PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

n° 85-01

L'ANALYSE COMBINATOIRE AU MAGHREB: L'EXEMPLE D'IBN MUN^{c}IM (XII^e - XIII^e s.)

A. DJEBBAR

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

n° 85-01

L'ANALYSE COMBINATOIRE AU MAGHREB: L'EXEMPLE D'IBN MUN^{c}IM (XII^{e} - XIII^{e} s.)

A. DJEBBAR

Université de Paris-Sud

Département de Mathématique

Bât. 425

91405 ORSAY France

L'ANALYSE COMBINATOIRE AU MAGHREB: L'EXEMPLE D'IBN MUN^{c}IM (*)

(XII^{e} - XIII^{e} s.)

A. DJEBBAR

(*)- Une deuxième partie, en préparation, contiendra l'édition et la traduction de tous les autres textes à caractère combinatoire que nous avons été le premier à révéler et à analyser dans notre étude "Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^{e}-XIV^{e} siècles" (Publ. Math. Orsay 1981, n° 81-02). Elle sera intitulée "Matériaux pour l'histoire de l'analyse combinatoire au Maghreb".

Table des Matières (*)

(*)- Cette étude a été publiée, pour la première fois, en Janvier 1983 dans la série "Prépublications mathématiques d'Orsay" (n°83-T-03), sous le titre: "L'analyse combinatoire dans l'enseignement d'Ibn Mun^{c}im (XII^e-XIII^e siècles)". Elle a été réalisée dans le cadre de l'E.R.A. 651 du C.N.R.S., grâce à la mission de recherche qui m'a été accordée, le 16 Février 1983, par la Société de Philosophie du Maroc et par l'Université Mohammed V de Rabat.

SYSTEME DE TRANSCRIPTION ADOPTE

ء	'	ض	ḍ
ب	b	ط	ṭ
ت	t	ظ	ẓ
ث	th	ع	c
ج	j	غ	gh
ح	ḥ	ف	f
خ	kh	ق	q
د	d	ك	k
ذ	dh	ل	l
ر	r	م	m
ز	z	ن	n
س	s	هـ	h
ش	sh	و	w
ص	ṣ	ى	y

INTRODUCTION

Les premières manifestations de l'analyse combinatoire dans des disciplines non mathématiques, les débuts de sa mathématisation avec établissement de preuves et utilisation de raisonnements combinatoires et enfin son introduction, comme matière d'enseignement, aux côtés des opérations classiques du calcul, sont des thèmes qui ont bénéficié, au cours de ces dernières décennies, d'un certain intérêt chez les chercheurs en histoire des sciences[1]. Malgré cela, l'histoire des premiers pas de l'analyse combinatoire reste encore fragmentaire, en particulier pour ce qui concerne son apparition, son intervention et son statut dans l'activité scientifique du monde arabo-musulman, entre le VIII^{e} et le XVI^{e} siècle. Dans une étude précédente[2], nous avions, faute de documents, brièvement évoqué certains aspects de cette histoire en insistant et en développant notre réflexion sur l'état de cette discipline au Maghreb, après le XIII^{e} siècle[(*)].
Le niveau atteint par cette discipline (malgré les limites de son champ d'activité), les modes de raisonnement qui y étaient développés et le type d'utilisation de ses résultats, ajoutés à quelques informations rapportées par des mathématiciens eux-mêmes,

---

(*)- Cf. Annexe II, p.105, où nous avons reproduit les démarches et les résultats combinatoires d'Ibn al-Bannā' et de deux de ses commentateurs, Ibn Haydūr et Ibn al-Majdī.

nous permettaient d'avancer quelques conclusions et de suggérer quelques conjectures au sujet du contenu de cette discipline et de son enseignement, dans la tradition mathématique arabe. Les voici brièvement reformulées :

Les mathématiciens du Maghreb qui se sont occupés de combinatoire semblent avoir bénéficié d'une double tradition, l'une se confondant avec les débuts de la linguistique et de la grammaire arabes et se nourrissant de certaines activités astrologiques et l'autre puisant dans la musique, l'astronomie et l'algèbre. Si aucun élément ne permet encore d'affirmer que tous les aspects de la seconde tradition étaient connus au Maghreb et pris en compte, aucun doute ne subsiste quant à la première qui a fourni un champ d'initiation à certains exercices combinatoires et a favorisé la mise au point des premiers procédés de dénombrement.

Ces préoccupations combinatoires semblent avoir été mises au goût du jour indirectement à partir de deux mouvements distincts : Un renouveau d'intérêt pour les études linguistiques, encouragées par les pouvoirs politiques en place et un engouement croissant pour les pratiques astrologiques de toutes sortes, avec un recours de plus en plus important à l'astrologie des signes, par toutes les catégories sociales, les dirigeants en tête.

A partir de ces éléments et sous leurs effets conjugués qu'il ne nous est pas possible d'analyser, faute de documents, apparaissent chez des mathématiciens maghrébins, au XIII^{e} siècle ou bien avant, des préoccupations combinatoires. Des problèmes sont posés et résolus par des raisonnements de nature combinatoire, une terminologie née des besoins de la linguistique acquiert un statut mathématique, un formulaire nouveau est établi pour devenir un instrument opérant sur des objets mathématiques tels que les équations, les opérations, les applications.

D'une manière plus précise, nous dations (à partir de la seule indication d'Ibn al-Bannā') de la fin du XII^{e} siècle ou du début du XIII^{e}, l'introduction des résultats obtenus en linguistique dans un chapitre des opérations du calcul. Quant à la phase suivante,

concernant l'extension du formulaire combinatoire, sa mathématisation poussée, par l'introduction de nouveaux raisonnements et par son utilisation consciente comme instrument de calcul dans le corpus mathématique, nous l'avions datée, pour ce qui concerne le Maghreb toujours, de la fin du XIII^{e} siècle. D'ailleurs, compte tenu des informations dont nous disposions alors, nous avions attribué à Ibn al-Bannā' et à ses successeurs la paternité de ce progrès.
D'autre part, la présence dans les écrits de certains auteurs postérieurs, d'exemples, de résultats ou de généralisations à caractère combinatoire avec utilisation d'un même vocabulaire spécifique ne faisait que renforcer, à nos yeux, le caractère de continuité des préoccupations combinatoires depuis Ibn Mun^{c}im au moins, cette continuité ne pouvant être assurée sans un enseignement suivi et conséquent.
Tous ces éléments nous avaient alors permis de dire que dès la fin du XII^{e} siècle, on assistait à un début d'élaboration d'un chapitre nouveau en mathématique. Ce qui nous amenait à nous interroger sur l'apparition concrète de tout ou partie de ce chapitre dans les ouvrages d'enseignement aux côtés de celui sur les séries numériques que l'on retrouve dans les manuels maghrébins depuis al-Ḥaṣṣār jusqu'à al-Qalṣādī.
L'étude que nous présentons aujourd'hui vise, à travers l'analyse d'un texte inédit, d'une part à expliciter les conjectures déjà faites et à proposer des réponses à certaines questions encore en suspens, d'autre part à reculer la date concernant les premiers enseignements de la combinatoire dans l'occident musulman. Cela ne manquera pas de soulever de nouvelles questions concernant les différents statuts qu'a pu avoir cette discipline, dans le cadre des mathématiques, et le sort qui lui sera réservé par les enseignants et qui transparaît dans les ouvrages de la tradition arabe produits entre le XIII^{e} et le XVII^{e} siècle, au Maghreb et ailleurs.

IBN MUN^{c}IM ET SON EPOQUE.

Pour justifier ce qu'il présentait comme une contribution personnelle en analyse combinatoire, Ibn al-Bannā' écrivait dans son Tanbīh al-Albāb : "Quant au nombre de mots trilitères ou quadrilitères ou dont le nombre de lettres est autre et qui sont constitués à partir des vingt huit lettres de l'alphabet, Ibn Mun^{c}im a dressé pour cela un tableau"[3].

Connaissant les qualités de polygraphes de certains mathématiciens arabes et ignorant la nature de l'ouvrage qui devait contenir le tableau en question, il nous était difficile de déduire, de la seule allusion d'Ibn al-Bannā', que le tableau était isolé ou qu'il s'insérait dans un contexte mathématique précis. Aussi, nous sommes-nous contentés d'avancer une hypothèse au sujet de son contenu qui devait être constitué, selon nous, des coefficients C_n^p pour : $n=28$ et $2 \leq p \leq 5$ ou, mieux encore, pour : $2 \leq n \leq 28$ et $1 \leq p \leq n$ [4].

Désormais, on peut dire beaucoup plus à ce sujet : Le tableau signalé par l'auteur du Talkhīṣ n'est ni unique ni isolé du contexte mathématique. Il constitue en fait, avec d'autres, la seconde partie de toute une section consacrée à l'analyse combinatoire, dans un ouvrage d'Ibn Mun^{c}im intitulé Fiqh al-Ḥisāb dont une copie ayant appartenu à la Zawiyya an-Nāṣiriyya de Tamakrout, est conservée à la section des archives de la bibliothèque générale de Rabat[5].

De l'auteur, on ne sait que peu de choses : Ibn Khaldūn le cite dans sa Muqaddima pour préciser que, dans son Raf^c al-Ḥijāb, Ibn al-Bannā' "rivalise avec le Fiqh al-Ḥisāb d'Ibn Mun^{c}im et avec le Kāmil d'al-Aḥdab"[6]. Les anciens biographes du Maghreb que nous avons pu consulter ne le mentionnent pas, même lorsqu'il leur arrive de s'étendre sur la vie et l'oeuvre de mathématiciens d'une moindre envergure et qui se sont nourris du contenu de son livre. Quant aux biographes ou aux historiens occidentaux, comme H.P-J. Renaud et H. Suter[7], ils le confondent avec le géomètre et astrologue Muḥammad Ibn ^{c}Abd al-Mun^{c}im qui aurait vécu en Sicile dans la cour de Roger II[8].

L'ouvrage d'Ibn Mun^{c}im était pourtant bien connu des mathématiciens des XIII^e-XIV^e siècles de l'occident musulman dont il nous reste des travaux. Plusieurs références explicites et surtout plusieurs emprunts sont là pour le confirmer : Ibn al-Bannā' ne le cite qu'une fois mais un certain nombre de paragraphes de son Raf^{c} al-Ḥijāb est inspiré de sections du Fiqh al-Ḥisāb[9]. Après lui, son élève al-Ābilī en a vraisemblablement intégré des aspects importants dans son enseignement ; ce qui expliquerait,peut-être, que son élève Ibn Khaldūn en parle dans sa Muqaddima. Ibn Haydūr l'évoque dans sa Tuḥfat aṭ-Ṭullāb à propos de l'utilisation des bases non décimales et lui emprunte son exemple de combinaisons des couleurs sans le nommer et sans dire un seul mot de son travail[10]. Plus explicite, Abū Zakariyyā al-Andalusī le cite aux côtés de mathématiciens andalous comme az-Zahrāwī, Ibn Bundūd, Ibn Ṭāhir, al-Qurashī, ou maghrébins comme al-Ḥaṣṣār, al-Ghazzī, al-Qarāfī, et pour la démonstration de certaines propositions algébriques, il ne renvoie qu'au Fiqh al-Ḥisāb[11].

Malheureusement, s'adressant au milieu relativement informé des mathématiciens, ces auteurs n'ont peut-être pas jugé utile de dire plus, lorsqu'ils en avaient les moyens, sur la vie et l'oeuvre d'Ibn Mun^{c}im. Cette situation n'est d'ailleurs pas exceptionnelle puisqu'elle concerne autant des savants comme al-Mu'taman, Ibn Sayyid, al-Qurashī, al-Ḥaṣṣār, pour ne citer que les plus importants des XI^{e}-XIII^{e} siècles.
En fait, le peu d'informations dont nous disposons, nous l'avons déduit de notre lecture de l'introduction du Fiqh al-Ḥisāb dans laquelle l'auteur rend hommage à son protecteur et aux hommes de sa dynastie entermes suffisamment clairs,à notre avis,pour permettre de le situer dans le temps. Voici l'essentiel de ce qui y est dit : "Ceci est un livre qui renferme les deux sciences théoriques du nombre et ses deux sciences appliquées et qui réunit tous ses fondements et ses démonstrations. Il a été rédigé par Aḥmad Ibn Mun^{c}im al-^{c}Abdarī qui l'a commencé par les louanges à Dieu le très haut. Il a dit : Louange à Dieu qui nous a guidé vers cela [car] nous n'aurions pas su nous diriger si Dieu ne nous avait pas guidés[12]. Que Dieu bénisse l'élu Muḥammad et qu'il accorde sa satisfaction à l'Imām infaillible, au Mahdī connu qui a révélé les si-

gnes de la religion après leur effacement (...) et à ses successeurs bien dirigés qui ont revivifié la foi (...).
Que la prière soit sur notre maître et seigneur le khalife, l'imām le prince des croyants Abū ᶜAbdallāh, le fils des khalifes bien dirigés, le défenseur victorieux de la religion de Dieu, le persécuteur des athées, qui a brandi l'étendard et le flambeau de la religion, qui a repoussé avec détermination les hypocrites et les a réprimés avec fermeté, qui, prenant passionnément le parti de l'Islam, l'a soutenu, l'a raffermi et lui a apporté des victoires (...), qui a éteint le brasier des guerres lorsqu'il s'est enflammé et a calmé les vagues des soulèvements lorsqu'ils ont éclaté. (...) Comme sa Majesté, que Dieu l'assiste, réunit les savants et qu'il soutient les gens célèbres, qu'auprès d'elle tout homme de science se sécurise et répand sa science et tout homme de qualité se réfugie, trouvant ainsi un cadre favorable où s'épanouissent son nom et son oeuvre (...), je lui ai offert le meilleur de la science en composant un ouvrage sur le calcul, complet et renfermant [tous ses aspects] , que j'ai intitulé "la science du calcul". Une partie [du contenu de ce livre] , je l'ai empruntée aux écrits des Anciens et l'autre, je l'ai [moi-même] inventée, à l'aide de leurs méthodes de raisonnement et de leurs [techniques de] démonstration".[13]

Les détails de ce passage, sa formulation et les allusions qui y sont faites à des événements de l'histoire du Maghreb nous amènent aux conclusions suivantes :

Le mahdi auquel l'auteur adresse ses louanges est indiscutablement Muḥammad Ibn Tumart, le fondateur de la dynastie almohade qui succéda aux Almoravides après une longue lutte idéologique et de violents affrontements armés. Cette dynastie fut la seule à régner sur un empire maghrébin s'étendant de l'Atlantique au golfe de Gabès et des confins du Sahara au détroit de Gibraltar, et la dernière à avoir joué durablement un rôle politique important en Espagne.

Les expressions qu'utilise l'auteur pour parler d'Ibn Tumart étaient courantes à l'époque et ne deviendront taboues qu'après le re-

tour en force de la vague malékite du XIIIe siècle[14]. Quant à l'expression "khalifes bien dirigés" qui était traditionnellement réservée aux quatre premiers successeurs du Prophète, elle a été volontairement utilisée pour désigner ^{c}Abd al-Mu'min, lieutenant d'Ibn Tumart et premier khalife almohade et, après lui, ses descendants qui lui ont succédé sur le trône, marquant ainsi, semble-t-il, une volonté de retour aux traditions premières, avec la répétition des différentes phases du début de l'Islam. Dans le même esprit, ils porteront le titre de "prince des croyants", signifiant par là la prétention de la dynastie à unifier toute la communauté musulmane.
Or parmi les personnages connus de cette dynastie et dont les chroniqueurs rapportent les noms et certains aspects de la vie, il n'y a pas moins de trois qui ont pour kunya Abū ^{c}Abdallāh et pour prénom Muḥammad. Il y eut tout d'abord Abū ^{c}Abdallāh Muḥammad Ibn ^{c}Abd al-Mu'min qui a bien été désigné pour succéder à son père, mais ayant été prématurément déchu, il n'a pu porter le titre khalifal d'amīr al-mu'minīn[15]. Puis, il y eut le quatrième khalife Abū ^{c}Abdallāh Muḥammad Ibn Ya^{c}qūb, surnommé an-Nāṣir qui régna de 1199 à 1213 (595-610 H.) et enfin, le hafside Abū ^{c}Abdallāh Muḥammad Ibn Zakariyyā surnommé al-Mustanṣir qui régna sur l'Ifriqiyya de 1249 à 1277 (647-675 H.).
Mais si ces deux derniers personnages ont porté, chacun, le titre d'amīr al-mu'minīn et si, au vu des événements qui ont marqué leurs règnes, ils peuvent être, tous les deux, concernés par les louanges de l'auteur et par les allusions à leur rôle de mécène pour les arts les lettres et les sciences, certains détails laissent à penser toutefois qu'il s'agit bien, ici, d'an-Nāṣir le quatrième khalife almohade : Ibn Mun^{c}im utilise en effet l'expression "fils des khalifes biens dirigés" qui convient plus à an-Nāṣir qui est l'arrière petit-fils de ^{c}Abd al-Mu'min qu'à al-Mustansir qui est un descendant d'Abū Ḥafṣ ^{c}Umar al-Hintātī, un autre compagnon du mahdi dont la famille n'a, à aucun moment, accédé au khalifat, se contentant de gouverner l'Ifriqiyya. D'ailleurs, un peu plus loin, l'auteur fera allusion à son surnom honorifique - an-Nāṣir

li dīni-llāh - en l'intégrant dans sa prose rimée comme une qualité du prince.

Les louanges de l'auteur sont malheureusement trop vagues pour qu'on puisse les rattacher à des événements précis d'an-Nāṣir qui a eu, comme ses prédécesseurs et tout au long de son règne, à combattre les partisans des Almoravides, à lutter sur le front idéologique contre les malékites et à assurer la défense de l'Islam en terre d'Espagne, trois préoccupations qui apparaissent en filigrane dans l'énumération des actions du khalife en question. Pourtant compte tenu du caractère très appuyé des louanges concernant la protection de l'Islam et la répression des révoltes, nous sommes tentés de situer la rédaction du Fiqh al-Ḥisāb entre 1207 et 1212, c'est à dire juste après l'expédition victorieuse des armées khalifales en Ifriqiyya, contre les troupes d'Ibn Ghaniyya et avant la grande défaite de ces mêmes armées, en Espagne, à la bataille d'al-ᶜUqāb (Las Navas de Tolosa).

Cela étant dit, aucune référence, aucune digression de l'ouvrage ne nous permettent de deviner le lieu de sa rédaction, de situer géographiquement l'auteur ou même de conclure à sa présence à Marrakech, dans la cour du khalife[16].

On sait qu'à diverses périodes du règne d'an-Nāṣir, ont vécu,dans la capitale almohade ou dans la cour même, des savants aussi célèbres que les médecins Ibn Zuhr[17], le grammairien Abū Mūsā al-Jazūlī[18] ou l'algébriste Ibn al-Yāsamīn[19]; ce qui suppose l'existence d'activités scientifiques multiformes poursuivant ou renouvelant des traditions antérieures, grâce au soutien d'un mécénat généreux et souvent éclairé qui ne s'est pas interrompu depuis le règne de ᶜAbd al-Mu'min. Malheureusement, les chroniqueurs et les biographes connus ont négligé totalement l'histoire de l'activité mathématique de cette époque et l'on est réduit à interroger les ouvrages d'enseignement eux-mêmes pour espérer dégager les éléments d'une tradition ou tout simplement découvrir des noms de savants ou des titres d'ouvrages marquants. La lecture du Fiqh al-Ḥisāb confirme bien cela, mais les indications qu'il renferme, sans être négligeables pour l'histoire des sciences en occident musulman, ne permettent pas de lever le voile sur l'activité mathématique au Maghreb, à l'époque almohade. Les nombreuses références à l'ouvrage d'al-Mu'taman [20] que l'on y découvre et les critiques faites à des écrits d'Ibn Sayyid et d'Ibn Ṭāhir[21] nous informent en fait sur une tradition mathématique plus ancienne, mais toujours vivante : Celle de l'Andalousie du XI^{e} siècle[22].

LA COMBINATOIRE DANS L'ENSEIGNEMENT D'IBN MUN^{c}IM.

Comme le précise l'auteur dans son introduction, le but visé était de regrouper, dans un même livre, les deux aspects du calcul "car, dit-il, lorsque j'ai consulté les ouvrages qui avaient été écrits sur ce sujet, j'ai constaté que les uns étaient pratiques [mais] sans aspects théoriques et les autres théoriques, sans [applications] pratiques"[23]. En fait, cette division se trouve elle-même subordonnée à une autre qui correspond à la distinction classique entre nombres entiers, rationnels et irrationnels, même si le livre ne traite que des deux premiers thèmes dans deux grands chapitres distincts, les irrationnels n'étant abordés qu'indirectement, en guise de conclusion et en liaison avec les fractions.
C'est dans la onzième section du premier chapitre qu'est traitée l'analyse combinatoire. Intitulée "le dénombrement des mots qui sont tels que l'être humain ne peut s'exprimer que par l'un d'eux" cette section n'est pourtant pas, aux yeux de l'auteur, un ensemble de "calculs pratiques". Il prend soin en effet de préciser,au cours de son exposé, qu'il se propose d'abord de traiter le problème d'une manière générale, même s'il est contraint,pour fixer les idées, de le poser en termes particuliers, en se servant de l'alphabet arabe, puis de faire suivre ses démonstrations d'exemples et de tableaux. Mais, comme le confirme l'analyse que nous exposons plus loin, la généralité dont parle l'auteur ne sort pas du cadre linguistique fixé et concerne l'établissement de formules mathématiques et procédés en vue de dénombrer les mots de n'importe quelle longueur, dans n'importe quelle langue.
Malgré tout, cette étude dépasse objectivement le cadre linguistique dans lequel elle a été formulée et réalisée, tant par la ma-

nière de poser les problèmes et de les relier l'un à l'autre, par les méthodes de raisonnement utilisées, que par les résultats établis. C'est bien ce que semblent avoir retenu des mathématiciens postérieurs, comme Ibn al-Bannā' et Ibn Haydūr.

1. Le triangle arithmétique.

Le contenu de cette section est présenté par l'auteur comme une extension des résultats d'al-Khalīl Ibn Aḥmad et une généralisation de ses calculs permettant de déterminer toutes les combinaisons possibles des éléments d'un alphabet quelconque[24]. A cet effet, Ibn Mun^{c}im commence par établir, à partir d'un ensemble de couleurs de soie qui jouera le rôle de modèle abstrait, une règle permettant de déterminer toutes les combinaisons possibles de n couleurs, p à p. Pour cela, il est amené à construire un tableau numérique, à identifier ses éléments avec les combinaisons cherchées et à en déduire la relation :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \ldots + C_{p-1}^{p-1}$$

Ce faisant, il donne, pour la première fois à notre connaissance selon une démarche strictement combinatoire, le fameux triangle arithmétique que les algébristes du centre de l'empire, comme al-Karajī avaient déjà construit par une méthode algébrique, en vue de déterminer les coefficients du binôme[25].
Il est à regretter que, craignant "les excès et les longueurs" , l'auteur ait renoncé à exposer les "propriétés extraordinaires", selon ses propres termes, qu'il a su dégager de la simple comparaison des éléments du tableau. Cela signifie-t-il qu'il a déduit certaines des relations que formulera beaucoup plus tard Pascal dans son traité sur les combinaisons et surtout qu'il a réussi à identifier les éléments du triangle arithmétique aux coefficients du binôme ?
Si, compte tenu de ses propres remarques, on peut répondre à la première question par l'affirmative, en pensant que cela a même pu faire l'objet d'un commentaire oral à l'intention des étudiants ,

comme c'était l'usage, en revanche il est difficile d'admettre que l'auteur, ayant saisi la signification algébrique de son tableau, ne s'en est pas servi ou n'y a pas fait allusion dans la septième section de son livre, au moment du calcul des coefficients du binôme, pour n = 2, 3, 5, 7. D'ailleurs, au vu des traités maghrébins connus, ses successeurs ne semblent pas, non plus, avoir fait le lien entre les deux aspects de ce tableau[26].

2. Combinaisons et permutations avec répétitions.

L'étude se poursuit par l'établissement, selon des démarches combinatoires reposant sur l'induction, des formules relatives aux permutations, avec ou sans répétitions, d'un ensemble de lettres et celles donnant, par récurrence, le nombre de lectures possibles d'un même mot de n lettres, compte tenu de tous les signes (voyelles et sukuns pour l'arabe), utilisés par une langue donnée.
L'auteur conclut cette première partie en établissant une formule des arrangements, sans répétition, de n objets p à p qui tient compte des signes accompagnant les lettres.
La seconde partie, beaucoup plus longue, vise à dénombrer les combinaisons avec répétitions, en adoptant une démarche analogue à la précédente et qui nécessite le recours à des tableaux de nombres. C'est d'ailleurs cette même démarche que suivra Mersenne, au XVII^e^ siècle[27], avant que Frénicle n'établisse la formule donnant ce qu'il appelle les "combinaisons de changement" dans lesquelles "il se trouve plusieurs choses semblables"[28].
Mais si, sur le plan pratique, cette méthode s'avère longue et pénible, sur le plan théorique, elle aura permis à Ibn Mun^{c}im d'aborder des problèmes de partitions de nombres et surtout de faire fonctionner, une nouvelle fois, des ensembles d'objets (respectivement des lettres d'un alphabet, des couleurs de soie, des filaments de couleurs), comme des modèles abstraits en identifiant, à chaque fois, les objets étudiés aux éléments du modèle. Il est à remarquer, toutefois, que le problème de partition n'est pas dégagé de son contexte et que l'on n'est pas encore en présence d'un modèle abstrait unique auquel sont rapportées les données de n'im-

porte quel problème combinatoire. Comme nous l'avons déjà montré, cette réduction à un seul modèle (l'ensemble des lettres d'un alphabet) apparaîtra, plus tard, dans les écrits des mathématiciens du XIV^{e} siècle. Mais le texte d'Ibn Mun^{c}im suggère fortement la méthode.

La troisième partie de la onzième section renferme, en plus de quelques applications, une série de tableaux qui permettent de déterminer, de proche en proche, tous les éléments (P_n, A_n^p, C_n^p, ...) qui interviennent dans le dénombrement des mots qu'il est possible de prononcer, dans une langue donnée.

Comme le précise l'auteur, cette partie n'existait pas dans la première version du livre. Elle a été rajoutée "après que l'ouvrage ait été recopié et qu'il fût entre les mains des étudiants" , dans le but d'illustrer les procédés généraux établis dans les deux premières parties.

L'auteur parle en effet, à propos de cette troisième partie, d'exemples et d'aspects particuliers, par opposition aux méthodes générales des deux premières parties. Ce qui nous amène à nous interroger sur les types de raisonnement utilisés pour établir les résultats et sur leur statut par rapport aux autres outils mathématiques.

Ces questions sont importantes dans la mesure où, pour l'auteur, l'aspect essentiel de l'exposé, dans chaque section de l'ouvrage, est bien l'établissement des règles générales et surtout leur justification. Cette volonté apparaît d'ailleurs dès le début de l'ouvrage lorsque Ibn Mun^{c}im rappelle la division classique des mathématiques en sciences théoriques et pratiques et lorsqu'il définit, en citant des passages du Kitāb al-Istikmāl d'al-Mu'taman les outils théoriques essentiels qu'il utilisera abondamment par la suite : L'analyse et la synthèse[29].

Or la lecture de la onzième section fait apparaître deux autres types de raisonnement que l'on pourrait qualifier,globalement, d'inductif et de combinatoire et qui sont utilisés sans recours à l'analyse et à la synthèse. Mais si le raisonnement inductif, dans ses différentes variantes (et avec le sens qu'il a gardé jusqu'au XVII^e siècle), est un outil traditionnel dans les mathématiques arabes, avec ses domaines priviligiés et son statut particulier, mais reconnu , on ne peut pas en dire autant du raisonnement combinatoire dont la seule présence dans les écrits mathématiques antérieurs au Fiqh al-Ḥisāb reste encore à établir (les quelques traces que nous avons déjà rencontrées étant des utilisations implicites, sous forme de résultats élémentaires, chez des mathématiciens tels que Thābit Ibn Qurra, al-Bīrūnī et as-Samaw-'al[30]).

Déjà l'importance de son intervention, dans cette onzième section, et surtout son utilisation pour établir des règles considérées comme générales et ayant caractère de propositions, apparaîssent comme une reconnaissance de fait du caractère mathématique de ce raisonnement, qui pouvait aboutir, en particulier grâce à un développement quantitatif de son champ d'application, à une reconnaissance explicite de cet outil. Mais, malgré la présence, après le XIII^e siècle et dans plusieurs autres ouvrages d'enseignement, de raisonnements et de propositions combinatoires déjà établies et opérant comme de nouveaux instruments, il ne nous est pas encore possible d'affirmer que cette reconnaissance a bien eu lieu.

DISCONTINUITE DANS LA TRADITION COMBINATOIRE.

En présentant sa section sur la combinatoire comme une extension et une généralisation des calculs attribués à al-Khalīl Ibn Aḥmad, l'auteur se situe d'emblée dans une tradition déjà ancienne, inaugurée au VIII^e siècle et transmise par les différentes écoles de linguistes et de grammairiens qui se sont succédés jusqu'au XII^e siècle. Ce qui ne manque pas de soulever des questions au sujet de la poursuite des préoccupations combinatoires, dans le cadre de cette tradition ou en dehors d'elle, et des éventuelles ruptures qui auraient eu lieu dans ce domaine. Par voie de conséquence, cela nous incite à nous interroger sur la paternité des résultats et des preuves exposés par Ibn Mun^c^im.

On aurait souhaité, par exemple, que l'auteur commençât sa section

par un rappel critique de cette tradition combinatoire, pour mieux apprécier les difficultés de la mathématisation qui y a été finalement introduite : En effet, à lire le paragraphe que consacre aṣ-Ṣuyūṭī au dénombrement des mots de la langue arabe, dans son Muzhir fī ᶜUlūm al-Lugha[31], on constate que depuis al-Khalīl Ibn Aḥmad, les méthodes de calcul varient d'un auteur à l'autre, qu'elles sont soumises à des préoccupations linguistiques (sur la nature des lettres qui composent les mots, sur les contraintes de la prononciation) qui n'ont peut-être pas favorisé le dégagement d'algorithmes généraux et, surtout, que ces méthodes ne sont pas exemptes d'erreurs, à la fois au niveau des résultats et au niveau des raisonnements qui les justifient[32]. Ce dernier aspect est particulièrement instructif dans la Jamhara d'Ibn Durayd où sont incomplètement exposées deux méthodes de calcul de nature différente : L'une est mécanique et semble utiliser des disques mobiles portant des lettres. Elle est présentée d'une manière confuse et incomplète. L'autre est mathématique et utilise les dénombrements des arrangements avec répétitions des lettres de l'alphabet, deux à deux, ..., cinq à cinq. La démarche est défaillante au niveau du dénombrement des combinaisons sans répétition[33].
Compte tenu de ces éléments et connaissant la pesanteur de la tradition mathématique au Maghreb et ailleurs, il nous est difficile d'attribuer à ce seul auteur, à la fois l'établissement de certains résultats absents du Kitāb al-ᶜAyn et d'autres ouvrages analogues, la mathématisation d'une série de propositions combinatoires et leur introduction comme sujet autonome dans un manuel d'enseignement.
L'auteur précise bien, au début de son livre, qu'il ne s'est pas contenté de rapporter les résultats et les démonstrations des anciens, mais sa formulation malheureusement stéréotypée et trop vague, ajoutée à notre ignorance de certains aspects de l'histoire de la combinatoire, entre le VIII^{e} et le XII^{e} siècle, ne nous permet pas de confirmer une contribution personnelle d'Ibn Munᶜim et d'apprécier son importance à partir d'une tradition orientale ou andalouse.

Cela étant, le caractère élaboré des résultats et des démarches exposés dans le Fiqh al-Ḥisāb et l'esprit de méthode qui s'en dégage, comparés, par exemple, aux tâtonnements et à l'absence de rigueur que l'on rencontre dans certains problèmes combinatoires au XVII^{e} siècle, nous incitent à reculer, bien en deçà de l'époque d'Ibn Mun^{c}im, les débuts de la mathématisation de cette discipline, dans le cadre de la science arabe.
En attendant que des éléments nouveaux viennent confirmer cette hypothèse ou la corriger, le Fiqh al-Ḥisāb reste le plus ancien ouvrage connu, de l'occident musulman, dans lequel ait été intégré avec son double aspect théorique et pratique, un chapitre autonome sur l'analyse combinatoire. Mais son importance ne s'arrête pas là : Au regard de la tradition linguistique au Maghreb, il apparait comme un aboutissement, dans la mesure où il expose une solution générale au problème posé. D'autre part, cet ouvrage représente, sur le plan strictement mathématique, un maillon important: Il marquerait la fin d'une étape dans les progrès de la combinatoire, celle du calcul par la technique des tableaux, et le début d'une autre étape, celle de l'extension du formulaire et de son utilisation pour résoudre des problèmes mathématiques, après que ces derniers aient été ramenés, à l'aide de bijections appropriées, à un modèle abstrait unique qui est l'ensemble des lettres d'un alphabet ou, plus généralement, un ensemble fini d'objets.
Mais si, à nos yeux, une matière et des instruments nouveaux semblent objectivement se constituer, nous ignorons le degré de conscience qu'en avaient ceux qui ont contribué à sa formation et l'importance qu'il leurs accordaient . En tout cas, cela n'est pas allé jusqu'à donner un nom à cette activité et à la distinguer des opérations classiques sur les entiers et ce, malgré l'utilisation de ses résultats dans d'autres parties des mathématiques.
Les causes sont à chercher dans plusieurs directions à la fois : Etat de la société elle-même et nature de ses activités et de ses préoccupations qui n'auraient pas permis un développement quantitatif de la combinatoire, absence d'institutions locales ou régionales chargées de renouveler les programmes et d'imposer, puis

de perpétuer l'enseignement de notions nouvelles et, pourquoi pas, empreinte de certains spécialistes dont l'autorité pouvait à tel ou tel moment influer sur le contenu d'un enseignement scientifique, en le figeant ou en l'allégeant.
A cela, il faudrait peut-être ajouter le rôle de l'environnement idéologique et politique, incontestable dans certains domaines comme la philosophie ou la grammaire, mais plus difficile à cerner lorsqu'il s'agit d'en suivre les effets éventuels sur l'évolution de la production et de l'enseignement mathématiques ou sur le destin des hommes qui ont oeuvré pour cette science[34].
Ce sont les conditions et les formes dans lesquelles la tradition combinatoire s'est transmise à partir du XIII^{e} siècle qui nous font croire à ce rôle : Pour ce qui est du Maghreb, nous avons déjà montré comment cette tradition a été entretenue jusqu'au XV^{e} siècle, grâce à l'enseignement d'Ibn al-Bannā' et de ses élèves[35].
Mais quand on analyse ce qu'ont écrit les auteurs qui ont plus ou moins abordé des questions à caractère combinatoire, on est frappé par le peu de référence ou même d'allusion au travail d'Ibn Mun^{c}im. Est-ce là le résultat d'une réaction idéologique orthodoxe et d'un rejet violent de l'héritage des Almohades, qui auraient entrainé la mise à l'index d'ouvrages de toute sorte produits à la gloire des khalifes mu'minides ?

L'histoire culturelle de cette dynastie n'étant pas encore écrite, on ne peut même pas procéder par analogie ou par recoupements, pour suggérer des premiers éléments de réponse. Cela étant, il ne faudrait pas exagérer ce rôle à une époque où d'autres causes, plus profondes, à la fois extérieures et intérieures à la société maghrébine intervenaient, depuis le XI^{e} siècle, dans l'évolution des activités scientifiques. Cette réaction idéologique et ses effets en mathématique seraient plutôt des effets induits par des causes plus structurelles touchant en particulier le domaine économique et concernant l'espace musulman médiéval dans son ensemble. Ce sont ces causes qui pourraient expliquer, en partie, les ruptures observées dans plusieurs secteurs de la tradition mathématique arabe et qui se sont apparemment traduites par l'abandon progressif, non seulement de la combinatoire, mais également des techniques d'approximation, de la géométrie des coniques et de la théorie des nombres, pour ne citer que les matières dont l'enseignement, au Maghreb, est attesté par plusieurs ouvrages[36] et qui avaient, sur la combinatoire, l'avantage d'avoir longtemps bénéficié, en Andalousie et au centre de l'empire, de solides traditions de recherche et d'enseignement.

* * * * *

ANALYSE ET COMMENTAIRES

Préliminaires et conventions (*).

Le but de la section 11, du chapitre I du Fiqh al-Ḥisāb, est de décrire les procédés qui permettent de dénombrer tous les mots possibles d'une langue.
Al-Khalīl Ibn Aḥmad, dans son Kitāb al-ᶜAyn, n'a considéré que les mots de moins de cinq lettres, sans répétition de lettres.
Cette section traite des mots avec répétition de lettres et du dénombrement des mots sextilitères [et d'un nombre plus grand ou plus petit de lettres] avec ou sans répétitions, ainsi que du dénombrement de tous les mots possibles d'une langue donnée.
Les conventions adoptées dans cette section sont les suivantes :

1.- Si n est le nombre de lettres d'un alphabet, on considère, ici, n=28.

2.- Si k est le nombre de lettres d'un mot, compte tenu des affixes et des répétitions de lettres, on convient que : $k \leq 10$.
Exemple : ارسطاطاليس [Arisṭāṭālīs] .

3.- Le nombre de signes utilisés, pour vocaliser une lettre ou la rendre quiescente, est égal à 4 : Trois voyelles et un sukun [que l'on notera respectivement : a, o, i, s].

4.- Une suite de signes ne commence jamais par un sukūn et deux sukuns ne se suivent jamais dans une suite de signes.

On pourrait opposer à ces conventions les objections suivantes:

1.- Les non-Arabes utilisent, dans leurs parlers, d'autres lettres, comme celles qui se prononcent entre le kāf et le qāf ou entre le jīm et le shīn.

2.- Il y a des mots arabes de plus de dix lettres comme: ليستخلفنهم [la Yastakhlifannahum] .

(*)- Les phrases entre crochets ont été ajoutéees par nous pour expliciter l'exposé de l'auteur. Le reste du texte suit fidèlement ses démarches et ses formulations en en modernisant l'expression.

3.- Le nombre de voyelles est plus grand, si on tient compte par exemple, de l'inflexion vocalique dans la langue arabe, ou de voyelles d'autres langues.

4.- D'autres langues permettent de commencer un mot par un sukun.

La réponse à ces objections est la suivante : Le but, en fait, est de décrire la méthode générale à l'aide de laquelle il est possible de dénombrer les mots quel que soit le nombre de leurs lettres. Les conventions posées,concernant le nombre de lettres de l'alphabet, la longueur maximale des mots et le nombre de signes, ne visent donc qu'à illustrer la méthode qui est valable pour tous les cas.

Problème I :

Etant donné 10 couleurs de soie, avec lesquelles on veut confectionner des houppes d'une, de deux, ect ..., jusqu'à 10 couleurs, déterminer le nombre de houppes de p couleurs, p fixé, et le nombre total de houppes d'une, de deux, ..., de 10 couleurs.

Procédé : [Tableau I].

1.- Calcul de C_{10}^{1} :

On dispose les 10 couleurs sur une première ligne (en écrivant 1, dans chaque case de cette ligne qui correspond aux houppes d'une couleur), ainsi :

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad . \quad . \quad . \quad 1 \quad 1$$

D'où :

$$C_{10}^{1} = 10$$

2.- Calcul de C_{10}^{2} :

On l'obtient à partir de l'énumération suivante [c_1, c_2, ..., c_{10} étant les dix couleurs] :

(c_2,c_1)

(c_3,c_1) (c_3,c_2)

$$(c_4, c_1) \quad (c_4, c_2) \quad (c_4, c_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(c_{10}, c_1) \quad (c_{10}, c_2) \; : \; \ldots \; (c_{10}, c_9)$$

Le procédé consiste donc à combiner la $p^{\text{ième}}$ couleur avec les $(p-1)$ couleurs qui la précèdent. D'où, sur la seconde ligne :

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad 8 \quad 9$$

Donc :

$$C_{10}^2 = \sum_{1}^{9} k$$

D'une manière générale, on a :

$$C_n^2 = \sum_{1}^{n-1} k$$

3.- <u>Calcul de</u> C_{10}^3 :

On obtient les combinaisons selon le procédé suivant : On combine chaque couleur, à partir de la 3^e, avec les couleurs qui précèdent, prises 2 à 2, selon l'énumération suivante :

$$(c_3, (c_2, c_1))$$
$$(c_4, (c_2, c_1)) \; (c_4, (c_3, c_1)) \; (c_4, (c_3, c_2))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(c_{10}, (c_2, c_1)) \; \ldots\ldots\ldots \; (c_{10}, (c_9, c_8))$$

Mais chaque couple de couleurs est un élément de la deuxième ligne. D'où la troisième ligne que l'on obtient ainsi [en notant a_{ij} l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne] :

- a_{33} est le nombre de combinaisons 3 à 3 de c_1, c_2, c_3. D'où :

$$a_{33} = a_{22} = 1$$

- a_{34} est le nombre de combinaisons 3 à 3 de c_4, avec les couples de (c_1,c_2,c_3). D'où :

$$a_{34} = a_{22} + a_{23} = 3$$

- D'une manière générale, a_{3p} est le nombre de combinaisons 3 à 3 de c_p, avec les couples de $(c_1,c_2,c_3, \ldots, c_{p-1})$. D'où :

$$a_{3p} = \sum_{2}^{p-1} a_{2k} = \sum_{1}^{p-2} k$$

D'où, finalement :

$$C_{10}^{3} = \sum_{3}^{10} a_{3p}$$

4.- <u>Calcul de</u> C_{10}^{4} :

On l'obtient en combinant c_4 avec (c_1,c_2,c_3), puis c_5 avec les triplets de $(c_1, \ldots, c_4)$, puis c_6 avec les triplets de $(c_1,\ldots,c_5)$ et ainsi de suite. On obtient donc les éléments de la 4^e ligne, à partir de ceux de la 3^e, ainsi :

$$a_{44} = a_{33} = 1$$

$$a_{45} = a_{33} + a_{34} = 4$$

$$a_{46} = a_{33} + a_{34} + a_{35} = 10$$

Et, d'une manière générale :

$$a_{4p} = \sum_{3}^{p-1} a_{3k}$$

[D'où, finalement :

$$C_{10}^{4} = \sum_{4}^{10} a_{4p} \quad]$$

5.- <u>Calcul de</u> C_{10}^{m} , $5 \leq m \leq 10$.

La $m^{\text{ième}}$ ligne s'obtient, à partir de la $(m-1)^{\text{ième}}$, selon le même procédé :

$$a_{mp} = \sum_{m-1}^{p-1} a_{m-1k} \qquad (1)$$

(D'où :

$$C_{10}^{m} = \sum_{m}^{10} a_{mp} \quad ; \quad 5 \leq m \leq 10.)$$

<u>Propriétés du tableau</u> :

Le tableau I possède une symétrie qui fait apparaître des relations entre ses éléments, ainsi que certaines propriétés que l'auteur juge trop long à développer et qu'il laisse comme sujet de réflexion aux étudiants.

<u>Utilisation du tableau pour déterminer les</u> C_n^p :

On suppose : n quelconque et $p \leq n$.

1.- Si $n \leq 10$, on utilise le tableau I, selon deux méthodes :

a)- a_{pn} étant l'élément de la $p^{\text{ième}}$ ligne et de la $n^{\text{ième}}$ colonne du tableau, on a :

$$C_n^p = \sum_{p}^{n} a_{pk} \qquad (2)$$

b)- La seconde est meilleure et plus simple [car elle permet une lecture directe des C_n^p , dans le tableau]. En effet :

$$C_n^p = a_{p+1\ n+1} \qquad (3)$$

2.- Si $n > 10$, on agrandit le tableau [en augmentant le nombre de colonnes], jusqu'à ce que le nombre de couleurs considérées soit égal à n, puis on procède comme dans le premier cas.

Remarques :

1.- Dans ce problème, les houppes jouent le rôle d'un modèle abstrait auquel sera ramené, pour les besoins du dénombrement, l'ensemble particulier des lettres d'un alphabet. L'avantage de ce modèle, comme on le verra encore mieux par la suite, est d'être tridimensionnel, ce qui exclut, de fait, toute considération d'ordre ou de position dans la configuration.Quand on sait que ces propositions faisaient l'objet d'un enseignement oral, on peut penser que les préoccupations pédagogiques n'étaient pas tout à fait absentes dans le choix de ce modèle.

2.- Chaque cellule a_{pn} ($n \geq 2$), du tableau, a deux significations chez Ibn Mun^{c}im :

a)- a_{pn} représente d'abord l'ensemble des combinaisons p à p des n premières couleurs qui contiennent, toutes, la couleur c_n.

b)- La couleur c_n étant dans chaque combinaison précédente, a_{pn} équivaut donc aux combinaisons des (n-1) premières couleurs, (p-1) à (p-1). D'où :

$$a_{pn} = C_{n-1}^{p-1}$$

C'est vraisemblablement cette démarche,ou cette simple constatation, qui a permis à Ibn Mun^{c}im de dégager la relation entre les a_{pn} et les C_{n-1}^{p-1} .Mais il ne le dit pas explicitement, réservant peut-être cela, comme c'était l'usage, aux commentaires oraux. Cette démarche n'est évidemment pas applicable aux éléments de la première ligne qui n'ont, aux yeux de l'auteur, qu'une seule signification : a_{1n} est le nombre de houppes que l'on peut composer avec la n^{ième} couleur. Il ne peut être associé à une combinaison de n objets 0 à 0 qui n'a pas de signification concrète et qui ne peut être que le résultat d'une convention semblable à celle qui est adoptée pour la puissance 0 dans la théorie des polynômes ou dans les séries géométriques. C'est encore là, à notre avis, un exemple de difficulté qui ne pouvait être surmontée sans l'introduction d'un symbolisme adéquat.

3.- L'auteur ayant établi explicitement la correspondance entre les C_n^p et chaque élément du tableau (sauf ceux de la première ligne, bien sûr), le problème I s'avère être un procédé général pour déterminer, de proche en proche, tous les C_n^p . Ce procédé repose sur la relation :

$$C_n^p = \sum_{p-1}^{n-1} C_k^{p-1} \qquad (4)$$

qui équivaut à celle-ci :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p \qquad (5)$$

puisque, d'après (4), on a :

$$C_{n-1}^p = \sum_{p-1}^{n-2} C_k^{p-1}$$

Bien que l'auteur n'énonce pas la relation (5) (qui se lit aisément sur le tableau, lorsqu'on a, au préalable, dégagé la relation (1), comme il le fait), c'est bien cette relation qu'il semble utiliser pour construire son tableau des C_n^p , pour $1 \leq n \leq 28$ et $1 \leq p \leq 10$. (Voir tableau IV).

4.- Il est intéressant de comparer la démarche d'Ibn Mun^{c}im, dans la construction du triangle arithmétique, à celles de Cardan et de Tartaglia, au XVI^e siècle, ou à celle de Mersenne, au XVII^e siècle.:

a)- Comme Ibn Mun^{c}im, ces trois auteurs visaient, avec la construction de leur tableau, la résolution de problèmes concrets : Dénombrement de tous les groupes de p hommes ($1 \leq p \leq 10$) pris parmi 10 chez Cardan[37], détermination du nombre de combinaisons des 6 faces de n dés (correspondant aux combinaisons avec répétitions des 6 faces n à n) chez Tartaglia[38], et enfin calcul du nombre de chants (ou de mots ou de jeux de cartes) de 12 notes (ou lettres ou cartes) prises parmi 36 notes (ou lettres ou cartes), chez Mersenne[39]. Leurs démarches aboutissent aux trois configurations suivantes :

1	1	1	1	1
2	3	4	5	
3	6	10		
4	10			
5				

(Cardan)

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35
1	5	15	35	70

(Tartaglia)

1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	10	15	21
4	10	20	35	56
5	15	35	70	126

(Mersenne)

b)- Ces trois auteurs ne justifient pas les procédés qui permettent de déterminer chaque élément du tableau et ne donnent pas la signification de chacun de ces éléments ainsi que les relations internes du tableau.

5.- On ne peut que regretter le silence d'Ibn Mun^{c}im au sujet des propriétés "extraordinaires" qu'il a pu lire dans le triangle arithmétique et surtout de leur interprétation en termes de règles combinatoires. On est donc réduit à des conjectures et à des conclusions prudentes découlant de sa manière d'utiliser le tableau :

On peut ainsi penser que les relations (4) et (5) (que nous avons écrites en langage combinatoire) ont été, non seulement dégagées, mais également utilisées pour construire le tableau IV des C_n^p .
Le reste des formules peut être divisé en deux catégories. Les unes peuvent être déduites de la "géométrie" du tableau des nombres, après que l'on ait observé les symétries ou les rotations nécessaires qui permettent de faire correspondre soit des couples de nombres, soit des couples de lignes ou de colonnes. Parmi celles-ci, on peut citer :

$$C_n^p = C_n^{n-p} \qquad (6)$$

$$C_n^p = \sum_{k,j}^{n} C_k^j \quad ; \; j \geq p \; ; \; k-j = n-p-1 \qquad (7)$$

Quant aux formules de la seconde catégorie, elles ne sont pas directement "lisibles" dans le tableau, mais nécessitent une étude comparative, selon le point de vue des suites numériques, des éléments des lignes ou des colonnes. Parmi elles, on peut citer :

$$C_n^p : C_n^{p-1} = \frac{n-p+1}{p} \qquad (8)$$

$$C_n^p : C_{n-1}^p = \frac{n}{n-p} \qquad (9)$$

$$C_n^p : C_{n-1}^{p-1} = \frac{n}{p} \qquad (10)$$

6.- C'est selon une démarche absolument identique à celle d'Ibn Mun^{c}im, mais illustrée par un exemple, que Pascal dégagera les C_n^p , à partir des éléments du triangle arithmétique. Dans son chapitre intitulé "usage du triangle arithmétique pour les combinaisons", il énonce la proposition III ainsi : "Etant proposés deux nombres, trouver combien de fois l'un se combine dans l'autre par le triangle arithmétique. Soit les nombres proposés 4, 6; il faut trouver combien 4 se combine dans 6.
Premier moyen : Soit prise la somme des cellules du 4^e rang du 6^e triangle : Elle satisfera à la question.
Second moyen : Soit prise la 5^e cellule de la 7^e base, parceque ces nombres excèdent de l'unité les données 4, 6, son nombre est celui qu'on demande"[40].

<u>Problème</u> II :

Déterminer le nombre de permutations des lettres d'un mot dans lequel ne se répète aucune lettre.

On note n le nombre de lettres et P_n le nombre de permutations.

<u>Procédé</u> :

1.- Si $n = 2 \Longrightarrow P_n = 2$,

car on a deux configurations :

$$(a,b) \quad \text{et} \quad (b,a)$$

2.- Si $n = 3 \Longrightarrow P_n = 6$,

car chaque configuration précédente fournit, selon l'énumération suivante, trois nouvelles configurations :

$$(a,b) \longrightarrow (c,a,b),(a,c,b),(a,b,c)$$

3.- Si $n = 4 \Longrightarrow P_n = 24$. En effet :

$$(a,b,c) \longrightarrow \begin{cases} (d,a,b,c),(a,d,b,c) \\ (a,b,d,c),(a,b,c,d) \end{cases}$$

4.- Si $n = 5 \Longrightarrow P_n = 5.24 = 120$. En effet :

$$(a,b,c,d) \longrightarrow \left| \begin{array}{l} (e,a,b,c,d),(a,e,b,c,d) \\ (a,b,e,c,d) \\ (a,b,c,e,d),(a,b,c,d,e) \end{array} \right.$$

Il en est de même pour $n > 5$. On en déduit donc :

<u>Règle générale</u> :

Si n est le nombre de lettres, supposées toutes distinctes, d'un mot donné, on a :

$$P_n = 1.2.3. \ldots .n \qquad (11)$$

<u>Remarques</u> :

1.- La preuve que donnera plus tard Ibn al-Bannā' est identique à celle-ci, mais exprimée seulement pour $n = 4$ [41].

- Ibn Haydūr, dans Tuḥfat aṭ-Ṭullāb explicite le raisonnement d'Ibn al-Bannā', en écrivant les différentes configurations pour $n = 2$ et $n = 3$ [42].

- Quant à Ibn Khaldūn, il donne dans sa Muqaddima P_2 et P_3

en les associant aux permutations de 2 et 3 lettres qui interviennent dans le calcul de C_n^2 et C_n^3 . [43]

2.- Si on compare la preuve enseignée par Ibn Mun^{c}im et ses successeurs, à celles données par Mersenne et Frénicle, on constate que :

a)- Il n'y a pas trace, chez Mersenne,d'une quelconque justification de la formule. Il se contente de la vérifier sur les cas qu'il étudie, en la considérant comme évidente.

b)- La preuve de Frénicle pour cette formule, qu'il appelle la "combinaison d'ordreI", est légèrement différente au niveau de la formulation. Elle correspond à l'énumération des permutations commençant toutes par a, puis de celles commençant toutes par b, ainsi de suite.

3.- Si à aucun moment le résultat n'est exprimé sous forme récurrente :

$$P_n = n.P_{n-1} \quad ,$$

il semble que ce soit cette relation qui est utilisée par Ibn Mun^{c}im, pour dresser rapidement le tableau V.

4.- Il n'y a, ni chez Mersenne ni chez Frénicle, un véritable raisonnement par récurrence. La preuve est fondamentalement identique chez Frénicle et chez Ibn Mun^{c}im.

<u>Problème</u> III :

Déterminer le nombre de permutations, avec répétitions, d'un mot de n lettres.

<u>Procédé</u> :

1.- Si une lettre est répétée k fois et si on note P_n^k le nombre cherché, alors :

$$P_n^k = \frac{P_n}{P_k} \qquad [= \frac{n!}{k!}] \tag{12}$$

<u>Preuve</u> :

En effet, chaque permutation correspond à une configuration des k lettres identiques qui fourniraient à leur tour, si elles étaient toutes distinctes, P_k permutations.

2.- Si p lettres $[1 < p < n]$ sont répétées, chacune respectivement $k_1, k_2, \dots, k_p$ fois $[k_1 + \dots + k_p = n]$, on calcule :

$$P_{k_1}\ ,\ P_{k_2}\ ,\ \dots\ ,\ P_{k_p}$$

puis le produit :

$$P_{k_1} \cdot P_{k_2} \cdot \dots \cdot P_{k_p}$$

D'où le résultat :

$$P^{k_1, \dots, k_p} = \frac{P_n}{P_{k_1} \dots P_{k_p}} \qquad (13)$$

<u>Preuve</u> :

Elle est identique à celle du cas précédent où une seule lettre était répétée.

<u>Remarques</u> :

1.- Mersenne donne (12) sous une forme générale et (13) sous une forme particulière ; mais, dans les deux cas, il ne donne pas de preuve[44].

2.- Frénicle appelle "combinaisons d'ordre II" les permutations avec répétitions. Il énonce (12) et (13) sous une forme générale, mais ne donne aucune preuve pour ces deux relations[45].

3.- Dans son Ḥāwī al-Lubāb, Ibn al-Majdī traite deux cas particuliers de permutations avec répétitions d'une seule lettre, pour n quelconque qu'il démontre pour n = 4, en énumérant tous les cas[46] (Cf. Annexe II, p. 109).

<u>Problème</u> IV :

Déterminer le nombre de prononciations d'un mot donné, compte tenu des signes qui se succèdent sur les lettres de ce mot, sachant qu'on ne dispose que de trois voyelles et d'un sukūn, que le sukūn n'est jamais au début d'un mot et que deux sukuns ne se suivent jamais.

<u>Procédé</u> :

Si on note S_n le nombre de prononciations selon les signes, on a :

1.- <u>Mots d'une seule lettre</u> :

$$S_1 = 3$$

correspondant aux 3 voyelles.

2.- <u>Mots bilitères</u> :

$$S_2 = 12$$

car, à la première lettre correspondent 3 voyelles et, à la seconde, 3 voyelles et un sukūn.

3.- <u>Mots trilitères</u> :

$$S_3 = 4.S_2 - 3$$
$$= 4.12 - 3 = 45$$

car, à la 3^e lettre correspondent les quatre signes, et il faut retrancher les 3 cas impossibles correspondant à la succession de deux sukūns [sur la 2^e et sur la 3^e lettre] et équivalant à S_1 qui est le nombre d'écritures de la première lettre.

4.- <u>Mots quadrilitères</u> :

$$S_4 = 4.S_3 - 3S_1$$
$$= 180 - 9 = 171$$

car, à chaque voyelle, sont associées trois successions de deux sukūns, respectivement sur la 3e lettre et sur la 4e.

5.- Mots quintilitères :

$$S_5 = 4.S_4 - 3.S_2$$

$$= 684 - 36 = 648$$

car, le nombre de successions de deux sukuns, respectivement sur la 4e lettre et sur la 5e, correspond au produit du nombre de voyelles se succédant sur la 3e lettre [c'est à dire 3], par S_2.

6.- Mots sextilitères :

$$S_6 = 4.S_5 - 3.S_3$$

Règle générale :

1.- Première méthode :

Si le nombre de lettres du mot est n, on a :

a)- Si $n \leq 3$:

$$S_1 = 3$$

$$S_2 = 12$$

$$S_3 = 4.S_2 - 3$$

b)- Si $n \geq 4$:

$$S_n = 4.S_{n-1} - 3.S_{n-3} \qquad (14)$$

2.- Deuxième méthode :

$$S_n = 3.S_{n-1} + 3.S_{n-2} \; ; [n \geq 3]. \quad (15)$$

Tableau des valeurs des S_n.

Pour ne pas avoir à refaire les calculs, on a donné, dans le tableau II, les valeurs de S_n , pour $1 \leq n \leq 10$.

Remarques :

1.- Le dénombrement qu'effectue Ibn Mun^{c}im correspond aux arrangements de n signes, p à p, $p \geq 1$, avec répétitions et avec contrainte. Mais cet aspect général du problème n'est pas dégagé par l'auteur. Quant à sa démarche pour aboutir à la première relation, elle utilise la méthode d'induction : Elle repose sur le dénombrement explicite, à chaque étape n, d'abord de toutes les configurations possibles, puis des configurations incompatibles avec la contrainte imposée : Deux sukūns ne se suivent jamais. En effet le nombre de configurations possibles est égal à $4.S_{n-1}$, car il y a 4 signes pouvant être associés à chacune des configurations de S_{n-1}. Le nombre de configurations incompatibles est $3.S_{n-3}$ qui correspond à toutes les configurations de S_{n-1} qui se terminent par un sukūn, lesquelles correspondent, à leur tour, à toutes les configurations de S_{n-2} se terminant par une voyelle.

2.- L'auteur ne donne pas de preuve de la relation (15). Mais on peut la déduire de la relation (14), de la manière suivante :

$$S_1 = 3 \; ; \; S_2 = 12 \; ; \; S_3 = 45 = 3.12 + 3.5$$
$$= 3.S_2 + 3.S_1$$

Supposons (15) vraie à l'ordre (n-1) :

$$S_{n-1} = 3.S_{n-2} + 3.S_{n-3}$$

Alors, d'après (14), on a :

$$S_n = 3.S_{n-1} + S_{n-1} - 3S_{n-3}$$
$$= 3.S_{n-1} + 3S_{n-2}$$

d'après (15), à l'ordre (n-1).

Il est toutefois évident, compte tenu de l'absence d'un symbolisme adéquat et de la faiblesse de l'induction utilisée à l'époque d'Ibn Mun^{c}im, que ce dernier ne pouvait pas établir la relation (15) de cette manière.
La démarche suivante, reposant sur la seule énumération des cas compatibles avec la contrainte est, à notre avis, celle qui a pu aboutir, par induction, à la relation (15) :
S_{n-1} étant connu, on dénombre tout d'abord toutes les configurations de S_n qui se terminent par une voyelle. On obtient $3.S_{n-1}$, car il y a 3 voyelles. Puis on détermine, toujours à partir de S_{n-1}, les configurations qui se terminent par un sukūn. On obtient $3.S_{n-2}$ qui correspond à toutes les configurations de S_{n-1} se terminant par une voyelle, car on associe un sukūn à toutes les configurations de S_{n-1} se terminant par une voyelle.

3.- Mersenne abordera deux problèmes, analogues au niveau des principes qui les sous-tendent, mais différents dans la forme et dans le niveau de complexité :

a)- Détermination du "nombre des chants que l'on peut faire de tel nombre de notes que l'on voudra, en variant le temps ou les mesures d'une ou de plusieurs ou de toutes les notes". C'est ainsi que, se donnant 4 notes distinctes : UT, RE, MI, FA, et 4 mesures différentes : Ronde, blanche, noire, croche, il calcule le nombre de manières de faire varier les temps des 4 notes données.
Dans un second calcul, il tient compte des permutations des quatre chants[47].

b)- Dans le même ouvrage, il dénombre les dictions des 22 lettres de l'alphabet français, en considérant "toutes les manières possibles" et en tenant compte des contraintes de la prononciation. Mais, cette analogie mise à part, ce problème est différent de celui exposé par Ibn Mun^{c}im[48].

4.- Frénicle traite des combinaisons d'objets tirés d'ensembles différents en les appelant "combinaisons multiples". Il donne l'exemple de 6 soldats pouvant utiliser 6 armes distinctes, celui de 6 soldats pouvant utiliser 7 armes différentes et 8 livrées différentes et celui de la répartition de 3 commandants parmi 6 dans 3 garnisons parmi 6.[49]

Problème V :

Déterminer le nombre de mots formés de p lettres distinctes [$3 \leq p \leq 10$] de l'alphabet arabe.

Procédé :

On note $\mathcal{A}_n^p$, le nombre de mots de p lettres, compte tenu des signes :

1.- Calcul de $\mathcal{A}_n^3$ [$n = 28$] :

On détermine d'abord C_n^3 , en identifiant les lettres de l'alphabet à autant de couleurs de soie et en calculant le nombre de combinaisons de ces n couleurs, 3 à 3. Puis, on détermine P_3 ainsi :

$$P_3 = 1.2.3$$

Puis, on calcule S_3. D'où le résultat cherché :

$$\mathcal{A}_n^3 = S_3.P_3.C_n^3$$

2.- Calcul de $\mathcal{A}_n^k$, pour $k \neq 3$:

On procède de la même manière [et l'on obtient :

$$\mathcal{A}_n^k = S_k.P_k.C_n^k \quad] \tag{16}$$

D'où le nombre cherché qui s'obtient en faisant la somme :

$$S_{10} = \sum_3^{10} S_k.P_k.C_{28}^k \tag{17}$$

Remarques :

La règle : $A_n^k = P_k.C_n^k$,donnant le nombre d'arrangements de n lettres k à k, est implicite dans la relation (16). A son tour, Ibn al-Bannā' ne la formulera pas[50] ; mais, il l'utilisera pour exprimer A_n^k directement, en fonction de k et de n :

$$A_n^k = n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)$$

grâce aux formules donnant respectivement P_k et C_n^k :

$$P_k = k! \quad ; \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{k!}$$

Problème VI :

Etant donné des filaments de soie de n couleurs, on voudrait déterminer le nombre de houppes qu'il est possible de composer avec p filaments de k couleurs, de telle sorte que $p_1, p_2, \dots, p_k$ filaments soient respectivement de même couleur.
[on a alors nécessairement : $k \leq p$ et $p_1+p_2+\dots+p_k = p$].

1.- Premier cas : k = 2.
Si on prend :

$$n = 10 \ ;\ p = 3 \ ;\ k = 2 \ ;\ p_1 = 1 \ ;\ p_2 = 2,$$

on a [en notant $\mathcal{C}_n^{1,1}$ le nombre cherché] :

$$\mathcal{C}_n^{1,1} = 2.C_n^2$$

En effet, on procède comme s'il n'y avait pas de filaments. On est donc ramené, ici, à combiner n couleurs 2 à 2. Puis, on multiplie par 2, car les deux filaments de même couleur peuvent être soit de la première couleur, soit de la seconde.

2.- Deuxième cas : $k > 2$.
Quel que soit le nombre n de couleurs, le nombre de houppes obtenues à partir d'une houppe donnée de k couleurs $k \leq n$ est égal au nombre de permutations des lettres d'un mot de k lettres et dont le nombre de répétitions de chacune de ces lettres est égal au nombre des couleurs ayant le même nombre de filaments.
[Autrement dit, pour n, k, p, quelconques ($k \leq p \leq n$), on aura :

$$C_n^{k_1\ldots k_m} = \frac{P_k}{P_{k_1}\ldots P_{k_m}} . C_n^k$$

avec : k_i = card($p_j = i$; $1 \leq j \leq k$) et $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = k$]

Par exemple, si on a :

$$p = 8 \; ; \; k = 5 \; ; \; p_1 = p_2 = 1 \; ; \; p_3 = p_4 = p_5 = 2, \qquad (18)$$

cette répartition des couleurs correspond à la configuration de lettres suivantes :

$$g , g , k , k , k \qquad (19)$$

Le nombre de houppes de 8 filaments de 5 couleurs vérifiant (18) est donc égal au nombre de permutations avec répétitions des cinq lettres de la combinaison (19), c'est à dire 10 ; car, d'après le problème III [on a :

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{]}$$

<u>Preuve</u> :

A chaque configuration de lettres correspond une combinaison des filaments de couleur et inversement, car à la configuration suivante :

$$k , g , g , k , k$$

où la première devient troisième, correspond la houppe composée d'un filament de la troisième couleur [et donc de deux filaments de la première couleur, le reste des filaments étant inchangé]. Pour les autres configurations, la démarche est identique.

[<u>Définition</u>]:

Par convention, on appellera combinaison un ensemble de lettres.

Problème VII :

Etant donné un mot de 9 lettres correspondant à la combinaison suivante :

a , b , c,c , d,d , e,e,e

quel est le nombre de combinaisons,ayant le même nombre de répétitions, qu'il est possible de composer avec ces cinq lettres distinctes ?

Procédé :

On écrit la combinaison en colonnes,de cette façon :

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ & & c & d & e \\ & & & & e \end{array}$$

et on lui associe la combinaison suivante :

$$x \quad x \quad y \quad y \quad z$$

Le nombre de répétitions de chaque lettre étant égal au nombre de colonnes de même longueur.
Le nombre cherché est alors égal au nombre de permutations, avec répétitions, de la combinaison précédente, c'est à dire 30[correspondant à :

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!2!} \quad]$$

Remarques :

1.- Le modèle, représenté dans le problème VI par les houppes constituées de filaments colorés, a l'avantage, par sa nature tridimensionnelle, de ne pas introduire les positions des objets les uns par rapport aux autres. Il concrétise parfaitement les combinaisons avec répétitions. Malheureusement, l'auteur ne donne aucun argument pour justifier le choix de ce modèle.

2.- Pour faire le dénombrement du problème VI, on utilise la règle du problème III sur les permutations avec répétitions des lettres d'un alphabet. Les éléments d'un alphabet apparaissent donc, à leur tour, comme des objets abstraits qui symbolisent, ici, une certaine répartition des couleurs d'une houppe donnée. La bijection qui permet cela est explicitement dégagée par l'auteur.

3.- Dans le problème VII, c'est une bijection plus élaborée (entre des colonnes de longueurs différentes et un ensemble de lettres qui permet d'effectuer le dénombrement).

Problème VIII :

Enumérer les différentes manières de répéter k lettres ($1 \leq k \leq 10$) dans un mot de dix lettres.

Procédé :

Comme il s'agit de combinaisons, on peut supposer, sans rien diminuer à la généralité de la démarche, que les lettres non répétées de chaque combinaison sont à gauche et celles qui sont répétées, à droite. [Si on note : $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$, une combinaison,] on aura les cas suivants :

1.- Neuf lettres distinctes :

$$a_{10} = a_i \; ; \qquad (1 \leq i \leq 9)$$

2.- Huit distinctes :

a) $$a_9 = a_{10} = a_i \qquad (1 \leq i \leq 8)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} a_9 = a_i \\ a_{10} = a_j \end{array}\right\} \qquad (i \neq j \; ; \; 1 \leq i, j \leq 8)$$

3.- Sept distinctes :

a) $$a_8 = a_9 = a_{10} = a_i \qquad (1 \leq i \leq 7)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} a_8 = a_9 = a_i \\ a_{10} = a_j \end{array}\right\} \qquad (i \neq j \; ; \; 1 \leq i, j \leq 7)$$

c) $$\left.\begin{array}{l} a_8 = a_i \\ a_9 = a_j \\ a_{10} = a_k \end{array}\right| \quad (i \neq j \neq k \ ; \ 1 \leq i,j,k \leq 7)$$

4.- <u>Six distinctes</u> :

a) $$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_i \qquad (1 \leq i \leq 6)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} a_7 = a_i \\ a_8 = a_9 = a_{10} = a_j \\ \\ a_7 = a_8 = a_i \\ a_9 = a_{10} = a_j \end{array}\right| \quad (i \neq j \ ; \ 1 \leq i,j \leq 6)$$

c) $$\left.\begin{array}{l} a_7 = a_8 = a_i \\ a_9 = a_j \\ a_{10} = a_k \end{array}\right| \quad (i \neq j \neq k \ ; \ 1 \leq i,j,k \leq 6)$$

d) $$\left.\begin{array}{l} a_7 = a_i \ ; \ a_8 = a_j \\ a_9 = a_k \ ; \ a_{10} = a_l \end{array}\right| \quad (i \neq j \neq k \neq l \ ; \ 1 \leq i,j,k,l \leq 6)$$

5.- <u>Cinq distinctes</u> :

a) $$a_6 = a_7 = \ldots = a_{10} = a_i \qquad (1 \leq i \leq 5)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} a_6 = a_i \\ a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_j \\ \\ a_6 = a_7 = a_i \\ a_8 = a_9 = a_{10} = a_j \end{array}\right| \quad (i \neq j \ ; \ 1 \leq i,j \leq 5)$$

c) $$\left.\begin{array}{l} a_6 = a_i \\ a_7 = a_8 = a_j \\ a_9 = a_{10} = a_k \\ \\ a_6 = a_7 = a_8 = a_i \end{array}\right| \quad (i \neq j \neq k ; 1 \leq i,j,k \leq 5)$$

d) $\left.\begin{array}{l} a_6 = a_7 = a_i \\ a_8 = a_j \\ a_9 = a_k \\ a_{10} = a_l \end{array}\right\}$ $(i \neq j \neq k \neq l;\ 1 \leq i,j,k,l \leq 5)$

e) $\left.\begin{array}{l} a_6 = a_i \ ;\ a_7 = a_j \\ a_8 = a_k \ ;\ a_9 = a_l \\ a_{10} = a_m \end{array}\right\}$ $(i \neq j \neq k \neq l \neq m;\ 1 \leq i,j,k,l,m \leq 5)$

6.- Quatre distinctes :

a) $a_5 = a_6 = \ldots = a_{10} = a_i$ $(1 \leq i \leq 4)$

b) $\left.\begin{array}{l} a_5 = \ldots = a_9 = a_i \\ a_{10} = a_j \\ \\ a_5 = \ldots = a_8 = a_i \\ a_9 = a_{10} = a_j \\ \\ a_5 = \ldots = a_7 = a_i \\ a_8 = a_9 = a_{10} = a_j \end{array}\right\}$ $(i \neq j\ ;\ 1 \leq i,j \leq 4)$

c) $\left.\begin{array}{l} a_5 = a_i \\ a_6 = a_7 = a_j \\ a_8 = a_9 = a_{10} = a_k \\ \\ a_5 = a_6 = a_i \\ a_7 = a_8 = a_j \\ a_9 = a_{10} = a_k \\ \\ a_5 = \ldots = a_8 = a_i \\ a_9 = a_j \\ a_{10} = a_k \end{array}\right\}$ $(i \neq j \neq k\ ;\ 1 \leq i,j,k \leq 4)$

d) $a_5 = a_i \ ;\ a_6 = a_j$
$a_7 = a_8 = a_k \ ;\ a_9 = a_{10} = a_l$

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_i \\ a_6 = a_j \ ; \ a_7 = a_k \\ a_8 = a_9 = a_{10} = a_l \end{array}\right\} \quad (i \neq j \neq k \neq l;\ 1 \leq i,j,k,l \leq 4)$$

7.- Trois distinctes :

a) $a_5 = \dots = a_{10} = a_i \quad (1 \leq i \leq 3)$

b)

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = a_i \\ a_5 = \dots = a_{10} = a_j \\ \\ a_4 = a_5 = a_i \\ a_6 = \dots = a_{10} = a_j \\ \\ a_4 = a_5 = a_6 = a_i \\ a_7 = \dots = a_{10} = a_j \end{array}\right\} \quad (i \neq j \ ;\ 1 \leq i,j \leq 3)$$

c)

$$\begin{array}{l} a_4 = a_i \ ; \ a_5 = a_j \\ a_6 = \dots = a_{10} = a_k \\ \\ a_4 = a_i \ ; \ a_5 = a_6 = a_j \\ a_7 = \dots = a_{10} = a_k \\ \\ a_4 = a_i \\ a_5 = a_6 = a_7 = a_j \\ a_8 = a_9 = a_{10} = a_k \\ \\ a_4 = a_5 = a_i \\ a_6 = a_7 = a_j \\ a_8 = a_9 = a_k \end{array} \quad (i \neq j \neq k \ ;\ 1 \leq i,j,k \leq 3)$$

8.- Deux distinctes :

a) $a_3 = \dots = a_{10} = a_i \quad (1 \leq i \leq 2)$

b)

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_i \\ a_4 = \dots = a_{10} = a_j \\[1ex] a_3 = a_4 = a_i \\ a_5 = \dots = a_{10} = a_j \\[1ex] a_3 = a_4 = a_5 = a_i \\ a_6 = \dots = a_{10} = a_j \end{array}\right| \quad (i \neq j \ ; \ 1 \leq i, j \leq 2)$$

$$\begin{array}{l} a_3 = \dots = a_6 = a_i \\ a_7 = \dots = a_{10} = a_j \end{array}$$

9.- <u>Une distincte</u> :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{10}$$

<u>Problème</u> IX :

Etant donné une combinaison de 10 lettres, avec répétitions, correspondant à l'une des configurations énumérée dans le problème VIII, déterminer le nombre de combinaisons issues d'une même configuration dont p lettres sont distinctes et les 10-p restantes répétant k de ces p lettres.

<u>Procédé</u> :

[On note R_p^k le nombre de ces combinaisons].

1.- <u>Neuf lettres distinctes</u> :

$$R_9^1 = 9 \qquad [= \frac{9!}{8!}]$$

2.- <u>Huit distinctes</u> :

$$R_8^1 = 8 \qquad [= \frac{8!}{7!}] \quad ; \quad R_8^2 = 28 \qquad [= \frac{8!}{6!2!}]$$

car, étant donné une houppe de 10 filaments de soie de 8 couleurs dont 6 sont chacun d'une couleur différente et 4, deux à deux, de même couleur, cela revient à déterminer le nombre de houppes issues de celles-ci et ayant la même composition en filaments et en couleurs. D'où le résultat d'après le problème VI .

3.- <u>D'une manière générale</u> :

Si p lettres sont distinctes [$1 \leq p \leq 7$], on les identifie à p couleurs distinctes, on identifie les lettres répétées à des filaments de même couleur et l'on se ramène au problème VI.

<u>Remarques</u> :

1.- Les énumérations qui permettent de répondre aux problèmes VIII et IX se ramènent au dénombrement de toutes les partitions possibles d'un nombre n en sommes de k autres nombres, avec $1 \leq k \leq n$:

a)- Dans le problème VIII, n est le nombre de lettres répétant les lettres distinctes; m étant le nombre de lettres de la combinaison donnée, on fait varier n de 1 à m et, pour chaque valeur de n, on énumère toutes les partitions possibles de longueur k, avec : $1 \leq k \leq \inf(n, m-n)$.

b)- Dans le tableau associé au problème IX (tableau XI), n étant le nombre total de répétitions des lettres, on fixe d'abord k (avec : $1 \leq k \leq 5$) et on énumère toutes les partitions possibles de longueur k, pour les nombres n (avec : $2 \leq n \leq m$).

Ces deux procédés restent solidaires des problèmes particuliers traités et n'aboutissent pas à une règle générale concernant les partitions d'un nombre en sommes de k nombres.

2.- Si elle permet de répondre au problème particulier posé par les lexicographes et qui ne concerne qu'une petite valeur de n ($n = 10$), cette méthode qui associe une longue énumération à la confection d'un tableau, s'avère être fastidieuse déjà pour $n=10$. On peut donc penser que, comme le fera Ibn al-Bannā' pour le calcul des C_n^p sans tableau, des mathématiciens arabes ont tenté de substituer à ce procédé basé sur une indispensable énumération, une règle de calcul directe ne tenant pas compte des différents types de répétitions, comme tentera de le faire, au XVII^e siècle,

Mersenne dans ses "Réflexions physico-mathématiques" et dans sa suite manuscrite aux "Questiones in Genesim"[51].
Malheureusement, nous n'avons encore trouvé aucun élément qui nous permette de dire que des tentatives ont été faites pour dégager la relation :

$$\mathcal{C}_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Le seul auteur que nous connaissons et qui a abordé, indirectement d'ailleurs, des combinaisons avec répétitions, est Ibn al-Majdī dans son Ḥāwī al-Lubāb où il traite deux cas d'arrangements avec répétitions : Le cas général du dénombrement des arrangements de n lettres p à p,compte tenu de toutes les répétitions possibles :

$$\mathcal{A}_n^p = n^p$$

et le cas particulier que nous avons déjà évoqué des arrangements de 4 lettres 4 à 4, avec répétition d'une seule lettre 3 ou 4 fois .

<u>Problème</u> X :

Déterminer le nombre de mots de une à dix lettres qu'il est possible de composer avec les lettres de l'alphabet arabe, compte tenu de toutes les répétitions possibles des lettres dans un mot et compte tenu des signes qui peuvent se succéder sur ces lettres.

1.- <u>Dénombrement des mots sans répétition de lettres</u> :

On procède comme cela a déjà été montré [dans le problème V et on obtient :

$$\mathcal{S} = \sum_{1}^{10} S_k P_k C_{28}^k \quad]$$

2.- <u>Dénombrement des mots avec répétitions des lettres</u> :

On considère d'abord les mots de dix lettres, puis ceux de neuf lettres et ainsi de suite jusqu'à ceux de deux lettres.

Premier cas : Mots de dix lettres.

1.- Mots de dix lettres dont neuf sont distinctes :

a) On calcule le nombre de houppes de 9 couleurs distinctes, correspondant aux 9 lettres distinctes du mot, qu'il est possible de composer à partir de 28 couleurs de soie données. On obtient un nombre N_1.[Dans cet exemple, on a, d'après le problème I :

$$N_1 = C_{28}^{9} = 6906900\ ]$$

b)- Puis, étant donné une combinaison de 10 lettres dans laquelle l'une d'elle, a_i, se répète une fois, déterminer le nombre de combinaisons de 10 lettres, issues de la première et où une seule répète l'une des autres a_j [$j \neq i$; $1 \leq j \leq 9$]. On obtient:

$$N_2 = 9 \ [= \frac{9!}{8!1!}]$$

comme on l'a déjà montré[dans le problème VII .]

c)- Puis, on calcule le nombre de permutations des lettres d'un mot de 10 lettres dont 9 sont distinctes. On obtient :

$$N_3 \ [= P_{10}^{2} = \frac{10!}{2!} = 1814400$$

d'après le problème III.]

d)- Puis, on calcule le nombre de prononciations d'un mot de 10 lettres, compte tenu des signes -trois voyelles et un sukūn- . On obtient [d'après le problème IV :

$$N_4 = S_{10} = 507627\ ]$$

Finalement, le nombre de mots de 10 lettres dont 9 sont distinctes est égal à :

$$N = N_1 . N_2 . N_3 . N_4$$

2.- Mots de dix lettres dont huit sont distinctes :

- Si les deux lettres restantes répètent l'une des huit distinctes, on procède exactement comme dans le cas précédent.
- Si elles répètent deux des huit distinctes, on procède ainsi:
a)- On calcule :

$$N_1 = C_{28}^{8}$$

en se ramenant à la composition de houppes de huit couleurs, à partir de 28 couleurs données.

b)- On calcule :

$$N_2 = 28 \left[= \frac{8!}{6!2!} \right]$$

c)- Puis, on calcule le nombre de permutations des lettres d'un mot de 10 lettres dont deux sont répétées chacune une fois :

$$N_3 \left[= P_{10}^{2,2} = \frac{10!}{2!2!} \right]$$

d)- On considère également : $N_4 = S_{10}$, que l'on aura calculé précédemment, une fois pour toute.Le résultat final est alors égal à :

$$N = N_1.N_2.N_3.N_4$$

3.- Cas général :

Pour les répétitions d'un nombre plus grand de lettres, on procèdera de la même manière.

Deuxième cas : Mots de k lettres, $2 \leq k \leq 9$.

Le procédé est identique à celui du premier cas.
Finalement, on aboutira au nombre cherché en ajoutant les résultats trouvés dans les deux cas.

ILLUSTRATION DES PROCEDES GENERAUX :

1.- Utilisation du tableau IV :

Le nombre [C_n^p] de mots de p lettres distinctes d'un alphabet de n lettres, se lit à l'intersection de la $p^{ième}$ colonne et de la $n^{ième}$ diagonale.

2.- Utilisation du tableau X :

Le nombre de combinaisons issues d'un mot de p lettres [$2 \leq p \leq 10$] et ayant les mêmes types de répétitions que ce mot, se trouve à l'intersection de la colonne du mot et de la ligne correspondant au type de répétitions.

3.- Exemple :

Déterminer le nombre de mots de p lettres [$1 \leq p \leq 10$] qu'il est possible de composer à l'aide d'un alphabet de 28 lettres.

(1)- Mots de 10 lettres toutes distinctes :

Le tableau IV fournit :

$$C_{28}^{10} \quad [=13123110]$$

Le tableau V fournit :

$$P_{10} = 10! = 3628800$$

Le tableau II fournit :

$$S_{10} = 507627$$

D'où finalement le nombre de mots de 10 lettres, toutes différentes :

$$\mathcal{A}_{28}^{10} = S_{10}.P_{10}.C_{28}^{10}$$

(2)- Mots de moins de 10 lettres, toutes distinctes :

On calculera, de la même manière, $\mathcal{A}_{28}^{p}$, pour : $1 \leq p \leq 9$.

(3)- Mots de p lettres, avec répétition de k lettres :

Ici : $1 \leq p \leq 10$ et $2 \leq k \leq 10$.

On procèdera comme sur l'exemple suivant : Considérons un mot de 9 lettres de cette forme :

$$(a,b,c,c,d,d,e,e,e) \qquad (1)$$

Il est constitué de 5 lettres distinctes.

(a)- On commence par déterminer le nombre de combinaisons des 28 lettres de l'alphabet, 5 à 5.[Le tableau IV fournit] :

$$N_1 = C_{28}^5 = 98280$$

(b)- Puis on détermine,[à l'aide du tableau VIII ,] le nombre de permutations avec répétitions de la combinaison (1) :

$$N_2 = [\ P_9^{1,1,2,2,3} = \frac{9!}{2!2!3!} =]\ 15120$$

(c)- Puis on détermine, à l'aide du tableau X, le nombre de prononciations de ce mot de 9 lettres. On aura :

$$N_3 = S_9 = 133893$$

(d)- Puis on détermine, à l'aide du tableau XI, les combinaisons de même type issues de la combinaison (1). On aura :

$$N_4 = [P_5^{2,2} =]\ 30$$

Le nombre cherché est alors égal à :

$$N_1.N_2.N_3.N_4 = 596892423254400$$

[<u>Cas particuliers</u>]:

(1)- Si l'on demandait de déterminer le nombre de mots issus de la combinaison (1) et dans lesquels chacune des cinq lettres distinctes a le même nombre de répétitions que dans (1), le résultat serait seulement de :

$$N_2.N_3 = 15120 \,.\, 133893 [= 2024462160]$$

(2)- Mais si les lettres qui se répètent n'étaient pas précisées, le résultat serait alors :

$$N_2.N_3.N_4 = 60733864800$$

LA ONZIEME SECTION DU PREMIER CHAPITRE [DU FIQH AL-ḤISĀB]

sur le dénombrement des mots qui sont tels que l'être humain ne peut s'exprimer que par l'un d'eux

[INTRODUCTION]:

Nous avons voulu décrire la manière de procéder pour dénombrer les mots qui sont tels que l'être humain ne peut prononcer que l'un d'entre eux.
Al-Khalīl -que Dieu lui soit miséricordieux- a indiqué seulement le nombre de configurations du mot dans lequel ne se répètent pas de lettres. Quant aux mots dont les lettres se répètent, ainsi que le nombre de mots quintilitères ou sextilitères composés de lettres de l'alphabet et dont les lettres sont toutes distinctes ou dont une d'entre elles, ou deux, ou l'ensemble, sont répétées, ainsi que le dénombrement de tout cela, c'est cette section qui en renferme [l'étude].

Nous convenons, dans notre exemple-ci, que le nombre de lettres de l'alphabet est vingt huit, que le mot le plus long, compte tenu des affixes et des répétitions, est de dix lettres, comme par exemple : ارسطاطاليس , que se succèdent sur une seule lettre trois voyelles et un sukūn, que l'on ne commence pas par un sukūn et que ne se suivent pas deux sukūns.
Si quelqu'un faisait une objection en disant qu'il arrive que, sur une lettre se succèdent plus de trois voyelles, comme dans le cas de l'inflexion vocalique et dans d'autres[52], que certains non-arabes commencent par le sukūn[53], mais que nous avons ignoré cela à cause de l'impuissance de notre langue à le prononcer, que les non-arabes parlent avec d'autres lettres, même si elles ne sont

pas dans le parler des arabes, comme le kāf qui est semblable au qāf, le jīm qui est semblable au shīn ainsi que d'autres[54] et qu'il arrive que le [nombre] de lettres d'un mot soit plus grand que dix, comme quand Dieu dit : ليستخلفنهم [55], la lettre appuyée équivalant à deux lettres.
Je lui réponds alors en disant : Notre but, en fait, est la description d'une méthode à l'aide de laquelle il est possible de dénombrer les mots et la description sera identique,même si le nombre des lettres et des voyelles s'accroît, atteignant n'importe quelle valeur.Si nous avons supposé que les lettres sont au nombre de vingt huit, que le mot le plus long est constitué de dix lettres et que ne se suivent pas,sur une même lettre, plus de trois voyelles et un sukūn, c'est pour illustrer le procédé dans la méthode que nous nous sommes proposée. Le procédé étant acquis, tu suivras [la même démarche], que le nombre de lettres et de voyelles soit plus petit ou plus grand.
Et que Dieu nous inspire le vrai, il n'y a pas d'autre Maître que lui.

[A. <u>ETABLISSEMENT DES REGLES GENERALES</u>]:

[<u>Problème</u> I] : Proposition préliminaire pour ce que nous envisageons de démontrer :

Etant donné dix couleurs de soie, avec lesquelles nous voulons faire des houppes [respectivement] d'une, de deux, de trois couleurs et ainsi de suite, jusqu'à la dernière houppe qui doit être de dix couleurs, nous voulons savoir quel est le nombre de houppes de chaque espèce, les couleurs de chaque houppe étant connues, ou quel est le nombre de toutes les houppes rassemblées, compte tenu des différents nombres de couleurs des houppes.
Nous disposons les couleurs, une à une sur une ligne, selon la largeur de la page, comme dans l'exemple ; [puis], si tu réfléchis au problème, tu constates que les houppes de deux couleurs s'obtiennent en combinant la deuxième couleur avec la première, la troisième couleur avec la première et avec la deuxième, la quatrième couleur avec la première, avec la deuxième et avec la

troisième, la cinquième couleur avec la première, avec la deuxième, avec la troisième et avec la quatrième ; et ainsi de suite, selon cet ordre [d'énumération] jusqu'à ce que l'on aboutisse aux combinaisons de la dixième couleur avec chacune des couleurs qui la précèdent.
D'une manière générale, c'est en combinant chacune des couleurs avec celles qui la précèdent dans la numérotation, et selon cet ordre d'énumération, que sera déterminé le nombre de combinaisons de chaque couleur avec chacune des [autres] couleurs.
Tu écris : 1, dans la première case de la deuxième ligne, vis-à-vis de la deuxième couleur, et c'est la houppe constituée de la [combinaison de la] deuxième couleur avec la première.
Tu écris : 2, dans la deuxième case de la deuxième ligne, également vis-à-vis de la troisième couleur et ce sont les deux houppes obtenues par la combinaison de la troisième couleur avec la première et avec la deuxième.
Tu écris : 3, dans cette ligne également vis-à-vis de la quatrième couleur et c'est le nombre de houppes obtenu par la combinaison de la quatrième couleur avec la première, la deuxième et la troisième.
De la même manière, tu écris : 4, dans cette ligne,vis-à-vis de la cinquième couleur, et c'est le nombre de houppes obtenues par la combinaison de la cinquième couleur avec la première, la deuxième, la troisième et la quatrième. Et de cette manière,tu achèves la deuxième ligne jusqu'à ce que tu écrives neuf à son extrémité, vis-à-vis de la dixième couleur et ce neuf est le nombre de houppes obtenues en combinant la dixième couleur avec la première, la deuxième et [ainsi de suite] jusqu'à la neuvième.
Il en résulte, dans la deuxième ligne, des nombres se succédant de un à neuf et c'est le nombre des houppes composées de deux couleurs.
Le nombre de houppes de deux couleurs est donc égal à la somme des entiers successifs [allant] de un au nombre qui est inférieur de un au nombre de couleurs.
Quant à la connaissance du nombre des houppes de trois couleurs,

elle s'obtient par la combinaison de la troisième couleur avec la première et la deuxième, puis par la combinaison de la quatrième couleur avec chaque couple de couleurs, parmi les trois couleurs précédentes qui sont la première, la deuxième et la troisième, puis par la combinaison de la cinquième couleur avec chaque couple de couleurs parmi les quatre couleurs précédentes, puis par la combinaison de la sixième couleur avec chaque couple parmi les cinq couleurs précédentes et ainsi de suite, jusqu'à [la combinaison de] la dixième couleur, avec chaque couple de couleurs parmi les neuf couleurs précédentes. Mais chaque couple de couleurs est une houppe de la deuxième ligne. Pour cette raison,nous écrivons : un, dans la première case de la troisième ligne,vis-à-vis de la troisième couleur, et ce sera la houppe composée de la première, de la deuxième et de la troisième couleur ; puis, nous écrivons, dans la case suivante qui est vis-àvis de la quatrième couleur, le nombre des houppes obtenues par la combinaison de la quatrième couleur avec chaque couple parmi les couleurs précédentes, et c'est égal au nombre de houppes de deux couleurs composées des couleurs précédant la quatrième couleur, et c'est aussi égal à la somme du contenu des deux premières cases de la deuxième ligne, et c'est : trois. Nous écrivons donc:trois,dans la deuxième case de la troisième ligne. Et nous écrivons dans la troisième case de la troisième ligne -cette case étant celle qui est vis-à-vis de la cinquième couleur- [le nombre] de houppes [obtenues] par la combinaison de la cinquième couleur avec les couples de couleurs précédant la cinquième couleur, et c'est aussi la somme du contenu des trois premières cases de la deuxième ligne et c'est six. Nous écrivons : six, dans la troisième case de la troisième ligne.

Ainsi, selon cet ordre, on montre que le contenu de la case suivante -la quatrième de la troisième ligne- est égal à la somme des quatre cases de la deuxième ligne, et c'est dix ; et le contenu de la case suivante, la cinquième, est égal à la somme des cinq cases de la deuxième ligne, et [ainsi de suite], jusqu'à ce que s'achève la troisième ligne. La somme des cases de la troi-

sième ligne est alors égale à l'ensemble des houppes de trois couleurs chacune, [obtenues] à partir des couleurs [données]. Quant à la connaissance du nombre de houppes de quatre couleurs, elle s'obtient par la combinaison de la quatrième couleur avec les trois précédentes, par la combinaison de la cinquième couleur avec l'ensemble des triplets parmi les couleurs précédant la cinquième, puis par la combinaison de la sixième couleur avec l'ensemble des triplets parmi les couleurs précédant la sixième, et ainsi jusqu'à la dixième couleur [combinée] avec l'ensemble des triplets parmi les couleurs précédant la dixième. Mais, chaque triplet est une houppe de la troisième ligne. Pour cette raison donc, nous écrivons, dans la première case de la quatrième ligne: un qui est la houppe composée des quatre premières couleurs et nous écrivons, dans la case suivante qui est vis-à-vis de la cinquième couleur, le [nombre] de houppes obtenues par la combinaison de la cinquième couleur avec chaque triplet parmi les couleurs précédant la cinquième, qui est aussi égal à la somme des contenus des deux premières cases de la troisième ligne et c'est quatre.
Il apparaît de même que tu dois écrire, dans la troisième case de la quatrième ligne, ce qui équivaut à la somme des trois premières cases de la troisième ligne, et c'est dix.
On procède ainsi pour la construction de l'ensemble de la quatrième ligne, à partir de la troisième ligne, [construction] qui est identique à celle de la troisième ligne à partir de la deuxième et à celle de la deuxième ligne à partir de la première.
On procède de la même manière pour la construction de la cinquième ligne à partir de la quatrième : Elle est analogue à la construction de la quatrième ligne à partir de la troisième, à celle de la sixième ligne à partir de la cinquième, de la septième à partir de la sixième, de la huitième à partir de la septième, de la neuvième à partir de la huitième et de la dixième à partir de la neuvième. Mais, dans notre exemple-ci, la dixième ligne a une [seule] case contenant une seule houppe de dix couleurs.
Et que Dieu nous inspire.

[Tableau des combinaisons de dix couleurs de soie
une à une, deux à deux, ... , dix à dix.]

Somme	Ecriture de l'exemple dans le tableau										
1	1	Ligne des houppes de dix couleurs									
10	9	1	ligne des houppes de neuf couleurs								
45	36	8	1	ligne des houppes de huit couleurs							
120	84	28	7	1	" " " de sept couleurs						
210	126	56	21	6	1	" " de six couleurs					
252	126	70	35	15	5	1	de cinq couleurs				
210	84	56	35	20	10	4	1	de quatre couleurs			
120	36	28	21	15	10	6	3	1	trois couleurs		
45	9	8	7	6	5	4	3	2	1	deux " "	
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	une "
l'ensemble des couleurs	10e couleur	9e couleur	8e couleur	7e couleur	6e couleur	5e couleur	4e couleur	3e couleur	2e couleur	1e couleur	

[Tableau I]

Puis, si tu réfléchis aux particularités de ce tableau et à ce qui y apparaît comme harmonie surprenante, il s'y révèlera à toi des symétries extraordinaires et des propriétés étonnantes dont l'évocation mènerait à des excès et à des longueurs. Nous avons donc renoncé à cela, comptant sur la réflexion de l'étudiant et désirant également abondonner les excès et faire un choix. Et que Dieu nous assiste.

Manière de procéder avec le tableau.

Si tu as des couleurs de soie et que tu veux [savoir] combien fournissent-elles de houppes de sorte que dans chaque houppe il y ait un [nombre] de couleurs connu, tu entres dans le tableau verticalement, par la couleur dont le numéro est égal au nombre de couleurs de ta soie, puis tu entres également par la ligne correspondant au nombre de couleurs de chaque houppe et tu comptes le nombre de la case où se rencontrent la ligne et la colonne avec les nombres des cases qui sont, dans cette ligne, à droite de cette case, [et ce] jusqu'à un. La somme que tu obtiens est le nombre de houppes.
Il y a une autre méthode,meilleure et plus simple, qui consiste à entrer dans le tableau verticalement, à partir de la couleur dont le numéro excède de un le nombre de couleurs de ta soie, et à entrer par la ligne des houppes dont le nombre de couleurs de chacune excède de un le nombre de couleurs de tes houppes.Le nombre de la case où se rencontrent la ligne et la colonne est alors le nombre de houppes que tu cherchais.
Si le nombre de couleurs que tu as est plus grand que dix, tu ajoutes [des colonnes] au tableau jusqu'à ce que le nombre de ses couleurs soit égal à celui de tes couleurs.

[Problème II]:

[Le] problème [est] : Nous voulons connaître un procédé canonique pour [déterminer le nombre] de permutations des lettres d'un mot dont le nombre de lettres est connu et dans lequel ne se répète aucune lettre.
Si le mot est bilitère, il est clair qu'il aura alors deux permu-

tations, car la première [lettre] devient deuxième et la deuxième devient première. S'il augmente d'une lettre et devient trilitère, il est clair que, dans chacune des permutations des deux lettres du mot bilitère, la troisième lettre est soit avant les deux lettres, soit entre elles, soit en troisième [position]. Les lettres du mot trilitère auront donc six permutations. Si le mot augmente d'une lettre devenant quadrilitère, la quatrième lettre sera dans chacune des six permutations, soit à droite de la première, de la deuxième, ou de la troisième, soit à gauche de la troisième. Le mot quadrilitère aura donc vingt quatre permutations. S'il augmente d'une lettre devenant quintilitère, il est clair que la cinquième lettre sera, dans chacune des vingt quatre permutations des lettres du quadrilitère, soit à droite de la première, de la deuxième, de la troisième, ou de la quatrième, soit à gauche de la quatrième. C'est donc [le produit] de cinq par vingt quatre permutations et c'est cent vingt permutations pour les lettres d'un quintilitère.
Et l'on démontrera ainsi, aussi grand que soit [le nombre].
On a donc montré, avec cela, que si tu as un mot dont le nombre de lettres est connu et dont aucune lettre ne se répète et que tu veux connaître le nombre de permutations des lettres de ce mot, tu multiplies un par deux, ce qui en résulte par trois, puis ce qui en résulte par quatre, puis ce qui en résulte par cinq, et ainsi de suite, chaque résultat étant multiplié par le nombre qui suit dans la suite des entiers, jusqu'à ce qu'on aboutisse au produit par le nombre qui est égal au nombre de lettres du mot. Le résultat est égal au nombre de permutations des lettres de ce mot, et c'est ce que nous voulions démontrer.

[Problème III]:

Nous voulons connaître le nombre de permutations des lettres d'un mot dont le nombre de lettres est connu et dont une lettre ou deux ou plus sont répétées un nombre connu de fois.

La méthode, lorsque se répète une seule lettre, consiste à déterminer le nombre de permutations d'un mot dans lequel ne se répète aucune lettre et dont le nombre de lettres est égal au nombre de lettres du mot donné, avec leurs répétitions. Le résultat que tu obtiens, tu le divises par le nombre de permutations des lettres d'un mot dont le nombre de ses lettres est égal à celui des lettres qui répètent la seule lettre dans le mot donné. Le résultat que tu obtiens sera le nombre des permutations des lettres du mot donné.

La preuve de cela est que lorsqu'une seule lettre est répétée dans un mot, à chaque position dans le mot de ces lettres répétées, correspondraient, si elles étaient différentes, les permutations des lettres d'un mot dont le nombre de lettres serait égal au nombre de répétitions de cette lettre.
Si deux mots, ou trois, ou plus se répètent, le procédé consiste à déterminer le nombre de permutations des lettres d'un autre mot dans lequel ne se répète aucune lettre et dont le nombre de lettres est égal au nombre de lettres du mot donné, avec leurs répétitions.
Tu conserves le résultat que tu auras obtenu puis, tu comptes le nombre de répétitions d'une seule des lettres qui se répètent comme étant le nombre de lettres distinctes d'un mot. De même, le nombre de répétitions de la deuxième lettre répétée sera le nombre de lettres d'un deuxième mot et s'il contient une troisième lettre qui se répète, tu comptes également le nombre de ses répétitions comme étant le nombre de lettres d'un autre mot puis, tu multiplies les nombres de permutations de ces mots, les uns par les autres et tu divises, par ce résultat, ce que tu avais conservé. Ce qui en résulte est le nombre de permutations des lettres du mot donné.
La preuve de cela est analogue à ce qui a précédé dans la démonstration [concernant] la répétition d'une seule lettre.

<u>Problème</u> [IV] :

[Le] problème [est] : Nous voulons connaître le nombre de configurations[56] d'un mot dont le nombre de lettres est connu, compte tenu des voyelles et des sukūns qui se succèdent sur les lettres du mot et non pas des positions des lettres du mot.

Si nous voulons cela et que le mot est composé d'une seule lettre, ses configurations sont au nombre de trois. S'il est bilitère, le nombre de ses configurations est douze, parceque se succèdent sur la première lettre trois voyelles et sur la deuxième, trois voyelles et un sukūn.

S'il est trilitère, nous multiplions douze qui est le nombre de configurations du bilitère, par quatre qui représente les trois voyelles et le sukūn qui se succèdent sur la troisième lettre. D'où quarante huit duquel il faut retrancher trois qui correspond à la réunion du sukūn de la troisième et du sukūn de la seconde, la première lettre étant affectée soit d'une raf^{c}a, soit d'une naṣba, soit d'une khafḍa. Il reste quarante cinq qui est le nombre de configurations du trilitère, du point de vue des voyelles et des sukūns.

S'il est quadrilitère, tu multiplies le nombre de configurations du trilitère, qui est quarante cinq, également par quatre, tu obtiens cent quatre vingt duquel tu retranches le nombre de réunions du sukūn du quatrième et du sukūn du troisième qui correspond au nombre de voyelles qui se succèdent sur la seconde lettre et qui est trois, le résultat étant multiplié par le nombre de voyelles qui se succèdent sur la première lettre. Cela donne neuf, et il reste cent soixante onze qui est le nombre de configurations du quadrilitère, du point de vue des voyelles et des sukūns qui se succèdent sur chacune de ses lettres.

S'il est quintilitère, tu multiplies le nombre de configurations du quadrilitère, qui est cent soixante onze, par quatre, tu obtiens six cent quatre vingt quatre duquel tu retranches le nombre de réunions du sukūn de la cinquième et de celui de la quatrième, qui est le nombre de voyelles qui se succèdent sur la troisième lettre, et c'est trois. Le résultat est multiplié par le nombre de configurations du bilitère, du point de vue des voyelles et des sukūns, qui est douze. Tu obtiens trente six que tu retranches des six cent quatre vingt quatre qui précèdent. Il reste

six cent quarante huit qui est le nombre de configurations du quintilitère, du point de vue des voyelles et des sukūns qui se succèdent sur ses lettres.
S'il est sextilitère, tu multiplies également quatre par le nombre de configurations du quintilitère du point de vue des voyelles et des sukūns, et tu en retranches le produit de trois par le nombre de configurations du trilitère, du point de vue des voyelles et des sukūns.
D'une manière générale, tu retranches toujours trois, du nombre de lettres du mot, puis, tu comptes le nombre de configurations des lettres restantes, du point de vue des voyelles et des sukūns et tu multiplies cela par trois également et tu le conserves : Ce sera le premier [résultat]. Puis, tu retranches un,du nombre de lettres du mot et tu multiplies aussi par quatre le nombre de configurations du reste,du point de vue des voyelles et des sukūns. De ce produit, tu retranches le premier résultat. Le reste est égal au nombre de configurations des [letres du] mot, selon les voyelles et les sukuns et non pas selon les permutations des lettres du mot.
Si le mot est trilitère, tu retranches trois du produit de quatre par le nombre de configurations du bilitère. Tu obtiens, comme précédemment, quarante cinq. S'il est bilitère, le nombre de ses configurations est douze, du point de vue des voyelles et des sukūns et s'il est [composé] d'une seule lettre, le nombre de ses configurations est trois, seulement.

Il y a, pour ce problème, une autre méthode qui consiste à ôter deux des lettres du mot et à multiplier, par trois, le nombre de configurations du reste, du point de vue des voyelles et des sukūns, à conserver le [produit] qui sera la premier résultat puis, à ôter une des lettres du mot et à multiplier, par trois,le nombre de configurations du reste, du point de vue des voyelles et des sukūns. Au résultat, tu ajoutes le [produit] conservé. La somme est égale au nombre des configurations du mot du point de vue des voyelles et des sukuns.

Et, pour ne pas avoir à répéter les calculs pour ce dont on aura besoin, nous avons construit un tableau sous cette forme :

Tableau du nombre des configurations des mots selon les voyelles et les sukūn qui [se succèdent] et non selon les permutations des lettres									
mot de dix lettre	de neuf let.	de huit let.	de sept let.	de six let.	de cinq let.	de quatre let.	de trois let.	de deux let.	d'une let.
507627	133893	35316	9315	2457	648	171	45	12	3

[Tableau II]

[<u>Problème</u> V] :

Ayant montré cela, revenons à notre problème. Si on pose la question en disant : Nous voulons connaître le nombre de mots composés à partir des lettres de l'alphabet de sorte que le plus petit soit de trois lettres et le plus grand de dix.

Décrivons le procédé, d'abord, lorsque dans le mot ne se répète aucune lettre : La méthode consiste, ici, à considérer le nombre de lettres de l'alphabet comme étant des couleurs de soie et à dire : Combien contiennent-elles de houppes de sorte que le nombre de couleurs de chaque houppe soit, par exemple, trois. Tu obtiens un résultat que tu conserves. Comme tu as supposé que le nombre de couleurs d'une houppe est trois, tu poses, sur une ligne, la suite des entiers de un à trois, sous cette forme: 1,2,3, puis tu commences par multiplier un par deux, puis le produit par trois qui suit sur la ligne. Et si le suivant était un autre [nom-

bre],tu multiplierais le produit par lui. Puis, tu multiplies le résultat par le nombre de configurations du mot, selon les voyelles et les sukūns, puis tu conserves le résultat et tu le multiplies par le nombre de houppes de soie qui sont, chacune,de trois couleurs, comme nous l'avons supposé dans cet exemple. Le résultat est le nombre de mots composés des lettres de l'alphabet et dont chacun est de trois lettres.
Tu procèderas de la même manière pour les cas de plus et de moins de trois lettres.
Puis, tu sommes les nombres des groupes de lettres de l'ensemble, et ce sera le nombre des mots composés à partir des lettres de l'alphabet, dont le plus petit est de trois lettres et le plus grand de dix, et dans lesquels ne se répète aucune lettre.

[Problème VI] :

Proposition préliminaire pour ce que nous envisageons d'établir :
Etant donné un ensemble de filaments de soie, de couleurs connues, nous voulons en composer des houppes de sorte qu'il y ait dans chaque houppe un nombre donné de filaments de couleurs données.

Exemple de cela : Etant donné un ensemble de filaments de soie de dix couleurs, nous voulons en composer des houppes de sorte qu'il y ait, dans chaque houppe, trois filaments de deux couleurs, dont un d'une couleur et deux d'une autre couleur, sans que le nombre de filaments de même couleur soit identique dans deux houppes différentes .

Si tu réfléchis à ce problème, tu trouves que le nombre de houppes est le double de leur nombre si tu avais omis de parler des filaments et que tu avais dit : Nous voulons en composer des houppes de sorte qu'il y ait deux couleurs dans chaque houppe.
Si cela est ainsi, c'est parceque les deux filaments peuvent être de la première couleur dans une houppe , et de la deuxième dans une autre houppe.
D'une manière générale, que le nombre de filaments de [chaque]

couleur soit plus grand ou plus petit, le nombre de houppes constituées par les couleurs d'une houppe, est égal au nombre de configurations des lettres d'un mot dont le nombre de lettres est égal au nombre de couleurs de la houppe donnée et dont le nombre de répétitions de [chaque] lettre répétée est égal au nombre de [couleurs] ayant le même nombre de filaments.
Exemple de cela : [Etant donné] une houppe de huit filaments de cinq couleurs, dont deux d'une couleur chacun et six, deux à deux d'une même couleur, combien de houppes de huit filaments de cinq couleurs peut-on composer, de sorte que deux des filaments soient chacun d'une couleur distincte et que six filaments soient, deux à deux, de même couleur.
Si tu veux résoudre ce problème, tu disposes les [filaments] devant tes yeux, selon cette figure :

filament de la 1^{e} couleur	filament de la 2^{e} couleur	filaments de la 3^{e} couleur	filaments de la 4^{e} couleur	filaments de la 5^{e} couleur
g	g	k	k	k

[Tableau III]

Puis, tu réfléchis au problème et tu constates que les deux premières couleurs ont les nombres de leurs filaments égaux. Tu écris donc, en dessous de chacune d'elle, la même lettre, soit : g , g. Puis, tu constates que les trois autres couleurs ont les nombres de leurs filaments égaux. Tu écris, en dessous de chacune d'elles également, la même lettre, soit : k , k , k.
On est donc ramené, d'après la figure, à la combinaison de cinq lettres dont trois répètent [une même lettre] et deux répètent [une autre].
Le [nombre] de permutations [issues de cette combinaison] est

donc égal au nombre de houppes composées des couleurs d'une même houppe. Tu obtiens dix, d'après ce qui précède.

Preuve de cela : Cela vient du fait que pour chaque permutation des lettres, tu trouves une combinaison [correspondante] des filaments des couleurs, et inversement. En effet, s'il existe une permutation dans laquelle la première lettre est troisième, il existe une houppe correspondant à cette [permutation] et dans laquelle le nombre de filaments de la troisième couleur est égal à celui des filaments de la première couleur [dans la houppe donnée].

La démonstration est analogue pour le reste [des couleurs] et il en sera ainsi, aussi grand que soit le nombre.

<u>Section</u> :

[<u>Définition</u>]:

La combinaison, dans notre convention-ci, est un ensemble de lettres.

[<u>Problème</u> VII] :

Explicitation : Etant donné un mot de neuf lettres, [composé à partir] de cinq lettres [distinctes] dont deux non répétées, deux répétées deux fois et une répétée trois fois, combien de combinaisons sont-elles issues de ces lettres, chaque combinaison étant de neuf lettres et [composée à partir] de cinq lettres dont deux non répétées, deux répétées deux fois et une répétée trois fois.

Tu les écris sous cette forme :

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & e & i \\ & & c & e & i \\ & & & & i \end{array}$$

et, en dessous [des colonnes] d'un même nombre [de lettres], tu écris des lettres identiques :

$$\begin{array}{ccccc} a & a & d & d & r \end{array}$$

On est donc ramené à une combinaison de cinq lettres dont deux sont répétées deux fois. Le nombre de permutations des lettres de cette figure sera alors le nombre de combinaisons de neuf lettres dont deux ne sont pas répétées, deux répétées deux fois et une répétée trois fois, soit trente combinaisons.

[Problème VIII] :

Revenons à notre problème : Nous disons que les mots dont les lettres se répètent et qui se composent des lettres de l'alphabet sont, compte tenu des répétitions [de leurs lettres], soit des mots de dix lettres, soit [des mots] de moins de dix et ce, jusqu'à deux.

Parlons d'abord de ceux de dix lettres, puis de ceux de moins [de dix], jusqu'à deux lettres et ordonnons les lettres selon un ordre tel que celles [d'entre elles] qui sont distinctes se succèdent à partir de la première et celles d'entre elles qui sont répétées soient celles qui précèdent la dixième.
On a alors :

Soit neuf lettres distinctes et la dixième répétant l'une des neuf.

Soit huit distinctes, la neuvième et la dixième répétant une même lettre parmi les huit, ou deux.

Soit sept distinctes et les trois lettres restantes répétant une même lettre parmi les sept lettres distinctes, ou deux, ou trois.

Soit six distinctes et quatre répétant ou bien une lettre, ou bien deux, et si elles répètent deux lettres, ce sera soit une fois l'une et trois fois la seconde, soit deux fois l'une et deux fois l'autre ; ou bien [les quatre] répétent trois lettres et ce sera deux fois l'une d'elles et une fois les deux autres; [ou bien elles répètent quatre lettres.]

Soit cinq distinctes et les cinq autres répétant ou bien une des cinq lettres, ou bien deux, et si elles répètent deux lettres, ce sera soit une fois l'une et quatre fois la seconde, soit deux fois l'une et trois fois la seconde ; [ou bien] les cinq lettres répètent trois lettres, soit une fois l'une et deux fois chacune des deux [autres], soit trois fois l'une et une fois chacune des deux [autres] ; ou bien les cinq répètent quatre lettres, deux fois l'une d'elles et une fois chacune des trois restantes ; ou bien les cinq répètent cinq lettres, chacune une fois.

Soit quatre distinctes et six répétant une d'entre elles, ou bien deux,de sorte que l'une d'elles se répète cinq fois et la seconde une fois, ou l'une quatre fois et la seconde deux fois,ou l'une trois fois et la seconde trois fois ; ou bien ces six lettres répètent trois lettres de sorte que l'une d'elles se répète une fois, la seconde deux fois et la troisième trois fois, ou que chacune des trois se répète deux fois, ou l'une d'elles quatre fois et les deux autres une fois chacune ; ou bien ces six lettres répètent les quatre lettres restantes, deux d'entre elles une fois chacune et les deux [autres] deux fois chacune, ou l'une d'elles trois fois et les trois [autres] une fois chacune.

Soit trois distinctes et sept répétant une seule lettre, ou bien deux, de sorte que l'une d'elles se répète une fois et la seconde six fois, ou l'une d'elles deux fois et la seconde cinq fois, ou l'une d'elles trois fois et la seconde quatre fois, [ou bien ces sept lettres répètent trois lettres de sorte que deux se répètent chacune une fois et la troisième cinq fois, ou que l'une se répète une fois, la seconde deux fois et la troisième quatre fois, ou que deux se répètent chacune trois fois et la troisième une fois, ou que deux se répètent chacune deux fois et la troisième trois fois.]

Soit deux distinctes et huit répétant une seule lettre, ou bien deux,de sorte que l'une d'elles se répète une fois et la deuxième sept fois, ou l'une d'elles deux fois et la seconde six fois, ou l'une d'elles trois fois et la seconde cinq fois, ou l'une d'elles quatre fois et la seconde également [quatre fois].

Soit les neuf [lettres] qui répètent la première, les dix étant alors la répétition d'une seule lettre.

[Problème VIII] :

Si la dixième [lettre] répète l'une des neuf restantes, il y aura, pour les dix lettres, neuf combinaisons,chacune de dix lettres et chacune ayant une lettre répétée deux fois.

Si la neuvième et la dixième répètent une même lettre parmi les huit [autres], il y aura, pour les dix lettres, huit combinaisons, chacune de dix lettres et chacune ayant une lettre répétée trois fois.

Si la neuvième et la dixième répètent deux des huit lettres,il y aura, pour les dix lettres, vingt huit combinaisons, chacune de dix lettres et ayant deux lettres répétées,chacune deux fois. La méthode pour obtenir ces vingt huit combinaisons consiste à dire : [Etant donné]une houppe de dix filaments de huit couleurs de soie, avec six filaments,chacun d'une couleur et quatre, deux à deux d'une même couleur, combien obtient-on de houppes, chacune de dix filaments de huit couleurs, avec six,chacun d'une couleur et quatre,deux à deux d'une même couleur. Cela s'obtient comme précédemment.

Et c'est ainsi que l'on détermine le nombre de [toutes] les espèces de combinaisons, le procédé ayant été déjà exposé. La méthode pour déterminer cela consiste à considérer les lettres distinctes comme des couleurs et celles qui sont répétées comme des filaments, le calcul s'achevant comme précédemment.

[Problème IX] :

Cela étant montré, nous revenons à notre propos en disant : Nous voulons connaître le nombre des mots qui sont tels que l'être humain ne peut prononcer que l'un d'eux, sachant que le plus petit [de ces mots] doit être d'une seule lettre et le plus grand de dix, les dix lettres étant soit toutes répétées, soit toutes distinctes, soit en partie répétées et en partie distinctes, et cela quelle que soit la manière avec laquelle l'être humain les prononce.

Quant à ceux dont toutes les lettres sont différentes, nous avons déjà montré le procédé qui permet de les dénombrer. Parlons, à présent, de ceux dont les lettres se répètent et commençons par ceux qui, compte tenu des répétitions, sont de dix lettres, puis nous poursuivrons par ceux qui sont en nombre moindre jusqu'à ce qu'on aboutisse à ceux qui, compte tenu des répétitions, sont de deux lettres.

Pour ceux qui, compte tenu des répétitions, atteignent dix lettres, nous avons subdivisé [le calcul ainsi] :
Commençons par celui que nous avons [traité] en premier et qui est le mot de dix lettres dont neuf sont distinctes et la dixième répétant l'une des neuf. Nous disons : [Etant donné] des couleurs de soie au nombre de vingt huit, nous voulons en faire des houppes, de sorte qu'il y ait dans chaque houppe neuf couleurs,ce qui correspond au nombre de lettres distinctes. Il en découle un résultat qui sera [dit] le premier et que tu conserveras.
Puis, tu dis : [Etant donné] dix lettres dont neuf sont distinctes et l'une d'elles répétée deux fois, combien y a-t-il de combinaisons pour les dix lettres ? On obtient, comme précédemment, neuf combinaisons de dix lettres dont neuf sont distinctes et l'une des neuf répétée deux fois. Tu conserves cela et ce sera le deuxième [résultat] conservé.
Puis, tu détermines, comme précédemment, le nombre de permutations des lettres d'un mot de dix lettres dont une est répétée deux fois. Tu obtiens un résultat que tu conserves et ce sera le troisième [résultat] conservé.
Puis, tu détermines, comme précédemment, le nombre de configurations d'un mot de dix lettres, selon les voyelles et les sukūns. Tu conserves ce qui en résulte et ce sera le quatrième [résultat] conservé, c'est à dire le nombre par lequel, compte tenu des voyelles et des sukūns, se multiplie le nombre des mots.
Puis, tu multiplies le premier résultat conservé par le deuxième, le produit par le troisième et le produit par le quatrième.Ce qui en résulte est le nombre de mots qui sont tels que l'être humain ne peut prononcer un mot de dix lettres dont une est répétée deux fois, sans que ce soit l'un d'eux.

C'est de cette manière que s'obtient [le résultat] lorsque huit lettres sont distinctes et les deux [autres] répètent l'une des huit.

Déterminons également le nombre de mots composés de lettres de l'alphabet,dont chacun est de dix lettres, deux d'entre elles étant chacune répetée deux fois.
Nous disons : [Etant donné] des couleurs de soie en nombre égal à vingt huit, nous voulons en faire des houppes de telle sorte qu'il y ait dans chaque houppe huit couleurs qui correspondent au nombre de lettres distinctes. Tu obtiendras un résultat que tu conserveras et qui seras le premier [résultat] conservé.
Puis, tu dis : [Etant donné] dix lettres - huit distinctes et les neuvième et dixième répètant deux d'entre elles-,combien y a-t-il de combinaisons [de même type] issues de ces dix lettres ? Tu obtiens, comme précédemment, vingt huit combinaisons, chacune de dix lettres dont huit distinctes et deux répétant deux lettres parmi les huit [données]. Tu conserves le [nombre] et ce sera le deuxième [résultat] conservé.
Puis, tu détermines le nombre de permutations des lettres d'un mot de dix lettres dont huit sont distinctes et deux répètent deux d'entre elles. Tu obtiens un résultat que tu conserves et ce sera le troisième [résultat] conservé.
Puis, tu détermines le nombre de configurations d'un mot de dix lettres selon les voyelles et les sukūns et ce sera le quatrième [résultat], le mieux étant de garder le quatrième résultat de la question précédente afin que tu ne te fatigues pas à le calculer à chaque fois.
Puis, tu multiplies le premier résultat conservé par le second, le produit par le troisième et le produit par le quatrième. Le résultat sera le nombre de mots qui sont tels que l'être humain ne peut, de quelque manière que ce soit, prononcer un mot de dix lettres dont huit sont distinctes et deux répètent deux d'entre elles, sans que ce soit l'un d'eux.

Tu détermines, de la même manière, les espèces de toutes les combinaisons de dix lettres contenant des répétitions.
Tu procèderas de même pour [les mots] de neuf lettres avec répétitions, pour ceux de huit lettres avec répétitions et ainsi de

[Tableau IV des C_n^p ; $1 \leq n \leq 28$, $1 \leq p \leq 10$]

Tableau pour déterminer le nombre de combinaisons, une à une, ect..., jusqu'à dix à dix de lettres de l'alphabet dont le nombre est inférieur ou égal à 28

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									
2	1								
3	3	1							
4	6	4	1						
5	10	10	5	1					
6	15	20	15	6	1				
7	21	35	35	21	7	1			
8	28	56	70	56	28	8	1		
9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	105	455	1363	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	120	560	1820	4368	8088	11440	12870	11440	8008
17	136	680	2380	6188	12456	19528	24310	24310	19528
18	153	816	3060	8568	18644	31984	43838	48620	43838
19	171	969	3876	11628	27212	50628	75822	92458	92458
20	190	1140	4845	15504	38840	77840	126450	168280	184916
21	210	1330	5985	20349	54344	116680	204290	294730	353196
22	231	1540	7315	26334	74693	171024	....	....	....
23	253	1771	8855	33649	101027	....	....	....	....
24	276	2024	10626	42504	134676	....	....	....	....
25	300	2300	12650	53130	177180	....	....	....	....
26	325	2600	14950	65780	....	....	....	....	....
27	351	2925	17550	....	....	....	....	....	....
28	378	3216	....	....	....	....	....	....	....
unilitère	bilitère	trilit.	4 let.	5 let.	6 let.	7 let.	8 let.	9 let.	10 let.

[Tableau IV des C_n^p ; $1 \leq n \leq 28$, $1 \leq p \leq 10$]

Tableau pour déterminer le nombre de combinaisons, une à une, ect..., jusqu'à dix à dix de lettres de l'alphabet dont le nombre est inférieur ou égal à 28

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									
2	1								
3	3	1							
4	6	4	1						
5	10	10	5	1					
6	15	20	15	6	1				
7	21	35	35	21	7	1			
8	28	56	70	56	28	8	1		
9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	105	455	1363	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	120	560	1820	4368	8088	11440	12870	11440	8008
17	136	680	2380	6188	12456	19528	24310	24310	19528
18	153	816	3060	8568	18644	31984	43838	48620	43838
19	171	969	3876	11628	27212	50628	75822	92458	92458
20	190	1140	4845	15504	38840	77840	126450	168280	184916
21	210	1330	5985	20349	54344	116680	204290	294730	353196
22	231	1540	7315	26334	74693	171024	....	....	....
23	253	1771	8855	33649	101027	....	....	....	....
24	276	2024	10626	42504	134676	....	....	....	....
25	300	2300	12650	53130	177180	....	....	....	....
26	325	2600	14950	65780	....	....	....	....	....
27	351	2925	17550	....	....	....	....	....	....
28	378	3216	....	....	....	....	....	....	....
unili tère	bili tère	tri lit.	4 let.	5 let.	6 let.	7 let.	8 let.	9 let.	10 let.

suite, jusqu'à ceux de deux lettres. Puis, tu sommes le tout et tu lui ajoutes ce que tu as obtenu précédemment comme [nombre] de combinaisons, sans répétition, des mots de une à dix lettres. Ce que tu obtiendras sera le nombre de mots qui sont tels qu'un être humain ne peut prononcer que l'un d'entre eux.

[Ici] s'achève la onzième section. Que Dieu répande ses bénédictions sur notre seigneur Muḥammad, sur sa famille et sur ses compagnons et qu'il leur accorde le salut.
Elle sera suivie par le second chapitre sur les fractions.
Que Dieu nous accorde son assistance, lui dont nous implorons le secours. Il n'y a pas d'autre dieu que lui.

[B. EXEMPLES A L'AIDE DE TABLEAUX] :

Comme la science du calcul est le domaine privilégié pour ce qui est du passage des [règles] générales aux [cas] particuliers et que nous avions traité, dans la onzième section du chapitre premier de ce livre, de ce qui est général dans les procédés en laissant de côté les exemples et ce par manque de temps, nous avons rédigé, lorsque nous avons disposé de plus de temps, et ce après que l'ouvrage ait été recopié et qu'il fût entre les mains des étudiants, les exemples qui vont suivre et nous avons abordé les aspects particuliers de la section, en guise de complément que nous avons joint aux exemples à la fin de la section.
Que Dieu nous accorde son assistance. Il n'y a pas d'autre dieu que lui.

[Utilisation du tableau IV] :

Description de la manière d'utiliser le tableau précédent : Tu répères dans le tableau, sur la ligne des entiers successifs, le nombre de lettres de ton mot et tu entres par la colonne correspondant à ce nombre. Puis, tu repères dans le tableau, sur la colonne des entiers successifs, le nombre de lettres de ta langue, qui est vingt huit pour la langue arabe, et tu entres par la ligne[57] correspondant à ce nombre. Alors, le nombre contenu dans la case où cette ligne rencontre la colonne par laquelle tu es déjà entré, est le nombre de combinaisons des mots constitués de lettres distinctes de ta langue et en nombre égal à celui que tu as supposé pour le mot.

Tableau des configurations de mots dont toutes les lettres sont différentes ou dont une seule est répétée

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dix lettres	3628800	1814400	604800	151200	30240	5040	720	90	10	1
neuf lettres	362880	181440	60480	15120	3024	504	72	9	1	
huit lettres	40320	20160	6720	1680	336	56	8	1		
sept lettres	5040	2520	840	210	42	7	1			
six	720	360	120	30	6	1				
cinq	120	60	20	5	1					
quatre	24	12	4	1						
trois	6	3	1							
deux	2	1								
une	1									

[Tableau V]

			2520	huit lettres
		7560	22680	neuf lettres
25200	18900	75600	226800	dix lettres
3322	4222	3222	2222	

Ligne des répétitions de chaque lettre dans le mot

Tableau des configurations des lettres des mots dans lesquels se répètent quatre lettres.

[Tableau VI]

Tableau des permutations des lettres d'un mot [de n lettres, $4 \leq n \leq 10$], avec répétition de deux lettres seulement [respectivement k et p fois, $2 \leq k, p \leq 8$; $4 \leq k+p \leq n$]

Ligne du nombre de répétitions de chaque lettre dans le mot

	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2	7,2	8,2	3,3	4,3	5,3	6,3	7,3	4,4	5,4	6,4	5,5
dix lettres	907200	302400	75600	15120	2520	360	45	100800	25200	5040	840	120	6300	1260	210	252
neuf let.	90720	30240	7560	1512	252	36		10080	2520	504	84		630	126		
huit let.	10080	3360	840	168	28			1120	280	56			70			
sept let.	1260	420	105	21				140	35							
six let.	180	60	15					20								
cinq let.	30	10														
quatre let.	6															

[Tableau VII]

Tableau des permutations des lettres des mots dont le plus grand est de dix lettres et le plus petit de six, avec répétition de trois de leurs lettres

	Ligne du nombre de répétitions de chacune des trois lettres dans le mot										
	2 2 2	2 2 3	2 2 4	2 2 5	2 2 6	2 3 3	2 3 4	2 3 5	2 4 4	3 3 3	3 3 4
dix lettres	453600	151200	37800	7560	1260	50400	12600	2520	3150	16800	4200
neuf let	45360	15120	3780	756		5040	1260			1680	
huit let	5040	1680	420			560					
sept let	630	210									
six let	90										

[Tableau VIII]

Tableau des permutations des lettres d'un mot de dix lettres, avec répétition de cinq lettres					
	2	2	2	2	2
dix lettres	113400				

[Tableau IX]

Tableau du nombre de configurations issues d'un mot par la succession des voyelles et des sukūns sur chacune des lettres du mot									
mot de dix lettres	de neuf let.	de huit let.	de sept let.	de six let.	de cinq let.	de quatre let.	de trois let.	de deux let.	d'une let.
507627	133893	35316	9315	2457	648	171	45	12	3

[Tableau IIbis]

Tableau pour déterminer le nombre de combinaisons issues d'un mot dans lequel se répètent des lettres [un même nombre de fois]

Ligne du nombre de lettres répétées dans le mot	mot de dix let.	de neuf	de huit	de sept	de six	de cinq	de quat	de trois	de deux
2 2 2 2 2	1								
2 2 3 3	6								
2 2 2 4	4								
2 2 2 3	20	4							
2 2 2 2	15	5	1						
2 4 4	3								
3 3 4	3								
2 3 5	6								
2 2 6	3								
2 2 5	12	3							
3 3 3	4	1							
2 3 4	24	6							
2 2 4	30	12	3						
2 3 3	30	12	3						
2 2 3	60	30	12	3					
2 2 2	35	20	10	4	1				
5 5	1								
4 6	2								
3 7	2								
2 8	2								
4 5	6	2							
3 6	6	2							
2 7	6	2							
4 4	6	3	1						
3 5	12	6	2						
2 6	12	6	2						
3 4	20	12	6	2					
2 5	20	12	6	2					
3 3	15	20	6	3	1				
2 4	30	20	12	6	2				
2 3	42	30	20	12	6	2			
2 2	28	21	15	10	6	3	1		
10	1								
9	2	1							
8	3	2	1						
7	4	3	2	1					
6	5	4	3	2	1				
5	6	5	4	3	2	1			
4	7	6	5	4	3	2	1		
3	8	7	6	5	4	3	2	1	
2	9	8	7	6	5	4	3	2	1

[Tableau X]

[Utilisation du tableau X] :

Méthode pour déterminer le nombre de combinaisons [issues] d'un mot dont le nombre de lettres est connu et dans lequel se répètent des lettres, un nombre connu de fois.

Tu repères, dans la colonne des nombres, les lettres répétées et le nombre de répétitions de chacune des lettres. Puis, tu entres par la ligne correspondante. Tu entres également par la colonne des mots. Alors, le nombre de la case où se rencontrent la ligne et la colonne est égal au nombre de combinaisons issues du mot que tu as considéré et dans lequel se répètent des lettres. C'est ce que nous voulions démontrer.

[Application] :

Méthode pour déterminer le nombre de mots constitués des lettres de l'alphabet [arabe] dont le plus grand, compte tenu des affixes et des répétitions, est de dix lettres et le plus petit d'une seule lettre.

Occupons-nous d'abord des mots constitués de dix lettres distinctes : Tu entres, comme nous l'avons indiqué, dans le tableau qui a été dressé pour cela ; tu obtiens : 13123110 que tu conserves en premier et c'est l'ensemble des mots formés de combinaisons de lettres, dont chacune est constituée de dix lettres distinctes.

Puis, du tableau des permutations d'un mot, tu tires le nombre de permutations d'un mot de dix lettres distinctes. Tu obtiens : 3628800 que tu conserves une seconde fois.

Puis, du tableau des voyelles et des sukūns qui se succèdent sur les lettres, tu tires ce qui correspond [au nombre de configurations] d'un mot de dix lettres. Tu obtiens : 507627 que tu conserves et qui sera le troisième [résultat] conservé.

Puis, tu multiplies le premier résultat par le second, puis le produit par le troisième et tu obtiens le nombre de mots de dix lettres, toutes distinctes, formés à partir des vingt huit lettres [de l'alphabet] et c'est le résultat que nous cherchions.

Ensuite, tu passes aux mots de neuf lettres distinctes, puis à ceux de huit lettres et ainsi de suite jusqu'à ceux d'une seule lettre. Ensuite [tu abordes] les mots de dix lettres qui répètent une seule lettre, puis deux, et ainsi de suite jusqu'à ce que tu les épuises toutes, puis les mots de neuf lettres et ainsi de suite, par induction, jusqu'à ce que tu les épuises toutes.

Prenons l'exemple d'un mot de neuf lettres dont deux ne sont pas répétées, deux répétées deux fois et une répétée trois fois. Ses lettres distinctes sont donc au nombre de cinq. Tu calcules le nombre de combinaisons à cinq éléments formés de lettres distinctes de l'alphabet [arabe], en l'extrayant du tableau comme précédemment et c'est : 98280 que tu conserves en premier.
Puis, tu calcules le nombre de permutations de ton mot de neuf lettres qui se répètent selon ton hypothèse. Tu obtiens : 15120 que tu conserves en second lieu.
Puis, tu tires du tableau des voyelles et des sukūns qui se succèdent sur les lettres [le nombre] qui correspond à ton mot de neuf lettres. Tu obtiens : 133893 que tu conserves en troisième lieu.
Puis, tu extrais du tableau des combinaisons ce qu'il faut à ton mot comme combinaisons. Tu obtiens : 30 et c'est le quatrième résultat.
Tu multiplies alors le premier résultat par le second, le produit par le troisième et ce dernier produit par le quatrième. Tu obtiens : 5968924232544000 qui est le nombre de mots de neuf lettres composés des lettres de l'alphabet, chacun de ces mots ayant deux lettres **non répétées**, deux répétées deux fois et une répétée trois fois. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Problème sous forme d'exemple :

Nous voulons savoir combien de mots de neuf lettres peut-on former avec cinq lettres distinctes données dont deux sont non répétées, deux répétées chacune deux fois et une répétée trois fois.

Tu multiplies le nombre de permutations de ces lettres -soit 15120- par ce qui lui correspond dans le tableau des voyelles et des sukūns et qui est : 133893. Le résultat sera : [2024462160.]

Si, parmi les lettres qui sont données, celles qui sont répétées sont également données, c'est à dire, les lettres données étant par exemple : c, d, e, g, i, les [seules] lettres non répétées sont c et d, les [seules] qui sont répétées deux fois : e, g et [la seule] qui est répétée trois fois : i, les lettres étant [disposées] selon cette figure :

c , d , e,e , g,g , i,i,i

alors, le résultat du produit [précédent] est ton résultat cherché.

Mais, si les lettres répétées ne sont pas données, tu multiplies le résultat [précédent] par le nombre de combinaisons [issues] de ces lettres répétées et c'est : 30. Tu obtiens alors : [60733864800] qui est le résultat demandé. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

[Ici] s'achève [l'étude]. Que la bénédiction de Dieu soit sur notre Seigneur Muḥammad, sur sa famille et sur ses compagnons et qu'il leur accorde son salut. Il n'y a pas d'intercession et de pouvoir sans Dieu, le très haut, le tout puissant.

* * * * *

Index des mots essentiels de la section XI (*)

(*)- On renvoie à la page de la traduction où apparaît le mot pour la première fois.

فهرست أهم مصطلحات النوع الحادي عشر

(60) : يتكرر .
(61) : مرتين .
(62) : للاثنين .
(63) : تكون .
(64) : كـل .
(65) : تكريرها .
(66) : كتب الناسخ أولا : اتينا لك . ثم شطب الأول وأبدل الألف الثاني دالا وغيرت كتابة النون .
(67) : المختلفة .
(68) : لاجل .
(69) : العدد للكـلمات .
(70) : المكرران .
(71) : لنرد .
(72) : لاحدهما .
(73) : فوق السطر .
(74) : اضيق .
(75) : للامثلة .
(76) : التقا .
(77) : لـه .
(78) : كتب الناسخ : عدة . ثم غيرت التاء دالا .
(79) : المتكررة .
(80) : الجروف .
(81) : فوق السطر .
(82) : السباعيات .
(83) : يخرج .
(84) : كتب الناسخ بعده : 15120 . ثم حذفها .
(85) : كتب الناسخ قبلها : ثانيا . ثم حذفها .
(86) : المتحركة .
(87) : الحركة .
(88) : كـل .
(89) : فيكون .

جدول التصويبـــات

(1) : ساكنا .

(2) : تعلى .

(3) : كثرة .

(4) : مسئلة . وقد غيرنا كتابتها في النص بدون إشارة إلى ذلك .

(5) : الذي .

(6) : للون .

(7) : جميع .

(8) : كتب الناسخ بعدها : كذلك ، ثم شطبها .

(9) : الالوان .

(10) : هو .

(11) : يدعوا .

(12) : النظر .

(13) : الذي .

(14) : كـل لون منها .

(15) : لون .

(16) : الوان .

(17) : الوانه .

(18) : و .

(19) : بحروف .

(20) : الكـلمة .

(21) : واحدة .

(22) : ارج .

(23) : شمالى .

(24) : ينتهي .

(25) : كـانت .

(26) : يخرج .

(27) : معلومـا .

(28) : ان .

(29) : الكـلمة .

(30) : العدد .

(31) : الكلمة .

(32) : كتبها الناسخ هكذا : الموضوعة . ثم غيرت الكلمة لتقرأ : المفروضة . ثم أعيدت كتـابة الكلمة الصحيحة في الهامش .

(33) : مخفوظا .

(34) : تبقا .

(35) : نضرب .

(36) : اجماع .

(37) : فى .

(38) : تعلم .

(39) : حروف .

(40) : معدا .

(41) : تالف .

(42) : تحفضه .

(43) : فرضته .

(44) : فى .

(45) : منها .

(46) : غصن . وهكذا أيضا في الجدولين الباقيين .

(47) : ساوت .

(48) : اغصانها .

(49) : تحتها .

(50) : تاليف .

(51) : تبعثرت حروف الصورة في النص، فجمعناها .

(52) : يخلوا .

(53) : الحرف .

(54) : لأجل .

(55) : الحرفين .

(56) : كتب الناسخ بعدها : قد . ثم شطبها .

(57) : لاحدهما .

(58) : حرف .

(59) : او .

الحروف المتألفة من الثمانية و العشرين حرفا . و ذلك مطلوبنا .
ثم تندرج إلى التساعيات المختلفة الحروف، ثم إلى الثمانيات ، حتى إلى المفردات . ثم إلى العشريات
المتكررة بحرف واحد ثم بحرفين ، حتى تستوفي جملتها . ثم التساعيات [82] ثم كذلك بالإستقراء حتى
تستوفيها .

ولنأخذ مثالا من كلمة من تسعة أحرف ، حرفان مفردان وحرفان منها مثنيان وحرف مثلث :
فحروفه المختلفة إنما هي خمسة . فتخرج [83] عدة الجماعات الخماسيات المختلفة الحروف المتألفة من
حروف ابجد . و تخرجها من الجدول كما تقدم ، و ذلك : 98280 [84]. فتحفظه أولا [85]. ثم تخرج
عدة أوضاع كلمتك التساعية المتكررة [86] الحروف كما فرضت . فيخرج لك : 15120 . فتحفظه ثانيا . ثم
343 تأخذ من جدول الحركات [87] / و السواكن المتعاقبات على الحروف ما يجب لكلمتك التساعية . فيخرج:
133893 . فتحفظه ثالثا . ثم تأخذ من جدول التأليفات ما يجب لكلمتك من التأليفات . فيخرج لك: 30،
و هو المحفوظ الرابع.

فتضرب المحفوظ الأول في الثاني وما اجتمع في الثالث وما اجتمع في الرابع . فيخرج لك:
596893233254400 ، و هي عدة الكلمات التساعيات المتألفة من حروف معجمة التي لكل [88] كلمة
منها حرفان مفردان وحرفان مثنيان وحرف مثلث . و ذلك ما أردنا بيانه .

مسألة مثالا :

أردنا أن نعلم كم كلمة تساعية تعمل من خمسة أحرف مفروضة مختلفة ، حرفان منها مفردان وحرفان مثنيان
وحرف مثلث :

فتضرب عدة أوضاع هذه الحروف ، و ذلك 15120 ، فيما يجب لها في جدول الحركات و السواكن
و ذلك : 133893 . فيكون الخارج : 2024462160 . فإن كانت الحروف المكررة من الحروف المفروضة ،
مفروضة أيضا ، و أعني أن تكون الحروف المفروضة مثلا : ج ، د ، هـ ، ز ، ط . فيكون المفردان منها :
ج ، د ، و المثنيان منها : هـ ، ز ، و المثلث : ط .
فتكون [89] الحروف على هذه الصورة : ج ، د ، هـ هـ ، ز ز ، ط ط ط . فإن الخارج من الضرب
هو خارجك و مطلوبك و ذلك : [2024462160].
و إن لم تكن الحروف المكررة مفروضة ، فتضرب الخارج في تأليفات تلك الحروف بتكريرها و ذلك : 30 .
فيخرج لك : [60733864800] . و ذلك هو الخارج المطلوب . و ذلك ما أردنا بيانه .
كمل وصلى الله على سيدنا محمد وآله وصحبه وسلم . ولا حول ولا قوة إلا بالله العلي العظيم .

* * * * *

342 وجه العمل

في إخراج عدة التأليفات لكلمة عدة حروفها معلومة و تتكرر فيها حروف تكريرا معلوما : تتصفح في جدول الأعداد الحروف المتكررة و عدة تكرير كل حرف منها و تدخل بجدوله في عرض الصفح و تدخل أيضا في جدول الكلمات طولا في الصفح . فحيث التقى الجدولان فعدد (78) ذلك البيت هو عدة التأليفات للكلمة المكررة (79) للحروف التي فرضت . و ذلك ما أردنا بيانه .

العمل

في إخراج عدة الكلمات المتألفة من حروف ابجد التي أكبر كل كلمة منها من عشرة أحرف بالزوائد و التكرير و أصغر كلمة من حرف واحد :

فلنقصد أولا العشرية المختلفة الحروف : فتدخل في الجدول الموضوع لذلك كما أخبرنا ، تخرج عدة ذلك : 13123110 . فتحفظ ذلك أولا و هي جماعة الكلمات (80) المتألفة من حروف مجمعة التي كل جماعة منها من عشرة أحرف مختلفة .

ثم تأخذ من جدول أوضاع الكلمة عدة أوضاع حروف الكلمة العشرية المختلفة الحروف . فيخرج لك : 3628800 فتحفظه ثانيا .

ثم تأخذ من جدول الحركات و السواكن المتعاقبات على الحروف ما يجب للكلمة العشرية من ذلك :

جدول ما تتضاعف به الكلمات لأجل الحركات و السواكن المتعاقبات على حرف من حروف الكلمة									
معشر	متسع	مثمن	مسبع	مسدس	مخمس	مربع	مثلث	مثنى	مفرد
507627	133893	35316	9315	2457	648	171	45	12	3

جدول (11)

فيخرج : 507627 . فتحفظه و هو المحفوظ الثالث .

ثم تضرب المحفوظ الأول في الثاني و ما اجتمع في الثالث . فيخرج لك (81) عدة الكلمات العشرية المختلفة

جدول إخراج عدة تأليف الكلمات المتكررة الحروف كلمة كلمة

جدول أعداد الحروف المكررة للكلمات

	معشر	متسع	مثمن	مسبع	مسدس	مخمس	مربع	مثلث	مثنى
2	9	8	7	6	5	4	3	2	1
3	8	7	6	5	4	3	2	1	
4	7	6	5	4	3	2	1		
5	6	5	4	3	2	1			
6	5	4	3	2	1				
7	4	3	2	1					
8	3	2	1						
9	2	1							
10	1								
2 2	28	21	15	10	6	3	1		
2 3	42	30	20	12	6	2			
2 4	30	20	12	6	2				
3 3	15	20	6	3	1				
2 5	20	12	6	2					
3 4	20	12	6	2					
2 6	12	6	2						
3 5	12	6	2						
4 4	6	3	1						
2 7	6	2							
3 6	6	2							
4 5	6	2							
2 8	2								
3 7	2								
4 6	2								
5 5	1								
2 2 2	35	20	10	4	1				
2 2 3	60	30	12	3					
2 3 3	30	12	3						
2 2 4	30	12	3						
2 3 4	24	6							
3 3 3	4	1							
2 2 5	12	3							
2 2 6	3								
2 3 5	6								
3 3 4	3								
2 4 4	3								
2 2 2 2	15	5	1						
2 2 2 3	20	4							
2 2 2 4	4								
2 2 3 3	6								
2 2 2 2 2	1								

جدول (10)

جدول أوضاع حروف الكلمات التي أكبرها من عشرة أحرف و أصغرها من ستة بتكرير ثلاثة أحرف

	جدول مراتب ما في كل واحد من الثلاثة الاحرف من الكلمة في الكلمة										
	2 2 2	3 2 2	4 2 2	5 2 2	6 2 2	3 3 2	4 3 2	5 3 2	4 4 2	3 3 3	433
معشر	453600	151200	37800	7560	1260	50400	12600	2520	3150	16800	4200
متسع	45360	15120	3780	756		5040	1260			1680	
مثمن	5040	1680	420			560					
مسبع	630	210									
مسدس	90										

حيث التقى جدول الحروف المكررة لكلماتك مع جدول كلمتك، فعدد ذلك البيت هو ما أردت و هو عدة أوضاع حروف الكلمة المكررة الحروف كتكريرك المفروض بالعدد المفروض.

جدول (8)

	جدول أوضاع ما تكرر فيه خمسة أحرف و إنما ذلك في المعشر فقط
	2 2 2 2 2
المعشر	1 1 3 4 0 0

جدول (9)

جدول أوضاع حروف الكلمات بتكرير حرفين من الكلمة

جدول مراتب كل واحد من الحرفين في الكلمة

	معشر	متسع	ثمن	مسبع	مسدس	مخمس	مربع
5 5	252						
4 6	210						
4 5	1260	126					
4 4	6300	630	70				
3 7	120						
3 6	840	84					
3 5	5040	504	56				
3 4	25200	2520	280	35			
3 3	100800	10080	1120	140	20		
2 8	45						
2 7	360	36					
2 6	2520	252	28				
2 5	15120	1512	168	21			
2 4	75600	7560	840	105	15		
2 3	302400	30240	3360	420	60	10	
2 2	907200	90720	10080	1260	180	30	6

جدول (7)

صفة العمل بهذا الجدول المتقدم 338

تتصفح في الجدول ، في عرض الأعداد المتوالية ، عدد حروف كلمتك و تدخل بجدول ذلك العدد طولا . و تتصفح ، في جدول طول الصفح في الأعداد المتوالية ، عدد حروف لغتك التي هي في لسان العرب ثمانية وعشرون . تدخل بجدول ذلك العدد عرضا . فحيث التقى (76) هذا الجدول مع الجدول الذي دخلت بـه (77) طولا فعدد ذلك البيت هو عدد التأليفات و هي الجماعات للكلمات المختلفة الحروف المتألفة من حروف لغتك التي عددها مثل العدد الذي فرضت للكلمة .

جدول أوضاع الكلمات المختلفة الحروف و المكررة بحرف واحـد

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
معشر	3628800	1814400	604800	151200	30240	5040	720	90	10	1
متسع	362880	181440	60480	15120	3024	504	72	9	1	
مثمن	40320	20160	6720	1680	336	56	8	1		
مسبع	5040	2520	840	210	42	7	1			
مسدس	720	360	120	30	6	1				
مخمس	120	60	20	5	1					
مربـع	24	12	4	1						
مثلث	6	3	1							
مثنى	2	1								
مفـرد	1									

جدول (5)

			2520	المثمـن
		7560	22680	المتسـع
25200	18900	75600	226800	المعشـر
3 3 2 2	4 2 2 2	3 2 2 2	2 2 2 2	
جدول مراتب ما في كل واحد من الأربعة الأحرف من الكلمة في الكلمة				
جدول أوضاع حروف الكلمات بتكرير أربعة أحرف من الكلمـــــــة				

جدول (6)

جدول (4)

جدول إخراج عدة الجماعات المختلفة الحروف التي من حرف إلى عشرة المتألفة من الثمانية و العشرين حرفا من حروف ابجد فما دون ذلك

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19528
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43838
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92458
11	66	286	1001	3003	8088	19528	43838	92458	184916
12	78	364	1363	4368	12456	31984	75822	168280	353196
13	91	455	1820	6188	18644	50628	126450	294730	....
14	105	560	2380	8568	27212	77840	204290	....	....
15	120	680	3060	11628	38840	116680	....	....	....
16	136	816	3876	15504	54344	171024	....	....	....
17	153	969	4845	20349	74693	....	....	....	....
18	171	1140	5985	26334	101027	....	....	....	
19	190	1330	7315	33649		....	....		
20	210	1540	8855						
21	231	1771							
22	253								
23									
24	276	2024	10626	42504	134676				
25	300	2300	12650	53130	177180				
26	325	2600	14950	65780	....	....	....	....	....
27	351	2925	17550	....	....	....			
28	378	3216	....	....	....	....	....	....	....
مفرد	مثنى	مثلث	مربع	مخمس	مسدس	مسبع	مثمن	متسع	معشر

فتحفظه و هو المحفوظ الثالث .
ثم تستخرج أوضاع كلمة من عشرة أحرف من جهة الحركات و السواكن ،كما تقدم . فما اجتمع لك تحفظه و هو المحفوظ الرابع ، أعني العدد الذي تتضاعف به الكلمات لأجل الحركات و السواكن .
ثم تضرب المحفوظ الأول في المحفوظ الثاني و ما اجتمع في المحفوظ الثالث و ما اجتمع في المحفوظ الرابع . فما اجتمع فهو عدد الكلمات (69) التي لا يمكن أن ينطق بشر بكلمة من عشرة أحرف ، أحد الحروف مثنى ، الا بواحدة منهن .

و بمثل ذلك يخرج [العدد] إن كانت الثمانية مختلفة و الإثنان مكررين (70) لأحد الثمانية .
و لنورد (71) أيضا عدد الكلمات المتألفة من حروف ابجد التي كل كلمة منها من عشرة أحرف و حرفان منهما كل واحد منهما مثنى .
فنقول : ألوان حرير عددها ثمانية وعشرون ، أردنا أن نعمل منها شراريب على أن يكون في كل شرابة ثمانية ألوان و هي عدد الحروف المختلفة . فيخرج لك معلوم ، فتحفظه و هو المحفوظ الأول .
ثم تقول : عشرة أحرف ، الثمانية مختلفة و التاسع و العاشر مكرران لحرفين منها (72) . كم تأليفا (50) يكون للعشرة الأحرف . فيخرج لك ثمانية وعشرون تأليفا كما تقدم ، كل تأليف من عشرة أحرف ، الثمانية أحرف مختلفة و الإثنان مكرران لحرفين من الثمانية . فتحفظه و هو المحفوظ الثاني .
ثم تستخرج عدد أوضاع حروف كلمة عدد تلك الحروف عشرة ، الثمانية مختلفة و الحرفان مكرران لحرفين منها (72) . فيخرج لك معلوم . فتحفظه و هو المحفوظ الثالث .
ثم تستخرج أوضاع كلمة من عشرة أحرف من جهة الحركات و السواكن و هو المحفوظ الرابع . و الأولى أن تقيد عندك المحفوظ الرابع من المسألة التي قبل لكي لا تتعب كل مرة في إخراجه .
ثم تضرب المحفوظ الأول في الثاني و ما اجتمع في الثالث و ما اجتمع في الرابع . فما خرج لك فهو عدد الكلمات التي لا يمكن أن ينطق بشر بكلمة ، كيف <كيف> ما نطق بها من عشرة أحرف ، الثمانية مختلفة و الإثنان مكرران لحرفين منها (72) ، الا بواحدة منهن .
336 وكذلك / تستخرج أنواع جميع التأليفات التي من عشرة أحرف و فيها تكرار . وكذلك تفعل فيما هو من تسعة أحرف بالتكرار و فيما هو من ثمانية بالتكرار إلى ما هو من حرفين . و تجمع ذلك كله و تضيف إليه ما تألف لك قبل من الكلمات التي من حرف إلى عشرة أحرف وحروفها دون تكرار . فما اجتمع لك فهو عدد الكلمات التي لا ينطق بشر إلا بإحداهن .
كمل النوع الحادي العشر ، وصلى الله على سيدنا محمد وعلى (73) آله و صحبه و سلم تسليما كثيرا .
يتلوه الباب الثاني في الكسور . و بالله التوفيق و هو المستعان ، لا رب غيره .

[ب. أمثلة بالجداول] :

و لما كان علم الحساب أفضل ما استنزل فيه من الكليات إلى الجزئيات وكان النوع الحادي عشر من الباب الأول من هذا الكتاب أتينا فيه بكليات الأعمال و تركنا الاستنزال فيه الى الأمثلة وكان ذلك لضيق (74) الوقت ، بعد أن انتسخ التأليف و صار بأيدي الطلبة ، اتسع لنا الوقت ، فوضعنا هذه الأمثلة و استنزلنا في النوع المذكور إلى جزئياته فان ذلك كمال ، و ألحقناه بالأمثلة (75) عقب نوعها ، و الله المستعان لا رب سواه ./

سبع مرات أو لأحد هما مرتين و للثاني ست مرات أو لأحد هما ثلاث مرات و للثاني خمس مرات أو لأحد هما أربعا و للثاني كذلك .
أو تكون التسعة مكررة للأول . فتكون العشرة الأحرف تكرير حرف واحد .

[مسألة]:

فإذا كان العاشر مكررا لأحد الحروف التسعة الباقية تكون للعشرة الأحرف تسعة تواليف كل تأليف من عشرة أحرف و لكل (64) تأليف حرف مثنى .
و إن كان التاسع و العاشر مكررين لحرف واحد من الحروف الثمانية ، تكون للعشرة الأحرف ثمانية تواليف ، كل تأليف من عشرة أحرف ، في كل تأليف حرف مثلث .
و إن كان التاسع و العاشر مكررين لحرفين من الحروف الثمانية ، يكون للعشرة الأحرف ثمانية و عشرون تأليفا كل تأليف من عشرة أحرف ، في كل تأليف حرفان كل واحد منهما مثنى . و كيفية إخراج هذه الثمانية و العشرين تأليفا أن تقول : شرابة من عشرة أغصان من ثمانية ألوان من الحرير ، ستة أغصان منها كل واحد من لون لون و أربعة منها كل اثنين منها من لون . كم شرابة يكون منها ، كل شرابة من عشرة أغصان من الثمانية الألوان ، ستة منها كل واحد من لون لون و أربعة كل إثنين منها من لون؟ فيخرج لك ذلك كما تقدم .
و بمثل ذلك يخرج عدد أنواع التأليفات ، إذ قدم العمل في ذلك . و كيفية إخراج ذلك بأن تجعل عدد الحروف المختلفة ألوانا و عدد تكريرها (65) أغصانا و يتم العمل كما تقدم .

[مسألة]:

و إذ قد تبين ذلك (66) ، فإنا نرجع إلى مقصودنا :
فنقول : أردنا أن نعلم عدد الكلمات التي لا يلفظ البشر إلا بإحداها على أن يكون أصغرها من حرف و أكبرها من عشرة أحرف ، سواء كانت العشرة الأحرف بجملتها مكررة أو مختلفة أو بعضها مكررا و بعضها مختلفا أو كيف أمكن أن يلفظ البشر بها .
أما المختلفة الحروف بجملتها ، فقد تبين كيف الطريق الى حصرها بالعدد .
و لنتكلم الآن في المتكررة (67) الحروف . و لنبدأ بالتي تصل بتكريرها عشرة ، ثم نتدرج إلى ما دون ذلك حتى إلى التي تصل بتكريرها حرفين . و قد قسمنا ما بلغ إلى عشرة أحرف بالتكرير . و لنبدأ بما بدأنا به و هي الكلمة التي / من عشرة أحرف ، التسعة مختلفة و العاشر مكرر لأحد (68) التسعة . فنقول : ألوان من 335
الحرير عدتها ثمانية و عشرون لونا ، أردنا أن نعمل منها شراريب على أن يكون في كل شرابة تسعة ألوان و هي عدد الحروف المختلفة . فيخرج لك معلوم . فتحفظه و هو المحفوظ الأول .
ثم تقول : عشرة أحرف التسعة مختلفة و أحدها مثنى . كم تأليفا (50) يكون للعشرة الأحرف؟ فيخرج كما تقدم تسعة تواليف في كل تأليف عشرة أحرف ، التسعة مختلفة و أحد التسعة مثنى . فتحفظ ذلك و هو المحفوظ الثاني .
ثم تستخرج عدد أوضاع حروف كلمة عدد تلك الحروف عشرة و حرف منها مثنى ، كما تقدم . فيخرج لك معلوم.

فيرجع التأليف من خمسة أحرف ، إثنان مكرران < و واحد مثلث > . فيكون عدة أوضاع حروف هذه الصورة هي عدة التأليف المتسع الذي حرفان منه مفردان و حرفان مثنيان و حرف مثلث و ذلك ثلاثون تأليفا .

[مسألة] :

و لنعد إلى مسألتنا . فنقول : إن الكلمات المتكررة الحروف التي تتألف من حروف ابجد لا يخلو (52) أن تكون بتكريرها إما من عشرة أحرف ، فما دونها ، الى حرفين .

و لنتكلم أولا في التي من عشرة أحرف ، ثم فيما دون ذلك إلى حرفين و لنرتب الحروف (53) ترتيبا يكون ما اختلف منها مما يلي الأول و ما تكرر منها مما يلي العاشر .

فلا يخلو (52) أن تكون التسعة مختلفة و العاشر مكررا لأحد (54) التسعة .

أو الثمانية مختلفة و التاسع و العاشر مكرران ، إما لحرف واحد من الحروف الثمانية أو لحرفين .

أو تكون السبعة مختلفة و الثلاثة الباقية من العشرة مكررة ، إما لحرف واحد من الحروف السبعة المختلفة أو لحرفين أو لثلاثة أحرف .

أو تكون الستة مختلفة و الأربعة مكررة إما لحرف واحد أو لحرفين . و إذا كانت مكررة لحرفين ، قد تكون لأحدهما مرة و للثاني ثلاثا أو لأحدهما مرتين و للثاني مرتين أو تكون مكررة لثلاثة أحرف بأن تتكرر لأحدهما مرتين و لإثنين مرة مرة [أو تكون مكررة لأربعة أحرف] .

أو تكون الخمسة مختلفة و الخمسة الأخرى مكررة ، إما لحرف واحد من الحروف الخمسة و إما لحرفين (55) . و إذا كانت مكررة لحرفين (56) يكون لأحدهما مرة و للثاني أربعة أو لأحدهما مرتين و للثاني ثلاثة . و قد تكون مكررة لثلاثة أحرف بأن تتكرر لأحدها (57) مرة و لإثنين مرتين مرتين أو لأحدها (57) ثلاث مرات و للإثنين مرة مرة . أو تكون الخمسة مكررة لأربعة أحرف بأن تتكرر لأحدها (57) مرتين و للثلاثة الباقية مرة مرة أو تكون الخمسة مكررة لخمسة أحرف ، حرفا (58) بحرف .

أو تكون الأربعة مختلفة و (59) الستة مكررة ، إما لحرف منها و إما لحرفين بأن تتكرر (60) لأحدهما خمس مرات و للثاني مرة ، أو لأحدهما أربع / مرات و للثاني مرتين ، أو لأحدهما ثلاث مرات و للثاني كذلك 334
أو تتكرر تلك الستة لثلاثة أحرف بأن تتكرر لأحدها (57) مرة و للثاني مرتين و للثالث ثلاث مرات أو تتكرر (60) لكل واحد من الثلاثة مرتين مرتين أو لأحدها (57) أربع مرات و للإثنين مرة مرة أو تكون تلك الستة مكررة للأربعة الحروف الباقية ، لإثنين منها مرة (61) مرة و لإثنين (62) مرتين مرتين أو لأحدها (57) ثلاث مرات و للثلاثة مرة مرة .

أو تكون الثلاثة مختلفة و السبعة مكررة ، إما لحرف واحد و إما لحرفين بأن تتكرر (60) لأحدهما مرة و للثاني ست مرات ، أو لأحدهما مرتين و للثاني خمس مرات أو لأحدهما ثلاث مرات <و> و للثاني أربع مرات [أو تتكرر تلك السبعة لثلاثة أحرف بأن تتكرر لإثنين مرة مرة و للثالث خمس مرات ، أو تتكرر لأحدها مرة و للثاني مرتين و للثالث أربع مرات أو تتكرر لإثنين ثلاث مرات ثلاث مرات و للثالث مرة أو تتكرر لإثنين مرتين مرتين و للثالث ثلاث مرات].

أو يكون (63) الإثنان مختلفين و الثمانية مكررة إما لحرف واحد أو لحرفين بأن يتكرر لأحدهما مرة و للثاني

فإذا أردت عمل هذه المسألة ، فتضعها مقابل بصرك على هذه الصورة :

غصن لون اول	غصن لون ثان	(46) أغصان لون ثالث	أغصان لون رابع	أغصان لون خامس
ز	ز	ك	ك	ك

جدول (3)

ثم تنظر المسألة ، فتجد اللونين الأولين قد تساوت (47) أغصانهما (48) . فتضع تحتهما (49) حروفا مكررة ولتكن : ز ز . و تجد الثلاثة الألوان الأخر قد تساوت أغصانها ، فتضع تحتها حروفا أيضا مكررة ، ولتكن : ك ، ك ، ك . فيرجع التأليف من خمسة أحرف ، ثلاثة / مكررة و إثنان أيضا مكرران على ما في الصورة . 333
فيكون [عدد] أوضاع حروف هذا التأليف كعدة الشراريب المعلومة من ألوان الشرابة الواحدة . و ذلك يخرج لك ، مما تقدم ، عشرة .
و برهان ذلك لأنك تجد لكل وضع من الحروف وضعا من أغصان الألوان وعكس ذلك لأنه إن وجد وضع يكون فيه الحرف الأول ثالثا ، يوجد لذلك نظير شرابة يكون الأغصان التي فيها من اللون الثالث كعدة أغصان اللون الأول . وكذلك يتبين ما بقي . وكذلك ناهضا ما نهض .

فصل :

التأليف ، في اصطلاحنا هذا ، هو الجماعة من الحروف .

مسألة بيان :

متسع من خمسة أحرف ، حرفان منه مفردان و حرفان مثنيان و حرف مثلث . كم تأليفا (50) يكون من تلك الحروف ، كل تأليف متسع من خمسة أحرف ، حرفان منه مفردان و حرفان مثنيان و حرف مثلث ؟
فتضعها على هذه الصورة (51) :

ا ، ب ، جـ ، هـ ، ط
جـ ، هـ ، ط
ط

و تجعل تحت ما تساوى تكرارها حروفا متفقة :

ا ا د د ر

[مسألة:]

و إذ قد تبين ذلك، فلنعد إلى مقصدنا. فإن سأل فقال: أردنا أن نعلم عدد الكلمات التي تتألف[41] من حروف ابجد على أن يكون أصغرها من ثلاثة حروف و أكبرها من عشرة أحرف.

فلنصف العمل أولا على أن لا يتكرر في الكلمة حرف. و وجهه أن تحسب عدد حروف ابجد ألوان حرير. فتقول: كم شرابة تكون فيها على أن يكون عدد ألوان كل شرابة، مثلا، ثلاثة ألوان. فيخرج معلوم فتحفظه[42]

332 فلأجل أنك فرضت[43] ألوان شرابة واحدة ثلاثة، / فتضع [أعدادا متوالية] على طبيعة العدد من الواحد إلى ثلاثة، في سطر على هذه الصورة: 1، 2، 3. ثم تبتدئ بضرب الواحد في الإثنين ثم المجتمع في الثلاثة التي تليه معه في سطر. و لو وليه شيء آخر لضربت المجتمع فيه. ثم تضرب المجتمع فيما يجتمع من أوضاع الكلمة لأجل الحركات و السواكن و تحفظ المجتمع و تضربه في عدد الشراريب التي كل شرابة منها من ثلاثة ألوان كما فرضنا في هذا المثال. فيكون الخارج عدد الكلمات التي تتألف من حروف ابجد التي كل كلمة منها من ثلاثة أحرف.

ثم هذا العمل يطرد لك فيما هو أكثر من ثلاثة أحرف و أقل. ثم تجمع أحرف الجميع، فيكون عدد الكلمات المتألفة من حروف ابجد وعلى أن يكون أصغرها من ثلاثة حروف و أكبرها من عشرة أحرف، و لا يتكرر حرف في كلمة واحدة.

مسألة مقدمة لما[44] نحن بسبيله:

جملة أغصان حرير ألوانها معلومة، أردنا أن نعمل منها شراريب على أن يكون في كل شرابة عدة أغصان معلومة من ألوان معلومة.

مثال من ذلك: جملة معلومة من أغصان حرير، ألوانها عشرة، أردنا أن نعمل منها شراريب على أن يكون في كل شرابة ثلاثة أغصان من لونين: غصن من لون و غصنان من لون آخر، و لا تتفق جملة أغصان الشراريب و ألوانها في شرابتين.

فإذا تأملت هذه المسألة، وجدت عدة الشراريب ضعف عدتها لو أهملت ذكر الأغصان و قلت: أردنا أن نعمل منها شراريب على أن يكون في كل شرابة لونان.

و إنما كان ذلك كذلك لأن الغصنين قد يكونان من اللون الأول في شرابة و قد يكونان من اللون الثاني في شرابة أخرى.

و بالجملة، كثر اختلاف أغصان الألوان أو قل، فإن عدة الشراريب الكائنة من ألوان شرابة كعدة أوضاع حروف كلمة ما، <جملة> عدة حروفها كعدة ألوان الشرابة وعدة تكرير ما تكرر من تلك الحروف كعدة ما تساوى من أغصان الشراريب.

مثال ذلك: <من> شرابة من ثمانية أغصان من خمسة ألوان، غصنان منها كل واحد منهما[45] من لون واحد و ستة أغصان كل غصنين منها من لون. كم شرابة تكون من ثمانية أغصان من الخمسة الألوان، غصنان منها كل واحد منهما من لون واحد و ستة أغصان، كل اثنين منها من لون واحد؟

الكلمة ، لا من جهة أوضاع أماكن حروف الكلمة .

فإذا أردنا ذلك ، فإن كان حرفا واحدا ، فأوضاعه ثلاثة . و إن كان ثنائيا فأوضاعه إثنا عشر من جهة أنه يتعاقب على الحرف الأول ثلاث حركات و على الثاني ثلاث حركات و ساكن .

و إن كان ثلاثيا ، فإنا نضرب الإثني عشر التي هي أوضاع الثنائية في أربعة التي هي الثلاث حركات و ساكن المتعاقبات على الحرف الثالث . فيكون ثمانية و أربعين تسقط منها ثلاثة التي هي إجتماع سكون الثالث مع سكون الثاني ، كان الحرف الأول مرفوعا أو منصوبا أو مخفوضا (33) ، تبقى (34) خمسة و أربعون و هي أوضاع الثلاثي من جهة الحركات و السواكن .

و إن كان رباعيا تضرب (35) أوضاع الثلاثي التي هي خمسة و أربعون في أربعة أيضا يجتمع لك مائة و ثمانون تسقط منها إجتماع (36) سكون الرابع مع سكون الثالث ، و هي (37) الحركات المتعاقبات على الحرف الثاني التي هي ثلاثة ، و ما اجتمع في الحركات المتعاقبات على الحرف الأول ، و ذلك يخرج تسعة . تبقى مائة و واحد و سبعون و هي أوضاع الرباعي لأجل الحركات و السواكن المتعاقبات على كل حرف منها .

فإن كان خماسيا تضرب أوضاع الرباعي التي هي مائة و واحد و سبعون في أربعة ، يجتمع لك أربعة و ثمانون و ست مائة ، تسقط منها اجتماع سكون الخامس مع الرابع ، و هي (37) الحركات المتعاقبات على الحرف الثالث ، و ذلك ثلاثة ، و ما اجتمع ، في أوضاع الكلمة الثنائية من جهة الحركات و السواكن التي هي: إثنا عشر ، يجتمع لك ستة و ثلاثون . تسقط / <تسقط> ذلك من أربعة و ثمانين و ست مائة التي قبلها ، تبقى ثمانية 331
و أربعون و ستمائة و هي أوضاع الخماسي من جهة الحركات و السواكن المتعاقبات على حروفه .

و إن كان سداسيا ، كذلك تضرب [أربعة] في أوضاع الخماسي لأجل الحركات و السواكن . و تسقط من ذلك ضرب ثلاثة في أوضاع الثلاثي لأجل الحركات و السواكن .

و بالجملة ، فإنك تسقط من عدد [حروف] الكلمة أبدا ثلاثة و تعد (38) أوضاع الحروف الباقية لأجل الحركات و السواكن ، و تضرب ذلك في ثلاثة أيضا و تحفظه و هو الأول . ثم تسقط من عدد حروف الكلمة واحدا و تضرب أوضاع الباقي من جهة الحركات و السواكن أيضا في أربعة . فما خرج تسقط منه الأول ، فما [بقي] فهو أوضاع الكلمة لأجل الحركات و السواكن [لا] لأجل تبدل أماكن حروف الكلمة .

فإن كانت ثلاثية ، فإنك تسقط من ضرب أربعة في أوضاع الثنائية ثلاثة ، يجتمع لك خمسة و أربعون كما تقدم .

و إن كانت ثنائية ، فأوضاعها اثنا عشر لأجل الحركات و السواكن . و إن كانت من حرف (39) فأوضاعها ثلاثة فقط .

و لها وجه آخر و هو أن تسقط من حروف الكلمة إثنين و تضرب أوضاع الباقي من جهة الحركات و السواكن في ثلاثة ، و تحفظه و هو الأول ، ثم تسقط من حروف الكلمة واحدا و تضرب أوضاع الباقي من جهة الحركات و السواكن في ثلاثة . فما خرج تزيد عليه المحفوظ ، فما كان فهو أوضاع الكلمة من أجل الحركات و السواكن .

و [لأ] لا يكون معادا (40) عندنا فيما يحتاج إليه ، جعلنا جدولا على هذه الصورة :

جدول (2)

جدول ما تتضاعف به الكلمات لأجل الحركات و السواكن المتعاقبات لا من أجل تبدل أماكن مواضع الحروف

معشر	متسع	مثمن	مسبع	مسدس	مخمس	مربع	مثلث	مثنى	مفرد
507627	133893	35316	9315	2457	648	171	45	12	3

زادت حرفا فكانت من ثلاثة أحرف، فبين أن الحرف الثالث قد يكون مقدما للحرفين أو متوسطا بينهما أو[18] ثالثا في كل واحد من الموضعين اللذين لحروف[19] الكلمة التي من حرفين. فيكون للكلمة[20] التي من ثلاثة أحرف ستة أوضاع. فإن زادت حرفا، فكانت من أربعة أحرف، فالحرف الرابع إما أن يكون في كل واحد من الستة الأوضاع على يمين الأول و الثاني و الثالث أو على شمال الثالث. فيكون للكلمة التي من أربعة أحرف أربعة و عشرون وضعا. فإن زادت حرفا، فكانت من خمسة أحرف، فبين أن الحرف الخامس، إما أن يكون في كل واحد[21] من الأربعة و العشرين وضعا التي لحروف الكلمة التي من أربعة أحرف[22] على يمين الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع أو على شمال[23] الرابع، و ذلك خمسة في الأربعة و العشرين وضعا. فيكون مائة و عشرين وضعا لحروف كلمة عددها خمسة أحرف. و كذلك يتبين ناهضا ما نهض.

فتبين من ذلك أنه إذا كانت معك كلمة عدد حروفها معلوم و لم يتكرر فيها حرف و أردت معرفة عدة أوضاع حروف تلك الكلمة، إنك تضرب واحدا في إثنين و ما اجتمع في ثلاثة و ما اجتمع في أربعة و ما اجتمع في خمسة و كذلك ما اجتمع في العدد الذي يليه على توالي العدد و طبيعته إلى أن تنتهي[24] إلى الضرب في العدد الذي هو مثل عدة حروف الكلمة. فما اجتمع من العدد فهو عدد أوضاع حروف تلك الكلمة. و ذلك ما أردنا بيانه.

مسألة ثانية:

أردنا أن نعلم عدد أوضاع حروف كلمة عدد تلك الحروف معلوم و [قد تكرر] حرف منها أو حرفان أو أكثر[25] تكريرا معلوما.

فوجه العمل في ذلك فيما تكرر فيه حرف واحد أن تخرج[26] عدد أوضاع حروف كلمة ما، لا يتكرر فيها حرف و يكون عدة حروفها مثل عدة حروف الكلمة المفروضة / بتكريرها. فإذا حصل لك معلوم[27] تقسمه 330
على أوضاع حروف كلمة، عدة حروفها مثل [عدة] الحروف التي تكررت من الحرف الواحد في الكلمة المفروضة. فما خرج لك فهو عدد أوضاع حروف الكلمة المفروضة.

و برهان ذلك أن الحرف الواحد إذا كان مكررا في الكلمة الواحدة، فإن[28] لكل وضع من تلك الحروف المكررة في الكلمة، لو كانت مختلفة، عدد أوضاع كلمة حروفها مثل عدد تكرير ذلك الحرف. فإن تكرر حرفان أو ثلاثة [أو أكثر]، فوجه العمل أن تخرج[26] عدد أوضاع حروف كلمة ما أخرى، لا يتكرر فيها حرف و تكون عدة حروفها مثل عدة حروف الكلمة المفروضة بتكريرها. فإذا حصل لك معلوم[27] تحفظه ثم تحسب عدة تكرير الحرف الواحد الذي تكرر، حروف كلمة[29]. و كذلك عدة تكرير الحرف الثاني، حروف كلمة[29] ثانية. و إن كان فيها حرف ثالث، تحسب أيضا عدد[30] تكريره حروف كلمة[29] أخرى ثم تضرب عدة أوضاع حروف هذه الكلمات[31] بعضها في بعض. فما خرج تقسم عليه الذي حفظت. فما خرج فهو عدد أوضاع حروف الكلمة المفروضة[32].

و برهان ذلك كما تقدم في برهان تكرير الحرف الواحد.

مسألة:

أردنا أن نعلم عدة أوضاع كلمة حروفها معلومة العدة من جهة الحركات و السواكن المتعاقبات على حروف

المتقدمة ، [و] من جمع اللون الخامس مع مجموع كل ثلاثة <كل ثلاثة> ألوان من الألوان المتقدمة للون <اللون> الخامس ، و من جمع اللون السادس مع مجموع كل ثلاثة ألوان من الألوان المتقدمة للون السادس ، و كذلك حتى إلى اللون العاشر مع مجموع كل ثلاثة ألوان من الألوان المتقدمة للون العاشر . لكن كل ثلاثة ألوان هي شرابة في السطر الثالث . فلأجل ذلك نرسم في البيت الأول من السطر الرابع واحدا و هي الشرابة الكائنة من الأربعة الألوان و نرسم في البيت الذي يليه المقابل للون الخامس الشراريب التي من جمع اللون الخامس مع كل ثلاثة ألوان من الألوان المتقدمة ، و ذلك هو مثل عدة الشراريب التي من ثلاثة ألوان من الألوان المتقدمة للون الخامس . و كذلك أيضا هو مثل مجموع ما في البيتين الأولين من الجدول الثالث ، و ذلك أربعة . و كذلك يتبين أنك ترسم في البيت الثالث من الجدول الرابع مثل مجموع الثلاثة البيوت الأول من الجدول الثالث و ذلك عشرة . و كذلك العمل في إخراج جملة الجدول الرابع من الجدول [الثالث : فهو كإخراج الجدول الثالث من الثاني . و إخراج الجدول الثالث من] الثاني هو كإخراج الجدول الثاني من الأول .

و كذلك العمل في إخراج الجدول الخامس من الرابع : فهو[10] كإخراج الجدول الرابع من الثالث و كإخراج الجدول السادس من الخامس و كإخراج الجدول السابع من السادس و كإخراج الجدول الثامن من السابع

328 و كإخراج الجدول/ التاسع من الثامن و كإخراج الجدول العاشر من التاسع . و إنما في الجدول العاشر ، في مثالنا هذا ، بيت فيه شرابة واحدة من عشرة ألوان . و بالله التوفيق .

ثم إن تأملت خواص هذا الجدول و ما يظهر فيه من الاتفاق البديع ، ظهر لك فيه من الاتفاقات الغريبة و الخواص العجيبة ما يدعو [11] ذكر ذلك الى الإكثار و التطويل . و تركنا ذلك اتكالا على تأمل الناظر[12] و رغبة أيضا في ترك الإكثار و قصد الإختيار . و الله ولي العون .

صنعة العمل بالجدول :

فإذا كان معك ألوان حرير و أردت [أن تعلم] كم شرابة تكون فيها على أن يكون في كل شرابة ألوان معلومة ، فلتدخل في الجدول صاعدا باللون الذي عدده كعدد ألوان حريرك . و تدخل أيضا بجدول عدد

329 ألوان كل شرابة . فعدد البيت الذي يجتمع فيه/ الجدولان حسبته مع أعداد البيوت التي على يمين ذلك البيت في ذلك الجدول حتى إلى الواحد . فما اجتمع لك هو عدد الشراريب . و له وجه آخر أنبل و أسهل و ذلك أن تدخل في الجدول صاعدا باللون الذي يزيد عدده على عدد ألوان حريرك بلون واحد و تدخل أيضا بجدول الشراريب التي [13] عدد ألوانها [14] يزيد على [عدد] ألوان [15] شراريبك بلون واحد . فعدد البيت الذي يجتمع فيه الجدولان <ف> هو عدد الشراريب الذي طلبت .

فإن كانت عدة الألوان [16] التي معك أكثر من عشرة فتزيد في الجدول حتى تكون ألوانه مثل عدد ألوانك [17].

مسألة :

أردنا أن نعلم وجه عمل مطرد في أوضاع حروف كلمة عدد حروفها معلوم ، و لا يتكرر فيها حرف. فإن كانت الكلمة من حرفين ، فبين أنها يكون لها وضعان لأن الأول قد يرجع ثانيا و الثاني يرجع أولا . فإن

فإذا تأملت المسألة وجدت الشراريب التي من لونين لونين تكون من جمع اللون الثاني مع الأول و من جمع اللون الثالث مع الأول و مع الثاني و من جمع اللون الرابع مع الأول و مع الثاني و مع الثالث و من جمع اللون الخامس مع الأول و مع الثاني و مع الثالث و مع الرابع وكذلك على هذا النسق حتى ينتهي إلى جمع اللون العاشر [مع] كل واحد من الألوان التي [5] قبله . و بالجملة ، فمن جمع كل لون من الألوان [مع] الذي قبله في العدد . وعلى هذا النسق ينحصر العدد الذي من جمع كل لون مع كل لون .

و ترسم واحدا في البيت الأول من الجدول الثاني المقابل للون الثاني و هي الشرابة التي من اللون الثاني مع الأول . و ترسم إثنين في البيت الثاني من الجدول الثاني أيضا مقابل اللون [6] الثالث و هي الشرابتان الكائنتان من جمع اللون الثالث مع اللون الأول و مع الثاني . و ترسم ثلاثة في ذلك الجدول أيضا مقابل اللون [6] الرابع و هي عدد الشراريب التي تكون من جمع [7] اللون الرابع مع الأول و مع الثاني و مع الثالث، وكذلك ترسم أربعة في ذلك الجدول مقابل اللون [6] الخامس و هي عدد الشراريب التي تكون من جمع اللون الخامس مع الأول و مع الثاني و مع الثالث و مع الرابع. وكذلك تتم السطر الثاني الى أن ترسم في آخره تسعة مقابل اللون [6] العاشر و هذه التسعة هي عدد الشراريب التي تكون من جمع [7] اللون العاشر مع الأول و مع الثاني حتى إلى اللون التاسع. فقد حصل في الجدول الثاني أعداد متوالية من واحد إلى تسعة و هي عدد الشراريب التي من لونين لونين. فالشراريب إذا التي من لونين لونين مثل جمع الأعداد المتوالية من الواحد إلى العدد الذي هو أقل من عدد الألوان بواحد .

أما معرفة عدد الشراريب التي من ثلاثة ألوان ثلاثة ألوان ، فإنما هي من جمع اللون الثالث مع اللونين الأول و الثاني و من جمع اللون الرابع مع كل لونين من الثلاثة الألوان المتقدمة التي هي الأول و الثاني و الثالث ، و من جمع اللون الخامس مع كل لونين من الأربعة الألوان المتقدمة و من جمع اللون السادس مع كل لونين من الخمسة الألوان المتقدمة ، وكذلك حتى إلى اللون العاشر مع كل لونين من الألوان التسعة المتقدمة [8] . لكن كل لونين هي شرابة في السطر الثاني . فلأجل ذلك نرسم في البيت الأول من الجدول الثالث مقابلا للون الثالث واحدا و هي الشرابة الكائنة من الثلاثة الألوان / الأول و الثاني و الثالث . و نرسم في البيت الذي 327
يليه المقابل للون الرابع ، الشراريب التي من جمع اللون [9] الرابع مع كل لونين من الألوان المتقدمة و ذلك هو مثل عدة الشراريب التي من لونين لونين من الألوان المتقدمة للون الرابع و ذلك أيضا هو مجموع ما في البيتين الأولين من الجدول الثاني و ذلك ثلاثة. فنرسم ثلاثة في البيت الثاني من الجدول الثالث ، و نرسم في البيت الثالث من الصف الثالث ، و ذلك البيت هو المقابل للون الخامس ، الشراريب التي من جمع اللون الخامس مع لونين لونين من الألوان المتقدمة للون الخامس ، و ذلك أيضا هو مجموع ما في الثلاثة البيوت الأول من الجدول الثاني ، و ذلك ستة. فنرسم في البيت الثالث من الجدول الثالث ستة. و هكذا، على هذا الترتيب ، يتبين أن في البيت الذي يليه ، و هو الرابع من الجدول الثالث ، مثل مجموع الأربعة البيوت من الجدول الثاني و ذلك عشرة. و في البيت الذي يليه و هو الخامس مثل مجموع الخمسة البيوت من الجدول الثاني ، إلى أن يتم الجدول الثالث. فيكون مجموع بيوت الجدول الثالث هو جملة ما في الألوان من الشراريب التي كل شرابة من ثلاثة ألوان .

و أما معرفة عدد الشراريب التي من أربعة ألوا ن أربعة ألوان ، فإنما هي من جمع اللون الرابع مع الثلاثة الألوان

[ا. قوانين كلية]

مسألة[4] توطئة لما نحن بسبيله :

عشرة ألوان من الحرير ، أردنا أن نعمل منها شراريب ، بعضها من لون لون، وبعضها من لونين لونين وبعضها من ثلاثة ألوان ثلاثة ألوان وكذلك إلى أن تكون آخر شرابة من عشرة ألوان ، وأردنا أن نعلم كم عدد كل/نوع نوع على انفراده من أنواع الشراريب ، ألوان كل شرابة منها معلومة ، أو كم عدد جميع الشراريب إذا 326
جمعت على اختلاف عدد ألوان الشراريب.
فإنا نضع الألوان لونا لونا في جدول في عرض الصفح على ما في المثال :

وهكذا تخطيط المثال في الجدول											جدول جمع الجداول
من عشرة ألوان										1	1
جدول الشراريب التي من تسعة ألوان تسعة ألوان									1	9	10
جدول الشراريب التي من ثمانية ألوان ثمانية ألوان								1	8	36	45
جدول الشراريب التي من سبعة ألوان سبعة ألوان							1	7	28	84	120
جدول الشراريب التي من ستة ألوان ستة ألوان						1	6	21	56	126	210
من خمسة ألوان خمسة ألوان					1	5	15	35	70	126	252
من اربعة ألوان اربعة ألوان				1	4	10	20	35	56	84	210
من ثلاثة ألوان ثلاثة ألوان			1	3	6	10	15	21	28	36	120
من لونين لونين		1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
من لون لون	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
	لون أول	لون ثان	لون ثالث	لون رابع	لون خامس	لون سادس	لون سابع	لون ثامن	لون تاسع	لون عاشر	جميع الألوان

جدول (1)

(مرسوم في ص.328)

النوع الحادى عشر من الباب الأول
[من كتاب فقه الحساب]
فى حصر الكلمات التى لا يتكلم البشر
إلا بإحداهن (*)

[مقدمة]

325 أردنا أن نصف كيف السبيل إلى حصر الكلمات التي لا يمكن إنسانا أن يلفظ إلا بإحداهن . و الخليل رحمه الله ، إنما ذكر عدة <عدة> أوضاع الكلمة التي لا يتكرر فيها حرف فقط . و أما الكلمات المتكررة الحروف أو عدة الكلمات المتألفة من حروف ابجد الخماسية أو السداسية المختلفة الحروف أو المتكرر منها حرف أو حرفان أو جملتها و حصر جميع ذلك ، فهذا النوع هو المشتمل على ذلك .

و ليكن اصطلاحنا ، في مثالنا هذا في عدة حروف ابجد ، أن يكون ثمانية و عشرين و أن تكون أكبر كلمة من عشرة أحرف بالزوائد و التكرير مثل : أرسطاطاليس ، و أن يتعاقب على الحرف الواحد ثلاث حركات و ساكن و أن لا يبدأ بساكن و لا يتوالى ساكنان (1) .

فإن اعترض معترض فقال : إنه قد يتوالى على الحرف الواحد أكثر من ثلاث حركات مثل الإمالة و غير ذلك و إن بعض العجم قد تبدأ بالساكن ، و إنما أنكرنا ذلك لعجز لساننا عنه ، و إن العجم قد تكلمت بحروف أخر و إن كانت ليست في كلام العرب مثل الكاف التي كالقاف و مثل الجيم التي كالشين و غير ذلك ، و إنه قد تكون حروف كلمة أكثر من عشرة كقوله تعالى (2) : ليستخلفنهم ، فإن الحرف المشدد مقام حرفين .

فأقول مجاوبا له : إنما غرضنا وصف الطريقة التي بها يمكن حصر الكلمات ، [ثم] أطردت الصفة و لو كثرت (3) الحروف و الحركات و بلغت ما بلغت . و إنما فرضنا أن تكون الحروف ثمانية و عشرين و أن تكون أكبر كلمة من عشرة أحرف و أن لا يتوالى على الحرف الواحد أكثر من ثلاث حركات و ساكن مثالا لوجه العمل في الطريقة التي قصدناها . فإذا حصل وجه العمل ، أطرد ، قلت الحروف و الحركات أم كثرت . و الله الموفق للصواب لا رب غيره .

(*) ا .ـ نقترح حذف ما بين <...> و إضافة ما بين [...]

ب .ـ / يدل على انتهاء صفحة المخطوطة .

جـ .ـ ابتداء النوع الحادى عشر في السطر السادس من الصفحة 325 .

د .ـ قمنا بكتابة الهمزات و تنقيط بعض الكلمات بدون إشارة إلى ذلك .

المحتويـات

Annexe I

TABLE DES MATIERES DU FIQH AL-ḤISĀB

Annexe II

A.- RESULTATS GENERAUX :[59]

I. Ibn al-Bannā'[60].

Sachant que P_3^j est le nombre-trigone défini par :

$$P_3^j = j + P_3^{j-1} \quad ; \quad P_3^1 = 1$$

on a :

Proposition 1. :

$$C_n^3 = \sum_{j=1}^{n-2} P_3^j = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

et [pour $3 \leqq p < n$] :

$$C_n^p = \frac{n-(p-1)}{p} \times C_n^{p-1}$$

Preuve :

$$C_n^2 = \sum_1^{n-1} k \quad \left[= \frac{n(n-1)}{2} \right] \qquad (1)$$

D'autre part, à chaque élément de C_n^2, on associe un des [n-2] éléments restants. On obtient donc :

$$(n-2)C_n^2$$

mais comme : $C_3^2 = 3$ [d'après (1)], il a été nécessaire de répéter, dans $(n-2)C_n^2$, trois fois chaque combinaisons de trois éléments, elle et [deux de] ses permutations. En effet, la combinaison :

$$\{a,\ b,\ c\}$$

provient de :

$$\{(a,b),\ c\}\ ,\ \text{de}\ \{(a,c),\ b\}\ ,\ \text{ou de}\ \{(b,c),\ a\}$$

Ces trois permutations correspondent donc à une seule combinaison. D'où :

$$C_n^3 = (n-2)\left(\frac{1}{3}\times C_n^2\right) = \frac{n-2}{3}\times C_n^2 \qquad (2)$$

De même :

$$C_4^3 = 4$$

car,

$$C_4^2 = 6 \qquad \text{d'après (1), pour } n=4\ ,$$

et

$$C_4^3 = \left(\frac{4-2}{3}\right)C_4^2 \qquad \text{d'après (2), pour } n=4\ .$$

Donc chaque combinaison de trois éléments est répétée quatre fois, selon quatre permutations différentes. D'où :

$$C_n^4 = \left(\frac{n-3}{4}\right)C_n^3$$

On aura de même :

$$C_n^5 = \left(\frac{n-4}{5}\right)C_n^4$$

Et, d'une façon générale :

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-p+1)}{1\times 2\times\ \dots\ \times p}$$

On obtient un entier en simplifiant la fraction par élimination des facteurs communs au numérateur et au dénominateur [213].

Corollaire :

$$C_{2n}^3 = \sum_1^{2n-2} P_3^j = \sum_1^{n-1} (2k)^2 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}$$

$$C_{2n-1}^3 = \sum_1^{2n-3} P_3^j = \sum_1^{n-1} (2k-1)^2 = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6}$$

Proposition 2. :

Le nombre de permutations $[P_n]$ d'un ensemble à n éléments est :

$$P_n = 1.2.3 \; \ldots \; (n-1)n$$

Preuve :

$$P_2 = 2$$

car $\{a,b\}$ fournit : (a,b) et (b,a).
Si on leur adjoint une troisième lettre c, alors :

$$(a,b) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} (c,a,b) \\ (a,c,b) \\ (a,b,c) \end{array} \right. \qquad (b,a) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} (c,b,a) \\ (b,c,a) \\ (b,a,c) \end{array} \right.$$

Donc : $P_3 = 2.3$

Si on ajoute une quatrième lettre [d] , alors chaque permutation précédente en donnera quatre, suivant que d est premier, second, troisième ou quatrième [dans la suite des quatre éléments]. Donc :

$$P_4 = 2.3.4$$

et le procédé est identique pour $n > 4$.

Corollaire 1. :

Le nombre d'arrangements A_n^p de n objets p à p est :

$$A_n^p = n(n-1) \; \ldots \; (n-p+1)$$

Preuve :

Par définition, A_n^p est le nombre de combinaisons de n objets p à p, avec toutes leurs permutations. [Donc :

$$A_n^p = (p!)C_n^p$$

d'où le résultat d'après les deux propositions précédentes].

Proposition 3. :

Une combinaison de n objets étant donnée, déterminer le type de configuration et sa longueur minimale qui englobe les P_n permutations de la combinaison donnée.

Preuve :

Soit a_1, a_2, ..., a_n, l'une quelconque des P_n permutations. Alors la configuration cherchée contient n(n-1)+1 éléments disposés ainsi:

$$\underbrace{(a_1a_2 \ldots a_n)(a_1a_2 \ldots a_n) \ldots (a_1a_2 \ldots a_n)}_{(n-1) \text{ fois}}a_1$$

Cela se voit par induction.

Application :

Chaque jour, pendant quatre jours, une personne [musulmane] oublie de faire une prière [les prières oubliées étant toutes différentes]. Voulant rattraper le retard, mais ignorant l'ordre, dans le temps, des prières oubliées [et ne voulant pas, manifestement, faire plus de prières que ne l'exige le dogme] , elle voudrait connaître le nombre minimal de prières à faire et l'ordre de leur éxécution pour qu'elle soit assurée de faire une et une seule fois ses quatre prières dans l'ordre de leur oubli.

Réponse : Elle doit faire, dans ce cas, 13 prières [d'après la proposition 3.] .

II.- Ibn al-Majdī[61].

1.- Arrangements avec répétitions :

a)- Répétition d'une seule lettre.

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une combinaison de n éléments ; alors le nombre d'arrangements que l'on peut en déduire lorsqu'on répète une seule lettre p fois, $n-1 \leq p \leq n$, est de $:n(n-1)+1$. L'auteur le montre pour $n=4$ (et donc $3 \leq p \leq 4$), en énumérant les 13 figures. Chacune des (n-1) lettres répétées pouvant prendre n positions dans la combinaison, on a bien n(n-1) figures auxquelles on ajoute celle où toutes les lettres sont identiques. Finalement, comme on peut répéter l'opération pour chacune des n lettres, le nombre total de figures de ce type est de $n(n(n-1)+1)$.

b)- Répétition de toutes les lettres.

Il s'agit du dénombrement des arrangements de n objets p à p, avec répétition. L'auteur donne la formule : $A_n^p = n^p$, pour $n=4$, $1 \leq p < 4$ et pour $n=28$, $2 \leq p \leq 3$, en disant qu'elle est vraie pour $4 < p \leq n$.

2.- Généralisation de la proposition 3 d'Ibn al-Bannā' :

il faut raisonner comme si le résultat cherché correspondait à la permutation la plus défavorable, c'est à dire $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1)$. Puis on généralise le résultat en supposant que la personne a, cette fois-ci, oublié de faire p prières sur les n, en ignorant à la fois quelles p prières parmi les n ont été oubliées et dans quel ordre. La question se ramène alors aux combinaisons de n objets p à p, chaque combinaison exigeant p(p-1)+1 prières, soit au total :

$$\Big(p(p-1)+1\Big) \times C_n^p \quad .$$

B.- APPLICATIONS.

I.- Combinaisons de fractions et d'entiers :

1.- Chez Ibn al-Bannā'[62].

a)- Dans son livre cité sous le titre de Arba^c Maqālāt, il considère les différentes combinaisons de fractions et d'entiers liés par les opérations arithmétiques et dont le calcul est soumis, pour chaque opération, à une seule règle. Il dénombre 75 formes de sommes qu'il obtient ainsi : Si on note (f_i), $1 \leqq i \leqq 5$, les cinq types de fractions définies par l'auteur (voir chapitre II), e, un entier et $g_i = e+f_i$, alors on a :

$$\mathrm{card}\{(f_i+f_j)\} + \mathrm{card}\{(g_i+g_j)\} + \mathrm{card}\{(f_i+g_j)\} = 75$$

De la même manière, il obtient 85 écritures pour les soustractions de fractions et d'entiers, 85 pour les produits, 96 pour les divisions, 96 pour les dénominations et enfin 10 pour la réduction et la restauration.

b)- Lorsqu'il s'agit de fractions élémentaires (de la forme $\frac{1}{n}$), il dénombre toutes les écritures ou formulations possibles de leur produit, pour montrer l'utilité de les ramener, grâce à la commutativité à une expression unique. Il procède ainsi, (a_i), $1 \leq i \leq 4$ étant des entiers : $\frac{1}{a_1 a_2}$ fournit une deuxième figure $\frac{1}{a_2 a_1}$, tandis que $\frac{1}{a_1 a_2 a_3}$ fournit 6 figures et $\frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4}$, 24 figures, "comme tu as appris dans la combinaison des lettres avec permutation dans le chapitre de l'addition" précise-t-il.

2. <u>Chez Ibn Haydūr</u> (63).

Dans le Tamḥīṣ, il commence par dénombrer les combinaisons des cinq types de fractions, p à p, $2 \leqq p \leqq 5$:
"Dans ces cinq fractions, (...) il y a 26 combinaisons dont 10 pour les combinaisons deux à deux, [10] aussi pour les combinaisons trois à trois, 5 pour les combinaisons quatre à quatre et une pour les combinaisons cinq à cinq. Donc le nombre de figures simples et composées de leurs questions est 31" ; ce qui correspond donc à $\sum_{1}^{5} C_5^p$.
Puis, il détermine les arrangements deux à deux, avec répétition de ces 31 combinaisons, soit :

$$A_{31}^{2} = (31)^{2} = 961 ,$$

en y distinguant trois catégories, 31 de la forme (f_i,f_i), 465 de la forme (f_i,f_j), $i \neq j$, correspondant à C_{31}^{2} et 465 de la forme (f_j,f_i) et qui sont les permutées des précédentes.

II.- Dénombrement de rapports simples.

1.- Chez Ibn al-Bannā'[64].

Etant donné (a_1, a_2, a_3, a_4), des entiers positifs vérifiant :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$$

[que l'on désignera par la relation (P)]. L'auteur énumère les différentes opérations f_i qui, appliquées à (P), fournissent des images (P_i), différentes de (P), mais équivalentes à elle.
Il part des quatre opérations élémentaires : L'interversion (f_1), la permutation (f_2), la composition (f_3) et la différenciation (f_4) qui sont définies ainsi :

$$f_1(P) \Rightarrow \frac{a_1}{a_3} = \frac{a_2}{a_4} \qquad f_2(P) \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_3(P) \Rightarrow \dfrac{a_1+a_2}{a_i} = \dfrac{a_3+a_4}{a_j} \\[2ex] f_4(P) \Rightarrow \dfrac{a_2-a_1}{a_i} = \dfrac{a_4-a_3}{a_j} \end{array}\right| \quad i = 1 \text{ ou } 2;\ j = 3 \text{ ou } 4.$$

Puis il énumère, d'une façon incomplète d'ailleurs, les opérations obtenues par composition des f_i, deux à deux et trois à trois (la composition étant entendue, ici, dans son sens fonctionnel), pour conclure à l'équivalence de toutes les relations obtenues.

2.- Chez Ibn al-Majdī[65].

C'est, à notre connaissance, le seul commentateur d'Ibn al-Bannā' qui a explicité l'aspect combinatoire de ce problème dont l'intérêt réside dans la manipulation d'objets abstraits ne bénéficiant pas encore de symboles propres.

Voici comment il procède : Après avoir écrit les images $f_i(P)$, sous forme de suites ordonnées de 4 éléments chacune:

$$\{a_1, a_3, a_2, a_4\} \qquad \{a_2, a_1, a_4, a_3\}$$

$$\{a_1+a_2, a_1, a_3+a_4, a_3\} \qquad \{a_2-a_1, a_2, a_4-a_3, a_4\}$$

il dénombre ce qu'il appelle les "combinaisons 2 à 2" qui sont ici les arrangements des f_i 2 à 2, soit 12 figures qu'il énumère ainsi:

$$\begin{array}{ccc} f_2 o f_1 , & f_3 o f_1 , & f_4 o f_1 \\ f_1 o f_2 , & f_3 o f_2 , & f_4 o f_2 \\ f_1 o f_3 , & f_2 o f_3 , & f_4 o f_3 \\ f_1 o f_4 , & f_2 o f_4 , & f_3 o f_4 \end{array} \qquad (1)$$

Puis il considère les "combinaisons 3 à 3" qui donnent 36 (soit, $3\times A_4^2$) éléments car chaque élément de (1) permet trois compositions. En effet, aux A_4^3 arrangements, il faut ajouter les éléments de la forme :

$$f_i o f_j o f_i \quad ; \quad i \neq j$$

Donc chaque $f_i o f_j$ fournit :

$$f_k o f_i o f_j \text{ , } f_i o f_j o f_i \text{ , } f_j o f_i o f_j \quad ; \quad i \neq j \neq k.$$

Il dénombre enfin les "combinaisons 4 à 4" et obtient 108 éléments soit, $3^2\times A_4^2$.

III.- Dénombrement d'équations polynomiales.

1.- Séries numériques et équations chez Ibn Haydūr (66) .

a)- Les séries géométriques fournissent 16 équations différentes car, il y a 8 espèces de séries et deux sortes d'inconnues dans chaque série (un de ses éléments et sa somme) . En effet, dans :

$$S = \sum_{k=p}^{k=n} a^k$$

on peut avoir : $p = 0$ ou $p \neq 0$; $a = 2$ ou $a \neq 2$; $n = 2^m$ ou $n \neq 2^m$.

b)- Les séries arithmétiques fournissent 15 équations résolubles, car il y a cinq espèces d'inconnues : Le nombre d'éléments (n), le premier terme (u_1), le dernier terme (u_n), la raison (r) et la somme (S). Si l'une d'elle est inconnue, on a 5 équations [soit C_5^1] . Si deux d'entre elles sont inconnues, on a 10 équations [soit C_5^2]. Parmi ces 15 équations, 13 sont résolubles par la méthode du Talkhīs et les deux dernières par l'algèbre.
Si on ignore trois éléments de la série et que l'on connaît leurs sommes deux à deux, ou leurs différences deux à deux, le nombre d'équations est égal à 60, 30 avec les sommes et 30 avec les différences. [En effet, $2 \times C_3^2$ est le nombre d'équations de la forme :

$$x_i + x_j = a \quad \text{ou} \quad x_i - x_j = b ,$$

et C_5^3 le nombre d'équations à trois inconnues issues de la série. Le nombre total est donc $2 \times C_3^2 \times C_5^3 = 60$].

2.- Dénombrement des équations de degré supérieur à 2 chez Ibn al-Majdī(67).

Le nombre des équations ne se limite pas aux six canoniques. Elles ne s'y limitent que si l'on considère seulement les trois espèces : Les nombres, les choses et les carrés . Si on les considère avec celles qui leur sont supérieures, on aboutit à des équations en nombre illimité à cause du nombre infini des espèces.

1)- Si on considère 4 espèces de monômes, les cubes avec les degrés inférieurs, leurs équations se limitent à 25 figures : 6 équations binômes (une espèce égale une espèce), 12 trinômes (une espèce égale deux espèces), 4 quadrinômes (1,3), 3 autres quadrinômes (2,2).

2)- Si on considère 5 espèces, le nombre de figures est 90 : 10 binômes, 30 trinômes, 20 quadrinômes (1,3), 15 quadrinômes (2,2) 10 à cinq monômes (2,3) et 5 autres à cinq monômes (1,4).

3)- Si on considère n espèces, n quelconque :

a)- <u>Equations binômes</u> :

Leur nombre est égal à celui des combinaisons de n objets 2 à 2 :

$$N(1,1) = \frac{(n-1)n}{2} \qquad (1)$$

b)- <u>Equations trinômes</u> :

On multiplie le nombre des équations simples par (n-2). [Cela revient à combiner chaque couple de (1) aux (n-2) monômes restants]:

$$N(1,2) = (n-2)\times N(1,1)$$

c)- <u>Equations quadrinômes</u> :

Si le nombre de monômes est 3, le dénombrement s'achève là. Sinon, on sait que les équations quadrinômes sont de deux types : (1,3)et (2,2). D'où :

$$N(1,3) = \frac{(n-3)}{1\times 3}\times N(1,2)$$

D'autre part :

$$N(2,2) = \frac{(n-3)}{2\times 2}\times N(1,2)$$

d)- <u>Equations à cinq monômes</u> :

Elles sont de deux types : (1,4) et (2,3). D'où :

$$N(1,4) = \frac{(n-4)}{4}\times N(1,3)$$

$$N(2,3) = \frac{2}{3}\times(n-4)\times N(2,2)$$

Pour conclure, Ibn al-Majdī applique ces formules aux cas :

$$3 \leq n \leq 5$$

en précisant que ce chapitre est vaste et que le nombre de figures de ses combinaisons est sans limite, compte tenu de la multiplication des espèces.

Notes et Références

(1)- Voir en particulier :

- E. Coumet, Mersenne, Frénicle et l'élaboration de l'analyse combinatoire, dans la première moitié du XVII^{e} siècle. Thèse de 3^{e} cycle, Paris 1968.
- R. Rashed, Algèbre et linguistique : L'analyse combinatoire dans la science arabe. Philosophical fondation of science, Dordrecht (Reidel), 1974, pp. 383-99.
- P. Raymond, De la combinatoire aux probabilités. Maspéro, Paris 1975.
- N.L. Biggs, The roots of combinatorics. Historia Mathematica 6, 1979, pp. 109-36.
- A. Djebbar, Théorie des nombres et combinatoire, in : Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^{e}-XIV^{e} siècles. P.M.O n° 81-02, pp. 55-99 ; qui sera cité, par la suite, ainsi : E.R.M...

(2)- E.R.M..., op.cit. pp. 67-75.

(3)- Ms . Alger n° 613/6^{e} ; f. 73b. C'est la seule indication que cet auteur donne sur Ibn Mun^{c}im et aucun de ses ouvrages connus n'en reparle.

(4)- E.R.M..., op.cit. p.69.

(5)- Il s'agit du manuscrit n° 416 Q. (12 17, 28 lignes). La copie, d'une écriture maghrébine moyenne, a été réalisée par Ḥusayn Ibn ^{c}Abd al-Wāḥid Ibn ar-Rafī^{c} ar-Rub^{c}ī qui l'a achevée à Tunis le Lundi 10 Rajab 958H.
Le Fiqh al-Ḥisāb occupe 207 pages du manuscrit (pp. 213-419) dont 19 consacrées à la section sur la combinatoire (pp. 325-43).
Nous tenons à remercier, ici, nos amis marocains grâce à qui il nous a été possible d'entreprendre ce travail : Mr. et Mme M-A. LAHBABI, pour leur accueil et leur aide multiforme, Mr. D. LAMRABET, pour nous avoir informé de la présence de ce manuscrit à Rabat, Mr. A. AL FASI, pour nous avoir permis de disposer d'une excellente copie microfilmée.

(6)- Ibn Khaldūn, al-Muqaddima. Beyrouth 1967, p. 897.

(7)- Selon M. Amari auquel se réfèrent Suter et Renaud et qui utilise des informations rapportées, indépendamment, par ^{c}Imād ad-Dīn al-Isfahānī et par Ibn al-Qifṭī, il s'agirait en fait de Abū ^{c}Abdallāh Muḥammad Ibn ^{c}Īsā Ibn ^{c}Abd al-Mun^{c}im. Cf. :

- M. Amari, Storia dei Musulmani di Sicilia, Firenze 1858, III, p.689 ; ou bien : Catania 1933-39, III-3, p.707 et note n° 6.
- M.Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araben und ihre Werke. Leipzig 1900-1902, p.217.
- H.P-J. Renaud, Hesperis XXV, 1938, p.33.

Cf. également : F. Sezgin, Geschichte des Arabischen Schriftums, V, 1974, pp. 61-62.

(8)- Ibn al-Qiftī, dans son "Akhbār al-^{c}Ulamā bi Akhbār al-Hukamā" (Beyrouth, Dar al-Athar, non datée, p.189), parle d'Ibn al-Mun^{c}im et non de d'Ibn ^{c}Abd al-Mun^{c}im. Dans l'édition de Leipzig, 1903, p.289, J. Lippert corrige Ibn al-Qiftī, en optant également pour : Ibn ^{c}Abd al-Mun^{c}im.

(9)- En particulier ceux sur les opérations du calcul et celui sur les nombres polygones.

(10)- Tuhfat at-Tullāb wa Umniyyat al-Hussāb..., ms . Vatican n° 1403, f. 21a.

(11)- En particulier pour justifier les relations :

$$\frac{a.c}{b} = \frac{a}{b}.c \qquad \text{et} \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

et l'approximation de la racine n^e d'un nombre. Cf. ms . Tunis n° 561, f. 101b, f. 115a et f. 116b.

(12)- Coran, Sūrat al-A^{c}rāf (VII), verset 43.

(13)- Fiqh al-Hisāb, op.cit. p. 214-15.

(14)- al-Baydhaq, compagnon d'Ibn Tumart, dit en parlant de lui : "l'imām al-Mahdī", "notre Maître Infaillible" ou, tout simplement "l'Infaillible", et ajoute la formule réservée habituellement aux quatre premiers khalifes et aux compagnons du Prophète : "Que Dieu soit satisfait de lui".
Cf. son livre : Akhbār al-Mahdī Ibn Tumart, édité par A. Hadjiat, Alger 1974.
Les auteurs postérieurs, comme Ibn Khaldūn dans son Kitāb al ^{c}Ibar et az-Zarakshī dans son Tarīkh ad-Dawlatayn, se contentent de l'appeler al-Mahdī ou l'Imām al-Mahdī, sans formule supplémentaire.

(15)- E. Levi-Provençal, Trente sept lettres officielles almohades (texte arabe), Rabat 1941, pp.55-61.

- Ibn Khillikān, Wafayāt al-A^{c}yān wa Anbā' Abnā' az-Zamān, Dār Sādir Beyrouth 1978, t.VII, p.134, précise que Muhammad a régné quarante cinq jours avant d'être destitué au profit de son frère Yūsuf.

(16)- Parmi les personnages qui ont porté la nisba "al-^{c}Abdarī", on peut citer : Abū Muhammad al-Balansī (GAL. I, p. 634 n° 14), Muhammad at-Tilimsānī (GAL. II, p. 101 et SII, p. 95), Abū-l-^{c}Abbās Ahmad al-Māyurkī (GAL. SI, p. 635) et Ibn Mu^{c}āwiyya al-Andalusī (GAL. SI, p. 630).
Mais à lire leurs biographies, on constate que leur nisba ne suffit pas pour décider de la ville où ils ont étudié et de celle où ils ont éventuellement enseigné.

(17)- Il s'agit d'une véritable dynastie de médecins qui ont servi successivement les khalifes almohades. Le premier Ibn Zuhr qui a servi an-Nāsir est Abū Bakr al-Hafīd auquel succèdera son fils Abū Muhammad. Cf. Ibn Abi Usaybi^{c}a, ^{c}Uyun al-Anbā'..., Beyrouth 1979, III. pp. 109-21.

(18)- Elève du grammairien égyptien Ibn Barrī. Il est l'auteur du célèbre ouvrage de grammaire intitulé la Muqaddima ou la Jazūliyya.

(19)- Auteur de la célèbre Urjūza sur l'algèbre "al-Yāsamīniyya". D'après

Ibn Qunfudh, il aurait également écrit un livre intitulé "Kitāb al-ᶜAdad". Cf. Kitāb al-Wafayāt, Beyrouth 1980, p. 302.
D'après A. Kannūn qui ne cite malheureusement pas ses sources, il aurait aussi écrit une "Urjūza fi Aᶜmāl al-Judhūr" et un "Talqīh al-Afkār fī-l-ᶜAmal bi Hurūf al-Ghubār". Cf. An-Nubūgh al-Maghribī, Beyrouth 1975, 3ᵉ édition, p. 171.

(20)- Il s'agit de son ouvrage intitulé "Kitāb al-Istikmāl" qui sera également étudié et utilisé par Ibn al-Bannā' au XIVᵉ siècle. Cf. notre article qui paraîtra dans la revue de l'Institut d'Histoire des Sciences arabo-islamiques de Francfort, sous le titre "La tradition arithmétique euclidienne et ses prolongements chez al-Mu'taman (XIᵉ siècle). Cet article est basé sur l'analyse d'un manuscrit anonyme que nous avons identifié comme étant la partie arithmétique du Kitāb al-Istikmāl.

(21)- Ces écrits concernent l'étude des nombres polygones. Cf. Fiqh al-Ḥisāb, op.cit. p. 298.

(22)- Une étude comparative de l'ouvrage d'Ibn Munᶜim est en préparation. Elle viserait, dans la mesure du possible, à mieux situer le contenu de l'enseignement mathématique au Maghreb aux XIIᵉ-XIIIᵉ siècles, en liaison étroite avec les traditions d'enseignement et les travaux originaux des écoles d'Andalousie et du centre de l'empire.

(23)- Fiqh al-Ḥisāb, op.cit. p. 215.

(24)- Ibn Munᶜim se réfère, ici, au Kitāb al-ᶜAyn et plus précisément au passage contenant les dénombrements d'une partie des mots de deux,...,cinq lettres de la langue arabe.

(25)- On découvre ce tableau, pour la première fois (en ce qui concerne la tradition arabe), dans un ouvrage d'algèbre d'as-Samaw'al al-Maghribī qui l'attribue à al-Karajī. Cf. S. Ahmad et R. Rashed, al-Bāhir en algèbre, partie arabe, pp. 109-12. Ce tableau a peut-être été utilisé, plus tard, par al-Bīrūnī, dans son étude intitulée "Fi-Stikhrāj al-Kiᶜab wa adlāᶜ mā warā-'ahū min Marātib al-Ḥisāb" (Cf. F. Sezgin, G.A.S. V, p. 382), et par al-Khayyām dans un livre non encore retrouvé (Cf. R. Rashed et A. Djebbar, L'oeuvre algébrique d'al-Khayyām, Alep I.H.A.S. 1981). On le retrouve chez N. at-Ṭūsī, dans son Jawāmiᶜ al-Ḥisāb bi-t-Takhti wa-t-Turāb (Cf. ms . Es-

(26)- En 1556, le mathématicien italien Tartaglia ira même jusqu'à dresser le même tableau de nombres, à deux endroits de son General trattato di numeri et misure (il est vrai, suivant deux configurations géométriques différentes), sans faire le lien entre les deux aspects, combinatoire et algébrique, de cet ensemble de nombres. E. Coumet avait déjà remarqué ce fait en analysant ces deux tableaux et leur contexte mathématique, dans : Mersenne, Frénicle,..., op. cit. pp. 301-8.

(27)- E. Coumet, Mersenne, Frénicle,..., op. cit. 248-61.

(28)- Frénicle, Abrégé des combinaisons, in Mémoires de l'académie royale des sciences, 1666-1699, t.V, Paris 1729, pp. 99-105.

(29)- Fiqh al-Ḥisāb, op.cit. p.215-16.

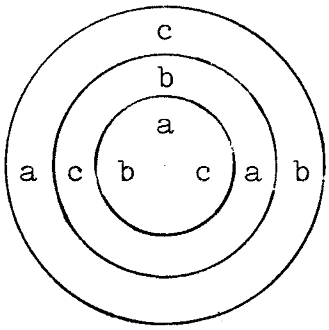
(30)- E.R.M..., op.cit. pp. 56-66.

(31)- as-Suyūṭī, al-Muzhir fi ᶜUlūm al-Lugha, Le Caire, non daté, pp.71-6.

(32)- Nous avions déjà signalé ce type d'erreur chez Ibn Khaldūn (cf. E. R.M..., op.cit. p. 134, note 213), mais ces erreurs sont différentes, d'un auteur à l'autre ; ce qui rend nécessaire une étude comparative des passages de nature combinatoire éparpillés dans différents ouvrages.

(33)- al-Muzhir..., op.cit. 71-74. Voici les deux démarches d'Ibn Durayd telles que nous les avons comprises :

La première méthode consiste à disposer les lettres à combiner sur plusieurs cercles concentriques et à faire tourner tous les cercles sauf le plus petit, de manière à faire correspondre, à chaque fois des lettres différentes, ainsi :



Il s'agirait alors d'un procédé identique à celui que l'on rencontre en astrologie. al-Būnī, Ibn al-ᶜArabī et même Ramon Lull l'utiliseront (cf. E.R. M..., op.cit. p.135, note 222).

La seconde méthode consiste à dénombrer, séparément, les mots sans répétition de lettres et les autres et, dans le dénombrement des premiers, à distinguer entre les mots sans و ni ء ni ى , et les autres : Le calcul est correct pour les arrangements avec répétitions des 28 lettres, 2 à 2, il est faux pour les arrangements de plus de deux lettres, l'erreur portant sur la valeur des combinaisons 3 à 3. Ibn Durayd utilise en effet la formule :

$$C_p^3 = p \times C_p^2$$

au lieu de :

$$C_p^3 = \frac{p-3}{3} \times C_p^2$$

Il est étonnant que les auteurs successifs n'aient pas comparé ces résultats à ceux d'al-Khalīl Ibn Aḥmad qui ne révèlent pas la méthode mais qui sont rigoureusement exacts.

(34)- Nous avons abordé quelques aspects de ce problème dans notre communication au colloque international de Rabat sur : Philosophie et Mathématique (1-4 Avril 1982), qui paraîtra dans la revue de la société de philosophie du Maroc : Etudes philosophiques et littéraires, n° 7.

(35)- E.R.M..., op.cit. pp. 69-75.

(36)- a)- Pour les méthodes d'approximation dont la place se réduit peu à peu dans le programme d'enseignement, voir en particulier le Raf^c al-Ḥijāb, op.cit. f. 12a.

b)- Les coniques étaient étudiées au XIII^e siècle, comme en témoigne le livre d'Abū-l-Hasan al-Marrākushī et l'information qui est rapportée par Ibn Qunfudh, dans son Ḥaṭṭ an-Niqāb (ms . Rabat n° 1678 D, p.6) et qui concerne l'intérêt d'Ibn al-Bannā' pour cette matière.

c)- La comparaison quantitative et qualitative des problèmes de théorie des nombres, dans l'ouvrage d'Ibn Mun^{c}im puis dans ceux d'Ibn al-Bannā' et d'Ibn Haydūr (que nous exposons ailleurs), ne fait que confirmer le constat fait par Ibn Khaldūn, au XIV^e siècle, concernant son abandon progressif par les mathématiciens (cf. La Muqaddima, op.cit. p. 896).

d)- A ces quatre disciplines, il faudrait peut-être ajouter les fractions décimales dont l'enseignement n'est pas explicitement évoqué, mais dont l'utilisation, comme instrument de calcul, est attestée par le témoignage d'un mathématicien maghrébin post-almohade. Il s'agit d'al-Qaṭrawānī qui rapporte, dans son ouvrage "Rashfat ar-Ruḍāb min Thughūr A^{c}māl al-Ḥisāb", que les secrétaires des administrations de l'Ifriqiyya utilisaient, dans leurs problèmes quotidiens de conversion monétaire, ce qu'ils appelaient "le produit par les dizaines" qui consistait à ramener toute fraction donnée à une somme de fractions de dizaines, de centaines, ainsi de suite, c'est à dire, à utiliser la relation :

$$\frac{a}{b} \cong \sum_{1}^{n} \frac{c_k}{10^k} \quad ; \ (a < b)$$

Cf. ms . Rabat n° 416 Q. pp. 58-59 et pp. 161-62.

(37)- J. Cardan, Opus novum de proportionibus numerorum..., in Opera omnia, Lyon 1663, t. IV, pp. 556-58. Cité par E. Coumet, in Mersenne, Frénicle..., ainsi que toutes les références ci-dessous concernant les mathématiques européennes.

(38)- N. Tartaglia, La seconda parte del General Trattato di numeri et misure, 1556, f. 17a.

(39)- F.M. Mersenne, Harmonie universelle, Paris 1636, II, Livre second des chants, p. 145.

(40)- B. Pascal, Oeuvres complètes, Paris 1954, p. 114.

(41)- Tanbīh al-Albāb, ms. Alger n° 613/6^e, f.73a-73b. et Raf^c al-Ḥijāb ^{c}an Wujūh A^{c}māl al-Ḥisāb, ms. Tunis n° 9722, f.17a. L'édition critique et la traduction française de ce dernier ouvrage feront partie d'une thèse que prépare actuellement Mr. M. ABALLAGH et qui portera, en particulier, sur les relations entre mathématiques, philosophie et Kalām dans l'oeuvre d'Ibn al-Banna'.

(42)- Ms. Vatican n° 1403, f. 53a.

(43)- La Muqaddima, op.cit. p. 1060.

(44)- F.M. Mersenne, Harmonicorum Libri, VII, p. 133.

(45)- Frénicle, Abrégé des combinaisons, op.cit. p. 93.

(46)- Ms . Brit. Mus. n° Add. 7469, f. 30b-32a.

(47)- Harmonie universelle, op.cit. II, proposition XIX, p. 149.

(48)- Op.cit. II, Livre premier de la voix, p. 66.

(49)- Abrégé des combinaisons, op.cit. pp. 109-11.

(50)- Raf^{c} al-Ḥijāb, op.cit. f. 17a.

(51)- E. Coumet, Mersenne, Frénicle..., op.cit. pp. 262-69.

(52)- La Imāla (inflexion) et le Tafkhīm (emphase), dans la prononciation du a, sont considérés comme des sons autorisés et appréciés dans la récitation du Coran ou dans la déclamation des poèmes. Cf. Sībawayh (al-Kitāb, mss. Paris n° 3987, f. 575b.) qui ajoute une vingt neuvième lettre, la Hamza, à l'alphabet arabe et qui dénombre deux catégories de sons supplémentaires, entendus à son époque dans les parlers arabes : Six dont l'utilisation est admise et sept qui ne sont pas appréciés dans la lecture du coran ou des poèmes.

(53)- La langue berbère est dans ce cas.

(54)- L'auteur fait allusion, vraisemblablement, aux consonnes de la langue berbère, qui n'existent pas dans la langue arabe : Le kāf spirant, comme dans le mot berbère : Amik (comment), le tch, comme dans : Atch (mange). enfin,les deux consonnes "gue", l'une spirante, comme dans : Agu (la brume) et l'autre occlusive qui est commune à la langue berbère et au parler arabe maghrébin, comme par exemple dans : Galb (coeur) et Argāz (homme).

(55)- Coran, Sūrat an-Nūr (XXIV), verset 55.

(56)- Selon le contexte mathématique, nous traduisons le mot وضع par : permutation, arrangement, position, configuration.

(57)- C'est la géométrie du tableau IV (qui est un rectangle), qui oblige Ibn Mun^{c}im à parler d'intersection de lignes et de colonnes, car à partir de n = 10, les directions des diagonales se rapprochent de plus en plus des lignes. Mais, dans l'esprit de l'auteur, les résultats doivent se lire en diagonale. Cela est confirmé par les diagonales qui séparent chaque famille de C_n^p (n fixé et $2 \leq p \leq n$).

(58)- Les sections B.VII et C.VI ont été analysées par Mr. D. Lamrabet dans son mémoire de post-graduation "La Mathématique maghrébine au moyen-âge", Université Libre de Bruxelles, 1981, pp.35-73. Les sections B.VIII, IX, X ont été analysées par nous dans un article à paraître sous le titre "Séries finies et nombres figurés dans les ouvrages maghrébins des XII^{e}-XIII^{e} siècles".

(59)- Ces résultats et exemples sont repris de notre étude "E.R.M...",op. cit. pp.90-112.

(60)- Raf^{c} al-Ḥijāb, op.cit. ff.12a-17a.

(61)- Ḥāwī-l-Lubāb, op.cit. f.32a.

(62)- Arba^{c} Maqālāt, ms. Tunis 9722, ff.116a-119a.

(63)- at-Tamḥīṣ fī Sharh at-Talkhīṣ, ms. Rabat al-Ḥasaniyya n°252,t.II,p.6.

(64)- Raf^{c} al-Ḥijāb, op.cit. f.37a.

(65)- Ḥāwī-l-Lubāb, op.cit. ff.106a-107a.

(66)- al-Jāmi^{c} li Uṣūl ^{c}Ilm al-Ḥisāb, ms. Tunis 9722, f.63b.

(67)- Ḥāwī-l-Lubāb, op.cit. ff.193b-194b.

Index des noms propres(*)

(*)- Les abréviations utilisées sont : p.(page), n.(note), b.(Ibn).