UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

n° 112

Une extension d'un résultat de W. Rudin

Anne-Marie Chollet

Analyse Harmonique d'Orsay

1975

n° 112 23.721

Une extension d'un résultat de W. Rudin

Anne-Marie Chollet

Analyse Harmonique d'Orsay
1975

UNE EXTENSION D'UN RESULTAT DE W. RUDIN

par Anne-Marie Chollet

On se propose d'étendre aux domaines D strictement pseudo-convexes de $\mathbb{C}^n$ un résultat de D. Sarason [8] pour le disque et de W. Rudin [7] pour la boule.

THEOREME. Si σ est la mesure superficielle sur ∂D, la frontière de D, $\mathscr{H}^\infty(\sigma) + C(\partial D)$ est une sous algèbre fermée de $L^\infty(\sigma)$.

On obtient un résultat analogue pour d'autres mesures ν que la mesure superficielle σ, pour toute mesure $\sigma + |\mu|$ où μ est une mesure sur ∂D, ou pour toute mesure $v + |\mu|$ où v est la mesure volume et μ une mesure quelconque portée par $\overline{D}$.

La démonstration se fait en deux parties. On établit, en utilisant un théorème de T. W. Gamelin et J. Garnett, que $\mathscr{H}^\infty(\nu) + \mathscr{C}(\mathrm{Supp}\,\nu)$ est fermé dans $L^\infty(\nu)$. Puis, en s'inspirant de la démonstration de W. Rudin, on montre, à l'aide du noyau de Henkin que $\mathscr{H}^\infty(\nu) + \mathscr{C}(\mathrm{Supp}\,\nu)$ est une algèbre.

I

Soient A une algèbre uniforme sur un compact X et ν une mesure positive sur X. On note $C(X)$, l'algèbre des fonctions continues sur X et $\mathcal{H}^\infty(\nu)$, l'adhérence de A dans $L^\infty(\nu)$ pour la topologie faible étoile, c'est-à-dire, la topologie $\sigma[L^\infty(\nu), L^1(\nu)]$.

1. PROPOSITION. Si, pour toute fonction u continue sur X, on a

$$d(u,A) = d(u, \mathcal{H}^\infty(\nu)),$$

alors $\mathcal{H}^\infty(\nu) + C(X)$ est fermé dans $L^\infty(\nu)$.

Preuve. On a, comme dans [5],

$$C(X) \xrightarrow{i} L^\infty(\nu) \xrightarrow{\pi} L^\infty(\nu)/\mathcal{H}^\infty(\nu)$$

où i est l'injection canonique et π l'application quotient donc,

$\pi^{-1}[\pi(i(C(X)))]$ est fermé dans $L^\infty(\nu)$ si $\pi(i(C(X)))$ est fermé dans $L^\infty(\nu)/\mathcal{H}^\infty(\nu)$.

Mais, par hypothèse, les espaces $C(X)/A$ et $\pi(i(C(X)))$ sont isométriquement isomorphes. Puisque $C(X)/A$ est complet, $\pi[i(C(X))]$ l'est aussi, ce qui établit la proposition.

2. Soit $\mathcal{M}$ le spectre de $\mathcal{H}^\infty(\nu)$; pour tout point p de X, on note $\mathcal{M}_p$, la fibre de $\mathcal{M}$ au-dessus de p, c'est-à-dire, l'ensemble des homomorphismes φ de $\mathcal{M}$ qui vérifient $\varphi(f) = f(p)$ pour tout élément f de A.

On dira que l'algèbre A a la propriété (L) si, pour tout point p du support de ν, pour toute fonction u de $C(X)$ et toute fonction f de $\mathcal{H}^\infty(\nu)$ vérifiant $|f| \leq u$ presque partout par rapport à ν, on a

$$|\Phi(f)| \leq u(p), \quad \text{pour tout } \Phi \text{ de } \mathcal{M}_p.$$

Soit τ une mesure sur X, on dit que τ est absolument continue par rapport à $A^{\perp}$ si et seulement si τ est absolument continue par rapport à une mesure sur X orthogonale à A.

On utilise, dans la suite, un théorème de T. W. Gamelin et J. Garnett [4].

3. THEOREME. Soient A une algèbre uniforme sur un espace topologique compact X et ν une mesure positive dont le support est X. Si A a la propriété (L) et si, pour toute mesure τ sur X absolument continue par rapport à $A^{\perp}$, l'application restriction de $L^{\infty}(\nu+|\tau|)$ à $L^{\infty}(\nu)$ est une isométrie de $\mathcal{H}^{\infty}(\nu+|\tau|)$ sur $\mathcal{H}^{\infty}(\nu)$, alors, pour toute fonction u continue sur X, on a

$$d(u\ ,A) = d(u\ ,\mathcal{H}^{\infty}(\nu)).$$

II

4. Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, de classe C^2 strictement pseudo-convexe. Il existe alors une fonction ρ à valeurs réelles, de classe C^2 dans un voisinage de $\overline{D}$, l'adhérence de D, telle que

(i) $D = \{z\ ;\ \rho(z) < 0\}$,

(ii) $\operatorname{grad} \rho \neq 0$ sur ∂D,

(iii) ρ est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de ∂D.

On désigne par $\mathcal{H}^{\infty}(D)$, l'algèbre des fonctions holomorphes et bornées dans D et par $A(D)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans D, continues dans $\overline{D}$.

Pour toute mesure ν sur $\overline{D}$, on note $\mathcal{H}^{\infty}(\nu)$, l'adhérence faible étoile dans $L^{\infty}(\nu)$ des fonctions de $A(D)$. Si v est la mesure volume sur D, on sait [3] que $\mathcal{H}^{\infty}(D) = \mathcal{H}^{\infty}(v)$.

On dit qu'une mesure μ sur ∂D, la frontière de D, est une A-mesure, si l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial D} f_n \, d\mu = 0,$$

pour toute suite bornée (f_n) de fonctions de $A(D)$ convergeant ponctuellement vers 0 dans D.

Dans tout ce qui suit, σ désigne la mesure superficielle sur ∂D.

5. PROPOSITION. Pour toute mesure μ portée par ∂D, $\mathcal{H}^\infty(\sigma+|\mu|)+\mathcal{C}(\partial D)$ est fermé dans $L^\infty(\sigma+|\mu|)$.

Preuve. Soit μ_a une A-mesure sur ∂D, le théorème 3 s'applique à A, la restriction à ∂D des fonctions de $A(D)$ si l'on pose $\nu = \sigma + |\mu_a|$. L'algèbre $\mathcal{H}^\infty(\nu)$ a, en effet, la propriété (L) puisque tout point de la frontière d'un domaine D strictement pseudo-convexe est pic pour $A(D)$, [9], c'est-à-dire, qu'en chaque point p de ∂D, il existe une fonction f de $A(D)$, égale à 1 au point p et de module strictement inférieur à 1 partout ailleurs. De plus, toute mesure τ absolument continue par rapport à $A^\perp$ est une A-mesure [6]; on conclut donc, d'après un résultat de B. Cole et R. M. Range [3] que l'application restriction de $L^\infty(\nu+|\tau|)$ à $L^\infty(\nu)$ est une isométrie de $\mathcal{H}^\infty(\nu+|\tau|)$ sur $\mathcal{H}^\infty(\nu)$. On a donc

$$d(u\, ,\, \mathcal{H}^\infty(\sigma + |\mu_a|)) = d(u\, ,\, A)\, ,$$

pour toute fonction u continue sur ∂D.

Soit μ une mesure quelconque sur ∂D, on sait [1] qu'elle s'écrit

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

où μ_a est absolument continue par rapport à $A^\perp$ et μ_s est singulière par rapport à toute mesure orthogonale. Pour une démonstration détaillée de ce résultat on peut se référer à [2].

Ainsi, toute mesure ν, absolument continue par rapport à $\sigma + |\mu|$ et orthogonale à A, est absolument continue par rapport à $\sigma + |\mu_a|$. On a donc

$$\mathcal{H}^\infty(\sigma + |\mu|) = \mathcal{H}^\infty(\sigma + |\mu_a|) \oplus L^\infty(\mu_s)$$

et, de là, pour toute fonction u continue sur ∂D,

$$d(u, \mathcal{H}^\infty(\sigma + |\mu|)) = d(u, \mathcal{H}^\infty(\sigma + |\mu_a|)).$$

Mais, μ_a, absolument continue par rapport à une A-mesure, est une A-mesure, ce qui permet d'obtenir

$$d(u, \mathcal{H}^\infty(\sigma + |\mu|)) = d(u, A)$$

et de conclure à l'aide de la proposition 1.

6. On note $\mathcal{C}(\bar{D})$, l'algèbre des fonctions continues sur D qui se prolongent continûment à $\bar{D}$.

7. PROPOSITION. Pour toute mesure μ sur $\bar{D}$, $\mathcal{H}^\infty(v + |\mu|) + \mathcal{C}(\bar{D})$ est fermé dans $L^\infty(v + |\mu|)$.

Pour toute mesure ν dont la restriction à ∂D est une A-mesure les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées. L'application restriction de $\mathcal{H}^\infty(v + |\nu|)$ à $\mathcal{H}^\infty(v)$ est une isométrie [3] et la propriété (L) est satisfaite en tout point de $\bar{D}$. On a donc, pour toute fonction u de $\mathcal{C}(\bar{D})$,

$$d(u, A(D)) = d(u, \mathcal{H}^\infty(v + |\nu|)).$$

De là, si μ est une mesure quelconque sur $\bar{D}$, comme dans la démonstration de la proposition 5, on décompose sa restriction à ∂D en μ_a et μ_s, pour en déduire

$$d(u\ ,\ A(D)) = d(u\ ,\mathcal{H}^{\infty}(v + |\mu|))$$

et établir ainsi la proposition.

III

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on note $\mathcal{C}(\partial D, \mathcal{H}(\Omega))$, l'espace des fonctions continues sur ∂D à valeurs dans $\mathcal{H}(\Omega)$, l'algèbre des fonctions holomorphes sur Ω. On note par le même symbole la fonction de $\mathcal{C}(\partial D\ , \mathcal{H}(\Omega))$ et la fonction définie sur $\partial D \times \Omega$.

8. THEOREME. [6]. Il existe un ouvert Ω contenant $\overline{D}$ et il existe des fonctions A et B définies sur $\partial D \times \Omega$, telles que

a) A et B appartiennent à $\mathcal{C}(\partial D\ , \mathcal{H}(\Omega))$,

b) B ne s'annule dans $\partial D \times \overline{D}$ qu'aux points (ζ, z) tels que $\zeta = z$,

c) si f est une fonction de $A(D)$ on a, pour tout z dans D,

$$f(z) = \int_{\partial D} H(\zeta, z)\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

où $H(\zeta, z) = \dfrac{A(\zeta, z)}{[B(\zeta, z)]^n}$,

d) étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout t dans $\overline{D}$,

$$\int_{S(t,3\delta)\cap\partial D} |\zeta - t|\, |\mathcal{H}(\zeta, t)|\, d\sigma(\zeta) < \varepsilon.$$

9. Soit f une fonction de $\mathcal{H}^{\infty}(D)$. En tout point z de ∂D on note ν_z la normale à ∂D en z orientée vers l'extérieur et

$$f^*(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(z - \varepsilon\, \nu_z).$$

Une telle limite existe presque partout sur ∂D [9].

10. PROPOSITION. L'application $f \to f^*$ définit un isomorphisme isométrique de $\mathcal{H}^\infty(D)$ sur $\mathcal{H}^\infty(\sigma)$ et l'on a

$$f(z) = \int_{\partial D} H(\zeta, z)\, f^*(\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Preuve. Soit f un élément de $\mathcal{H}^\infty(D)$, il existe une suite bornée (f_n) de fonctions de $A(D)$ telle que, pour tout z dans D [6],

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

La suite (f_n) en restriction à ∂D a un point faiblement adhérent g dans $L^\infty(\sigma)$.

Si on note $P(\zeta, z)$ le noyau de Poisson associé au domaine, on a, en tout point z de D,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial D} P(\zeta, z)\, f_n(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int_{\partial D} P(\zeta, z)\, g(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\,,$$

donc,

$$f(z) = \int_{\partial D} P(\zeta, z)\, g(\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Par ailleurs, puisque g appartient à $L^\infty(\sigma)$, d'après les propriétés du noyau de Poisson, on a

$$g = f^* \quad \text{p. p.}\ ,$$

et

$$\|f\| = \|f^*\|.$$

Si g est une fonction de $\mathcal{H}^\infty(\sigma)$ et, si on pose, pour tout z dans D,

$$f(z) = \int_{\partial D} \mathcal{H}(\zeta, z)\, g(\zeta)\, d\sigma(\zeta),$$

alors f est holomorphe dans D.

Par ailleurs, soit

$$h(z) = \int_{\partial D} P(\zeta, z)\, g(\zeta)\, d\sigma(\zeta),$$

h est une fonction bornée dans D.

Pour tout z fixé, $\mathcal{H}(\zeta, z) - P(\zeta, z)$ appartient à $L^1(\sigma)$. La mesure $(\mathcal{H} - P)d\sigma$ sur ∂D est orthogonale à $A(D)$ donc à $\mathcal{H}^\infty(\sigma)$. On a alors, en tout point de D,

$$f = h.$$

La fonction g est donc valeur au bord d'une fonction de $H^\infty(D)$.

11. On dit qu'une fonction φ vérifie une condition de Lipschitz sur ∂D, s'il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout (ζ, z) de $\partial D \times \partial D$, on ait,

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(z)| \leq K |\zeta - z|$$

12. LEMME. Soit φ une fonction vérifiant une condition de Lipschitz sur ∂D et f une fonction de $\mathcal{H}^{\infty}(\sigma)$. Si, pour tout (z,w) de $\partial D \times D$, on note

$$I(z,w) = \int_{\partial D} [\varphi(\zeta) - \varphi(z)] [H(\zeta, z) - H(\zeta, w)] f(\zeta) \, d\sigma(\zeta),$$

alors, quel que soit $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout (z,w) de $\partial D \times D$ vérifiant $|z - w| < \rho$, on ait

$$|I(z,w)| < \eta.$$

Preuve. On va, pour établir ce résultat, supposer que la fonction φ a été étendue en une fonction lipschitzienne dans $\bar{D}$ tout entier en préservant la constante de Lipschitz. On pose

$$K(\zeta, z) = [\varphi(\zeta) - \varphi(z)] \mathcal{H}(\zeta, z).$$

Pour tout z de ∂D, d'après le théorème 8, cette fonction est intégrable sur ∂D. Ainsi, pour tout (z,w) de $\partial D \times D$, l'expression $I(z,w)$ a un sens et s'écrit encore

$$I(z,w) = \int_{\partial D} [K(\zeta, z) - K(\zeta, w)] f(\zeta) \, d\sigma(\zeta) + [\varphi(w) - \varphi(z)] \int_{\partial D} H(\zeta, w) f(\zeta) \, d\sigma(\zeta).$$

Puisque f appartient à $\mathcal{H}^{\infty}(\sigma)$ et que w est dans D, d'après la proposition 10,

$$\int_{\partial D} H(\zeta, w) f(\zeta) \, d\sigma(\zeta)$$

représente une fonction de $\mathcal{H}^{\infty}(D)$ que l'on notera encore f

$$I(z,w) = \int_{\partial D} [K(\zeta, z) - K(\zeta, w)] f(\zeta) \, d\sigma(\zeta) + [\varphi(w) - \varphi(z)] f(w).$$

D'après le théorème 8, $\eta > 0$ étant donné, il existe $\delta > 0$ tel que, quel que soit t dans $\bar{D}$, on ait

$$\int_{S(t, 3\delta)} |K(\zeta, t)| \, d\sigma(\zeta) < \eta.$$

Soit $E_\delta = \{(\zeta, t) \in \partial D \times \overline{D} \ ; \ |\zeta - t| \geq \delta\}$.

La fonction $K(\zeta, t)$ est continue sur ce compact. Il existe donc ρ tel que, pour tout couple de points (ζ, t) et (ζ, t') de E_δ vérifiant $|t-t'| < \rho$, on ait

$$|K(\zeta,t) - K(\zeta, t')| \leq \eta \qquad \text{et} \qquad |\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \eta .$$

On choisira ρ tel que $0 < \rho < \delta$.

Soit (z, w) appartenant à $\partial D \times D$ tel que $|z - w| < \rho$, on a

$$|I(z,w)| \leq \int_{\partial D} |K(\zeta,z) - K(\zeta,w)| \, |f(\zeta)| \, d\sigma(\zeta) + \eta \, \|f\|_\infty$$

l'intégrale figurant dans le second membre de cette inégalité est majorée par la somme des trois intégrales suivantes I_1, I_2, I_3, et l'on a,

$$I_1 = \int_{\partial D \setminus S(z,2\delta)} |K(\zeta,z) - K(\zeta,w)| \, |f(\zeta)| \, d\sigma(\zeta) \leq \eta \|f\|_\infty$$

$$I_2 = \int_{S(z,2\delta) \cap \partial D} |K(\zeta,z)| \, |f(\zeta)| \, d\sigma(\zeta) \leq \eta \|f\|_\infty$$

et puisque $S(z,2\delta)$ est contenue dans $S(w,3\delta)$

$$I_3 = \int_{S(w,3\delta)} |K(\zeta,w)| \, |f(\zeta)| \, d\sigma(\zeta) \leq \eta \|f\|_\infty .$$

Ainsi $|I(z,w)| \leq 4\eta \|f\|_\infty$, ce qui établit le lemme.

13. PROPOSITION. <u>Si</u> φ <u>vérifie une condition de Lipschitz sur</u> ∂D <u>et si</u> f <u>appartient à</u> $\mathcal{H}^\infty(\sigma)$, <u>alors</u>

$$T_\varphi f(z) = \int_{\partial D} \varphi(\zeta) \, f(\zeta) \, H(\zeta, z) \, d\sigma(\zeta)$$

<u>appartient à</u> $\mathcal{H}^\infty(D)$ <u>et il existe</u> g <u>dans</u> $\mathcal{C}(\partial D)$ <u>telle que</u>

$$\varphi f = g + (T_\varphi f)^* .$$

Démonstration. Soit g la fonction définie en tout point de ∂D par

$$g(z) = \int_{\partial D} \left[\varphi(z) - \varphi(\zeta)\right]\mathcal{H}(\zeta, z)\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

On a alors,

$$I(z,w) = \varphi(z)\, f(w) - T_\varphi f(w) - g(z).$$

Puisque φ est continue sur ∂D, on déduit du lemme 12 que g est continue sur ∂D. On déduit de même, puisque f appartient à $\mathcal{H}^\infty(\sigma)$ qu'il existe une constante M telle que, pour tout w de D à une distance de ∂D inférieure à ρ, on ait

$$\left|T_\varphi f(w)\right| \leq M.$$

Donc, puisque $\mathcal{H}$ est continue sur $\left\{(\zeta, z) \in \partial D \times \bar{D} \ ; \ \left|\zeta - z\right| \geq \rho\right\}$, $T_\varphi f$ appartient à $\mathcal{H}^\infty(D)$.

Pour tout z de ∂D, on note $w = z - \varepsilon\nu_z$. On a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I(z,w) = 0$, c'est-à-dire

$$\varphi f - (T_\varphi f)^* - g = 0.$$

IV

14. THEOREME. Soit σ la mesure superficielle sur ∂D, $\mathcal{H}^\infty(\sigma) + \mathcal{C}(\partial D)$ est une sous algèbre fermée de $L^\infty(\sigma)$.

Démonstration. D'après la proposition 5, $\mathcal{H}^\infty(\sigma) + \mathcal{C}(\partial D)$ est fermé dans $L^\infty(\sigma)$. Soit f une fonction de $\mathcal{H}^\infty(\sigma)$ et g une fonction de $\mathcal{C}(\partial D)$, alors g peut être approchée uniformément sur ∂D par des fonctions φ_i lipschitziennes sur ∂D.

D'après la proposition 13, chaque $\varphi_i f$ appartient à $H^\infty(\sigma) + C(\partial D)$, mais puisque $\|\varphi_i f - gf\|_\infty$ converge vers 0 et que $\mathcal{H}^\infty(\sigma) + \mathcal{C}(\partial D)$ est fermé, gf appartient à $H^\infty(\sigma) + C(\partial D)$.

15. THEOREME. Soit v la mesure volume sur $\bar{D}$, $\mathcal{H}^\infty(v) + C(\bar{D})$ est une sous

<u>algèbre fermée de</u> $L^{\infty}(v)$.

Démonstration. D'après la proposition 7, $\mathcal{H}^{\infty}(v)+\mathcal{C}(\overline{D})$ est fermé dans $L^{\infty}(v)$. Il suffit de montrer que φf appartient à $\mathcal{H}^{\infty}(v)+C(\overline{D})$ si f appartient à $H^{\infty}(v)$ et φ est lipschitzienne sur $\overline{D}$.

Soit f une fonction de $\mathcal{H}^{\infty}(v)$, on applique le lemme 12 et la proposition 13 à f^* en reprenant les mêmes notations. On note $F = T_{\varphi}(f^*)$. La fonction F appartient à $\mathcal{H}^{\infty}(v)$ et on a $(\varphi f - F)(\omega) - g(z) = I(z,\omega) + [\varphi(\omega)-\varphi(z)]f(\omega)$ quel que soit η positif, il existe ρ tel que pour tout (z,ω) de $\partial D\times D$ vérifiant $|z-\omega|<\rho$ on ait

$$|I(z,\omega)|<\eta$$

et

$$|\varphi(\omega)-\varphi(z)|\,|f(\omega)|<\eta.$$

Donc, puisque g est continue sur ∂D, $\varphi f - F$ admet un prolongement continu à $\overline{D}$.

16. PROPOSITION. <u>Soit</u> μ <u>une A-mesure sur</u> ∂D, $\mathcal{H}^{\infty}(\sigma+|\mu|)+\mathcal{C}(\partial D)$ <u>est une sous algèbre fermée de</u> $L^{\infty}(\sigma+|\mu|)$.

Démonstration. D'après la proposition 5, $\mathcal{H}^{\infty}(\sigma+|\mu|)+\mathcal{C}(\partial D)$ est fermé dans $L^{\infty}(\sigma+|\mu|)$ et il suffit de montrer que si φ vérifie une condition de Lipschitz sur ∂D et si $\tilde{f}$ appartient à $\mathcal{H}^{\infty}(\sigma+|\mu|)$, $\varphi\tilde{f}$ appartient à $\mathcal{H}^{\infty}(\sigma+|\mu|)+\mathcal{C}(\partial D)$.

Puisque μ est une A-mesure, l'application restriction T de $\mathcal{H}^{\infty}(\sigma+|\mu|)$ à $\mathcal{H}^{\infty}(\sigma)$ est un isomorphisme isométrique qui est aussi un homéomorphisme pour les topologies faibles [3].

On note $f = T\tilde{f}$, d'après la proposition 13, la fonction g définie sur ∂D par

$$g(z) = \int_{\partial D} [\varphi(\zeta)-\varphi(z)]\mathcal{H}(\zeta,z)\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

est continue.

Par ailleurs, puisque μ est une A-mesure, $\tilde{f}$ est limite faible dans $L^\infty(\sigma+|\mu|)$ d'une suite bornée (f_n) de fonctions de $A(D)$ [3]. D'après les propriétés de T f est limite faible de (f_n) dans $L^\infty(\sigma)$.

Soit

$$g_n(z) = \int_{\partial D} [\varphi(\zeta) - \varphi(z)]\mathcal{H}(\zeta, z)\, f_n(\zeta)\, d\sigma(\zeta),$$

il existe une constante M telle que, pour tout n, on ait

$$\|g_n\|_\infty \leq M\|f_n\|_\infty,$$

alors, puisque la suite (f_n) est bornée, la suite (g_n) converge de manière ponctuelle bornée sur ∂D vers g. Elle converge donc faiblement vers g dans $L^\infty(\sigma+|\mu|)$.

D'après [6], pour tout n, $T_\varphi f_n$ appartient à $A(D)$ et on a, en tout point z de ∂D,

$$\varphi(z)\, f_n(z) + (T_\varphi f_n)(z) + g_n(z) = 0.$$

On en déduit donc que $(T_\varphi f_n)$ a une limite faible dans $L^\infty(\sigma+|\mu|)$, notée $(\widetilde{T_\varphi f})$ et que

$$\varphi(z)\, \tilde{f}(z) + (\widetilde{T_\varphi f})(z) + g(z) = 0 \qquad \text{p. p.} \quad (\sigma + |\mu|) \quad \text{sur} \quad \partial D,$$

ce qui démontre le théorème.

17. THEOREME. <u>Pour toute mesure</u> μ <u>sur</u> ∂D, $\mathcal{H}^\infty(\sigma+|\mu|) + \mathcal{C}(\partial D)$ <u>est une sous-algèbre fermée de</u> $L^\infty(\sigma+|\mu|)$.

Démonstration. D'après 5, $\mathcal{H}^\infty(\sigma+|\mu|) + \mathcal{C}(\partial D)$ est fermé dans $L^\infty(\sigma+|\mu|)$ et

$$\mathcal{H}^\infty(\sigma+|\mu|) = \mathcal{H}^\infty(\sigma + |\mu|) \oplus L^\infty(|\mu_s|)$$

où μ_a est une A-mesure sur ∂D et μ_s une mesure singulière par rapport à μ_a.

Soit f une fonction de $\mathcal{H}^\infty(\sigma+|\mu|)$

$$f = f_1 + f_2 \qquad (\sigma+|\mu| \quad \text{p. p.})$$

avec f_1 dans $\mathcal{H}^\infty(\sigma+|\mu_a|)$ et f_2 dans $L^\infty(\mu_s)$.

D'après la proposition 16, si φ est continue sur ∂D

$$\varphi f_1 = g + u \qquad (\sigma+|\mu_a| \text{ p. p.})$$

avec g dans $\mathcal{H}^\infty(\sigma+|\mu_a|)$ et u dans $C(X)$.

Si on définit $\hat{g}$ par

$$\hat{g} = g \qquad (\sigma+|\mu_a| \text{ p. p.})$$
$$\hat{g} = -u \qquad (\mu_s \text{ p. p.})$$

on a

$$fg = f_2 g + \hat{g} + u \qquad (\sigma+|\mu| \text{ p. p.})$$

avec u dans $C(X)$ et $fg_2 + \hat{g}$ dans $\mathcal{H}^\infty(\sigma+|\mu|)$ ce qui établit le théorème.

18. THEOREME. Pour toute mesure μ sur $\overline{D}$, $\mathcal{H}^\infty(v+|\mu|)+\mathcal{C}(\overline{D})$ est une sous-algèbre fermée de $L^\infty(v+|\mu|)$.

Démonstration. On utilise la proposition 7 et les idées de la démonstration du théorème 17.

Bibliographie

[1] BRIEM, E., DAVIE, A. M. and ØKSENDAL, B. K. A functional calculus for pairs of commuting contractions. J. London Math. Soc.(2), 7 (1973), 709-718.

[2] CHAUMAT, J. Adhérence faible étoile d'algèbres de fractions rationnelles. A paraître.

[3] COLE, B. and RANGE, R. M. A measures on complex manifolds and some applications. J. Funct. Anal. 11 (1972), 393-400.

[4] GAMELIN, T. W. and GARNETT, J. Bounded approximation by rational function. A paraître.

[5] HELSON, H. and SARASON, D. Past and future. Math. Scand. 21 (1967), 5-16.

[6] HENKIN, G. M. Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications. Amer. Math. Soc. Transl. : Math. USSR - Sb. 7 (1969), 597-616.

[7] RUDIN, W. Spaces of type $H^{\infty} + C$. A paraître.

[8] SARASON, D. Algebras of functions on the unit circle. Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 286-299.

[9] STEIN, E. M. Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables. Princeton Univ. Press 1972.