'elle converge dans tous les espaces L^p ($1 \leqslant p \leqslant 2$) si $0 < \alpha < 1$. Dans ce dernier cas, elle converge en réalité dans tout espace L^p avec $p > 2$, ce qu'on démontre dans ce chapitre avec certains efforts. En fait, on obtient, de plus, des estimations suffisamment précises sur les moments de la masse totale de la mesure limite, ce qui entraîne que la fonction caractéristique de cette masse totale est une fonction entière d'ordre $\frac{1}{1-\alpha}$. Cela nous permet de voir que la masse se distribue essentiellement, en un certain sens, dans un domaine borné.

2. RESULTATS

Voilà le modèle de recouvrement de Dvoretzky.

Soient $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\{\ell_n\}$ une suite de positifs inférieurs à 1 qui tend vers 0, et $\{\omega_n\}$ une suite de variables indépendantes dont chacune est uniformément distribuées sur $\mathbb{T}$. Pour tout $n \geqslant 1$, désignons par χ_n la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,\ell_n[$ et par I_n, sa translatée par ω_n, i. e. $I_n =]0,\ell_n[+ \omega_n$. Construisons ensuite la martingale indexée

$$Q_n(t) = P_1(t) \ldots P_n(t) \qquad (t \in \mathbb{T})$$

avec

$$P_m(t) = \frac{1 - \chi_m(t-\omega_m)}{1 - \ell_m}.$$

L'opérateur correspondant (cf. chapitre I) sera noté par Q.

D'un théorème de L. Shepp ([42]) on déduit facilement le théorème suivant.

THEOREME 1. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\{Q_n(t)\}$ est dégénérée fort complètement sur $\mathbb{T}$;
2) $\mathbb{T}$ est recouvert ;
3) Q tue la mesure de Lebesgue λ ;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \ldots + \ell_n) = \infty.$

On peut traduire ce théorème comme suit, qui est notre inspiration.

THEOREME 1'. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $Q_n\lambda$ converge dans L^2 ;
2) $Q_n\lambda$ converge dans L^h $(1 < h < 2)$;
3) $Q_n\lambda$ converge dans L^1 ;
4) Q agit pleinement sur λ ;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \ldots + \ell_n) < \infty.$

Ce théorème nous dit que, soit la martingale $Q_n\lambda$ ne converge dans aucun espace L^p $(1 \leqslant p < \infty)$, soit elle converge dans tous les espaces L^p avec $1 \leqslant p \leqslant 2$. Naturellement la question se pose : est-ce que cette martingale converge dans tout espace L^p $(p > 2)$ lorsqu'elle converge dans L^1 ? On répond que oui.

THEOREME 2. Soit $p > 2$. Supposons

$$\sup_n n(\ell_n - \ell_{n+1}) < \infty. \tag{2.1}$$

La martingale $Q_n\lambda$ converge dans L^p dès qu'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \ldots + \ell_n) < \infty. \tag{2.2}$$

COROLLAIRE. Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2. En ce qui concerne la masse totale de la mesure limite $Q\lambda$, on sait que, pour tout $p \geqslant 1$, son moment d'ordre p existe.

En général, on ne peut pas en dire plus à l'heure actuelle. Pourtant dans un cas particulier où $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$, on peut obtenir des résultats beaucoup plus agréables.

THEOREME 3. Soient $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ $(0 < \alpha < 1)$. Soit $p \geqslant 2$. On a

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 Q_n(t)dt\right)^p \leqslant C_1^p \frac{(p-1)!}{\Gamma(p(1-\alpha))}.$$

C_1 ne dépendant que de α. Dans la direction inverse, pour tout $1 < \gamma < \frac{1}{\alpha}$ on a

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 Q_n(t)dt\right)^p \geqslant C_2^p (p-1)! \int_{\substack{v_1,\dots,v_{p-1}\geqslant 0 \\ v_1+\dots+v_{p-1}\leqslant 1-\gamma\alpha}} \cdots \int \exp\left(\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{n} (\ell_j - v_k)_+\right) dv_1 \dots dv_{p-1}.$$

C_2 dépendant de α et de γ.

THEOREME 4. Soient $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ $(0 < \alpha < 1)$. La fonction caractéristique de $Q\lambda(\mathbb{T})$ est une fonction entière d'ordre $\frac{1}{1-\alpha}$. Et de plus si la fonction s'écrit en série $\sum a_p z^p$, on a

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p \log p}{-\log|a_p|} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Il existe une liaison très étroite entre les estimations des moments d'une variable aléatoire et le comportement à l'infini de sa distribution ([28]). Soit donc $F(x)$ la fonction de distribution de $Q\lambda(\mathbb{T})$. Posons

$$T(x) = 1 - F(x) + F(-x) \quad (x > 0).$$

Cette fonction décrit le comportement à l'infini de $F(x)$. Si l'on admet les résultats dans [28], ce qui suit est un corollaire du théorème précédent.

COROLLAIRE.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{x}\log\frac{1}{T(x)}\right)}{\log\log x} = 1 - \alpha.$$

3. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

Nous savons que la condition (2.2) est équivalente à

$$I = \int_0^1 k(t)dt < \infty$$

où

$$k(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n - t)_+ .$$

Pour démontrer le théorème 2 on a besoin de trois lemmes.

LEMME 1. Quel que soit $p \geqslant 1$, il existe une constante $C_p > 0$ telle que pour tout couple (a,b) $(0 < a < b \leqslant 1)$ on ait

$$\underset{\substack{t_1,\dots,t_p \geqslant 0 \\ a \leqslant t_1+\dots+t_p \leqslant b}}{\int \dots \int} k(t_1)\dots k(t_p)dt_1\dots dt_p \leqslant C_p(b-a)I^{p-1}k(\frac{a}{p}).$$

Preuve. Posons

$$I_{a,b,p} = \underset{\substack{t_1,\dots,t_p \geqslant 0 \\ a \leqslant t_1+\dots+t_p \leqslant b}}{\int \dots \int} k(t_1)\dots k(t_p)dt_1\dots dt_p$$

$$\tilde{I}_{a,b,p} = \frac{1}{b-a} I_{a,b,p}.$$

On va déduire par récurrence que

$$\tilde{I}_{a,b,p} \leqslant C_p k(\frac{a}{p}) I^{p-1} \tag{3.1}$$

où C_p va être déterminée.

Si $p = 1$, comme $k(t)$ est décroissante, on a

$$I_{a,b,1} \leqslant k(a)(b-a).$$

C'est-à-dire que l'on peut choisir $C_1 = 1$. Supposons (3.1) vraie. Remarquons la décroissance de $k(t)$ et le fait qu'on peut écrire

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{p+1}$$

où

$$D = \{(t_1,\dots,t_{p+1}) : t_1,\dots,t_{p+1} \geqslant 0 \ ; \ a \leqslant t_1 + \dots + t_{p+1} \leqslant b\}$$

$$D_j = \{(t_1,\dots,t_{p+1}) : t_j \geqslant \frac{a}{p+1}\} \cap D.$$

On a alors

$$I_{a,b,p+1} \leqslant \sum_{j=1}^{p+1} \int \dots \int_{D_j} k(t_1)\dots k(t_{p+1}) dt_1 \dots dt_{p+1}$$

$$\leqslant (p+1)\ k\left(\frac{a}{p+1}\right) \int \dots \int_{D_{p+1}} k(t_1)\dots k(t_p) dt_1 \dots dt_{p+1}.$$

Or, la dernière intégrale peut être décomposée en deux parties :

$$\int_{a/(p+1)}^{a} dt_{p+1} \int \dots \int_{\substack{t_1,\dots,t_p \geqslant 0 \\ a-t_{p+1} \leqslant t_1+\dots+t_p \leqslant b-t_{p+1}}} + \int_a^b dt_{p+1} \int \dots \int_{\substack{t_1,\dots,t_p \geqslant 0 \\ 0 \leqslant t_1+\dots+t_p \leqslant b-t_{p+1}}}$$

D'après l'hypothèse de récurrence (3.1), cette somme est majorée par

$$\int_{a/(p+1)}^{a} I_{a-t_{p+1},b-t_{p+1},p}\, dt_{p+1} + (b-a) \int \dots \int_{\substack{t_1,\dots,t_p \geqslant 0 \\ 0 \leqslant t_1+\dots+t_p \leqslant b-a}} k(t_1)\dots k(t_p) dt_1 \dots dt_p$$

$$\leqslant (b-a)\left(C_p I^{p-1} \int_{a/(p+1)}^{a} k\left(\frac{a-t_{p+1}}{p}\right) dt_{p+1} + I^p\right)$$

$$\leqslant (b-a)\ I^{p-1}\left(I + pC_p \int_0^{1/(p+1)} k(t)dt\right)$$

$$\leqslant (b-a) I^p (1 + pC_p).$$

Ainsi a-t-on démontré le lemme. La suite C_p peut être déterminée par la formule de récurrence

$$C_1 = 1 \ , \ C_{p+1} = (p+1)(1 + p\ C_p). \qquad \text{CQFD.}$$

Voici quelques notations

$$D = \{t_1,\dots,t_{p-1}) : t\ ,,t_{p-1} \geqslant 0 \ ; \ 0 \leqslant t_1 + \dots + t_{p-1} \leqslant 1\}$$

$$D_n = \{(t_1,\dots,t_{p-1}) : t_1,\dots,t_{p-1} \geqslant 0 \ ; \ 1-\ell_n \leqslant t_1+\dots+t_{p-1} < 1-\ell_{n+1}\} \ (n \geqslant 0).$$

Avec convention $\ell_0 = 1$. Posons

$$J = \int\cdots\int_D k(1-t_1-t_2-\cdots-t_{p-1}) \prod_{i=1}^{p-1} k(t_i)dt_1\ldots dt_{p-1}$$

$$K(t_1,\ldots,t_{p-1}) = k(t_1)\ldots k(t_{p-1}).$$

LEMME 2. Soit $p \geqslant 2$. D'une part

$$J \leqslant \int\cdots\int_{D_0} K + \sum_{n=1}^{\infty} \exp \sum_{j=1}^{n} (\ell_j - \ell_{n+1}) . \int\cdots\int_{D_n} K.$$

D'autre part

$$J \geqslant \int\cdots\int_{D_0} K + \sum_{n=1}^{\infty} \exp \sum_{j=1}^{n} (\ell_j - \ell_n) . \int\cdots\int_{D_n} K.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $(t_1,\ldots,t_{p-1}) \in D_n$ signifie que

$$\ell_{n+1} < 1 - (t_1 + \ldots + t_{p-1}) \leqslant \ell_n .$$

Donc, pour $(t_1,\ldots,t_{p-1}) \in D_n$, on a

$$k(1-t_1-\ldots-t_{p-1}) = 1 \qquad \text{si } n = 0$$

$$k(1-t_1-\ldots-t_{p-1}) = \exp \sum_{j=1}^{n} (\ell_j - n(1-t_1-\ldots-t_{p-1})) \qquad \text{si } n \geqslant 1$$

CQFD

LEMME 3. Soit $M = \sup_n n(\ell_n - \ell_{n+1}) < \infty$. Pour $p \geqslant 2$, on a

$$J \leqslant (1 + C_p\, k(\frac{1-\ell_1}{p}) e^M) I^{p-1}$$

dont C_p est la même que dans le lemme 1.

Preuve. D'après le lemme 2 et le lemme 1, l'intégrale J est majorée par

$$I^{p-1} + C_p\, k(\frac{1-\ell_1}{p})\, I^{p-2} \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n - \ell_{n+1}) \exp(\sum_{j=1}^{n} (\ell_j - \ell_{n+1}))$$

$$\leqslant I^{p-1}(1 + C_p k(\frac{1-\ell_1}{p}) e^M). \qquad \text{CQFD}$$

Démonstration du théorème 2. D'après le critère de la convergence dans L^p $(p > 1)$ d'une martingale, il nous faut et suffit estimer le moment d'ordre p de $Q_n\lambda(\mathbb{T})$. Evidemment

$$\left(\int_0^1 Q_n(t)dt\right)^p = \left(\prod_{j=1}^{n}(1-\ell_j)\right)^{-p}\int_0^1\cdots\int_0^1 \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{p}(1-\chi_j(t_k-\omega_j))dt_1\ldots dt_p.$$

Prenons l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}(Q_n\lambda(\mathbb{T}))^p = \left(\prod_{j=1}^{n}(1-\ell_j)\right)^{-p}\int_0^1\cdots\int_0^1 \mathbb{E}\prod_{k=1}^{p}(1-\chi_j(t_k-\omega_j))dt_1\ldots dt_p.$$

Or, géométriquement, on s'aperçoit que

$$\mathbb{E}\prod_{k=1}^{p}(1-\chi_j(t_k-\omega_j)) = P(t_1,\ldots,t_p \in I_j^c)$$

Tenant compte de l'uniformité de la distribution de ω_j, on voit que

$$P(t_1,\ldots,t_p \in I_j^c) = P(t_1+(1-t_p),\ldots,t_{p-1}+(1-t_p),\ 1 \in I_j^c).$$

Faisant un changement de variables comme suit

$$\begin{cases} s_1 = t_1+(1-t_p) \\ \quad\vdots \\ s_{p-1} = t_{p-1}+(1-t_p) \\ s_p = t_p \end{cases}$$

dont le déterminant est égal à 1, on peut écrire la dernière intégrale

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 ds_p\left\{\int_{1-s_p}^{2-s_p}\cdots\int_{1-s_p}^{2-s_p}\prod_{j=1}^{n}P(s_1,\ldots,s_{p-1},1\in I_j^c)ds_1\ldots ds_{p-1}\right\} \\ &= \int_0^1 ds_p\left\{\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{j=1}^{n}P(s_1,\ldots,s_{p-1},1\in I_j^c)ds_1\ldots ds_{p-1}\right\} \\ &= \int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{j=1}^{n}P(s_1,\ldots,s_{p-1},1\in I_j^c)ds_1\ldots ds_{p-1}. \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité vaut grâce à la périodicité relative à chaque variable de l'intégrale. Et la dernière vaut parce que l'intégrale ne dépend pas de s_p. Ensuite la symétrie nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}(Q_n\lambda(\mathbb{T}))^p = \frac{(p-1)!}{\left(\prod_{j=1}^{n}(1-\ell_j)\right)^p} \int_{0\leq s_1\leq s_2\leq\ldots\leq s_{p-1}\leq 1} \cdots \int \prod_{j=1}^{n} P(s_1,\ldots,s_{p-1},1\in I_j^c)\,ds_1\ldots ds_{p-1}.$$

Remarquons que l'événement "$s_1,\ldots,s_{p-1},1\in I_j^c$" signifie justement que I_j est contenu dans l'un des intervalles suivants

$$J_1 = [0,t_1],\ J_2 = [t_1,t_2],\ldots,\ J_{p-1} = [t_{p-2},t_{p-1}],\ J_p = [t_{p-1},1].$$

Posons

$$\begin{aligned} v_1 &= s_1 \\ v_2 &= s_2-s_1 \\ &\vdots \\ v_{p-1} &= s_{p-1}-s_{p-2} \\ v_p &= 1 - s_{p-1} = 1-(v_1+\ldots+v_{p-1}). \end{aligned}$$

En vertu encore une fois de l'uniformité de la distribution de ω_j, on voit

$$\begin{aligned} &P(s_1,\ldots,s_{p-1},1\in I_j^c) \\ &= \sum_{k=1}^{p} P(I_j\subset J_k) \\ &= \sum_{k=1}^{p} P(I_j\subset[0,v_k]) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sup(0,v_k-\ell_j). \end{aligned}$$

Le fait suivant est bien simple

$$\sup(0,a) = a + \sup(0,-a), \quad \text{pour} \quad a\in\mathbb{R}.$$

Mais il nous permet d'obtenir

$$\sum_{k=1}^{p} \sup(0,v_k-\ell_j) = 1 - p\ell_j + \sum_{k=1}^{p} (\ell_j-v_k)_+ .$$

Maintenant si on prend les p-1 premières relations entre les v et les s pour un changement de variable dont le déterminant de Jacobi est égal à 1, on obtient une expression précise du moment d'ordre p

$$\mathbb{E}(Q_n\lambda(\mathbb{T}))^p = \frac{(p-1)!}{\left(\prod_{j=1}^{n}(1-\ell_j)\right)^p} \int_{\substack{v_1,\ldots,v_{p-1}\geqslant 0 \\ v_1+\ldots+v_{p-1}\leqslant 1}} \cdots \int \prod_{j=1}^{n}\left(1-p\ell_j+\sum_{k=1}^{p}(\ell_j-v_k)_+\right)dv_1\ldots dv_{p-1} \tag{3.2}$$

Dans la suite on va donner une majoration du moment d'ordre p. Tenant compte des faits suivants

$$1-x \leqslant e^{-x} \qquad \text{si } x \in [0,1]$$

$$1-s \geqslant e^{-x-cx^2} \qquad \text{si } x \in [0,a] \ (0 < a < 1)$$

où $C = C_a = \frac{1}{a^2}(\log\frac{1}{1-a} - 1 - a) > 0$, on obtient facilement

$$\mathbb{E}(Q_n\lambda(\mathbb{T}))^p \leqslant (p-1)!\exp(CLp) \int_{\substack{v_1,\ldots,v_{p-1}\geqslant 0 \\ v_1+\ldots+v_{p-1}\leqslant 1}} \cdots \int k(1-v_1-\ldots v_{p-1})\sum_{i=1}^{p-1}k(v_i)dv_1\ldots dv_{p-1} \tag{3.3}$$

où $C = C_{\ell_1}$ et $L = \sum \ell_n^2$. D'après le lemme 3, on a enfin

$$\mathbb{E}(Q_n\lambda(\mathbb{T}))^p \leqslant (p-1)!\exp(CLp)(1+C_pk(\frac{1-\ell_1}{p})e^M)I^{p-1}.$$

Cela signifie que $\mathbb{E}(Q_n\lambda(\mathbb{T}))^p$ $(n \geqslant 1)$ constituent une suite bornée. CQFD.

Remarque. Le lemme 1 sert à évaluer l'intégrale J. Mais la constante C_p dépendant de p dans ce lemme n'est pas la meilleure, elle est au fond lointaine de la vérité quand p est grand. Comme le lemme 2 ne perd pas beaucoup, pour améliorer le théorème il nous faut modifier d'abord le lemme 1, c'est-à-dire trouver un bon moyen pour évaluer l'intégrale J. Dans des cas particuliers, c'est possible.

4. DEMONSTRATION DES THEOREMES 3 ET 4.

Dans le cas où $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$ $(0 < \alpha < 1)$, il est important d'observer que

$$\frac{B_\alpha}{|t|^\alpha} \leqslant k(t) \leqslant \frac{A_\alpha}{|t|^\alpha}$$

avec

$$B_\alpha = \alpha^\alpha e^{-\alpha} \quad , \quad A_\alpha = \alpha^\alpha e^\alpha(C-1)$$

où C est la constante d'Euler.

Pour démontrer le théorème 3, on a besoin du lemme suivant (intégrale de Dirichlet).

LEMME 1. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ des nombres positifs. On a

$$\int_{\substack{x_1,\ldots,x_{p-1}\geqslant 0\\ x_1+\ldots+x_{p-1}\leqslant 1}}\!\!\cdots\int x_1^{\alpha_1-1}\ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}-1}(1-x_1-\ldots-x_{p-1})^{\alpha_p-1}dx_1\ldots dx_{p-1}=\frac{\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_p)}.$$

En particulier, on a

LEMME 2. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1}$ et a des nombres positifs. Alors

$$\int_{\substack{x_1,\ldots,x_{p-1}\geqslant 0\\ x_1+\ldots+x_{p-1}\leqslant a}}\!\!\cdots\int x_1^{\alpha_1-1}\ldots x_{p-1}^{\alpha_{p-1}-1}dx_1\ldots dx_{p-1}=a^{\alpha_1+\ldots+\alpha_{p-1}}\frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_{p-1})}{\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{p-1}+1)}.$$

Maintenant on peut donner la démonstration du théorème 3.

Démonstration du théorème 3. Pour la majoration on revient à (3.3). Posons

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_p=1-\alpha$$

dans le lemme 1, on obtient

$$\int_{\substack{v_1,\ldots,v_{p-1}\geqslant 0\\ v_1+\ldots+v_{p-1}\leqslant 1}}\!\!\cdots\int k(1-v_1-\ldots-v_{p-1})\prod_{i=1}^{p-1}k(v_i)dv_1\ldots dv_{p-1}\leqslant A_\alpha^p\frac{(\Gamma(1-\alpha))^p}{\Gamma(p(1-\alpha))}.$$

Cela, avec (3.3), nous donne la majoration.

Quant à la minoration, il nous faut revenir à l'expression précise (3.2). Comme $0<\gamma<\dfrac{1}{\alpha}$ et que $1-x\leqslant e^{-x}$, il est facile de voir

$$\mathbb{E}(Q\lambda(\mathbb{T}))^p\geqslant$$

$$(p-1)!\exp\Big(p\sum_{j=1}^{n}\ell_j\Big)\int_{\substack{v_1,\ldots,v_{p-1}\geqslant 0\\ v_1+\ldots+v_{p-1}\leqslant 1-\gamma\alpha}}\!\!\cdots\int\prod_{j=1}^{n}\Big(1-p\ell_j+\sum_{k=1}^{p-1}(\ell_j-v_k)_+\Big)dv_1\ldots dv_{p-1}.$$

Remarquons que, sous la condition $v_1 + \ldots + v_{p-1} \leqslant 1 - \gamma\alpha$, on a

$$p\ell_j - \sum_{k=1}^{p-1} (\ell_j - v_k)_+ \leqslant 1 - (\gamma-1)\alpha \ (< 1).$$

Utilisant l'inégalité $1-x \geqslant e^{-x-cx^2}$ pour $x \in [0\ ,\ 1-(\gamma-1)\alpha]$ où C dépend de γ et α, on sait

$$\prod_{j=1}^{n} (1 - p\ell_j + \sum_{k=1}^{p-1} (\ell_j - v_k)_+)$$

$$\geqslant \exp\{- \sum_{j=1}^{n} (p\ell_j - \sum_{k=1}^{p-1} (\ell_j - v_k)_+) - C \sum_{j=1}^{n} (p\ell_j - \sum_{k=1}^{p-1} (\ell_j - v_k)_+)^2\}.$$

Or

$$p\ell_j - \sum_{k=1}^{p-1} (\ell_j - v_k)_+ = \ell_j + \sum_{k=1}^{p-1} \ell_j \wedge v_k \leqslant (p\ell_j) \wedge 2$$

et puis, comme $\ell_j = \dfrac{\alpha}{j}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (p\ell_j - \sum_{k=1}^{p-1} (\ell_j - v_k)_+)^2 &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{\alpha p}{j} \wedge 2)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{[\alpha p/2]} 2 + \sum_{j=[\alpha p/2]+1}^{\infty} (\frac{\alpha p)}{j})^2 \\ &\leqslant \alpha p + 2\alpha p = 3\alpha p. \end{aligned}$$

Donc

$\mathbb{E}(Q_n \lambda(\mathbb{T}))^p \geqslant$

$$(p-1)!\exp(-3C\alpha p) \int_{\substack{v_1, \ldots, v_{p-1} \geqslant 0 \\ v_1 + \ldots + v_{p-1} \leqslant 1 - \gamma\alpha}} \cdots \int \exp(\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{n} (\ell_j - v_k)_+) dv_1 \ldots dv_{p-1} . \text{ CQFD.}$$

Démonstration du théorème 4. D'après la majoration dans le théorème 3 et la formule de Stirling, on a

$$|a_p| = \frac{1}{p!} \mathbb{E}(Q\lambda(\mathbb{T})) \leqslant \frac{1}{p} C_1^p . \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)p}} \left(\frac{e}{p(1-\alpha)}\right)^{p(1-\alpha)}$$

d'où résulte

$$\limsup_{p \to \infty} \frac{p \log p}{-\log|a_p|} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}.$$

D'autre part, d'après la minoration, on a

$$|a_p| \geqslant \frac{1}{p} C_2^p \int_{\substack{v_1,\dots,v_{p-1}\geqslant 0 \\ v_1+\dots+v_{p-1}\leqslant 1-\gamma\alpha}} \dots \int k(v_1)\dots k(v_{p-1})dv_1\dots dv_{p-1}.$$

Selon le lemme 2, on a

$$|a_p| \geqslant \frac{1}{p} C_2^p (B_\alpha(1-\gamma\alpha)\Gamma(1-\alpha))^{p-1} . \frac{1}{\Gamma((p-1)(1-\alpha)+1)}.$$

Utilisant encore une fois la formule de Stirling, on peut obtenir

$$\liminf_{p \to \infty} \frac{p \log p}{-\log|a_p|} \geqslant \frac{1}{1-\alpha}. \qquad \text{CQFD.}$$

Remarque. Ce qui compte, c'est $\Gamma(p(1-\alpha))$ pour la majoration et $\Gamma((p-1)(1-\alpha)+1)$ pour la minoration. Ce sont des quantités plus grandes que n'importe quelle exponentielle de p.

CHAPITRE VIII.- RECOUVREMENT PAR DES INTERVALLES DE LONGUEURS ALEATOIRES.

INTRODUCTION

Dans ce chapitre on tente de résoudre le problème de recouvrement par des intervalles de longueurs aléatoires sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On se donne deux suites de variables $\{\omega_n\}$ et $\{L_n\}$ dont ω_n se distribue uniformément sur $\mathbb{T}$ et L_n est positive et $\mathbb{E}L_n < 1$. Puis on considère la suite des intervalles $\{I_n\}$ définis par

$$I_n = \omega_n +]0,L_n[.$$

Supposons que toutes les variables en question soient indépendantes. Le problème de recouvrement se pose ainsi : étant donné un fermé $F \subset \mathbb{T}$, quand a-t-on $F \subset \limsup\limits_{n \to \infty} I_n$ p. s. ou autrement dit $F \subset G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ p.s. ?
Dans le cas affirmatif on dit que F est recouvert.

Si $L_n = \ell_n$ constante, le problème a été posé par Dvoretzky [7] et étudié postérieurement de diverses manières ([15], [32]). En 1972 L. Shepp a répondu à la question posée pour $F = \mathbb{T}$ ([42]) : si $\{\ell_n\}$ est décroissante, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{T}$ soit recouvert est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 +\ldots+ \ell_n) = \infty.$$

Une autre condition suffisante avait été obtenue antérieurement par P. Billard ([2]). C'est

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \exp(\ell_1+\ldots+\ell_n) = \infty.$$

Mais ce n'est que récemment que J.-P. Kahane a donné la solution finale en annonçant ([20]) que F est recouvert si et seulement si

$$\mathrm{Cap}_k F = 0$$

où $\mathrm{Cap}_k F$ désigne la capacité de F par rapport au noyau

$$k(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n - |t|)_+ .$$

Notre but est d'étendre ce résultat au cas où les L_n sont aléatoires. Bien entendu, la condition de Kahane peut offrir une condition nécessaire et suffisante :

$$\mathrm{Cap}_{k_\omega} F = 0 \quad \text{p. s.}$$

où

$$k_\omega(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (L_n - |t|)_+ .$$

Néanmoins cette condition est trop implicite. C'est pourquoi on se propose d'essayer de trouver des conditions plus explicites. On peut le faire et en revanche seulement partiellement. Supposons qu'on puisse écrire $L_n = \ell_n Y_n$ où Y_n obéit à la loi d'une variable Y donnée au préalable. Faisons encore l'hypothèse, par exemple,

$$\mathbb{E}Y(\log^+ Y)^{3+\epsilon} < \infty \quad (\text{pour un certain } \epsilon > 0).$$

On démontre au § 3 qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un fermé F soit recouvert est

$$\mathrm{Cap}_K F = 0$$

où

$$K(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\ell_n Y - |t|)_+ .$$

Si l'hypothèse se renforce par le fait que Y est bornée, le noyau K dans l'énoncé précédent peut être remplacé par (§ 4)

$$K^*(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n \mathbb{E}Y - |t|)_+ .$$

Cela veut dire qu'à ce moment le résultat ne dépend que de la moyenne de Y, mais pas de sa distribution.

Le problème est ainsi résolu du moins partiellement. C'est parce qu'il peut se ramener à un problème pareil qui est associé à un processus de Poisson. Ce dernier fait l'objet du § 2.

Au § 1 on essaye de trouver des conditions suffisantes pour que le cercle tout entier soit recouvert dans le cas plus général.

Du point de vue de multiplication aléatoire, des opérateurs projectifs sont liés aux problèmes de recouvrement. On détermine au § 5 les noyaux et les images de ces opérateurs. D'ailleurs certaines martingales associées sont introduites et étudiées au § 6.

1. CONDITIONS SUFFISANTES POUR LE RECOUVREMENT DE $\mathbb{T}$.

Au paragraphe présent on va trouver des conditions suffisantes pour que $\mathbb{T}$ soit recouvert. Le point de départ est la condition de L. Shepp. Le but est alors de trouver des conditions telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(L_1^* + \ldots + L_n^*) = \infty \text{ p.s.} \tag{1.1}$$

où $\{L_n^*\}$ est le réarrangement décroissant de $\{L_n\}$. On utilisera aussi, à l'occasion, la condition de Billard.

THEOREME 1.1. Supposons que $\mathbb{E}L_n^2$ existe $(n \geqslant 1)$ et que la suite $\mathbb{E}L_n$ est décroissante. Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(L_n - \mathbb{E}L_n)^2 < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\mathbb{E}L_1 + \ldots + \mathbb{E}L_n) = \infty.$$

b)
$$D_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(L_k - \mathbb{E}L_k)^2 \uparrow \infty$$

$$\mathbb{E}L_n^2 = O((\mathbb{E}L_n)^2)$$

$$|L_n - \mathbb{E}L_n| = o\left(D_n/\sqrt{\log \log D_n^2}\right) \text{ p. s.}$$

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}L_n/\sqrt{2D_n^2 \log \log D_n^2} > 1.$$

Démonstration. Ecrivons

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}L_k + \sum_{k=1}^{n} (L_k - \mathbb{E}L_k).$$

On s'aperçoit que la condition (a) entraîne (1.1). Supposons maintenant b) vraie. Soit β la limite inférieure. Fixons deux positifs a et b tels que $1 < a < b < \beta$. Puisque le théorème du logarithme itéré est valable, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (L_k - \mathbb{E}L_k) \geqslant - a \sqrt{2D_n^2 \log \log D_n^2} \qquad (n \geqslant n(\omega)).$$

D'après la définition de β, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}L_k \geqslant b\sqrt{2D_n^2 \log \log D_n^2} \qquad (n \geqslant N).$$

D'ailleurs, $\sum (\mathbb{E}L_n)^2 = \infty$ résulte immédiatement de b) et on sait que $\mathbb{E}L_n$ est une suite décroissante. En conséquence, pour tout $\lambda > 0$ on a facilement (voir aussi [42])

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \exp\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}L_k\right) = \infty.$$

Ecrivons enfin

$$\frac{1}{n} \exp \sum_{k=1}^{n} L_k = \frac{1}{n} \exp\left((1-\frac{a}{b}) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}L_k\right) . \exp\left(\frac{a}{b}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}L_k + \sum_{k=1}^{n} (L_k - \mathbb{E}L_k)\right).$$

Des quatre expressions précédentes résulte la condition de Billard

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \exp \sum_{k=1}^{n} L_k = \infty \quad \text{p. s.}$$

CQFD

COROLLAIRE 1. Supposons que les L_n soient uniformément bornées et que $\mathbb{E}L_n^2 = O((\mathbb{E}L_n)^2)$. Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\mathbb{E}L_1 + \ldots + \mathbb{E}L_n) = \infty.$$

Pour cela, il suffit de vérifier b) quand D_n tend vers l'infini. Le seul point non évident est que la limite inférieure est plus grande que 1. En réalité, elle est infinie car on a

$$\mathbb{E}(L_k - \mathbb{E}L_k)^2 = O(\mathbb{E}L_k).$$

COROLLAIRE 2. Soit $L_n = \ell_n Y_n$ où Y_n obéit à la loi d'une variable bornée Y. Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \mathbb{E}Y(\ell_1 + \ldots + \ell_n) = \infty.$$

COROLLAIRE 3. Soit $L_n = \ell_n Y_n$ où Y_n obéit à la loi d'une variable Y telle que $P(Y = 0) < 1$. Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n^p = \infty \quad \text{(pour un certain } p > 1).$$

Le corollaire 2 est une conséquence directe du corollaire 1. Et le corollaire 3 est une conséquence du corollaire 2 si l'on considère $Y' = Y \wedge 1$ au lieu de Y.

Relachons maintenant la restriction que le moment $\mathbb{E}L_n^2$ existe.

THEOREME 1.2. Soit $I_n = \ell_n Y_n$. Soit Y un représentant des Y_n, dont la distribution est F(y). Alors $\mathbb{T}$ est recouvert si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a) $\mathbb{E}Y = \infty$, $\displaystyle\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\log n}(\ell_1 + \ldots + \ell_n) \neq 0$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - F(\frac{\alpha}{\ell_n})\right) = \infty$ (pour un certain $\alpha > 0$).

Démonstration. La condition a) entraine qu'il existe un positif N tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \mathbb{E}(Y \wedge N)(\ell_1 + \ldots + \ell_n) = \infty.$$

Donc le corollaire 2 assure le recouvrement.

Supposons b) vraie c'est-à-dire $\sum P(|I_n| > \alpha) = \infty$. Soit $N = \left[\frac{2}{\alpha}\right] + 1$. Subdivisons $\mathbb{T}$ en N intervalles égaux $T_1, \ldots, T_N$. Alors (Borel-Cantelli)

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{N}\left(T_j \subset \limsup_{n\to\infty} I_n\right)\right) = 1.$$

Donc

$$1 \leqslant \sum_{j=1}^{N} P\left(T_j \subset \limsup_{n\to\infty} I_n\right).$$

Or, les probabilités sont égales. On en déduit que $P\left(T_1 \subset \limsup_{n\to\infty} I_n\right) > 0$ puis $P\left(\mathbb{T} \subset \limsup_{n\to\infty} I_n\right) = 1$. CQFD.

2. RECOUVREMENT POISSONNIEN

On se pose ici un problème de recouvrement poissonnien sur la droite $\mathbb{R}$, auquel sera ramené le problème de recouvrement sur le cercle.

Soient dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, μ une mesure de Radon définie sur $\mathbb{R}^+$ et Y une variable aléatoire positive dont la distribution est F(y). Considérons la mesure produit $\nu = dx\, dF\, d\mu$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, puis le processus ponctuel de Poisson $\Xi = (X_n, Y_n, H_n)$ d'intensité ν et enfin la famille des intervalles

$$J_n = X_n +]0\ ,\ L_n[\quad \text{avec} \quad L_n = H_n Y_n.$$

Voici le problème de recouvrement poissonnien : étant donné un fermé $F \subset \mathbb{R}$, quand-a-t-on $F \subset G = \cup J_n$ p. s. ? Posons

$$K(t) = \exp \int_0^\infty \mathbb{E}(hY - |t|)_+ d\mu(f).$$

On annonce la réponse.

THEOREME. Soit F un compact sur $\mathbb{R}$.

$$F \subset G \quad \text{p. s.} \Longleftrightarrow \mathrm{Cap}_k F = 0.$$

Dans le cas $Y \equiv 1$, c'est le théorème de Kahane donné dans l'introduction.

Décrivons avant tout le fait qu'un point soit recouvert. A tout point $t \in \mathbb{R}$ associons le domaine dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ défini par

$$D_t = \bigcup_{0<h<\infty} \Delta_t^h \quad \text{avec} \quad \Delta_t^h = \{(x,y,h) : t-hy < x < t\}.$$

On a alors la description suivante

$$t \in G \Leftrightarrow \Xi \cap D_t \neq \emptyset.$$

Soit $\epsilon > 0$. Considérons pour l'instant la mesure "tranchée" $\mu_\epsilon = \mu 1_{]\epsilon,\infty[}$ de μ, et puis le processus associé à $\nu_\epsilon = dx\, dF\, d\mu_\epsilon$. ϵ variant, la martingale indexée ci-dessous est bien définie

$$Q_\epsilon(t) = \frac{1(t \notin G_\epsilon)}{P(t \notin G_\epsilon)} \qquad (t \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0)$$

où $G_\epsilon = \cup J_n \quad (H_n > \epsilon)$. Observons que

$$P(t \notin G_\epsilon) = P(N(D_t) = 0) = \exp(-\nu_\epsilon(D_t)).$$

$N(D_t)$ étant le nombre des points du processus qui se trouvent dans D_t, et que

$$\nu_\epsilon(D_t) = \int_\epsilon^\infty d\mu(h) \iint_{\Delta_t^h} dx dF(y) = \mathbb{E}Y \int_\epsilon^\infty h\, d\mu(h).$$

La martingale s'écrit donc

$$Q_\epsilon(t) = 1(t \notin G_\epsilon) \exp \mathbb{E}\int_\epsilon^\infty Yh\, d\mu(h). \tag{2.1}$$

Démonstration de la nécessité ($F \subset G$ p.s. $\Longrightarrow \mathrm{Cap}_k F = 0$) : D'abord du calcul. D'après (2.1), pour tout t_1 et t_2 appartenant à $\mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}Q_\epsilon(t_1)Q_\epsilon(t_2) = P(t_1, t_2 \notin G_\epsilon) \exp \mathbb{E}\int_\epsilon^\infty 2Yh\, d\mu(h).$$

Or, supposons que $t_2 \geqslant t_1$, on a

$$P(t_1, t_2 \notin G_\epsilon) = P(N(D_{t_1} \cup D_{t_2}) = 0) = P(N(D_{t_2} \setminus D_{t_1}) = 0) P(N(D_{t_1}) = 0)$$

$$\begin{aligned}\nu_\epsilon(D_{t_2} \setminus D_{t_1}) &= \int_\epsilon^\infty d\mu(h) \left(\int_0^{(t_2-t_1)/h} dF(y) \int_{t_2-hy}^{t_2} dx + \int_{(t_2-t_1)/h}^\infty dF(y) \int_{t_1}^{t_2} dx \right) \\ &= \int_\epsilon^\infty \mathbb{E}(hY \wedge (t_2-t_1)) d\mu(h).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}Q_\epsilon(t_1)Q_\epsilon(t_2) = \exp \int_\epsilon^\infty \mathbb{E}(hY - |t_2-t_1|)_+ d\mu(h). \tag{2.2}$$

Ensuite le raisonnement. Si $F \subset G$ p. s., la martingale $Q_\epsilon(t)$ indexée par F est fortement dégénérée au sens de

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup_{t\in F} Q_\epsilon(t) = 0 \quad \text{p. s.}$$

On a en conséquence que $Q\sigma = 0$ p. s. quelle que soit $\sigma \in M^+(F)$. D'autre part, si $\mathrm{Cap}_k F > 0$, il existe une mesure $\sigma \in M^+(F)$ telle que

$$I_k^\sigma = \iint K(t_2 - t_1)d\sigma(t_1)d\sigma(t_2) < \infty.$$

Néanmoins, d'après (2.2) on a

$$\mathbb{E}\Big(\int Q_\epsilon d\sigma\Big)^2 \leqslant I_k^\sigma.$$

Cela implique que la martingale $\int Q_\epsilon d\sigma$ converge dans L^2 et que sa limite $Q\sigma \neq 0$ avec une probabilité positive. Donc $\mathrm{Cap}_k F = 0$. CQFD.

Envisageons maintenant la suffisance. Voici quelques remarques dont on aura besoin. Soient $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t < x$. Comme dans [41], on peut montrer

$$P(x \notin G_\epsilon | t \notin G_\epsilon \; ; \; t_1, \dots, t_n \in G_\epsilon) = P(x \notin G_\epsilon | t \notin G_\epsilon) \tag{2.3}$$

grâce au fait que $(D_x \backslash D_t) \cap D_{t_i} = \varnothing$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Et on a déjà démontré que pour tout réel r et tout positif y on a

$$P(r+y \notin G_\epsilon | r \notin G_\epsilon) = \exp -\int_\epsilon^\infty y \wedge \mathbb{E}hY \, d\mu(h). \tag{2.4}$$

D'ailleurs, pour tout compact F définissons

$$Q^F = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k^F \quad \text{avec} \quad Q_k^F = \{\frac{j}{2^k} : \; d(\frac{j}{2^k}, F) < \frac{1}{2^k}\}.$$

Alors F est exactement l'ensemble des points d'accumulation de Q^F. Par ailleurs posons $Q_k = \bigcup_{\ell=1}^{k} Q_\ell^F$.

Démonstration de la suffisance ($\mathrm{Cap}_k F = 0 \Longrightarrow F \subset G$ p. s.) : Posons

$$K_\epsilon(t) = \exp \int_\epsilon^\infty \mathbb{E}(hY - |t|)_+ d\mu(h).$$

Selon la théorie du potentiel ([25]), il existe une mesure d'équilibre σ_ϵ de $\bar{F} = F \cup Q^F$, telle que

$$A_\epsilon = \mathrm{Cap}_{K_\epsilon}^{-1} \bar{F} = \int K_\epsilon(t) d\sigma_\epsilon(t+u) \qquad \forall\, u \in \bar{F}. \tag{2.5}$$

Désignons par $\sigma_\epsilon(0,2)$ la σ_ϵ-mesure de la partie non recouverte par G_ϵ de l'intervalle $[0,2]$. On va calculer $\mathbb{E}\,\sigma_\epsilon(0,2)$ de deux manières.

Le premier pas est simple :

$$\mathbb{E}\,\sigma_\epsilon(0,2) = 2\exp-\int_\epsilon^\infty \mathbb{E}hY d\mu(h). \tag{2.6}$$

Définissons maintenant pour tout entier $k \geqslant 1$ une variable ξ_k : $\xi_k = \infty$ si tout $r \in Q_k$ est recouvert ; $\xi_k = r$ s'il existe un point dans Q_k non recouvert et que r est le plus petit. En utilisant la formule de probabilité totale on obtient

$$\mathbb{E}\sigma_\epsilon(0,2) = \int_0^2 \sum_{r\in Q_k\cup\{\infty\}} P(x\notin G_\epsilon \mid \xi_k = r)P(\xi_k = r)d\sigma_\epsilon(x)$$

$$\geqslant \sum_{r\in Q_k} P(\xi_k = r)\int_r^{r+1} P(x\notin G_\epsilon \mid \xi_k = r)d\sigma_\epsilon(x).$$

D'après (2.3) et (2.4), on a alors

$$\mathbb{E}\sigma_\epsilon(0,2) \geqslant \sum_{r\in Q_k} P(\xi_k = r)\int_r^{r+1} P(x\notin G_\epsilon \mid r\notin G_\epsilon)d\sigma_\epsilon(x)$$

$$= \sum_{r\in Q_k} P(\xi_k = r)\int_0^1 \exp -\int_\epsilon^\infty y\wedge \mathbb{E}hY d\mu(h)d\sigma_\epsilon(y+r).$$

Combinant cela avec (2.6) et tenant compte de (2.5), on obtient

$$\sum_{r\in Q_k} P(\xi_k = r) \leqslant \frac{2}{A_\epsilon}.$$

On en déduit

$$P(\bar{F} \not\subset G_\epsilon) \leqslant \frac{2}{A_\epsilon}.$$

Comme A_ϵ tend vers l'infini quand $\epsilon \to 0$, on a la conclusion. CQFD.

Faisons une remarque avant de terminer ce paragraphe. Soit $\{\ell_n\}$ une suite décroissante de positifs. Considérons

$$\mu = \sum_{n=1}^\infty \delta_{\ell_n}.$$

On a vu que $\mathrm{Cap}_k F = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que

F soit recouvert par $\cup J_n$. Posons

$$O_n = \bigcup_{H_k \leqslant \ell_n} J_k .$$

On peut vérifier que

$$\mathrm{Cap}_k F = 0 \Longleftrightarrow P(F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n) = 1$$

$$\mathrm{Cap}_k F > 0 \Longleftrightarrow P(F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n) = 0.$$

3. RECOUVREMENT SUR LE CERCLE

Du résultat obtenu au paragraphe précédent on déduit à présent une condition nécessaire et suffisante pour qu'un compact sur le cercle soit recouvert par des intervalles jetés au hasard. Consultons l'introduction pour mieux comprendre le problème. Nous nous bornons ici au cas où $L_n = L_n Y_n$ dont Y_n obéit à la même loi que Y donnée. La distribution de ce dernier est notée par F(y). Posons

$$K(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\ell_n Y - |t|)_+ .$$

THEOREME. Supposons que $\{\ell_n\}$ et F(x) satisfasse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \int_{\epsilon/\ell_n}^{\infty} [1-F(x)]dx < \infty \quad (\forall \epsilon > 0). \tag{3.1}$$

Alors $F \subset \limsup_{n \to \infty} I_n$ p. s. si et seulement si $\mathrm{Cap}_k F = 0$.

Remarque 1. La condition 3.1) implique $\mathbb{E}Y < \infty$ et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - F(\frac{\alpha}{\ell_n})\right) < \infty \quad (\forall \alpha > 0). \tag{3.2}$$

Par ailleurs grâce au corollaire 3 du paragraphe 1, on peut supposer encore que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n^p < \infty \quad (\forall\ p > 1). \tag{3.3}$$

Des préparatifs sont nécessaires afin de démontrer le théorème. D'abord le développement de Taylor assure que

$$e^{1-x/2} < (1+x)^{1/x} < e^{1-x/6} \quad (0 < x < 1) \tag{3.4}$$

$$e^{-1-x} < (1-x)^{1/x} < e^{-1-x/2} \quad (0 < x < ½). \tag{3.5}$$

Désignons par $\mathcal{P}_c$ une variable de Poisson à paramètre c (on a $\mathbb{E}\mathcal{P}_c = c$). Il est raisonnable que l'on ait :

LEMME. Etant donné λ tel que $½ < \lambda < 1$. Pour tout $m \geqslant 0$ on a

$$P\left(\mathcal{P}_{m+[m^\lambda]} < m\right) \leqslant A\ m \exp\left(-\frac{1}{6}m^{2\lambda-1}\right) \tag{3.6}$$

$$P\left(\mathcal{P}_{m-[m^\lambda]} > m\right) \leqslant B\ m \exp\left(-\frac{1}{2}m^{2\lambda-1}\right). \tag{3.7}$$

A et B étant deux constantes absolues.

Preuve (à titre d'exercice). Posons $a = m + [m^\lambda]$. D'après la définition, puis de Stirling, on obtient

$$P(\mathcal{P}_a < m) = O(1)e^{-a}\int_0^m \left(\frac{ae}{x}\right)^x dx.$$

On a utilisé la croissance de la fonction sous le signe d'intégration. Posons ensuite $x = my$, on a

$$\int_0^m \left(\frac{ae}{x}\right)^x dx = m\int_0^1 \left(\frac{a}{m}\right)^{my}\left(\frac{e}{x}\right)^{my} dy.$$

Or, d'après (3.4)

$$\left(\frac{a}{m}\right)^m \leqslant \exp\left(m^\lambda - \frac{1}{6}m^{2\lambda-1}\right).$$

Par conséquent

$$P(\mathcal{P}_a < m) = O(1)m \exp\left(-m - \frac{1}{6}m^{2\lambda-1}\right)\int_0^1 \left(\frac{e}{y}\right)^{ym} dy.$$

Maintenant il suffit de remarquer que $(e/y)^y$ est croissante pour arriver à (3.6).

Pour (3.7) posons $b = m - [m^\lambda]$. De même on a d'abord

$$P(\mathcal{T}_b > m) = O(1)e^{-b}\int_m^\infty \left(\frac{be}{x}\right)^x dx = O(1)me^{-b}\int_1^\infty \left(\frac{b}{m}\right)^{my}\left(\frac{e}{y}\right)^{my} dy.$$

Cette fois-ci, c'est la décroissance qui joue. D'après (3.5),

$$\left(\frac{b}{m}\right)^m \leqslant \exp\left(-\ m^\lambda - \frac{1}{2}m^{2\lambda-1}\right).$$

Par conséquent

$$P(\mathcal{T}_b > m) = O(1)m\ \exp\left(-m-\frac{1}{2}\ m^{2\lambda-1}\right)\int_1^\infty \left(\frac{e}{y}\right)^{ym} dy.$$

Observons que $(e/y)^y$ est décroissante pour $1 \leqslant y < \infty$. On a

$$\int_1^\infty (\frac{e}{y})^{ym} dy \leqslant \int_1^{e^2} e^m dy + \int_{e^2}^\infty e^{-my} dy = O(1)e^m. \qquad \text{CQFD.}$$

Soit maintenant $\{A_{n,m}\}$ une suite double d'événements. Définissons

$$\limsup_{n,m\to\infty} A_{n,m} = \bigcap_{N=1}^\infty \bigcap_{M=1}^\infty \bigcup_{n=N}^\infty \bigcup_{m=M}^\infty A_{n,m}$$

$$\liminf_{n,m\to\infty} A_{n,m} = \bigcup_{N=1}^\infty \bigcup_{M=1}^\infty \bigcap_{n=N}^\infty \bigcap_{m=M}^\infty A_{n,m}.$$

Voici le lemme de Borel-Cantelli double : supposons $A_{n,m}$ indépendantes ; alors

$$P\left(\limsup_{n,m\to\infty} A_{n,m}\right) = 0 \text{ (ou 1)} \iff \sum_{n,m=1}^\infty P(A_{n,m}) < \infty \text{ (ou } = \infty).$$

Démonstration de la suffisance ($\mathrm{Cap}_k F = 0 \Longrightarrow F \subset \limsup_{n\to\infty} I_n$ p. s.) : A partir de $\{\ell_n\}$ on définit d'abord $\lambda_m = \ell_{\frac{m(m+1)}{2}}$ pour $m \geqslant 1$, puis une suite $\{\ell'_n\}$ telle que

$$\ell'_{\frac{m(m-1)}{2}+1} = \ldots = \ell'_{\frac{m(m+1)}{2}} = \lambda_m.$$

Cette nouvelle suite prend la valeur λ_m à m reprises. Effectivement $\ell'_n \leqslant \ell_n$. Pourtant la différence est négligeable au sens que $\sum (\ell_n - \ell'_n) < \infty$ grâce à (3.3). Si K' désigne le noyau correspondant à $\{\ell'_n\}$, on a alors

$$K' \approx K.$$

Ensuite ôtons $[m^{2/3}]$ termes parmi les m termes égaux à λ_m. On obtient ainsi une autre suite $\{\ell''_n\}$ dont le noyau est désigné par K". On voit que ce qui est ôté n'est pas trop de sorte que

$$K'' \approx K'$$

car $\sum m^{2/3}\lambda_m < \infty$ grâce encore à (3.3).

La deuxième étape est de considérer la mesure

$$\mu = \sum \delta_{\ell''_n}$$

et le processus de Poisson associé construit au § 2. Comme on a une équivalence entre K et K", $\mathrm{Cap}_{K''}F = 0$. Donc, d'après le théorème au § 2, F est recouvert par les intervalles J_n liés au processus. On va montrer que cela implique le recouvrement de F par les $I'_n = \omega_n +]0,\ell'_n Y_n[$, a fortiori par les $I_n = \omega_n +]0,\ell_n Y_n[$.

Supposons $F \subset]0,1[$. On démontre d'abord la proposition suivante : si $F \subset \cup J_n$ p. s., $F \subset \cup J_n$ où J_n est soumis à la restriction $0 < X_n < 1$. Posons

$$\mathcal{J}^p = \{J_n : -p \leqslant X_n < p+1\} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\mathcal{J}^p_m = \{J_n \in \mathcal{J}^p : H_n = \lambda_m\} \quad (p \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}^*).$$

$$\mathcal{P}^p_{m-[m^{3/2}]} = \mathrm{Card}\ \mathcal{J}^p_m.$$

Les points (X_n, Y_n) tels que $J_n \in \mathcal{J}^p_m$ peuvent être considérés, dès que $\mathcal{P}^p_{m-[m^{2/3}]}$ est fixé, comme $\mathcal{P}^p_{m-[m^{2/3}]}$ vecteurs indépendants et équidistribués sur $]-p\ ,\ -p+1[\ \times \mathbb{R}^+$ selon la probabilité dx dF. Dans le fond, c'est la définition du processus de Poisson. Soit 2ϵ la distance de F à l'ensemble $\{0,1\}$. Posons

$$A_{p,m} = \{\omega : \text{il existe } J_n \in \mathcal{J}^p_m \text{ tel que } \lambda_m Y_n \geqslant p-1+\epsilon\}.$$

Admettons que

$$\sum_{p,m=1}^{\infty} P(A_{p,m}) < \infty. \tag{3.8}$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli double, p. s. il n'y a qu'un nombre fini de J_n avec $X_n \leqslant 0$ qui peuvent toucher l'intervalle $[\epsilon\ ,\ 1-\epsilon]$. Par ailleurs, J_n avec $X_n \geqslant 1$ ne touche jamais cet intervalle. Néanmoins, d'après la remarque faite à la fin du § 2, F est recouvert par une infinité de J_n. Donc p. s. $F \subset \cup J_n$ avec $0 < X_n < 1$ et même à une infinité de reprises.

De la proposition on déduit maintenant que $F \subset \cup I_n'$ p. s. En effet, (3.7) avec $\lambda = \frac{2}{3}$ nous donne

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(\mathcal{P}^0_{m-[m^{2/3}]} > m) < \infty.$$

Et (3.2) nous donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\ell_n' Y_n > \epsilon) < \infty.$$

Donc p. s. on a éventuellement $\mathcal{P}^0_{m-[m^{2/3}]} \leqslant m$ et $\ell_n' Y_n \leqslant \epsilon$. Enfin $F \subset \cup I_n'$ p. s.

Il nous reste (3.8) à vérifier. Posons $b = m - [m^{2/3}]$.

$$\begin{aligned} P(A_{p,m}) &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} P(A^c_{p,m} | \mathcal{P}^p_b = k) P(\mathcal{P}^p_b = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(P\left(Y < \frac{p-1+\epsilon}{\lambda_m}\right)\right)^k P(\mathcal{P}^p_b = k) \\ &= 1 - \exp\left(-bP(Y \geqslant \frac{p-1+\epsilon}{\lambda_m})\right) \\ &\leqslant bP\left(Y \geqslant \frac{p-1+\epsilon}{\lambda_m}\right) \end{aligned}$$

d'où on voit que (3.1) assure (3.8). CQFD.

Démonstration de la nécessité $\mathrm{Cap}_k F = 0 \Longrightarrow F \not\subset \overline{\lim}\, I_n$ p. s.) : Posons

$$\ell'_{\frac{m(m-1)}{2}+1} = \cdots = \ell'_{\frac{m(m+1)}{2}} = \lambda_m = \ell_{\frac{m(m-1)}{2}} \qquad (m \geqslant 1).$$

A la suite $\{\ell_n'\}$ on ajoute $[m^{2/3}]$ termes de valeurs λ_m et on obtient donc une autre suite $\{\ell_n''\}$. Effectivement $\ell_n'' \geqslant \ell_n' \geqslant \ell_n$ et $K'' \approx K' \approx K$.

Considérons maintenant la mesure

$$\mu = \sum \delta_{\ell''_n}$$

et le processus de Poisson associé. On définit de même $\mathcal{J}^0_m$ et $\mathcal{P}^0_{m+[m^{2/3}]}$ = Card($\mathcal{J}^0_m$). L'inégalité (3.6) nous affirme que

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\left(\mathcal{P}^0_{m+[m^{2/3}]} < m\right) < \infty.$$

Par conséquent, p. s. finalement $\mathcal{P}^0_{m+[m^{2/3}]} \geqslant m$. Donc $P(F \subset \overline{\lim}\, I_n) \leqslant P(F \subset \cup J_n) < 1$. CQFD.

Remarque 2. On peut toujours supposer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_n}{\log^{2+\epsilon}\frac{\alpha}{\ell_n}} < \infty \quad \text{(pour un certain } \epsilon > 0\text{, et tout } \alpha > 0)$$

car sinon $\mathbb{T}$ sera recouvert. Sous cette hypothèse, (3.1) peut être remplacé par

$$\mathbb{E}Y(\log^+ Y)^{3+\epsilon} < \infty. \tag{3.9}$$

Remarque 3. En ce qui concerne le recouvrement poissonnien, ce n'est pas la peine de supposer $\mathbb{E}Y < \infty$. C'est certainement le recouvrement qui a lieu si $\mathbb{E}Y = \infty$. Tandis que pour le recouvrement sur le cercle, une certaine hypothèse comme (3.1) ou (3.9) est nécessaire. Voici un contre-exemple où Y est assez dispersée :

$$P(Y = 2^k) = \frac{1}{2^k} \qquad (k \geqslant 1)$$
$$\ell_n = \frac{1}{2^n n^2} \qquad (n \geqslant 1).$$

On a $\mathbb{E}Y = \infty$ et c'est le non recouvrement qui a lieu.

4. LE CAS : Y BORNEE

Supposons $0 \leqslant Y \leqslant C$ p. s. (C une constante). La condition supplémentaire (3.1) est alors satisfaite. Posons

$$K_\mu^*(t) = \exp \int_0^\infty (h\mathbb{E}Y - |t|)_+ d\mu(h)$$

$$K_\ell^*(t) = \exp \sum_{n=1}^\infty (\ell_n \mathbb{E}Y - |t|)_+ .$$

On a

THEOREME. Soit F un compact dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{T}$)

a) $$F \subset \cup J_n \text{ p. s.} \Leftrightarrow \mathrm{Cap}_{K_\mu^*} F = 0$$

b) $$F \subset \cup I_n \text{ p. s.} \Leftrightarrow \mathrm{Cap}_{K_\ell^*} F = 0.$$

La démonstration du théorème repose entièrement sur le lemme suivant.

LEMME 1. Supposons $0 \leqslant Y \leqslant C$ p. s. Il existe un positif α ($= EY$) tel que

$$(\lambda\mathbb{E}Y - t)^+ \leqslant \mathbb{E}(\lambda Y - t)^+ \leqslant (\lambda\mathbb{E}Y - \alpha t)^+ \quad (0 \leqslant t < \infty)$$

pour tout $\lambda > 0$.

LEMME 2. Supposons $0 \leqslant Y \leqslant 1$ p. s. Soit λ un positif. Posons $Y_\lambda = \lambda Y$.
On a

$$\mathbb{E}Y_\lambda 1_{(Y_\lambda < t)} \geqslant t\, P(Y_\lambda < t) + t(\mathbb{E}Y - 1) \quad (0 < t \leqslant \lambda).$$

Preuve. Quel que soit $a > 1$, on a

$$\mathbb{E}Y_\lambda 1_{(Y_\lambda < t)} \geqslant \sum_{n=0}^\infty \frac{t}{a^{n+1}} P\left(\frac{t}{a^{n+1}} \leqslant Y_\lambda < \frac{t}{a^n}\right)$$

$$= t\left\{\frac{1}{a}P(Y_\lambda < t) + (\frac{1}{a} - 1) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a^n} P(Y_\lambda < \frac{t}{a^n})\right\}$$

Or, si $F_\lambda(x)$ est la distribution de Y_λ, observant que $a^{-x}F_\lambda(ta^{-x})$ est une fonction décroissante de x $(-\infty < x < +\infty)$, on a

$$\sigma(a) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{a^n} P(Y_\lambda < \frac{t}{a^n}) \leqslant \int_{-1}^\infty a^{-x}F_\lambda(ta^{-x})dx.$$

Posons $y = a^{-x}$, on obtient

$$\sigma(a) \leqslant \frac{1}{\log a}.\frac{\lambda}{t}\int_0^{a.t/\lambda} F(y)dy$$

où F(y) est la distribution de Y. Ainsi

$$\mathbb{E}Y_\lambda 1_{(Y_\lambda<t)} \geqslant t\left\{P(Y_\lambda<t) - \frac{a-1}{a\log a}.\frac{\lambda}{t}\int_0^{a.t/\lambda} F(y)dy\right\}.$$

Faisons $a \downarrow 1$, on a

$$\mathbb{E}Y_\lambda 1_{(Y_\lambda<t)} \geqslant t\left\{P(Y_\lambda<t) - \frac{\lambda}{t}\int_0^{t/\lambda} F(y)dy\right\}.$$

Comme $t < \lambda$, on a

$$-\frac{\lambda}{t}\int_0^{t/\lambda} F(y)dy = \frac{\lambda}{t}\int_0^{t/\lambda} (1-F(y))dy - 1 \geqslant \int_0^1 (1-F(y))dy - 1 = \mathbb{E}Y - 1.$$

Pour l'obtention de la dernière inégalité, on a utilisé la décroissance de la fonction $x^{-1}\int_0^x(1-F(y))dy$ et le fait que $\frac{t}{\lambda} \leqslant 1$. CQFD.

Preuve du lemme 1. On peut supposer $0 \leqslant Y \leqslant 1$ sans perdre la généralité. Le première inégalité résulte de l'inégalité de Jensen. Supposons encore $\mathbb{E}\, Y > 0$. En posant $Y_\lambda = \lambda Y$, on a

$$\mathbb{E}(Y_\lambda - t)^+ = \mathbb{E}Y_\lambda - \mathbb{E}Y_\lambda 1_{(Y_\lambda<t)} - tP(Y_\lambda \geqslant t).$$

Soit $\alpha = \mathbb{E}Y$. Si $(\mathbb{E}Y_\lambda - \alpha t)^+ = 0$, à savoir $\lambda \leqslant t$, on a $Y_\lambda \leqslant t$. Donc $\mathbb{E}(Y_\lambda - t)^+ = 0$. Alors il reste à démontrer le cas $\lambda > t$. A ce moment, le lemme 1 peut nous servir. CQFD.

Remarque 1. La constante $\alpha = \mathbb{E}Y$ dans le lemme 1 ne peut pas être remplacée en général par une plus grande. Par exemple, prenons U la variable uniformément distribuée sur [0,1].

Remarque 2. Le lemme 1 est faux pour toute Y non bornée car $\mathbb{E}(\lambda Y - t)^+$ est toujours positive, tandis que $(\lambda\mathbb{E}Y - \alpha t)^+$ peut s'annuler pour certains $\lambda > 0$ et $t > 0$.

5. OPERATEURS DE PROJECTION LIES AUX RECOUVREMENTS

Selon la théorie de la multiplication aléatoire (cf. Chapitre I), la martingale indexée $Q_\epsilon(t)$ ($t \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$) correspond à un opérateur de projection dans l'espace $M(\mathbb{R})$. Désignons le noyau associé par

$$K_\mu(t) = \exp \int_0^\infty \mathbb{E}(hY - |t|)^+ d\mu(h)$$

et l'opérateur par $\mathbb{E}Q_\mu$. Soient $\mathcal{S}_\mu$ l'ensemble des mesures K_μ-singulières, $\mathcal{R}_\mu$ l'ensemble des mesures K_μ-régulières. On a le théorème suivant

THEOREME 5.1. $\mathrm{Ker}(\mathbb{E}\, Q_\mu) = \mathcal{S}_\mu$, $\mathrm{Img}(\mathbb{E}\, Q_\mu) = \mathcal{R}_\mu$.

Ce théorème a une conséquence qui concerne la dimension portante de la mesure $Q_\mu\sigma$. Par la dimension portante d'une mesure σ on entend la plus petite des dimensions des boréliens qui portent cette mesure. On la désigne par $\dim^*\sigma$. Comme un exemple, on considère $0 \leqslant Y \leqslant 1$ et $\mu = \frac{\alpha}{y^2} 1_{[0,1]}(y)dy$, pour ce choix on a $K_\mu(t) = |t|^{-\alpha\mathbb{E}Y}$.

THEOREME 5.2. Soient Y et μ ainsi choisies. Pour toute $\sigma \in M^+(\mathbb{R})$

$$\dim^* Q_\mu\sigma = (\dim^*\sigma - \alpha\mathbb{E}Y)_+ .$$

Considérons de même une suite $\{\ell_n\}$ $(\ell_n < \frac{1}{2})$ et une variable aléatoire Y $(0 \leqslant Y \leqslant 1)$, et puis la martingale indexée définie par $Q_n(t) = \prod_{m=1}^{n} P_m(t)$ où

$$P_m(t) = \frac{1 - 1_{]0,\ell_n Y_n[}(t - \omega_n)}{1 - \ell_n \mathbb{E}\, Y}.$$

Le noyau correspondant est défini par

$$K_\ell(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n \mathbb{E}Y - |t|).$$

Désignons par $\mathbb{E}Q_\ell$ l'opérateur correspondant on a

THEOREME 5.3. $\mathrm{Ker}(\mathbb{E}\, Q_\ell) = \mathcal{S}_\ell$, $\mathrm{Img}(\mathbb{E}\, Q_\ell) = \mathcal{R}_\ell$.

THEOREME 5.4. Supposons $\ell_n = \frac{\alpha}{n}$. Pour toute $\sigma \in M^+(\mathbb{T})$,

$$\dim^* Q_\ell = (\dim^*\sigma - \alpha\mathbb{E}Y)_+ .$$

6. AUTRES MARTINGALES

Soit $0 < a < 1$. Construisons une martingale indexée

$$Q_\epsilon^a(t) = a^{N_\epsilon(t)} \exp((1-a)\nu_\epsilon(D_t)) \quad (t \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0) \tag{6.1}$$

où $N_\epsilon(t)$ est le nombre des points du processus de l'intensité ν_ϵ, dans le domaine D_t. On peut compléter la définition en définissant, $Q_\epsilon^0(t) = Q_\epsilon(t)$ pour $a = 0$ (celle-ci est déjà définie au § 2) $Q_\epsilon^1(t) \equiv 1$ pour $a = 1$.

THEOREME 6.1. Quelle que soit $\sigma \in M^+(\mathbb{R})$, on a

$$\int Q_\epsilon^a d\sigma \quad L^2\text{-converge} \iff \iint K_\mu^Y(t-s)^{(1-a)^2} d\sigma(t)d\sigma(s) < \infty.$$

Démonstration. La convergence est équivalente à

$$\mathbb{E}\Big(\int Q_\epsilon^a d\sigma\Big)^2 = O(1) \qquad (\forall\, \epsilon > 0).$$

C'est-à-dire

$$\iint \mathbb{E}\, Q_\epsilon^a(t)Q_\epsilon^a(s)d\sigma(t)d\sigma(s) = O(1) \qquad (\forall\, \epsilon > 0).$$

Or, on a

$$\mathbb{E}\, Q_\epsilon^a(t)Q_\epsilon^a(s) = \exp(2(1-a)\nu_\epsilon(D_t))\mathbb{E}\, a^{N_\epsilon(t)+N_\epsilon(s)}$$

$$\mathbb{E}\, a^{N_\epsilon(t)+N_\epsilon(s)} = \exp\big((1-a)^2\nu_\epsilon(D_t \cap D_s)\big).$$

De plus, si l'on suppose que $s \leqslant t$, on a l'expression

$$D_t \cap D_s = \bigcup_{0<h<\infty} \Big\{(x,y,h) : \frac{t-s}{h} < y < \infty\ ;\ t-hy < x < s\Big\}.$$

Par suite,

$$\nu_\epsilon(D_t \cap D_s) = \int_\epsilon^\infty d\mu(h) \int_{(t-s)/h}^\infty dF(y) \int_{t-hy}^s dx$$
$$= \int_\epsilon^\infty \mathbb{E}(hY - |t-s|)^+ d\mu(h).$$

Enfin, on a

$$\mathbb{E}\, Q_\epsilon^a(t)\, Q_\epsilon^a(s) = \Big\{\exp \int_\epsilon^\infty \mathbb{E}(hY - |t-s|)^+ d\mu(h)\Big\}^{(1-a)^2}.$$

CQFD

Considérons maintenant une suite $\{\ell_n\}$ $(0 < \ell_n < \frac{1}{2})$ et une variable Y $(0 \leqslant Y \leqslant 1)$. Posons

$$\chi_j(t) = 1_{]0,\ell_j Y_j[}(t - \omega_j).$$

Pour $0 < a < \infty$, construisons une martingale indexée

$$Q_n^a(t) = \prod_{m=1}^{n} P_m^a(t) \quad \text{avec} \quad P_m^a(t) = a^{\chi_m(t)}/(1+(a-1)\ell_m \mathbb{E}Y). \tag{6.2}$$

Supposons $\sum \ell_n^2 < \infty$, on a

$$Q_n^a(t) \approx \exp\left((1-a)\mathbb{E}Y\sum_{j=1}^{n}\ell_j + \log a.\sum_{j=1}^{n}\chi_j(t)\right).$$

THEOREME 6.2. Supposons $\sum \ell_n^2 < \infty$. Quelle que soit $\sigma \in M^+(\mathbb{T})$, on a

$$\int Q_n^a d\sigma \quad L^2\text{-converge} \quad \Leftrightarrow \iint K_\ell^Y(t-s)^{(1-a)^2} d\sigma(t)d\sigma(s) < \infty.$$

Démonstration. De même, il faut et suffit qu'on ait

$$\iint \mathbb{E}\, Q_n^a(t)\, Q_n^a(s) d\sigma(t)\, d\sigma(s) = O(1) \quad (n \geqslant 1).$$

Remarquons

$$\mathbb{E}\, Q_n^a(t)\, Q_n^a(s) \approx \exp\left(2(1-a)\mathbb{E}Y\sum_{j=1}^{n}\ell_j\right) \prod_{j=1}^{n}\mathbb{E}\, a^{\chi_j(t)+\chi_j(s)}$$

$$\mathbb{E}\, a^{\chi_j(t)+\chi_j(s)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\log a)^m}{m\,!}\mathbb{E}(\chi_j(t) + \chi_j(s))^m$$

et que si $m \geqslant 2$, tenant compte du fait que χ_j n'admet que les valeurs 0 et 1, on a

$$\mathbb{E}(\chi_j(t) + \chi_j(s))^m = \mathbb{E}\,\chi_j(t) + \mathbb{E}\,\chi_j(s) + \sum_{k=1}^{m-1} C_m^k\, \mathbb{E}\,\chi_j(t)\,\chi_j(s).$$

Or $\mathbb{E}\,\chi_j(t)\chi_j(s) = \mathbb{E}(\ell_j Y - |t-s|)_+$, on a alors

$$\mathbb{E}\, a^{\chi_j(t)+\chi_j(s)} = 1 - 2(1-a)\,\mathbb{E}\ell_j Y + (a-1)^2\mathbb{E}(\ell_j Y - |t-s|)_+.$$

En remarquant $e^{x-x^2/2} \leqslant 1+x \leqslant e^x \quad (|x| \leqslant 1)$, on a enfin

$$\mathbb{E}\, Q_n^a\ (t) Q_n^a(s) \approx \exp\left((a-1)^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(\ell_j Y - |t-s|)^+ \right).$$

CQFD.

Nous indiquons un cas particulier, à savoir $\ell_n = \dfrac{\alpha}{n}$ pour lequel on a

$$Q_n^a(t) \approx n^{\alpha(1-a)\mathbb{E}Y} \exp\left(\log a . \sum_{j=1}^{n} \chi_j(t) \right).$$

Une différence entre (6.1) et (6.2) est que la première ne peut se définir que pour $0 \leqslant a \leqslant 1$, tandis que la deuxième peut se définir pour tout $a > 0$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ASSOUAD, P. Plongements lipschitziens dans R^n. Bull. Soc. Math. Fr. 111 (1983), 429-448.

[2] BILLARD, P. Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 82 (1965), 131-179.

[3] BILLINGSLEY, P. Ergodic theory and information. Wiley (1965).

[4] CHRESTENSON, H. E. A class of generalized Walsh functions. Pacific J. Math. 5 (1955), 17-31.

[5] COIFMAN, R. et WEISS, G. Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes. Lecture notes in math. 242, Springer Verlag 1971.

[6] CHOQUET, G. Les noyaux réguliers en théorie du potentiel. C. R. Acad. Sc. Paris 243 (1956), 635-638.

[7] DVORETZKY, A. On covering a circle by randomly placed arcs. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42 (1956), 199-203.

[8] FAN Ai Hua Une condition suffisante d'existence du moment d'ordre m (entier) du chaos multiplicatif. Ann. Sc. Math. Québec 10 (1986), 119-120.

[9] FAN Ai Hua Chaos additif et chaos multiplicatif de Lévy. C. R. Acad. Sc. Paris 308 (1989), 151-154.

[10] FAN Ai Hua Sur la convergence de séries trigonométriques lacunaires presque partout par rapport à des produits de Riesz. C. R. Acad. Sci. Paris 309 (1989), 295-298.

[11] FINE, I. N. J. On the Walsh functions. Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 372-414.

[12] EL HELOU, Y. Recouvrement du tore T^n par des ouverts aléatoires et dimension de Hausdorff de l'ensemble non recouvert. C. R. Acad. Sc. Paris 287A (1978), 815-18. Voir aussi Thèse 3ème cycle, Orsay 1978.

[13] HOFFMANN-JORGENSEN, J. Coverings of metric spaces with randomly placed balls. Math. Scand. 24:2 (1973), 169-86.

[14] JANSON, S. Random coverings of the circle with arcs of random

lengths. Probability and Mathematical Statistics. Essays in honour of Carl-Gustav Esseen, 1983, 62-73.

[15] KAHANE, J.-P. Sur le recouvrement d'un cercle par des arcs disposés au hasard. C. R. Acad. Sc. Paris 248 (1959), 184-6.

[16] KAHANE, J.-P. Sur le modèle de turbulence de Benoît Mandelbrot. C. R. Acad. Sc. Paris 278 (1974), 621-623.

[17] KAHANE, J.-P. Some random series of functions. Ist ed., Heath, 1968, 2nd ed., Cambridge Univ. Press 1985.

[18] KAHANE, J.-P. Sur le chaos multiplicatif. Ann. Sc. Math. Québec 9 (1985), 105-150, voir aussi C. R. Acad. Sc. Paris 301 (1985), 329-32.

[19] KAHANE, J.-P. Positive martingales and random measures. Chin. Ann. Math. 8B1, 1987, 1-12.

[20] KAHANE, J.-P. Intervalles aléatoires et décomposition des mesures. C. R. Acad. Sci. Paris 304 (1987), 551-554.

[21] KAHANE, J.-P. Multiplications aléatoires et dimensions de Hausdorff. Ann. Inst. Henri Poincaré, suppl. au n° 2, 23 (1987), 289-296.

[22] KAHANE, J.-P. Random multiplications, random coverings, and multiplicative chaos. Proceedings of the special year in modern analysis. Ec. E. Berkson, N. Tenney Peck, J. Jerry Uhl. London Math. Soc. Lect. note series 137, Cambridge Univ. Press 1989, 196-255.

[23] KAHANE, J.-P. Désintégration des mesures selon la dimension. C. R. Acad. Sci. Paris 306 (1988), 107-110.

[24] KAHANE, J.-P. & KATZNELSON, Y. Décomposition des mesures selon la dimension. Colloquium Math., à paraître.

[25] KAHANE, J.-P. & SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris, Hermann, 1963.

[26] KAHANE, J.-P. & PEYRIERE, J. Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot. Advances in Math. 22 (1976), 131-145.

[27] KALLENBERG, O. Random measures. Berlin, Akademie-Verlag, 1983.

[28] LUKACS, E. Developments in characteristic function theory. London, Griffin, 1983.

[29] MAKAROV, N. G. Conforming maps and Hausdorff measures. Ark. Math. 25 (1987, 41-89.

[30] MAKAROV, N. G. A note on integral means of the derivative in conformal mapping. Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), 233-236.

[31] MANDELBROT, B. B. Renewal sets and random cutouts. Z. Wahrsch. v. Geb. 22 (1972), 145-157.

[32] MANDELBROT, B. B. On Dvoretzky coverings for the circle. Z. Wahrsch. v. Geb. 22 (1972), 158-160.

[33] MANDELBROT, B. B. Possible refinement or the log-normal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence, in Statistical Models and Turbulence. Symposium at Univ. San Diego 1971, Lecture notes in Physics, Springer-Verlag 1972, 333-351.

[34] MANDELBROT, B. B. Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire. C. R. Acad. Sc. Paris 278 (1974), 289-292 et 355-358.

[35] MANDELBROT, B. B. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. J. Fluid Mechanics 62 (1974), 331-333.

[36] MEYER, Y. & WEISS, B. Les produits de Riesz sont des schémas de Bernoulli. Journées ergodiques, Rennes (1973).

[37] PEYRIERE, J. Sur les produits de Riesz. C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973), 1417-1419.

[38] PEYRIERE, J. Etudes de quelques propriétés des produits de Riesz. Ann. Inst. Fourier 25 (1975), 127-169.

[39] PEYRIERE, J. Turbulence et dimension de Hausdorff. C. R. Acad. Sc. Paris 278 (1974), 567-569.

[40] POMMERENKE, Ch. On the integral means of the derivative of a univalent function. J. London Math. Soc. 32 (1985), 254-258.

[41] SHEPP, L. A. Covering the line with random intervals. Z. Wahrsch. v. Geb. 23 (1972), 163-170.

[42] SHEPP, L. A. Covering the circle with random arcs. Israël J. Math. 11 (1972), 328-45.

[43] SCHERTZER, S. & LOVEJOY, S. Singularités anisotropes, divergences des moments en turbulence : invariance d'échelle généralisée et processus multiplicatif. Ann. Sc. Math. Québec 11 (1987), 139-181.

[44] SCHERTZER, S., VISWANATHAN, R, & LOVEJOY, S. Generalized central

limit theorem, extremal Levy-stable law. Nonlinear variability in geophysics 1, D. Schertzer et S. Lovejoy, ed. Amsterdam, Kluver Academic Press (sous presse), 1988, 56-57.

[45] UGAHERI, T. On the general capacities and potentiels. Bull. Tokyo Inst. Tech. (1953), 149-179.

[46] WILSON, J., SCHERTZER, D. & LOVEJOY, S. Physically based cloud modelling by multiplicative cascade processes. Nonlinear variability in geophysics 1, D. Schertzer et S. Lovejoy, ed. Amsterdam, Kluver Academic Press (sous presse) 1988, 129-135.

TABLE DES MATIERES