UNIVERSITÉ PARIS XI

U.E.R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

SEMINAIRE

LES SEMI-GROUPES ET LES EQUATIONS D'EVOLUTION

années 1972-73, 1973-74

sous la direction de Ph. BENILAN

J. DENY

F. HIRSCH

SEMINAIRE

LES SEMI-GROUPES
ET LES EQUATIONS D'EVOLUTION

années 1972-73, 1973-74

sous la direction de Ph. BENILAN
J. DENY
F. HIRSCH

dactylographie et présentation par Mme J. Maynard

TABLE DES MATIÈRES

D'autres exposés, faits par

Mmes FLANDRIN et PICARD

MM. ALLAIN, ARONSZAJN, ATTOUCH, BENILAN, DAMLAMIAN, DENY, HIRSCH, LUMER, PEROCHE, ROTH, SIAÏ

ont fait l'objet de publications séparées.

Exposé de Francis HIRSCH

FAMILLES RESOLVANTES UNIFORMEMENT LIPSCHITZIENNES

Nous rassemblons ici les résultats sur les familles résolvantes non linéaires qui sont formellement semblables aux résultats pour les familles linéaires. Cette similitude est parfois masquée par des notations un peu différentes dans les deux cas. Au début de cet exposé nous employons les notations du cas linéaire, puis nous donnons les notations habituelles dans le cas non linéaire. X désigne un espace de Banach. Sauf spécification contraire, le mot "opérateur" désigne un opérateur multivoque.

Définition 1. On appelle famille résolvante une famille $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ de fonctions de X dans X telle que

1) $\exists\, k\geq 0 \quad \forall\, x,y\in X \quad |\lambda R_\lambda x-\lambda R_\lambda y| \leq k|x-y|$

2) $\forall\, \lambda,\mu>0 \qquad R_\lambda = R_\mu\left[I+(\mu-\lambda)R_\lambda\right]$.

La famille est dite à contraction si $k=1$.

Proposition 2. Si $(R_\lambda)_{\lambda>0}$ est une famille résolvante, il existe un et un seul opérateur A tel que

$$R_\lambda = (\lambda I+A)^{-1}$$

$$R_\lambda = (\lambda I+A)^{-1} \Longleftrightarrow A = R_\lambda^{-1} - \lambda I \quad .$$

L'unicité est donc évidente.

Pour l'existence, soit $\lambda>0$ et $\mu>0$. Tout revient à montrer que

$$R_\lambda^{-1} - \lambda I = R_\mu^{-1} - \mu I$$

Or $\quad [x,y] \in R_\lambda^{-1} - \lambda I$

$$\Longleftrightarrow R_\lambda(y+\lambda x) = x$$

$$\Longrightarrow x = R_\mu\left[y+\lambda x+(\mu-\lambda)R_\lambda(y+\lambda x)\right] = R_\mu(y+\mu x) \ .$$

Donc

$$R_\lambda^{-1} - \lambda I \subset R_\mu^{-1} - \mu I$$

et, par symétrie, le résultat est démontré.

Proposition 3. *Si A est un opérateur tel que $\{\lambda(\lambda I+A)^{-1};\ \lambda>0\}$ est une famille de fonctions partout définies et uniformément lipschitziennes, alors $((\lambda I+A)^{-1})_{\lambda>0}$ est une famille résolvante.*

$$\begin{aligned}
& [x,y] \in (\lambda I+A)^{-1} = R_\lambda \\
\Longleftrightarrow\quad & [y,x] \in \lambda I + A \\
\Longleftrightarrow\quad & y \in D(A) \quad \text{et} \quad x \in \lambda y + Ay \\
\Longleftrightarrow\quad & y \in D(A) \quad \text{et} \quad x \in \mu y + Ay + (\lambda-\mu)y \\
\Longleftrightarrow\quad & y \in D(A) \quad \text{et} \quad x + (\mu-\lambda)y \in \mu y + Ay \\
\Longrightarrow\quad & y \in D(A) \quad \text{et} \quad x + (\mu-\lambda)R_\lambda x \in \mu y + Ay \\
\Longrightarrow\quad & y = R_\mu(x(\mu-\lambda)R_\lambda x)
\end{aligned}$$

Donc

$$R_\lambda \subset R_\mu(I(\mu-\lambda)R_\lambda) \ .$$

Les deux membres étant partout définis, on a l'égalité.

Définition 4. *Un opérateur vérifiant les hypothèses de la proposition 3 sera appelé un générateur. Pour un tel opérateur A, la famille $(R_\lambda = (\lambda I+A)^{-1})_{\lambda>0}$ sera appelée la famille résolvante engendrée.*

Proposition 5. *Pour que A soit un générateur, il faut et il suffit que A^{-1} soit un générateur. Si R_λ et S_λ sont les familles résolvantes engendrées par A et A^{-1}, on a*

$$S = \frac{1}{\lambda}(I-R_{\frac{1}{\lambda}}\tfrac{1}{\lambda}) \ .$$

Supposons que A soit un générateur et posons

$$R_\lambda = (\lambda I+A)^{-1} \ .$$

$$
\begin{aligned}
& [x,y] \in (\lambda I+A^{-1})^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & [y,x] \in \lambda I + A^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & [y,x-\lambda y] \in A^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & [x-\lambda y,y] \in A \\
\Longleftrightarrow\ & \lambda y \in \lambda A(x-\lambda y) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in (I+\lambda A)(x-\lambda y) \\
\Longleftrightarrow\ & x - \lambda y = R_{\frac{1}{\lambda}} \frac{x}{\lambda} \\
\Longleftrightarrow\ & y = \frac{1}{\lambda}(x-R_{\frac{1}{\lambda}} \frac{x}{\lambda})
\end{aligned}
$$

ce qui démontre le résultat cherché.

<u>Dans la suite</u> A <u>désigne un générateur et on note</u>

$$R_\lambda = (\lambda I+A)^{-1} \quad (= \frac{1}{\lambda}(I-S_{\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{\lambda}))$$

$$S_\lambda = (\lambda I+A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - R_{\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{\lambda})$$

<u>Proposition 6.</u> $D(A) = \operatorname{Im} R_\lambda \qquad \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im} S_\lambda$

$$\overline{\operatorname{Im} A} = \{x;\ \lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda x = 0\} \qquad \overline{D(A)} = \{x;\ \lim_{\lambda\to\infty} R_\lambda \lambda x = x\} .$$

La première partie de la proposition est évidente.

Pour la seconde partie, il suffit de montrer la première égalité, la deuxième s'en déduisant par passage de A à A^{-1} et de R_λ à S_λ .

Soit x appartenant à $\operatorname{Im} A$. x appartient à $\operatorname{Im} S_1$ et il existe donc y tel que

$$x = y - R_1 y$$

$$
\begin{aligned}
|\lambda R_\lambda x| &\leq \lambda |R_\lambda x - R_1 y| + \lambda |R_1 y| \\
&\leq \lambda |R_\lambda x - R_\lambda (y+(\lambda-1)R_1 y)| + \lambda |R_1 y| \\
&\leq (k+1)\ \lambda |R_1 y|
\end{aligned}
$$

où k est la constante de Lipschitz associée à $(\lambda R_\lambda)_{\lambda>0}$.

Il en résulte que

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda x = 0 .$$

La famille $(\lambda R_\lambda)_{\lambda>0}$ étant uniformément lipschitzienne, la même propriété a lieu si

$$x \in \overline{\mathrm{Im}\, A}$$

Réciproquement, soit x tel que

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda x = 0 .$$

Alors

$$\lim_{\lambda\to 0} S_{\frac{1}{\lambda}} \frac{x}{\lambda} = x$$

et donc

$$x \in \overline{\mathrm{Im}\, A} .$$

<u>Proposition 7</u>. $\qquad A \supset s - \lim_{\lambda\to 0} S_\lambda$.

Supposons que

$$\lambda(x-R_\lambda \lambda x) \longrightarrow y \quad \text{quand} \quad \lambda \longrightarrow \infty .$$

En particulier

$$R_\lambda \lambda x \longrightarrow x \quad \text{quand} \quad \lambda \longrightarrow \infty .$$

Or

$$\lambda(x-R_\lambda \lambda x) = (\tfrac{1}{\lambda}I + A^{-1})^{-1} x$$

soit

$$x \in (I+A^{-1}\lambda)(I-R_\lambda \lambda)x = x - R_\lambda \lambda x + A^{-1}[\lambda(x-R_\lambda \lambda x)] .$$

C'est-à-dire

$$R_\lambda \lambda x \in A^{-1}[\lambda(x-R_\lambda \lambda x)]$$

ou

$$[R_\lambda \lambda x,\ \lambda(x-R_\lambda \lambda x)] \in A .$$

A étant fermé

$$[x,y] \in A .$$

<u>Proposition 8.</u> $\forall\ \lambda,\mu>0$: $\qquad (\mu I+R_\lambda)^{-1} = \frac{1}{\mu}(I-R_{\lambda+\frac{1}{\mu}}\frac{1}{\mu})$

$$(\mu I+R_\lambda^{-1})^{-1} = R_{\lambda+\mu} .$$

<u>En particulier</u> R_λ <u>est un générateur</u>.

Supposons $[x,y] \in (\mu I+R_\lambda)^{-1}$,

alors

$$x = \mu y + R_\lambda y$$

ou

$$\frac{x}{\mu} = y + \frac{1}{\mu} R_\lambda y .$$

Appliquons $R_{\lambda+\frac{1}{\mu}}$ aux deux membres et utilisons l'équation résolvante :

$$R_{\lambda+\frac{1}{\mu}} \frac{x}{\mu} = R_\lambda y = x - \mu y$$

soit
$$y = \frac{1}{\mu}(x-R_{\lambda+\frac{1}{\mu}} \frac{x}{\mu}) .$$

Réciproquement, si l'égalité précédente est vérifiée

$$\frac{x}{\mu} - \frac{1}{\mu}R_{\lambda+\frac{1}{\mu}} \frac{x}{\mu} = y .$$

Appliquons R_λ . On obtient

$$R_\lambda y = R_{\lambda+\frac{1}{\mu}} \frac{x}{\mu} = x - \mu y$$

soit

$$x = \mu y + R_\lambda y .$$

D'après la proposition 5

$$(\mu I+R_\lambda^{-1})^{-1} = \frac{1}{\mu} \left[I - (\mu I - \mu R_{\lambda+\mu}\mu)\frac{1}{\mu}\right] = R_{\lambda+\mu} .$$

<u>Corollaire 9. Si</u> A <u>est m-accrétif, il en est de même de</u> R_λ^{-1} <u>et de</u> S_λ .

Pour R_λ^{-1} ceci découle de la deuxième égalité de la proposition 8. D'autre part, d'après la première égalité appliquée à S_λ

$$(\mu I+S_\lambda)^{-1} = \frac{1}{\mu}(I - S_{\lambda+\frac{1}{\mu}} \frac{1}{\mu}) = \frac{1}{\mu}\left[I - \frac{\mu}{\lambda\mu+1} (I - R_{\frac{\mu}{\lambda\mu+1}} \frac{\mu}{\lambda\mu+1}) \frac{1}{\mu}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\lambda\mu}{\lambda\mu+1} I + \frac{\mu}{\lambda\mu+1} R_{\frac{\mu}{\lambda\mu+1}} \frac{1}{\lambda\mu+1}\right]$$

d'où on deduit que

$$\mu(\mu I+S_\lambda)^{-1} \text{ est une contraction partout définie.}$$

<u>Autres notations</u>.

A étant un opérateur m-accrétif, on note habituellement

$$J_\lambda^A = (I+\lambda A)^{-1} \quad \text{et} \quad A_\lambda = \frac{I - J_\lambda^A}{\lambda} .$$

Alors, en reprenant les notations précédentes on a

$$J_\lambda^A = R_{\frac{1}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad A_\lambda = S_\lambda .$$

En particulier

$$J_\lambda^A = J_\mu^A\left(\frac{\mu}{\lambda}I + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} J_\lambda^A\right)$$

et

$$A_\lambda = A_\mu(I + (\mu-\lambda)A_\lambda) .$$

D'autre part

$$A_\lambda = (\lambda I+A^{-1})^{-1} .$$

Enfin d'après la proposition 8 (deuxième égalité) appliquée à la famille résolvante $(A_\lambda)_{\lambda>o}$, on a

$$A_\lambda \text{ est m-accrétif et } (A_\lambda)_\mu = A_{\lambda+\mu} .$$

-:-:-:-:-:-

-:-:-:-

-:-

Exposé de Colette PICARD

FAMILLE D'OPERATEURS ϕ-ACCRETIFS ET EQUATIONS D'EVOLUTION.

Nous généralisons à une famille d'opérateurs ϕ-accrétifs d'un espace normé les principaux résultats de l'article de M.G. CRANDALL et A. PAZY : Nonlinear evolution equations in Banach spaces, [2], qui correspond au cas où $\phi(x) = \|x\|$.

1. Préliminaires.

Dans ce paragraphe nous rappelons et complétons des notions introduites dans [3].

1) Opérateurs ϕ-accrétifs et produit $(.,.)_{s,\phi}$

Soit X un espace vectoriel topologique réel et ϕ une application de X dans $\mathbb{R}$ convexe et continue.

Un opérateur A de X est ϕ-*accrétif* si :

$(\forall [x_i,y_i]\ ,\ i=1,2)\ (\forall \lambda>0)\ ,\quad \phi(x_1-x_2+\lambda(y_1-y_2)) \geqslant \phi(x_1-x_2)$ ce qui est équivalent à

$(\forall [x_i,y_i]\ ,\ i=1,2)\ (\exists\ w \in \partial\phi(x_1-x_2))\ :\ (y_1-y_2,w)_{s,\phi} \geqslant 0$

en notant

$$(Y,X)_{s,\phi} = \sup\{(Y,w)\ ;\ w \in \partial\phi(X)\} = \inf_{\lambda>0} \frac{\phi(X+\lambda Y) - \phi(X)}{\lambda}.$$

Remarquons que l'application $(X,Y) \longmapsto (Y,X)_{s,\phi}$ est semi-continue supérieurement et que l'application $Y \longmapsto (Y,X)_{s,\phi}$ est sous linéaire et continue puisque :

$$|(Y,X)_{s,\phi}| \leqslant \|Y\| \sup\{\|w\|\ ;\ w \in \partial\phi(X)\}$$

et que $\partial\phi$ est localement borné.

2) <u>Espaces ϕ-complets.</u>

Etant donnés un espace vectoriel topologique réel X et une application convexe continue ϕ de X dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\phi(0) = 0$, on dit que X est un espace <u>ϕ-complet</u> si toute suite (x_n) de X telle que $\lim\limits_{n,m\to\infty} \phi(x_n - x_m) = 0$ converge.

<u>Lemme 1.1.</u> Soit X un espace normé ϕ-complet. On pose $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$. Alors :

1) (x_n) converge ssi $\lim\limits_{n,m\to\infty} \phi(x_n - x_m) = 0$
2) Si $\phi(x) = \phi(-x) = 0$, alors $x = 0$
3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi(-x_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
4) Soit $B \subset X$. Si $\phi(B)$ et $\tilde{\phi}(B)$ sont bornés, alors B est borné.

Démontrons seulement 4) (Pour 1), 2) et 3), cf. [3]) :
Si B n'était pas borné, il existerait une suite (x_n) de B telle que $\|x_n\| \to +\infty$.
On aurait :

$$\phi\left(\frac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|}}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\|x_n\|}} \phi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

De même

$$\tilde{\phi}\left(\frac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Donc $\dfrac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|}} \to 0$, c'est-à-dire $\sqrt{\|x_n\|} \to 0$, ce qui est contradictoire.

3) <u>Domaine généralisé d'un opérateur ϕ-accrétif.</u>

Soit X un espace normé ϕ-complet et A un opérateur ϕ-accrétif de X .
On pose $\tilde{D}(A) = \{x \in \bigcap\limits_{o<\lambda<\lambda_o} R(I+\lambda A) \ ; \ \sup\limits_{o<\lambda<\lambda_o} (\phi(A_\lambda x) + \tilde{\phi}(A_\lambda x)) < +\infty\}$.

<u>Lemme 1.2.</u> $\tilde{D}(A) \subset \overline{D(A)}$ et si de plus ϕ est positivement homogène $D(A) \subset \tilde{D}(A)$.

En effet, soit $x \in \tilde{D}(A)$. On a $\lambda A_\lambda x = x - \mathfrak{J}_\lambda x$. Or d'après le lemme 1.1.4), $(A_\lambda x)$ est borné. Donc $\mathfrak{J}_\lambda x \xrightarrow[\lambda\to o]{} x$ et par suite $x \in \overline{D(A)}$. Si de plus ϕ est positivement homogène, on a pour $x \in D(A)$:

$$\phi(A_\lambda x) = \phi\left(\frac{x - \mathfrak{J}_\lambda x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} \phi(\mathfrak{J}_\lambda(x+\lambda y) - \mathfrak{J}_\lambda x) \leqslant \phi(y) \ , \text{ pour tout } \ y \in Ax .$$

De même avec $\tilde{\phi}$. Donc $x \in \tilde{D}(A)$.

Remarque. Dans le cas où X est un espace de Banach et où $\phi(x) = \|x\|$, $\tilde{D}(A)$ est le domaine $\hat{D}(A)$ introduit par Grandall (cf. [1]).

2. Opérateur associé à une famille d'opérateurs ϕ-accrétifs.

Dans toute la suite, on suppose que X est un espace normé ϕ-complet tel que ϕ soit lipschitzienne.

Théorème 2.1. Soit $(A(t))_{t\in[OT]}$ une famille d'opérateurs de X vérifiant :

H.1. $\forall\, t \in [OT]$, $A(t)$ est ϕ-accrétif

H.2. $\overline{D(A(t))} = \overline{D}$ est indépendant de t

H.3. Il existe $\lambda_o > 0$ tel que pour tout $t \in [OT]$, $\bigcap\limits_{0<\lambda<\lambda_o} R(I+\lambda A(t)) \supset \overline{D}$

H.4. Il existe $f : [OT] \longrightarrow X$ continue et $L : [0\ +\infty[\longrightarrow [0\ +\infty[$ croissante telles que, pour tout $\lambda \in\,]0\ \lambda_o[$, $t,\tau \in [OT]$, $x \in \overline{D}$,

$\|J_\lambda(t)x - J_\lambda(\tau)x\| \leqslant \lambda\|f(t) - f(\tau)\| . L(\phi(x))$.

(Remarquons que cette hypothèse entraîne que

$\|A_\lambda(t)x\| \leqslant \|A_\lambda(\tau)x\| + \|f(t) - f(\tau)\|\, L(\phi(x))$, donc que $\tilde{D}(A(t)) = \tilde{D}$ est indépendant de t).

Alors 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} J_{\frac{t-s}{n}}\left(s+i\frac{t-s}{n}\right)x = U(t,s)x$ existe pour $x \in \overline{\tilde{D}}$ et $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

2) $U(t,s)\, U(s,r)x = U(t,r)x$, pour tout $x \in \overline{\tilde{D}}$, $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

3) $\phi(U(t,s)x - U(t,s)y) \leqslant \phi(x-y)$, pour tout $x, y \in \overline{\tilde{D}}$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

4) Soit $\rho(r) = \sup\{\|f(t) - f(\tau)\| \,;\, 0 \leqslant t,\tau \leqslant T\,,\ |t-\tau| \leqslant r\}$.

Alors pour tout $x \in \tilde{D}$, il existe des constantes K_1 et K_2 telles que :

a) $\phi(U(t,s)x - U(\tau,s)x) \leqslant K_1\, \rho(|t-\tau|)$, pour $0 \leqslant s \leqslant t, \tau \leqslant T$.

b) $\phi(U(s+\tau,s)x - U(r+\tau,r)x) \leqslant K_2 \rho(|s-r|)$, pour $0 \leqslant s, r \leqslant s+\tau$, $r+\tau \leqslant T$.

5) Pour tout $x \in \tilde{D}$, l'application $(t,s) \longmapsto U(t,s)x$ est continue sur le triangle $\{(t,s) \,;\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$.

6) $\phi\left(\prod_{1}^{n} \mathcal{J}_{\frac{t-s}{n}}\left(s+i\,\frac{t-s}{n}\right)x - U(t,s)x\right) \leq K(t-s)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \rho\left(\frac{t-s}{n}\right)^{1/4}\right)$ pour $x \in \widetilde{D}$, où K est une constante dépendant de T , λ_o , $\|x\|$ et $M(x)$.

<u>Démonstration</u>. Appelons c la constante de lipschitz de ϕ et posons $M(x) = \sup\limits_{[OT]} \sup\limits_{o<\lambda<\lambda_o} \|A_\lambda(t)x\|$; d'après H.4, $M(x) < +\infty$ pour $x \in \widetilde{D}$.

<u>Lemme</u>. <u>Quels que soient</u> $x \in \widetilde{D}$, $\ell \geq 0$, $0 \leq s_i \leq T$ $(i=1,\dots,\ell)$, $\lambda \in]0\lambda_o[$, <u>on a</u> $\phi(\prod_{i=1}^{\ell} \mathcal{J}_\lambda(s_i)x-x) \leq c\,\lambda\,\ell\,M(x)$.

En effet, soit $x \in \widetilde{D}$. On a

$$\begin{aligned}
\phi\left(\prod_{i=1}^{\ell} \mathcal{J}_\lambda(s_i)x-x\right) &= \phi\left(\prod_{i=1}^{\ell} \mathcal{J}_\lambda(s_i)x - \mathcal{J}_\lambda(s_\ell)x - \lambda A_\lambda(s_\ell)x\right) \\
&\leq \phi\left(\prod_{i=1}^{\ell} \mathcal{J}_\lambda(s_i)x - \mathcal{J}_\lambda(s_\ell)x\right) + c\lambda\|A_\lambda(s_\ell)x\| \\
&\leq \phi\left(\prod_{i=1}^{\ell-1} \mathcal{J}_\lambda(s_i)x-x\right) + c\lambda\|A_\lambda(s_\ell)x\| .
\end{aligned}$$

Par conséquent $\phi(\prod_{i=1}^{\ell} \mathcal{J}_\lambda(s_i)x-x) \leq c\lambda \sum_{i=1}^{\ell} \|A_\lambda(s_i)x\| \leq c\,\lambda\,\ell\,M(x)$; et le lemme est démontré.

Soient $x \in \widetilde{D}$, $s \in [OT[$ et $0<\mu<\lambda<\lambda_o$. Posons $p_{\lambda,k} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{J}_\lambda(s+i\lambda)x$ et $a_{k,\ell} = \phi(p_{\lambda,k} - p_{\mu,\ell})$. On a

$$\begin{aligned}
a_{k,\ell} &= \phi(p_{\lambda,k} - \mathcal{J}_\mu(s+k\lambda)p_{\mu,\ell-1} + \mathcal{J}_\mu(s+k\lambda)p_{\mu,\ell-1} - p_{\mu,\ell}) \\
&\leq \phi(p_{\lambda,k} - \mathcal{J}_\mu(s+k\lambda)p_{\mu,\ell-1}) + c\|\mathcal{J}_\mu(s+k\lambda)p_{\mu,\ell-1} - p_{\mu,\ell}\| \\
&\leq \phi\left(\mathcal{J}_\mu(s+k\lambda)\left(\frac{\mu}{\lambda}\,p_{\lambda,k-1} + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}p_{\lambda,k}\right) - \mathcal{J}_\mu(s+k\lambda)p_{\mu,\ell-1}\right) + b_{k,\ell}
\end{aligned}$$

, en utilisant l'équation résolvante et en posant

$$b_{k,\ell} = c\|\mathcal{J}_\mu(s+k\lambda)p_{\mu,\ell-1} - p_{\mu,\ell}\| .$$

d'où

$$a_{k,\ell} \leqslant \phi(\frac{\mu}{\lambda} p_{\lambda,k-1} + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} p_{\lambda,k} - p_{\mu,\ell-1}) + b_{k,\ell}$$

$$a_{k,\ell} \leqslant \frac{\mu}{\lambda} a_{k-1,\ell-1} + \frac{\lambda-\mu}{\lambda} a_{k,\ell-1} + b_{k,\ell} \text{ , car } \phi \text{ est convexe.}$$

Ainsi $a_{k,\ell}$ vérifie la relation de récurrence 2.17 de [2] et on a les mêmes estimations :

$a_{\ell,o} \leqslant c\,\lambda\,\ell\,M(x)$ et $a_{o,\ell} \leqslant c\,\mu\,\ell\,M(x)$ d'après le lemme précédent, et d'après H.4 :

$$b_{k,\ell} \leqslant c\mu \,\|f(s+k\lambda) - f(s+\ell\mu)\|\, L(\phi(p_{\mu,\ell-1}))$$

$$\leqslant c\mu \,\|f(s+k\lambda) - f(s+\ell\mu)\|\, L(c\mu(\ell-1)\, M(x) + c\|x\|) \;.$$

Par conséquent, on a

$$(*) \quad a_{m,n} \leqslant K\{[(n\mu-m\lambda)^2+n\mu(\lambda-\mu)]^{1/2} + [(n\mu-m\lambda)^2+m\lambda(\lambda-\mu)]^{1/2} + n\mu\rho(|n\mu-m\lambda|) + n\mu\;\rho((\lambda-\mu)^{1/4}) + n^2\mu^2(\lambda-\mu)^{1/2}\} \;.$$

où K dépend de T ; λ_o , $\|x\|$ et $M(x)$.

En changeant ϕ en $\tilde{\phi}$, on obtient la même majoration pour $\phi(p_{\mu,n}-p_{\lambda,m})$.

Il en résulte que pour toute suite (μ_n) de $\mathbb{R}_+$; telle que $n\,\mu_n$ tende vers t , $p_{\mu_n,n}$ converge vers $U(s+t,s)x$. En particulier :

$$U(s+t,s)x = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{J}_{\frac{t-s}{n}}(s+i\,\frac{t-s}{n})x \;.$$

On en déduit ensuite facilement que cette limite existe pour $x \in \overline{\tilde{D}}$.

Les démonstrations de 2) ; 3) et 4)a) sont analogues à celles de [2].

Démontrons 4)b) : on a

$$\phi(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{J}_\lambda(s+i\lambda)x - \prod_{i=1}^{n} J_\lambda(r+i\lambda)x) \leqslant \phi(\mathcal{J}_\lambda(s+n\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{J}_\lambda(s+i\lambda)x - \mathcal{J}_\lambda(s+n\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{J}_\lambda(r+i\lambda)x)$$

$$+ c\|\mathcal{J}_\lambda(s+n\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{J}_\lambda(r+i\lambda)x - \mathcal{J}_\lambda(r+n\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{J}_\lambda(r+i\lambda)x\|$$

$$\leqslant \phi\Big(\prod_{i=1}^{n} J_\lambda(s+i\lambda)x - \prod_{i=1}^{n} J_\lambda(r+i\lambda)x\Big) \leqslant \phi\Big(\prod_{i=1}^{n-1} J_\lambda(s+i\lambda)x - \prod_{i=1}^{n-1} J_\lambda(r+i\lambda)x\Big) + K\lambda\,\rho(|s-r|) \ ,$$

en utilisant H.4 et le lemme, K étant une constante dépendant de x . On en déduit que $\phi\big(\prod_{i=1}^{n} J_\lambda(s+i\lambda)x - \prod_{i=1}^{n} J_\lambda(r+i\lambda)x\big) \leqslant K\,\lambda\,n\,\rho(|s-r|)$. En prenant $\lambda = \frac{\tau}{n}$ et en faisant tendre n vers l'infini on obtient 4)b).

Démontrons 5) : Soient (s_n) une suite de $[OT]$ qui tend vers s et τ_n une suite positive telle que $0 \leqslant s_n+\tau_n \leqslant T$ et qui tend vers τ . On a

$$\phi\Big(\frac{1}{2}(U(s_n+\tau_n,s_n) - U(s+\tau,s))\Big)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\phi(U(s_n+\tau_n,s_n)x - U(s_n+\tau,s_n)x) + \frac{1}{2}\phi(U(s_n+\tau,s_n)x - U(s+\tau,s)x)$$

$$\leqslant K(\rho(|\tau_n-\tau|) + \rho(|s_n-s|)) \ ,$$

et 5) en résulte.

Démontrons 6) : En prenant $\lambda = \frac{t-s}{m}$ et $\mu = \frac{t-s}{n}$ et en faisant tendre n vers l'infini dans (*) on obtient ce résultat.

<u>Remarques</u>. Si on suppose de plus ϕ positivement homogène, les conclusions de ce théorème sont vraies sur $\overline{D}$ et la condition H.4 peut être remplacée par :

il existe $f : [OT] \to X$ continue et à variation bornée et il existe $L : [0\ +\infty[\to [0\ +\infty[$ croissante telles que pour tout $\lambda \in]0\lambda_o[$, $t,\tau \in [OT]$, $x \in \overline{D}$,

$$\|J_\lambda(t)x - J_\lambda(\tau)x\| \leqslant \lambda\,\|f(t)-f(\tau)\|\,.\,L(\phi(x))\big(1 + \sup_{\lambda\in]0\lambda_o[}\|A_\lambda(\tau)x\|\big) \ .$$

Les conclusions de ce théorème sont encore vraies si on remplace $\widetilde{D}$ par :

$$\widetilde{D}\ U\{x \in \bigcap_{t\in[OT]} D(A(t)) \ ; \ \sup_{t\in[OT]} (\inf\{\|y\|;\ y\in A(t)x\}) < +\infty\} \ .$$

Ce théorème généralise le théorème de [4] qui correspond au cas particulier où $A(t)$ est indépendant de t .

Application.

Proposition 2.2. Soit $(A^k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs ϕ-accrétifs vérifiant H.1, H.2, H.3 et H.4 avec λ_o, T, f et L indépendants de k . On note $D_k = D(A^k(0))$ et $J_\lambda^k(t) = (I+\lambda A^k(t))^{-1}$.

On suppose que $\lim_{k\to\infty} J_\lambda^k(t)x = J_\lambda^o(t)x$ pour $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{D}_k$, $\lambda \in]0\lambda_o[$ et $t\in [0T]$.

Alors $\lim_{k\to\infty} U^k(t,s)x = U^o(t,s)x$ pour $x \in \overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{D}_k}$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$.

Démonstration. Soit $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{D}_k$. On a

$$3\phi(\tfrac{1}{3}(U(t,s)x - U^k(t,s)x)) \leqslant \phi(U(t,s)x - p^o_{\frac{t-s}{n}}(s)x) + \phi(p^o_{\frac{t-s}{n}}(s)x - p^k_{\frac{t-s}{n},n}(s)x)$$
$$+ \phi(p^k_{\frac{t-s}{n},n}(s)x - U^k(s)x) .$$

D'une part : $M^k(x) \leqslant \sup_\lambda \|A_\lambda^k(0)x\| + K'$, d'après H.4, où K' dépend de f, L et x .
Comme $A_\lambda^k(0)x \xrightarrow[k\to\infty]{} A_\lambda^o(0)x$, on a

$$M^k(x) \leqslant \sup_\lambda \|A_\lambda^o(0)x\| + K'' , \quad \text{expression qui est finie car } x \in \widetilde{D}_o .$$

Par conséquent, d'après le 6) du théorème,

$\phi(U(t,s)x - p^o_{\frac{t-s}{n}}(s)x) + \phi(p^k_{\frac{t-s}{n}}(s)x - U^k(t,s)x)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini, uniformément par rapport à k .

D'autre part, il résulte de l'inégalité :

$$2\phi(\tfrac{1}{2}(J_\lambda^k(\tau)J_\lambda^k(\tau')x - J_\lambda^o(\tau)J_\lambda^o(\tau')x) \leqslant \phi(J_\lambda^k(\tau')x - J_\lambda^o(\tau')x) + \phi(J_\lambda^k(\tau)J_\lambda^o(\tau')x$$
$$- J_\lambda^o(\tau)J_\lambda^o(\tau')x)$$

et de l'hypothèse, que pour tout n ,

$$\phi(p^o_{\frac{t-s}{n},n}(s)x - p^k_{\frac{t-s}{n},n}(s)x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 .$$

Ainsi $\lim_{k\to\infty} \phi(U(t,s)x - U^k(t,s)x) = 0$.

Il en est de même avec $\tilde{\phi}$. D'où le résultat pour $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \tilde{D}_k$, et ensuite pour $x \in \overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \tilde{D}_k}$.

3. Equations d'évolution.

On considère le problème

$$(E) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u \ni 0 \\ u(s) = x \, . \end{cases}$$

On dit que u est *solution forte de* (E) *sur* $[sT]$ si $u \in \mathcal{C}([sT];X)$, u est absolument continue sur tout compact de $]sT[$ et u est p.p. dérivable sur $]sT[$.

Théorème 3.1. On suppose que $A(t)$ *vérifie H.1, H.2, H.3 et H.4. Soit* $x \in \widetilde{D}$. *Alors, si* u *est solution forte de* (E) *sur* $[sT]$, $U(t,s)x = u(t)$ *pour tout* $t \in [s,T]$.

Démonstration. Il suffit de le montrer dans le cas où u est absolument continue sur $[sT]$ grâce à la continuité de U et de u , et on peut supposer $s = 0$. Pour tout $\varepsilon>0$, on définit u_ε par :

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{[\frac{t}{\varepsilon}]} J_\varepsilon(i\varepsilon)x \, , & t \in [OT] \\ x \, , & t<0 \, . \end{cases}$$

Soit $g_\varepsilon(t) = -u'(t) + \dfrac{u(t) - u(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$ p.p.t $< T$, en prenant $u(t) = x$ pour $t<0$.

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad u(t) &= J_\varepsilon(t)(u(t) - \varepsilon u'(t)) \, , \quad \text{p.p.t} \\ &= J_\varepsilon(t)(u(t-\varepsilon) + \varepsilon g_\varepsilon(t)) \, , \quad \text{p.p.t.} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\phi(u_\varepsilon(t)-u(t)) = \phi(J_\varepsilon([\tfrac{t}{\varepsilon}]\varepsilon)\ u_\varepsilon(t-\varepsilon) - J_\varepsilon(t)(u(t-\varepsilon)+\varepsilon g_\varepsilon(t))$$

$$\leq \phi(J_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t-\varepsilon) - J_\varepsilon(t)(u(t-\varepsilon)+\varepsilon g_\varepsilon(t))) + c\|J_\varepsilon([\tfrac{t}{\varepsilon}]\varepsilon)u_\varepsilon(t-\varepsilon)-J_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t-\varepsilon)\|$$

$$\leq \phi(u_\varepsilon(t-\varepsilon)-u(t-\varepsilon)-\varepsilon g_\varepsilon(t)) + c\varepsilon K\rho(t-[\tfrac{t}{\varepsilon}]\varepsilon)\ , \text{ d'après H.4}$$

$$\leq \phi(u_\varepsilon(t-\varepsilon)-u(t-\varepsilon)) + c\varepsilon\|g_\varepsilon(t)\| + c\varepsilon K\rho(t-[\tfrac{t}{\varepsilon}]\varepsilon)\ .$$

En intégrant sur $[ot]$, on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \phi(u_\varepsilon(\tau)-u(\tau))\ d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \phi(u_\varepsilon(\tau-\varepsilon)-u(\tau-\varepsilon))\ d\tau + c\int_0^t \|g_\varepsilon(\tau)\|\, d\tau + c\ K\ t\ \rho(\varepsilon)$$

donc $\lim\limits_{\varepsilon\searrow o} \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t \phi(u_\varepsilon(\tau)-u(\tau))\ d\tau = 0$.

Or $\phi(\frac{1}{4}(U(t,0)x-u(t))) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi(\frac{1}{4}(U(t,0)x-u(t)))\ d\tau$

$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t \phi(U(t,0)x-U(\tau,0)x)\ d\tau + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t \phi(U(\tau,0)x-u_\varepsilon(\tau)\ d\tau$$

$$+ \frac{1}{4\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t \phi(u_\varepsilon(\tau)-u(\tau))\ d\tau + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t \phi(u(\tau)-u(t))\ d\tau.$$

Le second membre de cette inégalité peut être rendu arbitrairement petit pour ε assez petit, en utilisant les conclusions 4)a) et 6) du théorème.

Donc $\phi(\frac{1}{4}(U(t,0)x-u(t))) = 0$.

De même $\tilde{\phi}(\frac{1}{4}(U(t,0)x-u(t))) = 0$.

Par conséquent $U(t,0)x = u(t)$, pour tout $t \in [OT]$.

<u>Théorème 3.2. Soit</u> $A(t)$ <u>vérifiant H.1, H.2, H.3 et H.4. Soit</u> $t_o \in [OT]$. <u>On suppose que</u> :

(i) $A(t_o)$ <u>est fermé</u>

(ii) <u>Quel que soit</u> $[x_o,y_o] \in A(t_o)$; <u>il existe</u> $\delta>0$ <u>et une application</u> y <u>de</u> $[t_o\ t_o+\delta]$ <u>dans</u> X <u>continue telle que</u> $y(t_o) = y_o$ <u>et</u> $[x_o,y(t)] \in A(t)$ <u>pour tout</u> $t \in [t_o,t_o+\delta]$.

Soit $x \in \tilde{D}$ et $s \in [Ot_o[$. On suppose que $\frac{d}{dt}U(t_o,0)x$ existe.

Alors $\left[U(t_o,s)x \;,\; -\frac{d}{dt}U(t_o,s)x\right] \in A(t_o)$.

Démonstration. Soient $t_o \in [0T[$, $[x_o,y_o] \in A(t_o)$. D'après ii) il existe un $\delta>0$ et y .

Soit $z \in \widetilde{D}$. On a

$$\frac{p_{\lambda,k-1}(t_o)z - p_{\lambda,k}(t_o)z}{\lambda} \in A(t_o+k\lambda)\; p_{\lambda,k}(t_o)z$$

et $y(t_o+k\lambda) \in A(t_o+k\lambda)x_o$; pour $k\lambda<\delta$.

Donc, comme $A(t_o+k\lambda)$ est ϕ-accrétif, il existe $w \in \partial\phi\,(x_o-p_{\lambda,k}(t_o)z)$ tel que

$$(y(t_o+k\lambda) - \frac{p_{\lambda,\cancel{k-1}} - p_{\lambda,k}}{\lambda},\; w) \geq 0$$

c'est-à-dire $(y(t_o+k\lambda),w) \geq (\frac{p_{\lambda,k-1} - p_{\lambda,k}}{\lambda},w) \geq \frac{1}{\lambda}(\phi(x_o-p_{\lambda,k}) - \phi(x_o-p_{\lambda,k-1}))$.

En prenant $k=1,2,\dots,[\frac{t}{\lambda}]$, où $t<\delta$, et en ajoutant, on obtient

$$\lambda \sum_{1}^{[\frac{t}{\lambda}]} (y(t_o+k\lambda)\;,\; x_o-p_{\lambda,k})_{s,\phi} \geq \phi(x_o-p_{\lambda,[\frac{t}{\lambda}]}) - \phi(x_o-z)\;.$$

Posons $f_\lambda(\tau) = (y(t_o+k\lambda),x_o-p_{\lambda,k})_{s,\phi}$, pour $\tau \in [k\lambda,(k+1)\lambda[$.

L'inégalité précédente s'écrit alors :

$$\int_0^{[\frac{t}{\lambda}]\lambda} f_\lambda(\tau)\,d\tau \geq \phi(x_o-p_{\lambda,[\frac{t}{\lambda}]}) - \phi(x_o-z)\;.$$

Or $\limsup_{\lambda\searrow 0} f_\lambda(\tau) \leq (y(t_o+\tau),x_o-U(t_o+\tau,t_o)z)_{s,\phi}$.

Donc $\frac{1}{t}\int_0^t (y(t_o+\tau),x_o-U(t_o+\tau,t_o)z)_{s,\phi}\,d\tau \geq \frac{1}{t}\left[\phi(x_o-U(t_o+t,t_o)z)-\phi(x_o-z)\right]$

$$\geq (\frac{z-U(t_o+t,t_o)z}{t},w)\;,\;\text{où}\;\; w \in \partial\phi\,(x_o-z)\;.$$

En faisant tendre t vers 0^+ on obtient :

$$(y(t_o),x_o-z)_{s,\phi} \geq (-\frac{d^+U(t,t_o)z}{dt}\Big|_{t=t_o},w)\;.$$

Soient $x \in \tilde{D}$ et $s \in [0t_o[$. Prenons $z = U(t_o,0)x$. L'inégalité précédente s'écrit

$$(y(t_o),x_o-U(t_o,s)x)_{s,\phi} \geqslant (-\frac{d^+ U(t_o,s)x}{dt},w)$$

pour tout $w \in \partial\phi(x_o-z)$ et pour tout $[x_o,y_o] \in A(t_o)$.

Donc $A(t_o) \cup \{[U(t_o,s)x, -\frac{d}{dt} U(t_o,s)x]\}$ est ϕ-accrétif. Comme $A(t_o)$ est fermé, on en déduit comme dans [2] que $[U(t_o,s)x, -\frac{d}{dt} U(t_o,s)x] \in A(t_o)$.

<u>Références</u>.

[1] M.G. CRANDALL - A generalised domain for semigroup generators. Israel J. Math.

[2] M.G. CRANDALL and A. PAZY - Non linear evolution equations in Banach spaces. Israel J. Math., 11, 1972, p.57-94.

[3] C. PICARD - Thèse de 3ème cycle, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay.

[4] C. PICARD - Opérateurs ϕ-accrétifs et génération de semi-groupes non linéaires. C.R.A.S., 275, 1972, p.639-641.

-:-:-:-:-:-

-:-:-:-

-:-

Exposé de Alain DAMLAMIAN

LE PROBLEME DE STEFAN AVEC CONTRAINTES AU BORD ET LES INTEGRANDES CONVEXES

I - Le problème de Stefan.

1°) Position du Problème.

On considère un corps dans un volume Ω donné sous une ou plusieurs phases définies, sous certaines conditions simplificatrices, uniquement par la température, qui vérifie alors une équation aux dérivées partielles du type équation de la chaleur dans chaque phase :

$$\alpha(u)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\,(k(u)\operatorname{grad} u) = f \quad (u \text{ est la température}).$$

Les fonctions $\alpha(u)$ et $k(u)$ sont des fonctions positives et continues sauf aux valeurs de changement de phase, où elles admettent des discontinuités de première espèce. Pour simplifier la discussion ultérieure, nous supposerons qu'il y a deux phases seulement et donc une seule température de changement de phase $u = \sigma$.

La condition de transfert sur l'interface $S = \{u(x,t) = \sigma\}$ séparant les deux phases s'écrit alors

$$b\,\cos(n,t) - \sum_{i=1}^{m} \left[k(u)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]_{u=\sigma^-}^{u=\sigma^+} \cos(n,x_i) = 0$$

où n est la normale à la surface S (orientation arbitraire mais fixe) et où b est une constante positive donnée du problème.

Les conditions latérales sont du type $u(x,t) = g(x,t)$ sur $\partial\Omega$ (i.e. température imposée au bord), et la condition initiale est aussi donnée $u(x,0) = u_0(x)$ sur Ω .

On voit donc qu'il s'agit d'un problème à frontière libre avec coefficients réguliers par morceaux sur $Q = \Omega \times]0,T[$.

L'existence d'une solution forte de ce problème est une question toujours ouverte.

Nous allons le réduire à une expression affaiblie suivant Ladyszenskaïa- Uralceva-Solonnikov [5] et H. Brezis [3] puis démontrer l'existence d'une solution en ce sens faible.

2°) Expression affaiblie.

Soient $h(r) = \int_0^r k(s)\,ds$ et $v(x,t) = h(u(x,t))$

h est croissante de classe C^1 par morceaux donc h^{-1} aussi (car k est strictement positive).

Comme $\frac{\partial u}{\partial t} = (h^{-1})' \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{k\circ h^{-1}\circ v} \frac{\partial v}{\partial t}$

et $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{k\circ h^{-1}\circ v} \frac{\partial u}{\partial x_i}$, les équations vérifiées par v sont donc

$\frac{\alpha\circ h^{-1}\circ v}{k\circ h^{-1}\circ v} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = f$ à l'intérieur de chaque phase

$$v(x,t) = g_1(x,t) \quad \text{sur} \quad \Sigma = \partial\Omega \ ]0,T[, v(x,0) = v_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega \ .$$

L'interface S est définie par $v(x,t) = \tau$ où $\tau = h(\sigma)$ et sur S on a

$$b \cos(n,t) - \sum_1^m \left[\frac{\partial v}{\partial x_i} \cos(n,x_i)\right]_{v=\tau^-}^{v=\tau^+} = 0 \ .$$

Soit alors γ la fonction définie par $\gamma(0) = 0$ et $\gamma'(r) = \frac{\alpha\circ h^{-1}}{k\circ h^{-1}}(r) + b\,\delta_\tau$ dérivé distribution;

γ est donc croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sauf en $r = \tau$ où γ a un saut de valeur b .

L'équation que satisfait v s'écrit dans $Q\setminus S$

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma(v) - \Delta v = f \ .$$

Soit $V = \{w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \ ; \ \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(Q) \ ; \ w(x,T) = 0\}$.

Multiplions cette équation par $w \in V$ et intégrons par parties sur Q , on obtient (en supposant que v est suffisamment régulière) :

$$\int_Q \gamma(v)_t w = -\int_\Omega \gamma(v_o)\ w(x,0) + \int_S [\gamma(v)\ w(x,t)]_S \cos(n,t) - \int_Q \gamma(v) w_t$$

où $[\gamma(v)\ w(x,t)]_S$ indique le saut de la fonction sur la surface S allant dans le sens des v croissants,

$$-\int_Q \Delta v\ w = \int_Q \text{grad } v \text{ grad } w - \int_o^T \int_{S(t)} [w(x,t)(\text{grad } v.n)]_S$$

d'où

$$\int_Q -\gamma(v) w_t + \text{grad } v.\text{grad } w - \int_\Omega \gamma(v_o)\ w(x,0) + \int_S [\gamma(v) \cos(x,t) - (\text{grad } v.n)]\ S\ w(x,t)$$
$$= \int_Q f,w\ .$$

La condition de transfert et la discontinuité égale à b de γ en $v = \tau$, permettant de réduire cette relation à

$$(1) \qquad \int_Q -\gamma(v) w_t + \text{grad } v.\text{grad } w - \int_\Omega \gamma(v_o)\ w(x,0) = \int_Q f.w \quad \forall\, w \in V$$

à laquelle on ajoute

$$(2) \qquad v(x,t) = g_1(x,t) \quad \text{sur } \Sigma \quad \text{(au sens p.p.)}.$$

Les équations (1) et (2) sont appelées expression affaiblie du problème de Stefan à deux phases. Il est clair qu'un problème à n phases se ramenerait de même à une expression affaiblie du même type.

Soit enfin $\beta = \gamma^{-1}$ (dans ce cas-ci, β est croissante continue avec un plat pour la valeur prise τ) et si on note $u = \gamma(v)$ (ce n'est pas ici la température comme au début de ce paragraphe), u satisfait l'équation

$$\beta(u(x,t)) = g(x,t) \quad \text{sur } \Sigma \quad \text{et} \quad \forall\, w \in V\ ,$$

$$\int_Q - u\, w_t + \text{grad}\, \beta(u) w - \int_\Omega \gamma(v_o)\, w(x,0) = \int_Q f.w \quad .$$

Cette équation s'écrit alors dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\beta(u) = f \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{pour presque tout} \quad t \quad \text{de } (0,T)$$

$$\beta(u) = g \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

$$u(x,0) = \gamma(v_o) \quad .$$

Le paragraphe suivant a pour but de ramener, par des méthodes d'analyqe convexe, la résolution du problème faible à un résultat d'évolution abstrait déjà connu (Watanabe [7] Attouch-Damlamian [1], [2]). On a donc existence et unicité de la solution faible.

Le problème de montrer que l'ensemble $\{u(x,t) = \tau\}$ est une véritable surface de séparation reste ouvert. En ce sens on n'a donc pas vraiment résolu le problème à frontière libre.

II - Résolution du problème faible.

1°) Rappel.

Rappelons le résultat abstrait suivant :

Théorème 1. Soient H un espace de Hilbert réel, et ϕ^t une famille de fonctions convexe sci propre de H dans $]-\infty,+\infty]$ vérifiant

H.1) $D(\phi(t,.)) = D$ est indépendant de t

H.2) $\forall\, r>0\ \exists\ a_r \in W^{1,1}(0,T)$ et $C_r \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$x \in D \;,\; |x| \leq r \;,\; 0\leq s,t\leq T \implies |\phi(t,x)-\phi(s,x)| \leq (a_r(t)-a_r(s))(\phi(t,x)+C_r) \;.$$

Alors $\forall\ u_o \in \bar{D}$ et $f \in L^2(0,T;H)$ il existe u unique solution forte de $\frac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t)$, $u(0) = u_o$. De plus $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$ et $\forall\ t>0$, $u(t) \in D$.

Enfin si $u_o \in D$, $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$.

Nous allons montrer que le Theorème ci-dessus permet de résoudre le problème de Stefan faible, en montrant que celui-ci se met sous la forme $\frac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t)$.

2°) Le Théorème principal.

Théorème 2. Soit β un graphe maximal monotone tel que $D(\beta) = R(\beta) = \mathbb{R}$, de primitive j ; Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$.

Pour $u_o \in H^{-1}(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et

$$g \in W^{1,1}(0,T;L^\infty(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

il existe u unique solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\beta(u) \ni f \quad \text{sur} \quad \Omega \times]0,T[$$

$$\beta(u) \ni g \quad \text{p.p. sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[$$

$$u(x,0) = u_o(x) \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) .$$

De plus u satisfait

$$u \in \mathscr{C}(0,T;H^{-1}(\Omega)) \quad \sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

$$\sqrt{t}\ \beta(u(x,t)) \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) .$$

En outre pour tout $t>0$, $u(.,t) \in L^1(\Omega)$ et $j(u(.,t)) \in L^1(\Omega)$.

3°) Démonstration.

On écrit l'équation sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(\beta u - g(t,.)) \ni f + \Delta g(t,.) \quad \text{sur} \quad Q$$

$$\beta(u) \ni g \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

$$u(0) = u_o .$$

$f + \Delta g$ appartient bien à $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et on est amené à considérer la famille de fonctionnelles suivante sur $H^{-1}(\Omega)$

$$\phi^t(u) = \left.\begin{array}{ll} \int_\Omega j(u) - g(t,.)u & \text{si } u \in L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{array}\right\}$$

La famille ϕ^t vérifie bien les hypothèses du Théorème 1 dès que g satisfait aux hypothèses du Théorème 2 :

on vérifie aisément que $D(\phi^t) = \begin{cases} u \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega) \\ j(u) \in L^1(\Omega) \end{cases}$

est indépendant de t, et dense dans $H^{-1}(\Omega)$.

D'autre part $|\phi^t(u)-\phi^s(a)| \leq \int_\Omega |g(t,x)-g(s,x)||u(x)|\, dx$

$\leq |a(t)-a(s)| \int_\Omega |u(x)|\, dx$ où $a \in W^{1,1}(0,T)$

car $g \in W^{1,1}(0,T;L^\infty(\Omega))$; on va voir dans la suite que pour $\frac{\alpha}{2} = \max|g(t)|_{L^\infty}$ on a $\frac{\alpha}{2}|u|_{L^1} \leq \mu(\Omega)C_\alpha + \phi^t(u)$.

Par suite $\quad |\phi^t u-\phi^s u| \leq \frac{2}{\alpha}|a(t)-a(s)|(\phi^t(u)+C_\alpha\, \mu(\Omega))$.

Il nous reste à démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème 3</u>. Soient $g \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ et $\phi(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(u) - g.u & \text{si } u \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon}. \end{cases}$

Alors ϕ est convexe sci propre sur $H^{-1}(\Omega)$ et

$$\partial\phi(u) = \{ - \Delta w;\ w \in H_0^1(\Omega),\ w + g \in \beta(u) \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

a) ϕ <u>est convexe sci propre sur</u> $H^{-1}(\Omega)$.

ϕ est convexe et propre de manière évidente.

Comme j est coercive $\forall\, \alpha>0$, $\exists\, C_\alpha \quad \alpha|\Omega| \leq C_\alpha + j(\Omega)$

Soient $u_n \in L^1 \cap H^{-1}$ telles que $\phi(u_n) \leq \lambda$. On en déduit que $\alpha|u_n|_{L^1} \leq C_\alpha\, \mu(\Omega) + \lambda - \int_\Omega g\, u_n$. Soit $\alpha = 2|g|_\infty$ on obtient alors

$$\frac{\alpha}{2}|u_n|_{L^1} \leq C_\alpha\, \mu(\Omega) + \lambda \quad \text{et par suite} \quad \int_\Omega j(u_n) \leq 2\lambda + C_\alpha\, \mu(\Omega).$$

(En particulier, on a bien $\frac{\alpha}{2}|u|_{L^1} \leq C_\alpha + \phi(u)$ pour $\frac{\alpha}{2} = |g|_\infty$, ce qui a été utilisé plus haut).

Comme $\int_\Omega g\, u_n \longrightarrow \int_\Omega g\, u$ car $g \in L^\infty \cap H^1$ et $u_n \longrightarrow u$ dans H^{-1} on peut conclure grâce au lemme suivant :

<u>Lemme 1</u> (H. Brezis). Si j est coervice sur $\mathbb{R}$, la fonction

$u \in L^1(\Omega) \longmapsto \int_\Omega j(u) = \psi(u)$ est convexe faiblement sci propre et faiblement inf-compacte.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que ψ est convexe et sci par Fatou, donc faiblement sci. De plus on peut supposer sans perte de généralité que j est à valeurs positives ou nulle, car j est coercive. On a alors

$$\alpha\int_B |u| \leq C_\alpha \text{ mes } B + \int_B j(u) \leq C_\alpha \text{ mes } B + \psi(u) \ .$$

Faisant successivement $B = \Omega$, puis B quelconque on voit que l'ensemble $\{u \in L^1(\Omega),\ \psi(u) \leq \lambda\}$ est borné dans L^1 et équicontinu, donc faiblement relativement compact dans L^1 par le critère de Dunford et Pettis.

b) <u>Détermination de</u> ϕ^* :

Quitte à rajouter une constante à u, on peut supposer que j atteint son minimum en 0 et de manière plus précise $j \geq j(0) = 0$. On met en dualité $H^{-1}(\Omega)$ et $H^1_o(\Omega)$ selon la dualité usuelle ($-\Delta$ étant l'application de dualité de H^1_o sur H^{-1}) et l'on détermine la fonction convexe conjuguée de ϕ :

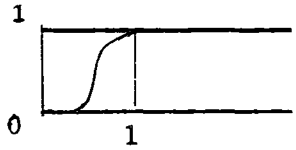
$$v \in H^1_o(\Omega) \quad \phi^*(v) = \sup_{u \in H^{-1} \cap L^1} \langle u,v\rangle_{H^{-1},H^1_o} - \int_\Omega (j(u)-u-g)\, dx \ .$$

<u>Lemme 2</u>. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ (muni de la norme $|.|_{L^1} + |.|_{H^{-1}}$). De plus pour u dans $L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ on peut trouver une suite u_n de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans L^1 et presque partout, $u_n \rightharpoonup u$ dans $H^{-1}(\Omega)$ (faible) et telle que $j(u_n)$ converge vers $j(u)$ presque partout ainsi que $\psi(u_n)$ converge vers $\psi(u)$.

<u>Démonstration</u> : Il est connu que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ pour $\partial\Omega$ assez régulier (propriété du cône par exemple). Pour obtenir le résultat ci-dessus on ne peut opérer directement par carte locale et convolution. On commence par multiplier u par une suite θ_n de fonctions de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ à support dans Ω à valeur dans $[0,1]$, croissantes et tendant vers 1 sur Ω, choisie en sorte que $u\theta_n$ tende vers u dans

L^1 , presque partout et que $\psi(u\theta_n)$ tend vers $\psi(u)$, $j(u\theta_n)$ tend vers $j(u)$ p.p.

Pour avoir la convergence faible de $u\theta_n$ vers u on construit la suite θ_n par cartes locales. Après localisation on se ramène à $x = (y,x') \in \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ et à $\theta_n(y,x') = \theta(n,x')$ où θ est du type suivant



On a alors $|\text{grad } \theta_n| = n|\theta'(n\,x')|$.

Puis on vérifie que pour v dans $H^1_o(\Omega)$, $\theta_n v$ converge vers v dans H^1_o . A cet effet il suffit de montrer que $\int |v.\text{grad}(1-\theta_n)|^2 \, dx$ tend vers zéro. Ceci s'exprime encore sous la forme suivante que l'on majore comme suit

$$\int dy \int_o^{1/n} |v(y,x')|^2 |\text{grad } \theta_n(y,x')|^2 dx' = \int dy \int_o^{1/n} dx' \; n^2 |\theta'(nx')|^2 \Big(\int_o^{x'} |\text{grad } v(y,t)|^2 dt\Big)^2$$

$$\leq \int dy \int_o^{1/n} dx' \; n^2 |\theta'(nx')|^2 \; x' \int_o^{x'} |\text{grad } v(y,t)|^2 \, dt$$

$$\leq \int dy \int_o^{1/n} dx' \; n^2 |\theta'(nx')|^2 x' \int_o^{1/n} |\text{grad } v(y,t)|^2 \, dt$$

$$= \int_o^1 \xi \, d\xi |\theta'(\xi)|^2 \times \int_o^{1/n} dt \int dy |\text{grad } v(y,t)|^2 \; .$$

La première intégrale en ξ est fixe, la seconde intégrale double tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini car $|\text{grad } v(y,t)|^2$ est intégrable en (y,t) .

Grâce à ce résultat on peut supposer que u est dans $H^{-1} \cap L^1(\Omega)$ et nulle sur un voisinage de $\partial\Omega$. On effectue alors une convolution (globalement) par une suite régularisante : $u * \rho_n$. Il est clair que pour n assez grand, $u * \rho_n$ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et converge vers u dans L^1 , H^{-1}, et p. partout. Par convexité on a $j(u * \rho_n) \leq j(u) * \rho_n$ ce qui combiné au fait que j est sci montre que presque partout

$$j(u) \leq \underline{\lim}\, j(u * \rho_n) \leq \overline{\lim}\, j(u * \rho_n) \leq \overline{\lim}\, (j(u) * \rho_n) = j(u)$$

d'où $j(u) = \lim j(u * \rho_n)$ p.p. .

Quant à $\psi(u*\rho_n)$ on a par semi continuité inférieure $\psi(u) \leq \underline{\lim}\, \psi(u*\rho_n)$, ce qui termine la démonstration si $\psi(u) = +\infty$. Si $\psi(u) < +\infty$ on a par convexité

$$\overline{\lim}\, \psi(u*\rho_n) \leq \overline{\lim} \int j(u)*\rho_n) = \psi(u) \quad \text{d'où le résultat.}$$

On a alors le corollaire suivant :

<u>Corollaire</u>. $$\phi^*(v) = \sup_{u\in L^\infty(\Omega)} \langle u,v\rangle_{H^{-1},H^1_o} - \psi(u) + \int_\Omega u.g \ .$$

<u>Démonstration</u> : Evidente car $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$.
Mais pour $u \in L^\infty(\Omega)$ on a $\langle u,v\rangle_{H^{-1},H^1_o} = \int_\Omega u.v$ donc

$$\phi^*(v) = \sup_{u \in L^\infty(\Omega)} \int_\Omega u(v+g) - j(u)$$

et grâce à un résultat de R.T. Rockafellar [6] on a le résultat suivant :

<u>Proposition</u>. $$\phi^*(v) = \int_\Omega j^*(v+g)\, dx \ .$$

c) <u>Détermination de</u> $\partial\phi$:

Comme $-\Delta$ est l'application de dualité de H^1_o dans H^{-1} pour la dualité que nous avons choisie, on a l'équivalence suivante

$$u \in H^{-1}(\Omega)\ ,\quad v \in H^1_o(\Omega) \quad \text{et} \quad -\Delta v \in \partial\phi(u) \iff \phi(u) + \phi^*(v) = \langle u,v\rangle_{H^{-1},H^1_o}$$

c'est à dire que pour $u \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $-\Delta v \in \partial\phi(u)$ si et seulement si

$$\int_\Omega j(u) + \int_\Omega j^*(v+g) - \int_\Omega g.u = \langle u,v\rangle_{H^{-1},H^1_o} \ .$$

Soit u_n la suite définie dans le lemme 2 convergeant vers u , on a

$$\int_\Omega j(u_n) + j^*(v+g) - u_n(v+g) \quad \text{tend vers} \quad 0 = \int_\Omega (j(u)+\phi^*(v+g)-g.u)\, dx - \langle u,v\rangle \ .$$

Or l'intégrande est positif ou nul presque partout donc (quitte à prendre une sous-suite) il y a convergence vers zéro presque partout, c'est-à-dire p.p. x

$$j(u(x)+j^*(v(x)+g(x)-u(x)(v(x)+g(x)) = 0$$

car $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ et $j(u_n(x)) \longrightarrow j(u(x)$ p.p. Donc

$$v(x) + g(x) \in \partial j(u(x) = \beta(u(x)) \quad \text{p.p. } x \ .$$

Réciproquement si $v(x) + g(x) \in \beta(u(x))$ p.p. x , soit $w \in D(\phi)$. On a p.p.

$$j(w(x)) \geq j(u(x)) + (v(x)+g(x))(w(x)-u(x))$$

c'est-à-dire $\quad j(w(x)) - (g(x)(w(x)-u(x)) \geq j(u(x)) + (v(x))(w(x)-u(x))$.

On en déduit que $\phi(w) \geq \phi(u) + \langle v,w-u\rangle_{H_o^1,H^{-1}} = \phi(u) + \langle -\Delta v,w-u\rangle_{H^{-1},H^{-1}}$

et que $j(u)$ est intégrable en faisant $F = w-u$, $h = j(w) - g(w-u)$ dans le lemme suivant :

<u>Lemme</u> (cf. H. Brezis [4]). Soient $F \in H^{-1} \cap L^1(\Omega)$ et $v \in H_o^1(\Omega)$ et $h \in L^1(\Omega)$. On suppose que k est mesurable et que p.p. sur Ω on a $h \geq k \geq F.V$.
Alors k est intégrable et $\int_\Omega k \, dx \geq \langle F,v\rangle_{H^{-1},H_o^1}$.

<u>Démonstration</u> : Soit $V_n = \begin{cases} n & \text{si } V \geq n \\ V & \text{si } |V| \leq n \\ -n & \text{si } V \leq -n \end{cases}$. On sait que $V_n \longrightarrow V$ dans H_o^1 .

Soient $h_n = h \dfrac{V_n}{V}$, $k_n = k \dfrac{V_n}{V}$. On a donc p.p. x

$$h_n \geq k_n \geq F.V_n$$

h_n tend vers h presque partout, $k_n \longrightarrow k$ aussi et $0 \leq \int_\Omega h_n - k_n \leq \int_\Omega h_n - F.V_n$
comme $\int_\Omega F.V_n = \langle F,V_n\rangle_{H^{-1},H_o^1} \longrightarrow \langle F,V\rangle_{H^{-1},H_o^1}$ on obtient par le lemme de Fatou que
$0 \leq \int_\Omega h - k \leq \int_\Omega h - \langle F,V\rangle_{H^{-1},H_o^1}$ d'où le résultat.

Ceci achève la démonstration du théorème 3 et donc du théorème 2.

Bibliographie.

[1] H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN - Exposés du Séminaire "Semi groupes et équations d'évolution (Prof. Deny, Benilan, Hirsch) Orsay 1973-74.

[2] H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN - Problèmes d'évolution dans les espaces de Hilbert et applications (à paraître).

[3] H. BREZIS - On some degenerate non linear parabolic equations. Non linear Functional Analysis p.28-38. Proc. Symp. Pure Math. Vol.18 A.M.S. (1970).

[4] H. BREZIS - Monotonicity Methods in Hilbert Spaces and some applications to Non linear Partial differential equations. Contributions to non linear functional Analysis, Zarantonello Ed. Academic Press (1971).

[5] O. LADYŽENSKAYA, V. SOLONNIKOV, N. URAL'CEVA - Linear and quasi linear equations of parabolic type, "Nanka", Moscow (1967). English translation. Transl. Math. Monographs, vol. 23 A.M.S. Providence RI (1968).

[6] R.T. ROCKAFELLAR - Integrals which are convex functionals.
(I) Pacific J. Math. 24 (1966) p.525-539.
(II) Pacific J. Math. 39 (1971) p.439-469.

[7] J. WATANABE - On certain non linear evolution equations.
University of Electro communications, Tokyo.

-:-:-:-:-:-

-:-:-:-

-:-

Exposé de Hedy ATTOUCH

METHODE DU PRODUIT SCALAIRE VARIABLE ET EQUATIONS D'EVOLUTION

Nous nous proposons d'établir un théorème d'existence et d'unicité pour les équations d'évolution de la forme

$$\frac{du}{dt}(t) + A(t,u(t)) \ni f(t) \; ; \; u(0) = u_o$$

où $A(t,.)$ est le sous-différentiel dans un espace de Hilbert H, pour un produit scalaire $<.,.>_t$ (dépendant de t), d'une fonctionnelle $\phi(t,.)$ convexe, semi-continue inférieurement et propre. Nous donnerons ensuite quelques exemples d'application de cette méthode.

Les résultats que l'on va montrer sont dus à H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN ([3]) et reprenant les techniques développées par ces mêmes auteurs en collaboration avec P. BENILAN et C. PICARD dans [2] ;

Dans tout ce qui suit H désigne un espace de Hilbert réel, dont on notera la norme $|.|$ et le produit scalaire associé $<.,.>$.

Définition 1. Soit $(|.|_t)_{t\in[0,T]}$ une famille de normes hilbertiennes sur H ; pour une telle famille de normes, on définit les conditions suivantes de dépendance par rapport à t :

(NU) Les normes $(|.|)_{t\in[0,T]}$ sont uniformément équivalentes.

(NT) Il existe $b \in W^{1,2}(0,T)$, croissante telle que

$$\forall\, s,t \in [0,T] \;,\; 0\leq s\leq t\leq T \;,\; \forall x \in H \;,\; |x|_t^2 \leq |x|_s^2 + (b(t)-b(s))|x|_s^2$$

$(\widetilde{NT})$ Il existe $b \in W^{1,2}(0,T)$, telle que

$$\forall\, s,t \in [0,T] \;,\; \forall\, x,y \in H \quad |\langle x,y\rangle_t - \langle x,y\rangle_s| \leq |b(t)-b(s)|.|x|_s.|y|_s \;.$$

On dira que la famille de normes $(|.|)_{t\in[0,T]}$ satisfait à la condition (N) si les conditions (NU) et (NT) sont vérifiées, à la condition (N_1) si en outre H est séparable, et à la condition (N^*) si (NU) et $(\widetilde{NT})$ sont vérifiées.

<u>Définition 2</u>. Soit $(\phi^t)_{t\in[0,T]}$ une famille de fonctionnelles convexes, semi-continue inférieurement (s.c.i.), propres ($\not\equiv +\infty$) de H dans $]-\infty,+\infty]$; on dira que $(\phi^t)_{t\in[0,T]}$ satisfait à la condition (T) , (resp. (T^*)) , si :

(T) Il existe a croissante, $a \in W^{1,2}(0,T)$ et $c_1,\ c_2 \geq 0$ tels que :

$$\forall\, s,t \in [0,T] \;,\; 0\leq s\leq t\leq T \;,\; \forall\, x \in H \quad \phi(t,x) \leq \phi(s,x) + (a(t)-a(s))(\phi(s,x)+c_1|x|+c_2).$$

(T^*) Il existe a croissante, $a \in W^{1,2}(0,T)$ et $c_1,\ c_2 \geq 0$ tels que :

$$\forall\, s,t \in [0,T] \;,\; 0\leq s\leq t\leq T \;,\; \forall\, x \in H, \phi^*(s,x) \leq \phi^*(t,x) + (a(t)-a(s))(\phi^*(t,x)+c_1|x|+c_2).$$

<u>Théorème 1</u>. Soit H un espace muni d'une famille de normes hilbertiennes réelles $(|.|_t)_{t\in[0,T]}$, satisfaisant à la condition (N_1), (resp. (N^*)). Soit $(\phi^t)_{t\in[0,T]}$ une famille de fonctionnelles convexes, s.c.i., propres de H dans $]-\infty,+\infty]$, satisfaisant à la condition (T) (resp. (T^*), où $\phi^*(t,.)$ désigne la fonctionnelle conjuguée de $\phi(t,.)$ pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle_t$) . On désigne par A^t le sous-différentiel de ϕ^t dans H muni du produit scalaire $\langle .,.\rangle_t$.

Etant donné u_o dans $\overline{D(\phi(0,.))}$ et f dans $L^2(0,T;H)$ il existe u unique solution de

$$\text{(I)} \qquad \frac{du}{dt} + A(t,u(t)) \ni f(t) \;;\; u(0) = u_o$$

telle que $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$; de plus $\forall\, t > 0 \quad u(t) \in D(\phi^t)$.

Si $u_o \in D(\phi(0,.))$ alors $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$.

Remarque. C'est ce Théorème 1 qui sera utile dans les applications ; en fait nous allons montrer un théorème abstrait plus général (mais plus difficilement utilisable dans les applications) où les conditions de dépendance des fonctionnelles $\phi^t(.)$ par rapport à t portent sur les $\phi^t_\lambda(.) = \phi^t(.)\ \nabla \frac{1}{2\lambda}\ |.|^2$ (où ∇ désigne l'inf. convolution) ; plus précisément $\phi^t_\lambda(x) = \phi^t(J^t_\lambda x) + \frac{1}{2\lambda}\ |x-J^t_\lambda x|^2$ où $J^t_\lambda = (I+\lambda\partial\phi^t)^{-1}$. On rappelle que $\phi^t_\lambda(.)$ est Fréchet différentiable et que $\partial\phi^t_\lambda(.) = A^t_\lambda(.)$ où $A^t_\lambda x = \frac{1}{\lambda}\ (x-J^t_\lambda x)$.

Théorème 2. Soit H un espace de Hilbert muni d'une famille de normes hilbertiennes réelles $(|.|_t)_{t\in[0,T]}$ satisfaisant à la condition (N_1) .

Soit $(\phi^t)_{t\in[0,T]}$ une famille de fonctionnelles convexes, s.c.i., propres de H dans $]-\infty,+\infty]$ vérifiant :

H_1) Il existe a et b constantes ≥ 0 , telles que, pour presque tout t de $]0,T[$

$$\phi(t,.) + a|.| + b \geq 0 .$$

H_2) Pour tout x de H et tout $\lambda > 0$, l'application $t \longmapsto \phi^t_\lambda(t,x)$ est à variation positive absolument continue, et il existe h, c dans $L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$ (indépendants de λ et x) tels que, pour presque tout t de $]0,T[$,

$$\frac{d}{dt}\ \phi^t_\lambda(x) \leq h(t)\ \left[\lambda|A^t_\lambda x|^2+|x|.|A^t_\lambda x|+|A^t_\lambda x|+|x|+c(t)\right] .$$

Alors les conclusions du Théorème 1 sont vérifiées.

Démonstration : A] L'unicité de la solution du problème (I) repose sur le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u>. Soit H un espace muni d'une famille de normes hilbertiennes $(<.>_t)_{t\in[0,T]}$ satisfaisant à la condition (N) ; pour tout $u \in W^{1,1}(0,T;H)$, la fonction $t \longrightarrow |u(t)|_t^2$ est à variation positive absolument continue et

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_t^2 - 2<\frac{du}{dt},u(t)>_t \leqslant \frac{db}{dt}(t).|u(t)|_t^2 \quad \text{p.p.} t \in]0,T[\ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$

$$|u(t)|_t^2 - |u(s)|_s^2 = |u(t)|_t^2 - |u(t)|_s^2 + |u(t)|_s^2 - |u(s)|_s^2$$

$$(1) \qquad |u(t)|_t^2 - |u(s)|_s^2 \leqslant (b(t)-b(s))|u(t)|_s^2 + <u(t)-u(s),u(t)+u(s)>_s$$

$$\leqslant c\left[(b(t)-b(s))+|u(t)-u(s)|\right]$$

et donc $t \longrightarrow |u(t)|_t^2$ est à variation positive absolument continue.
Divisant (1) par $(t-s)$ et faisant tendre t vers s :

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}|u(t)|_t^2 \leqslant 2 <\frac{du}{dt},u(t)>_t + \frac{db}{dt}(t).|u(t)|_t^2 \quad \text{p.p.} t \in]0,T[\ .$$

. Reprenons à présent la démonstration de l'unicité de la solution de (I) :

Soient u et v solutions de (I), on a donc

$$\frac{du}{dt} + A^t u(t) \ni f(t) \ ; \ \frac{dv}{dt} + A^t v(t) \ni f(t) \ ; \ u(0) = v(0) = u_0 \ .$$

On en déduit, tenant compte de la monotonie de A^t dans H muni de $<.,.>_t$

$$<\frac{d}{dt}(u-v),u-v>_t \leqslant 0 \quad \text{d'où d'après (2)}$$

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}|u(t)-v(t)|_t^2 \leqslant \frac{db}{dt} . |u(t)-v(t)|_t^2 \quad \text{p.p.} t \in]0,T[\ .$$

Or si h est une fonction à variation positive absolument continue on a

$$\forall\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \qquad h(t) - h(s) \leqslant \int_s^t \frac{dh}{d\tau}\, d\tau \,.$$

Multipliant (3) par $e^{-b(t)}$ on obtient que $\frac{d}{dt}[e^{-b(t)}|u(t)-v(t)|_t^2] \leqslant 0$; or la fonction $t \longrightarrow e^{-b(t)}|u(t)-v(t)|_t^2$ est à variation positive absolument continue et donc $\forall\ t \geqslant 0$ $\quad e^{-b(t)}|u(t)-v(t)|_t^2 \leqslant 0$ ce qui entraîne que $u(t) = v(t)$ pour tout t de $[0,T]$.

B| Pour montrer l'existence d'une solution on approche (I) par (I_λ)

$$(I_\lambda) \qquad \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda(t,u_\lambda(t)) = f(t) \ ; \qquad u_\lambda(0) = u_o \ ,$$

l'exsitence de la solution u_λ du problème (I_λ) découlant du lemme 2 et de la remarque 1 :

<u>Lemme 2</u>. Soit $(|\cdot|_t)_{t \in [0,T]}$ une famille de normes hilbertiennes réelles sur H , uniformément équivalentes et vérifiant :

(i) Il existe $b \in \mathscr{C}([0,T];\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall\ x \in H \ , \quad \forall\ s,t \in [0,T] \qquad \big||x|_b^2 - |x|_s^2\big| \leqslant |b(t)-b(s)|\,.\,|x|_s^2 \ .$$

Soit d'autre part $(\phi^t)_{t \in [0,T]}$ une famille de fonctionnelles convexes, s.c.i. propres de H dans $]-\infty,+\infty]$ et vérifiant :

(ii) Il existe $c \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$, $d \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ telles que

$$\text{p.p.} t \in \,]0,T[\qquad \phi(t,.) + c(t)|.| + d(t) \geqslant 0 \ .$$

(iii) Il existe $\lambda_o > 0$ tel que, pour tout x de H , $t \longrightarrow \phi^t_{\lambda_o} x$ soit à variation positive continue.

Alors $\forall\, x \in H$, $\forall\ \lambda > 0$, $t \longrightarrow J_\lambda^t x$ appartient à $L^2(0,T;H)$; si de plus c et d appartiennent à $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^+)$ $t \longrightarrow J_\lambda^t x$ appartient à $L^\infty(0,T;H)$.

<u>Démonstration du Lemme 2</u> : Montrons tout d'abord que ϕ_{λ_o} vérifie une minoration du même type que ϕ :

$$(4)\quad \phi_{\lambda_o}(t,x) = \phi(t,J^t_{\lambda_o}x) + \frac{1}{2\lambda_o}|x-J^t_{\lambda_o}x|^2 \geq \frac{1}{4\lambda}|J^t_{\lambda_o}x|^2 - c(t)|J^t_{\lambda_o}x| - d(t) - \frac{1}{2\lambda_o}|x|^2$$

et donc

$$(4\text{ bis})\qquad |J^t_{\lambda_o}x| \leq g_{\lambda_o,x}(t) \quad \text{p.p.} t \in]0,T[\quad \text{où} \quad g_{\lambda_o,x} \in L^2(0,T) .$$

Soit x_o fixé dans H ;

$$|J^t_{\lambda_o}x| \leq |J^t_{\lambda_o}x_o| + |x-x_o|$$

$$|J^t_{\lambda_o}x| \leq g_{\lambda_o,x_o}(t) + |x| + |x_o| .$$

Or $\phi_{\lambda_o}(t,x) \geq \phi(t,J^t_{\lambda_o}x) \geq -c(t)|J^t_{\lambda_o}x| - d(t)$ et donc

$$\phi_{\lambda_o}(t,x) \geq -c(t)|x| - c(t)[|x_o|+g_{\lambda_o,x_o}(t)] - d(t) .$$

Il existe donc $c_{\lambda_o} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$, $d_{\lambda_o} \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ tels que

$$(5)\qquad \text{p.p.t.} \in]0,T[\qquad \phi_{\lambda_o}(t,.) + c_{\lambda_o}(t)|.| + d_{\lambda_o}(t) \geq 0 .$$

Considérons à présent l'espace $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$ muni du produit scalaire

$$<f,g> = \int_o^T <f(t),g(t)>_t \, dt .$$

Remarquons que si f et g sont mesurables, l'application $t \rightarrow <f(t),g(t)>_t$ est mesurable puisque $<f(t),g(t)>_t = \frac{1}{4}(|f(t)+g(t)|_t^2-|f(t)-g(t)|_t^2)$ et que l'application $(t,x) \mapsto |x|_t^2$ vérifie les conditions de Caratheodory ; (par la suite on notera $\lambda_o = \lambda$).

Soit Φ_λ la fonctionnelle sur $\mathcal{H}$ définie par

$$\Phi_\lambda(u) = \left| \begin{array}{ll} \int_0^T \phi_\lambda(t,u(t))\,dt & \text{si} \quad t \mapsto \phi_\lambda(t,u(t)) \in L^1(0,T) \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{array} \right.$$

Cette fonctionnelle est convexe, s.c.i. d'après (5), propre d'après l'hypothèse (iii) ; elle est partout définie :

. Pour tout u mesurable de $[0,T]$ dans H, $t \to \phi_\lambda(t,u(t))$ est mesurable.

. Des inégalités

$$\frac{1}{\lambda}\, |x-y|_t^2 \geq \langle A_\lambda^t x - A_\lambda^t y, x-y\rangle_t \geq \phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(t,y) - \langle A_\lambda^t y, x-y\rangle_t \geq 0$$

on obtient que $|\phi_\lambda(t,u(t))| \leq |\phi_\lambda(t,x_o)| + \frac{1}{\lambda}|u(t)-x_o|_t^2 + |A_\lambda^t x_o|.|u(t)-x_o|$

et tenant compte de (4 bis) on obtient bien que ϕ_λ est partout définie, et donc continue.

Introduisons d'autre part l'opérateur $\mathcal{A}_\lambda$ dans $\mathcal{H}$:

$$f = \mathcal{A}_\lambda u \Longleftrightarrow \quad \text{p.p.}\, t \in]0,T[\quad f(t) = A_\lambda(t,u(t)) \ .$$

L'opérateur $\mathcal{A}_\lambda$ est évident monotone dans $\mathcal{H}$; montrons que $\mathcal{A}_\lambda$ n'est autre que le sous-différentiel de Φ_λ dans $\mathcal{H}$.

Si l'on montre que $\mathcal{A}_\lambda \supset \partial\Phi_\lambda$ on en déduira, sachant que $\partial\Phi_\lambda$ est maximal monotone, l'égalité $A_\lambda = \partial\Phi_\lambda$; soit donc $f \in \partial\Phi_\lambda u$; par définition

$$\forall\, v \in \mathcal{H} \qquad \Phi_\lambda(v) - \Phi_\lambda(u) \geq \langle f, v-u\rangle_{\mathcal{H}} .$$

Soit s un point de Lebesgue commun aux applications : $\tau \to \phi_\lambda(\tau,u(\tau))$, $\tau \to f(\tau)$, $\tau \to |f(\tau)|^2$ et $\tau \to \langle f(\tau),u(\tau)\rangle_\tau$; étant donnés x dans H et t tel que $0 \leq s < t \leq T$ on pose :

$$v(\tau) = \left| \begin{array}{ll} x & \tau \in [s,t] \\ u(\tau) & \tau \notin [s,t] \end{array} \right. .$$

Reportant dans l'inégalité précédente et divisant par $t-s$ on obtient

(6) $$\frac{1}{t-s}\int_s^t \left[\phi_\lambda(\tau,x) - \phi_\lambda(\tau,u(\tau)) - \langle f(\tau),x-u(\tau)\rangle_\tau\right] d\tau \geq 0 .$$

Or $\tau \to \phi_\lambda(\tau,x)$ est à variation positive continue ; il existe donc a continue croissante telle que $\forall\ 0 \leq s \leq t \leq T \quad \phi_\lambda(t,x) \leq \phi_\lambda(s,x) + a(t)-a(s)$; l'application $t \to \phi_\lambda(t,x) - a(t)$ est donc décroissante et remarquant que $\phi_\lambda(t,x) = [\phi_\lambda(t,x)-a(t)] + a(t)$ on obtient

$$\frac{1}{t-s}\int_s^t \phi_\lambda(\tau,x)\, d\tau \leq \phi_\lambda(s,x) - a(s) + \frac{1}{t-s}\int_s^t a(\tau)\, d\tau .$$

D'autre part, tenant compte de l'hypothèse (i)

$$-\frac{1}{t-s}\int_s^t \langle f(\tau),x\rangle_\tau\, d\tau \leq -\left\langle\frac{1}{t-s}\int_s^t f(\tau)\, d\tau,x\right\rangle_s + \frac{1}{(t-s)}\int_s^t (b(\tau)-b(s))\left[|f(\tau)|_s^2+|x|_s^2\right]d\tau$$

Revenant à (6) et faisant tendre t vers s, on obtient à la limite

$$\phi_\lambda(s,x) - \phi_\lambda(s,u(s)) - \langle f(s),x-u(s)\rangle_s \geq 0 \quad \forall x \in H ;$$

on a donc $\quad f(t) = A_\lambda(t,u(t))$ p.p.$t \in]0,T[$ et $A_\lambda = \partial\Phi_\lambda$;
or Φ_λ étant partout définie, $\partial\Phi_\lambda$ est partout définie et donc pour tout u dans $L^2(0,T;H)$ l'application $t \to A_\lambda(t,u(t))$ appartient à $L^2(0,T;H)$.

Nous avons obtenu que pour u dans $L^2(0,T;H)$, $t \to J_{\lambda_0}(t,u(t))$ appartient à $L^2(0,T;H)$ ce qui entraîne que l'opérateur $\mathcal{A} = \{(u,v) \in \mathcal{H}^2/\text{p.p.}t \ \ v(t) \in A(t,u(t))\}$, qui est évidemment monotone, vérifie $R(I+\lambda_0\partial\phi) = \mathcal{H}$; il est donc maximal monotone et par conséquent, pour tout λ strictement positif et tout élément x de H , l'application $t \to J_\lambda^t x$ appartient à $L^2(0,T;H)$. On vérifie d'autre part directement sur (4) que si c, d appartient à $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^+)$, alors l'application $t \to J_\lambda^t x$ appartient à $L^\infty(0,T;H)$.

<u>Remarque 1</u>. Si l'on fait l'hypothèse H séparable, les conclusions du Lemme 2 sont vérifiées sous les hypothèses plus générales suivantes :

(i) $\forall x \in H$, $t \to |x|_t$ est mesurable

(ii) $\exists c \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$, $d \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$: p.p.$t \in]0,T[$ $\phi(t,.)+c(t)|.|+d(t) \geq 0$

(iii) $\exists \lambda_o$, $\forall x \in H$, $t \to \phi_{\lambda_o}(t,x)$ appartient à $L^\infty(0,T)$.

Il suffit de prendre une suite (x_n) dense dans H , de passer à la limite directement dans (6) en prenant $x = x_n$, et d'utiliser ensuite la continuité de $x \mapsto \phi_\lambda(t,x)$.

<u>Lemme 3</u>. Sous les hypothèses du Théorème 2, pour tout $u \in W^{1,1}(0,T;H)$ et tout $\lambda > 0$, l'application $t \to \phi_\lambda(t,u(t))$ est à variation positive absolument continue et vérifie :

$$\text{p.p.}t \in]0,T[\quad \frac{d}{dt}\phi_\lambda(t,u(t)) \leq \langle A_\lambda^t u(t),\frac{du}{dt}\rangle_t$$
$$+ h(t)\left[\lambda|A_\lambda^t u(t)|^2+|A_\lambda^t u(t)|.|u(t)|+|A_\lambda^t u(t)|+|u(t)|+c(t)\right]$$

<u>Démonstration</u> : Soit $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\phi_\lambda(t,u(t)) - \phi_\lambda(s,u(s)) = \phi_\lambda(t,u(t)) - \phi_\lambda(t,u(s)) + \phi_\lambda(t,u(s)) - \phi_\lambda(s,u(s))$$
$$\leq \langle A_\lambda^t u(t),u(t)-u(s)\rangle_t + \phi_\lambda(t,u(s)) - \phi_\lambda(s,u(s))$$

or

$$\phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) \leq \int_s^t \frac{d}{d\tau}\phi_\lambda(\tau,x)\, d\tau$$
$$\leq \int_s^t h(\tau)\left[\lambda|A_\lambda^\tau x|^2+|x|\,|A_\lambda^\tau x|+|A_\lambda^\tau x|+|x|+c(\tau)\right] d\tau$$

$$\phi_\lambda(t,u(s)) - \phi_\lambda(s,u(s)) \leq \int_s^t h(\tau)\left[\lambda|A_\lambda^\tau u(s)|^2+|u(s)|\,|A_\lambda^\tau u(s)|+|A_\lambda^\tau u(s)|+|u(s)|+c(\tau)\right] d\tau$$

or $h(\tau)\left[\lambda|A_\lambda^\tau u(s)|^2+|u(s)|\,|A_\lambda^\tau u(s)|+|A_\lambda^\tau u(s)|+|u(s)|+c(\tau)\right]$

$$\leq h(\tau)\left[c_1|A_\lambda^\tau x_o|^2+c_2|A_\lambda^\tau x_o|+c(\tau)\right] \quad \text{qui appartient à } L^1(0,T)$$

puisque $t \longrightarrow |A_\lambda^t x_o|$ appartient à $L^\infty(0,T)$; on en déduit que l'application $t \longrightarrow \phi_\lambda(t,u(t))$ est à variation positive absolument continue et l'on a

$$(7) \quad \phi_\lambda(t,u(t)) - \phi_\lambda(s,u(s)) \leq \langle A_\lambda^t u(t), u(t)-u(s)\rangle_t$$

$$+ \int_s^t h(\tau)\left[\lambda|A_\lambda^\tau u(s)|^2 + |u(s)|\,|A_\lambda^\tau u(s)| + |A_\lambda^\tau u(s)| + |u(s)| + c(\tau)\right] d\tau \quad .$$

On divise (7) par $(t-s)$ $(t>s)$ et l'on fait tendre s vers t ; on remarque que

$$\frac{1}{t-s}\int_s^t h(\tau)|A_\lambda^\tau u(s)|^2\, d\tau \xrightarrow[(s\uparrow t)]{} h(t).|A_\lambda^t u(t)|^2 \quad \text{p.p.}\ t \in]0,T[\text{ ; en effet}$$

$$\left|\frac{1}{t-s}\int_s^t h(\tau)\left[|A_\lambda^\tau u(s)|^2 - |A_\lambda^\tau u(\tau)|^2\right] d\tau\right|$$

$$\leq \frac{1}{t-s}\int_s^t h(\tau).\frac{1}{\lambda}|u(s)-u(\tau)|.\left[2|A_\lambda^\tau x_o| + |x_o-u(s)| + |x_o-u(\tau)|\right] d\tau$$

$$\leq c.\sup_{\xi,\eta\in[s,t]} |u(\xi)-u(\eta)|.\frac{1}{t-s}\int_s^t h(\tau)\, d\tau$$

quantité qui tend vers zéro quand $s\uparrow t$, si t est un point de Lebesgue de h . La fonction $t \longrightarrow h(\tau)|A_\lambda^\tau u(\tau)|^2$ appartenant à $L^1(0,T)$ on en déduit donc le résultat ; on raisonne de la même façon pour les autres termes intervenant dans le second membre de (7) ; on obtient finalement

$$(7\text{bis}) \quad \frac{d}{dt}\phi_\lambda(t,u(t) \leq \langle A_\lambda^t u(t), \frac{du}{dt}\rangle_t$$

$$+ h(t)\left[\lambda|A_\lambda^t u(t)|^2 + |u(t)|.|A_\lambda^t u(t)| + |A_\lambda^t u(t)| + |u(t)| + c(t)\right].$$

<u>Lemme 4</u>. Sous les hypothèses du Théorème 2, on a pour u_o dans $D(\Phi(0,.)$, l'estimation

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_{L^2(0,T;H)} \leq c(|u_o|,\phi(0,u_o)), \forall\lambda \quad 0<\lambda\leq 1 \ .$$

<u>Démonstration</u> : Multipliant (I_λ) par $\frac{du_\lambda}{dt}$ on obtient

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_t^2 + \langle A_\lambda^t u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}\rangle_t = \langle f(t), \frac{du_\lambda}{dt}\rangle_t$$ et tenant compte de (7 bis)

$$(8)\quad \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_t^2 + \frac{d}{dt}\,\phi_\lambda(t,u_\lambda(t)) \leqslant \langle f(t), \frac{du_\lambda}{dt}\rangle_t$$

$$+ 2h(t)\,\left[\frac{\lambda}{2}|A_\lambda^t u_\lambda(t)|^2 + |u_\lambda(t)|\,|A_\lambda^t u_\lambda(t)| + |A_\lambda^t u_\lambda(t)| + |u_\lambda(t)| + c(t)\right] .$$

On remarque que $\frac{\lambda}{2}|A_\lambda^t u(t)|_t^2 = \phi_\lambda(t,u_\lambda(t)) - \phi(t,J_\lambda^t u_\lambda(t))$, et en remplaçant $A_\lambda^t u_\lambda(t)$ par $f(t) - \frac{du_\lambda}{dt}$,

$$(9)\quad \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|_t^2 + \frac{d}{dt}\,\phi_\lambda(t,u_\lambda(t)) - 2h(t)\;\phi_\lambda(t,u_\lambda(t))$$

$$\leqslant 2h(t)\left|u_\lambda(t)\right| . \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right| + \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right| \left[|f(t)|+2h(t)\right] + 2h_1(t)\,|u_\lambda(t)|$$

$$+ 2h(t)\,c(t)$$

$$- 2h(t)\;\phi(t,J_\lambda^t u_\lambda(t)) .$$

Or

$$(10)\qquad \phi(t,J_\lambda^t u_\lambda(t)) \geqslant - a|J_\lambda^t u_\lambda(t)| - b$$

et
$$|J_\lambda^t u_\lambda(t)| \leqslant |J_\lambda^t x_o| + |x_o - u_\lambda(t)|$$

$$\leqslant |J_1^t x_o| + (1-\lambda)|x_o - J_1^t x_o| + |x_o - u_\lambda(t)| .$$

Tenant compte du fait que $t \longrightarrow J_1^t x_o$ appartient à $L^\infty(0,T;H)$ on obtient une majoration du type

$$(11)\quad |J_\lambda^t u_\lambda(t)| \leqslant C + |u_\lambda(t)| \quad \forall\,\lambda \quad 0<\lambda\leqslant 1 \quad \text{et} \quad \text{p.p.}\,t \in [0,T] \;;$$

de (10) et (11) on tire

$$(12)\qquad -\phi(t,J_\lambda^t u_\lambda(t)) \leqslant C_1|u_\lambda(t)| + C_2 \quad \forall\lambda \quad 0<\lambda\leqslant 1 \ , \ \text{p.p.}\, t\in[0,T] \ .$$

Posons $k(t) = 2\int_0^t h(\tau)\,d\tau$ et multipliant (9) par $e^{-k(t)}$ on obtient

$$(13)\qquad |e^{-\frac{k(t)}{2}}\frac{du_\lambda}{dt}|_t^2 + \frac{d}{dt}[e^{-k(t)}\phi_\lambda(t,u_\lambda(t))]$$

$$\leqslant 2h(t)|u_\lambda(t)||e^{-\frac{k(t)}{2}}\frac{du_\lambda}{dt}| + |e^{-\frac{k(t)}{2}}\frac{du_\lambda}{dt}|[|f(t)+2h(t)]$$

$$+ 2h(t)[C|u_\lambda(t)|+d(t)] \ .$$

On intègre (13) sur $[0,T_o]$ où T_o est tel que $2.e^{\frac{k(T)}{2}}.\sqrt{T_o}(\int^T |h(t)|^2dt)^{1/2} < 1$.

Tenant compte des majorations

$$(14)\qquad |u_\lambda(t)| \leqslant |u_o| + e^{\frac{k(T)}{2}}\int_0^{T_o} e^{-\frac{k(\tau)}{2}}|\frac{du_\lambda}{d\tau}|d\tau \leqslant |u_o| + e^{\frac{k(T)}{2}}\sqrt{T_o}(\int_0^{T_o}|e^{-\frac{k(\tau)}{2}}\frac{du_\lambda}{d\tau}|^2 d\tau)^{1/2}$$

$$(15)\qquad \phi_\lambda(T_o,u_\lambda(T_o)) \geqslant \phi(T_o,J_\lambda^{T_o}u_\lambda(T_o)) \geqslant -\alpha|J_\lambda^{T_o}u_\lambda(T_o)| - \beta \geqslant -\alpha|u_\lambda(T_o)| - \beta_1$$

$$\geqslant -\alpha\, e^{\frac{k(T)}{2}}\sqrt{T_o}(\int_0^{T_o}|e^{-\frac{k(\tau)}{2}}\frac{du_\lambda}{d\tau}|^2 d\tau)^{1/2} - \beta_2$$

on obtient finalement

$$(16)\qquad \int_0^{T_o}|e^{-\frac{k(t)}{2}}\frac{du_\lambda}{dt}|_t^2\,dt \leqslant \phi(0,u_o) + 2e^{\frac{k(T)}{2}}\sqrt{T_o}(\int_0^{T_o}|h(t)|^2dt)^{1/2}(\int_0^{T_o}|e^{-\frac{k(t)}{2}}\frac{du_\lambda}{dt}|^2 dt)$$

$$+ C_1(\int_0^{T_o}|e^{-\frac{k(t)}{2}}\frac{du_\lambda}{dt}|^2 dt)^{1/2} + C_2$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que des données $(|u_o|_\mu, |f|_{L^2}, |h|_{L^2}, |c|_{L^2})$; on a donc d'après le choix de T_o

$$(17)\qquad (\int_0^{T_o}|\frac{du_\lambda}{dt}|^2 dt)^{1/2} \leqslant C(|u_o|, \phi(0,u_o)) \ .$$

Suite de la démonstration du Théorème 2. On suppose $u_o \in D(\phi(0,.))$ et l'on va passer à la limite sur (I_λ) lorsque λ tend vers zéro. Soient $\lambda,\mu > 0$, u_λ et u_μ les solutions correspondantes du problème approché ;

$$<\frac{d}{dt}(u_\lambda-u_\mu),u_\lambda-u_\mu>_t + <A^t_\lambda u_\lambda(t)-A^t_\mu u_\mu(t),u_\lambda(t)-u_\mu(t)>_t = 0 .$$

D'après le Lemme 1

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda-u_\mu|^2_t - \frac{1}{2}\frac{db}{dt}|u_\lambda-u_\mu|^2_t + <A^t_\lambda u_\lambda(t)-A^t_\mu u_\mu(t),J^t_\lambda u_\lambda(t)-J^t_\mu u_\mu(t)+\lambda A^t_\lambda u_\lambda(t)-\mu A^t_\mu u_\mu(t)>_t = 0$$

et multipliant par $e^{-b(t)}$

$$(18)\quad \frac{d}{dt}\,(e^{-b(t)}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2_t) + 2e^{-b(t)}<A^t_\lambda u_\lambda(t)-A^t_\mu u_\mu(t),\lambda A^t_\lambda u_\lambda(t)-\mu A^t_\mu u_\mu(t)>_t \leq 0 .$$

Intégrant (18) sur $[0,T_o]$ on obtient, en notant $\omega_\lambda(t) = e^{-\frac{b(t)}{2}}A^t_\lambda u_\lambda(t)$:

$$\int_o^{T_o} <w_\lambda(t)-w_\mu(t),\lambda w_\lambda(t)-\mu w_\mu(t)>_t\, dt \leq 0 .$$

On se place dans l'espace $\mathcal{H} = L^2(0,T_o;H)$ muni du produit scalaire $<f,g> = \int_o^{T_o}<f(t),g(t)>_t\, dt$, et appliquant un lemme de Crandall-Pazy, (on a ici que u_λ reste borné dans $\mathcal{H}$), on obtient que ω_λ converge dans $\mathcal{H}$.

Intégrant (18) sur $[0,t]$ $(0\leq t\leq T_o)$ on obtient d'autre part

$$e^{-b(t)}|u_\lambda(t)-u_\mu(t)|^2_t \leq 4(\lambda+\mu)(\|\omega_\lambda\|_{L^2(0,T_o;H)}+\|\omega_\mu\|_{L^2(0,T_o;H)})\ \forall\ 0<\lambda\leq 1$$
$$\forall\, t\in [0,T_o]$$

et donc u_λ converge uniformément vers une fonction u sur $[0,T_o]$; d'autre part $\frac{du_\lambda}{dt}$ restant borné dans $L^2(0,T_o;H)$ et u_λ convergeant vers u dans $\mathcal{C}(0,T_o;H)$ on déduit que u appartient à $W^{1,2}(0,T_o;H)$; d'autre part, remarquant que $|J^t_\lambda u_\lambda(t)-u_\lambda(t)| = \lambda|A^t_\lambda u_\lambda(t)|$ on conclut que $J_\lambda(.,u_\lambda(.))$ converge vers u dans

$L^2(0,T_o;H)$. Or d'après le Lemme 2 l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone dans $L^2(0,T_o;H)$ et donc demi-fermé ; puisque $A^t_\lambda u_\lambda(t) \in A^t(J^t_\lambda u_\lambda(t))$ et que $A_\lambda(.,u_\lambda(.))$ converge vers $f - \frac{du}{dt}$ dans $\mathcal{H}$ d'une part, $J_\lambda(.,u_\lambda(.))$ converge vers u dans $\mathcal{H}$ d'autre part, on obtient

$$f(t) - \frac{du}{dt}(t) \in A^t\, u(t) \quad \text{p.p.}\, t \in]0,T_o[\,.$$

Montrons à présent que l'application $t \longrightarrow \phi(t,u(t))$ est à variation positive absolument continue (ce qui entraîne en particulier que $u(t) \in D(\phi^t)$ pour tout t); d'après le Lemme 3 pour tout $\lambda>0$, l'application $t \longrightarrow \phi_\lambda(t,u(t))$ est à variation positive absolument continue et vérifie :

$$\frac{d}{dt}\,\phi_\lambda(t,u(t)) \leq |A^t_\lambda u(t)|\,|\frac{du}{dt}| + h(t)\big[\lambda|A^t_\lambda u(t)|^2 + |A^t_\lambda u(t)|.|u(t)| + |A^t_\lambda u(t)| + |u(t)| + c(t)\big] \,.$$

Or

$$|A^t_\lambda u(t)| \leq |A(t,u(t))^o| \leq |f(t) - \frac{du}{dt}| \leq |f(t)| + |\frac{du}{dt}| \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2}|A^t_\lambda u(t)|^2 &= \phi_\lambda(t,u(t)) - \phi(t,J^t u(t))\\ &\leq \phi_\lambda(t,u(t)) + a\big[|J^t_1 x_o| + (1-\lambda)|x_o - J^t_1 x_o| + |x_o - u(t)|\big] + b\end{aligned}$$

donc en notant de nouveau $k(t) = 2\int_o^t h(\tau)\,d\tau$ on obtient

p.p.t $\frac{d}{dt}[e^{-k(t)}\phi_\lambda(t,u(t))] \leq g(t)$ où g est une fonction intégrable sur $[0,T]$, cette majoration étant valable quel que soit λ , $0<\lambda<1$; on en déduit que l'application $t \longrightarrow \phi_\lambda(t,u(t))$ vérifie une majoration du même type :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\phi_\lambda(t,u(t)) &= \frac{d}{dt}\,[e^{k(t)}\, e^{-k(t)}\phi_\lambda(t,u(t)))]\\ &\leq e^{k(t)}g(t) + k'(t)\, e^{k(t)}.\, e^{-k(t)}\phi_\lambda(t,u(t))\end{aligned}$$

or $\quad e^{-k(t)}\phi_\lambda(t,u(t)) \leq e^{-k(0)}\phi_\lambda(0,u_o) + \int_o^T g(t)dt \leq \phi(0,u_o) + \int_o^T g(t)dt$

$\frac{d}{dt}\,\phi_\lambda(t,u(t)) \leq e^{k(t)}g(t) + [\phi(0,u_o) + \int_o^T g(t)dt]k'(t)\, e^{k(t)}$; notant $q(.)$ le second membre, qui appartient à $L^1(0,T_o)$ on a

$$(19) \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T \quad \phi_\lambda(t,u(t)) \leq \phi_\lambda(s,u(s)) + \int_s^t q(\tau)\, d\tau \ ,$$

et passant à la limite sur λ , $(\lambda \downarrow 0)$ on obtient le résultat annoncé.

Comme $u(T_o)$ appartient à $D(\phi(T_o,.))$, on peut réitérer le procédé précédent et l'on obtient finallemnet une solution u , $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ au problème I, lorsque la solution initiale appartient à $D(\phi(0,.))$.

Montrons à présent que u vérifie une estimation du type

$$\int_o^T t\ \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt \leq C(|u_o|_H) \ .$$

A cet effet on reprend (13) que l'on multiplie par t :

$$(20) \quad \left|\sqrt{t}\ e^{-\frac{k(t)}{2}} \frac{du_\lambda}{dt}\right|_t^2 + t\,\frac{d}{dt}\left[e^{-k(t)}\phi_\lambda(t,u_\lambda(t))\right]$$

$$\leq 2\sqrt{t}\ h(t)|u_\lambda(t)|.\left|\sqrt{t}\ e^{-\frac{k(t)}{2}}\frac{du_\lambda}{dt}\right| + \left|\sqrt{t}\ e^{-\frac{k(t)}{2}}\frac{du_\lambda}{dt}\right|\left[\sqrt{t}|f(t)|+2\sqrt{t}\ h(t)\right|$$

$$+ 2t\ h(t)\left[C|u_\lambda(t)|+d(t)\right] \ .$$

On remarque alors que u_λ vérifie une estimation du type

$$(21) \qquad \|u_\lambda\|_\infty = \sup\{|u_\lambda(t)|\,;t \in [0,T]\} \leq C(|u_o|_H) \ .$$

En effet soit v la solution de (I) associée à une donnée initiale v_o dans $D(\phi(0,.))$; d'après (2)

$$\text{pp.t} \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ |u_\lambda(t)-v(t)|_t^2 \leq \left<\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{dv}{dt},\ u_\lambda(t)-v(t)\right>_t + \frac{1}{2}\frac{db}{dt}\,.|u_\lambda(t)-v(t)|_t^2$$

$$\text{or} \quad \left<f(t)-\frac{du_\lambda}{dt},\ v(t)-u_\lambda(t)\right>_t = \left<A_\lambda^t\ u_\lambda(t),\ v(t)-u_\lambda(t)\right>_t \leq \phi_\lambda(t,v(t)) - \phi_\lambda(t,u_\lambda(t))$$

et donc

$$(22) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)-v(t)|_t^2 - \frac{1}{2}\frac{db}{dt}|u_\lambda(t)-v(t)|_t^2 \leq |u_\lambda(t)-v(t)|\ \left[|f(t)|+\left|\frac{dv}{dt}\right|\right]$$

$$+ \phi(t,v(t)) - \phi_\lambda(t,u_\lambda(t)) \ .$$

D'autre part $-\phi_\lambda(t,u_\lambda(t)) \leq -\phi(t,J_\lambda^t u_\lambda(t)) \leq -c_1|u_\lambda(t)| - c_2$ d'après (12).
Par un argument classique on obtient alors (21).
D'autre part multipliant (22) par $e^{-k(t)}$ et intégrant sur $[0,T]$ on obtient, tenant compte de (21)

$$\int_0^T e^{-k(t)} \phi_\lambda(t,u_\lambda(t))\,dt \leq C(|u_o|_H) .$$

Intégrant alors (20) sur $[0,T]$ on obtient $\int_0^T t\,|\frac{du_\lambda}{dt}|^2\,dt \leq C(|u_o|)$ et donc faisant tendre λ vers zéro

$$\int_0^T t\,|\frac{du}{dt}|^2\,dt \leq C(|u_o|_H) . \tag{23}$$

Soit à présent u_o dans $\overline{D(\phi(0,.))}$; on considère une suite $u_{o,n}$ dans $D(\phi(0,.))$ qui converge vers u_o, et u_n les solutions correspondantes du problème (I) ; on a d'après (3)

$$|u_n(t)-u_m(t)|_t^2 \leq |u_{o,n}-u_{o,m}| + \int_0^t \frac{db}{dt}.|u_n(t)-u_m(t)|_t^2\,dt$$ d'où l'on déduit que u_n converge vers une fonction u dans $\mathscr{C}([0,T];H)$. D'autre part, d'après (23) il existe $C\geq 0$, indépendant de x tel que

$$\int_0^T t\,|\frac{du_n}{dt}|^2 dt \leq C ;$$

reprenant un argument développé précédemment, on obtient que u est solution de (I) sur tout $[\delta,T]$, $(\delta>0)$, que $u(t)$ appartient à $D(\phi^t)$ pour tout t strictement positif, et que $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt}$ appartient à $L^2(0,T;H)$.

Nous allons montrer à présent comment le Théorème 1 se déduit du Théorème 2 :

<u>Démonstration du Théorème 1</u> : On remarque tout d'abord que si $(\phi^t)_{t\in[0,T]}$ vérifie (T) (resp. (T*)) on peut se ramener au cas $\phi^{t^*} \geq 0$ (resp. $\phi^t \geq 0$) ; en effet, dans le cas où $(\phi^t)_{t\in[0,T]}$ vérifie (T), il existe $\alpha,\beta \geq 0$ tels que $\forall\, t \in [0,T]$, $\forall\, x \in H$ $\phi(t,x) + \alpha|x| + \beta \geq 0$.

Posant $\tilde{\phi}(t,x) = \phi(t,x+x_o) + \sup_t \phi(t,x_o)$ où x_o est un élément fixé de

$D(\phi(0,.))$, on a que $\tilde{\phi}^*(t,x) = \phi^*(t,x) - \langle x,x_o\rangle_t + \sup_t \phi(t,x_o)$ et donc $\forall t$ $\tilde{\phi}(t,.)\geq 0$; d'autre part $(\tilde{\phi}^t)_{t\in[0,T]}$ vérifie encore (T) et le problème (I) s'écrit

$$\frac{d}{dt}(u(t)-x_o) + \partial\tilde{\phi}(t,u(t)-x_o) \ni f(t) \;;\; u(0) - x_o = u_o - x_o \quad \text{où} \quad u_o - x_o \in D(\tilde{\phi}(0,.))$$

Dans le cas où $(\phi^t)_{t\in[0,T]}$ vérifie (T*) , il suffit d'appliquer ce qui précède en remarquant que $(\phi^t)_{t\in[0,T]}$ vérifie (T*) si et seulement si $(\phi^{(T-t)^*})_{t\in[0,T]}$ vérifie (T) .

Faisons à présent les hypothèses (T) et (N) : Soient $0\leq s\leq t\leq T$, $x\in H$ et $\lambda>0$ fixés ; nous allons majorer la quantité $B = \phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x)$:

$$B = \phi(t,J^t_\lambda x) - \phi(s,J^s_\lambda x) + \frac{1}{2\lambda}\left[|x-J^t_\lambda x|^2_t - |x-J^s_\lambda x|^2_s\right]$$

$$\leq \left[\phi^t(J^t_\lambda x)-\phi^t(J^s_\lambda x)-\langle A^t_\lambda x, J^t_\lambda x-J^s_\lambda x\rangle_t\right] + \left[\phi^t(J^s_\lambda x)-\phi^s(J^s_\lambda x)\right]$$

$$+ \frac{1}{2\lambda}\left[|x-J^t_\lambda x|^2_t-|x-J^s_\lambda x|^2_s+2\langle x-J^t_\lambda x, J^t_\lambda x-J^s_\lambda x\rangle_t\right]$$

$$\leq \phi^t(J^s_\lambda x) - \phi^s(J^s_\lambda x) - \frac{1}{2\lambda}\left[|x-J^t_\lambda x|^2_t+|x-J^s_\lambda x|^2_t-2\langle x-J^t_\lambda x, x-J^s_\lambda x\rangle_t\right] + \frac{1}{2\lambda}\left[|x-J^s_\lambda x|^2_t-|x-J^s_\lambda x|^2_s\right]$$

$$\leq \phi^t(J^s_\lambda x) - \phi^s(J^s_\lambda x) + \frac{1}{2\lambda}\left[|x-J^s_\lambda x|^2_t-|x-J^s_\lambda x|^2_s\right] ,$$

donc utilisant les hypothèses (NT) et (T)

$$(24) \quad \phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) \leq (a(t)-a(s))\left[\phi(s,J^s_\lambda x)+c_1|J^s_\lambda x|+c_2\right] + \frac{1}{2\lambda}(b(t)-b(s)|x-J^s_\lambda x|^2_s$$

ce qui entraîne

$$\phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) \leq (a(t)-a(s))\left[\phi_\lambda(s,x)+c_1|J^s_\lambda x|+c_2\right] + \frac{1}{2\lambda}(b(t)-b(s))|x-J^s_\lambda x|^2_s .$$

Prenant $s = 0$ on obtient que $t \longrightarrow \phi_\lambda(t,x)$ reste borné sur $[0,T]$; d'autre part $\phi_\lambda(t,x) = \phi(t,J^t_\lambda x) + \frac{1}{2\lambda}|x-J^t x|^2_t \geq \frac{1}{2\lambda}|x-J^t_\lambda x|^2 + \alpha|J^t_\lambda x| + \beta$ et donc $t \longrightarrow J^t_\lambda x$ reste borné sur $[0,T]$; par conséquent, l'application $t \longrightarrow \phi_\lambda(t,x)$ est à variation positive absolument continue et notant que

$$\phi(s,J_\lambda^s x) \leq \phi(s,J_\lambda^s x) + \phi^*(s,A_\lambda^s x) = <J_\lambda^s x,A_\lambda^s x>_s \leq <x,A_\lambda^s x>_s$$

on obtient en reprenant (24)

$$\phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) \leq ((a+b)(t)-(a+b)(s))\left[|x|\,|A_\lambda^s x|+\frac{\lambda}{2}|A_\lambda^s x|^2+c_1\lambda|A_\lambda^s x|+c_1|x|+c_2\right] .$$

Les conditions du Théorème 2 sont donc vérifiées.

Faisons à présent les hypoyhèses (T^*) et (N^*) ;
en utilisant le fait que $\phi_\lambda(t,x) = \sup_{y\in H} \{<x,y>_t - \frac{\lambda}{2}|y|_t^2 - \phi^{t*}(y)\}$ cette borne supérieure étant atteinte en $y = J_\lambda^t x$ on obtient que

$$\phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) \leq <x,A_\lambda^t x>_t - \phi^*(t,A_\lambda^t x) - \frac{\lambda}{2}|A_\lambda^t x|_t^2 - <x,A_\lambda^t x>_s + \phi^*(s,A_\lambda^t x) + \frac{\lambda}{2}|A_\lambda^t x|_s^2$$

$$\leq (a(t)-a(s))\left[\phi^*(t,A_\lambda^t x)+c_1|A^t x|+c_2\right] + b(t)-b(s))\left[|x|_s|A^t x|_s+\frac{\lambda}{2}|A^t x|_s^2\right]$$

or $\phi^*(t,A_\lambda^t x) \leq \phi^*(t,A_\lambda^t x) + \phi(t,J_\lambda^t x) = <A_\lambda^t x,J_\lambda^t x>_t \leq <A_\lambda^t x,x>_t$ et donc

$$\phi_\lambda(t,x) - \phi_\lambda(s,x) \leq \left[(a+b)(t)-(a+b)(s)\right]\left[\frac{\lambda}{2}|A_\lambda^t x|^2+2|x|\,|A_\lambda^t x|+c_1|A_\lambda^t x|+c_2\right] .$$

Or, en se ramenant au cas précédent, on montre que $t \longrightarrow A_\lambda^t x$ reste borné sur $[0,T]$; par conséquent l'application $t \longrightarrow \phi_\lambda(t,x)$ est à variation positive absolument continue et l'on vérifie immédiatement que les conditions du Théorème 1 sont vérifiées.

Nous allons à présent donner quelques applications du Théorème 1 :

1°) $H = H^{-1}(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$.

a) On considère la famille de formes bilinéaires symétriques $(a_{ij} = a_{ji})$ sur $H_o^1(\Omega)$

$$a(t,u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

où pour tout (i,j) les a_{ij} appartiennent à $W^{1,1}(0,T;L^\infty(\Omega))$ et vérifient la condition de coercivité :

$$\exists\ \rho>0 \quad \forall t\in |0,T| \quad \forall \xi \in R^N \qquad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\ \xi_i\ \xi_j \geq \rho \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2 \ .$$

On considère d'autre part une application $j : [0,T] \times R \longrightarrow R$ telle que

i) $\forall\ t \in [0,T]$ $r \longmapsto y(t,r)$ convexe, semi-continue inférieurement, propre de R dans R.

ii) $\forall\ t \in [0,T]$ $\lim\limits_{|r|\to +} \dfrac{j(t,r)}{|r|} = +\infty.$

iii) $\exists$ $a \in W^{1,1}(0,T)$, croissante, $\exists\, c \geq 0$:

$$\forall\ 0\leq s\leq t\leq T \quad \forall r \in \mathbb{R} \qquad j(t,r) \leq j(s,r) + (a(t)-a(s))[j(s,r)+c] \ .$$

On note $\beta^t = \partial j^t$.

<u>Proposition</u>. Sous les hypothèses précédentes pour $u_o \in \mathrm{adh}_{H^{-1}} \{v \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)\ ;\ j(0,v) \in L^1(\Omega)\}$ et f dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ il existe u unique solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} (\beta(t,u)) = f(x,t) \qquad \text{pp.} \quad \Omega \times]0,T[$$

$$\beta(t,u(t,x)) \ni 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times]0,T[$$

$$u(0,x) = u_o(x)$$

avec $u \in \mathcal{C}([0,T]\,;H^{-1}(\Omega))$, $\sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $\sqrt{t}\,\beta(u(x,t)) \in L^2(0,T;H_o^1(\Omega))$, de plus pour tout $t>0$, $u(t,.) \in L^1(\Omega)$ et $j(t,u(t,.)) \in L^1(\Omega)$.

<u>Démonstration</u> : D'après le théorème de Lax-Milgram, à tout u dans $H_o^1(\Omega)$ on associe un élément $A^t u$ dans $H^{-1}(\Omega)$ tel que $\forall\, v \in H_o^1(\Omega)$ $a(t,u,v) = \langle A^t u, v\rangle$. On a évidemment $A^t u = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i})$, l'opérateur A^t réalisant un

isomorphisme entre $H_o^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$;
on pose $\|u\|_t^2 = \langle A_t^{-1}u,u\rangle_{(H_o^1,H^{-1})}$ pour u dans $H^{-1}(\Omega)$.
Soit $u = A^t v$ alors $\|u\|_t^2 = \langle v,A^t v\rangle_{(H_o^1,H^{-1})} = a(t,v,v)$; l'application $u \longrightarrow \|u\|_t$ définit donc bien pour tout t une norme sur $H^{-1}(\Omega)$.

Remarquons tout d'abord les inégalités suivantes :

$$\rho\|v\|^2_{H_o^1} \leq a(t,v,v) \leq C_1 \|v\|^2_{H_o^1} \quad \text{où} \quad v \in H_o^1(\Omega)$$

et donc si $u \in H^{-1}(\Omega)$

$$\rho\|A_t^{-1}u\|^2_{H_o^1} \leq \|u\|_t^2 = a(t,A_t^{-1}u,A_t^{-1}u) \leq C_1\|A_t^{-1}u\|^2_{H_o^1} .$$

D'autre part,
$$\begin{aligned}\|u\|_t^2 - \|u\|_s^2 &= a(t,A_t^{-1}u,A_t^{-1}u) - a(s,A_s^{-1}u,A_s^{-1}u)\\ &= a(s,A_s^{-1}u,A_t^{-1}u) - a(s,A_s^{-1}u,A_s^{-1}u)\\ &= a(s,A_s^{-1}u,A_t^{-1}u-A_s^{-1}u)\\ &\leq C\|A_s^{-1}u\|_{H_o^1} \|A_t^{-1}u-A_s^{-1}u\|_{H_o^1}\end{aligned}$$

or
$$\begin{aligned}\rho\|A_t^{-1}u-A_s^{-1}u\|^2_{H_o^1} &\leq a(t,A_t^{-1}u-A_s^{-1}u,A_t^{-1}u-A_s^{-1}u)\\ &\leq a(t,A_t^{-1}u,A_t^{-1}u-A_s^{-1}u) - a(t,A_s^{-1}u,A_t^{-1}u-A_s^{-1}u)\\ &\leq a(s,A_s^{-1}u,A_t^{-1}u-A_s^{-1}u) - a(t,A_s^{-1}u,A_t^{-1}u-A_s^{-1}u)\\ &\leq |b(t)-b(s)|\|A_s^{-1}u\|_{H_o^1} \|A_t^{-1}u-A_s^{-1}u\|_{H_o^1} \quad \text{d'où}\end{aligned}$$

$\rho\|A_t^{-1}u-A_s^{-1}u\|_{H_o^1} \leq |b(t)-b(s)|\|A_s^{-1}u\|_{H_o^1}$ et donc

$$|\|u\|_t^2-\|u\|_s^2| \leq C|b(t)-b(s)|\|A_s^{-1}u\|^2_{H_o^1} \leq C_1|b(t)-b(s)|\|u\|_s^2 .$$

La famille de normes $(\|\ \|_t)_{t\in[0,T]}$ vérifie donc bien les hypothèses (N) .

On considère alors sur $H^{-1}(\Omega)$ la fonctionnelle

$$\phi(t,u) = \begin{cases} \int_\Omega j(t,u(x))\, dx & \text{si } u \in H^{-1} \cap L^1 \text{ et } j(t,u|.|) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On montre que ϕ^t est convexe, s.c.i. sur $H^{-1}(\Omega)$ et que son sous-différentiel pour la norme $|.|_t$ n'est autre que l'opérateur $-\sum \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\beta(t,.))$; cf. [4], [5], [6] ; il suffit alors pour conclure d'appliquer un théorème de H. Brezis [5]

b) $H = L^2(\Omega)$, Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$.

Posons

$$\langle u,v\rangle_t = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, p(t,x)\, dx \qquad |u|_t^2 = \int_\Omega u(x)^2\, p(t,x)\, dx$$

où $p : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie :

i) $\exists\, b \in W^{1,1}(0,T) : \forall\, 0 \leq s \leq t \leq T \quad p(x,t) \leq p(x,s) + (b(t)-b(s))[p(x,s)+c]$ pp $x \in \Omega$.

ii) $\exists\, C_2 \geq C_1 > 0 : \quad \forall\, t \in [0,T] \quad C_2 \geq p(x,t) \geq C_1$ pp $x \in \Omega$.

La famille de normes ainsi définie satisfait aux conditions (N) ; soit ϕ une fonctionnelle convexe s.c.i. propre de $L^2(\Omega)$ dans $]-\infty,+\infty]$; on a l'équivalence

$$\phi(v) - \phi(u) \geq \langle f,v-u\rangle_t \iff \phi(v) - \phi(u) \geq \langle f.p(.,t),v-u\rangle_{L^2(\Omega)} .$$

On en déduit donc un théorème d'existence et d'unicité pour le problème

$$p(.,t)\frac{du}{dt} + \partial\phi(t,u(t)) \ni f(t) \qquad u(0) = u_0$$

où $f \in L^2([0,T] \times \Omega)$ et $u_0 \in \overline{D(\phi(0,.))}$.

Bibliographie.

[1] H. ATTOUCH - Publications Mathématiques d'Orsay. Séminaire Semi-groupes et équations d'évolution, 1971-1972. Exposé n°4.

[2] H. ATTOUCH, P. BENILAN. A. DAMLAMIAN, C. PICARD - Cr. Acad. Sci. Paris Série A 279. 607-609 (1974).

[3] H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN - Problèmes d'évolution dans les Hilbert et applications. J. Math. pures et appl. 54, 1975, p.53 à 74.

[4] H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN - Convexité et monotonie dans certaines équations aux dérivées partielles non linéaires. (à paraître).

[5] H. BREZIS - Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations ; Contributions to Nonlinear Functional Analysis. Academic Press 1971.

[6] A. DAMLAMIAN - Publications Mathématiques d'Orsay. Séminaire Semi-groupes et équations d'évolution, 1973-1974 : Problème de Stefan avec contrainte au bord et les intégrandes convexes.

[7] J.J. MOREAU - Séminaire d'Analyse Convexe. Montpellier 1972, Exposé n°13. Rétraction d'une Multiapplication.

[8] J.C. PERALBA - Thèse de 3ème cycle : Equations d'évolution dans un espace de Hilbert, associées à des opérateurs sous-différentiels.

[9] J. WATANABE - On certain nonlinear evolution equations. University of Electro communications, Tokyo.

-:-:-:-:-

-:-:-

-:-

Exposé de Alain DAMLAMIAN

RESOLUTION D'UNE EQUATION HYPERBOLIQUE PAR UNE METHODE D'EVOLUTION AVEC NORME VARIABLE.

I - Un théorème d'évolution abstrait avec norme variable :

Soit X un Banach de norme $|.|$. On suppose que pour tout t de $[0,T]$, X est muni d'une norme équivalente $|.|_t$ dont l'application dualité est notée F_t. On suppose que ces normes sont uniformément équivalentes ($\exists\ k>0$, $|x|_t \leq k|x|_s$, $|x| \leq k|x|_t$, $|x|_t \leq k|x|$) et qu'elles sont toutes uniformément lisses (i.e. de norme duale uniformément convexe). On suppose enfin qu'il existe une fonction a croissante de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$\forall\ 0 \leq s \leq t \leq T$, $\forall\ x \in X$, $|x|_t^2 - |x|_s^2 \leq (a(t)-a(s))|x|_s^2$

Les hypothèses ci-dessus seront appelées les hypothèses H_0).

1°) Préliminaires.

(1.1) Proposition. Sous l'hypothèse H_0) pour toute $u \in W^{1,1}(0,T;H)$, on a $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$e^{-a(t)}|u(t)|_t^2 \leq e^{-a(s)}|u(s)|_s^2 + 2\int_s^t e^{-a(\tau)} \left(\frac{du}{d\tau}, F_\tau\, u(\tau)\right)_{X,X'} d\tau \quad .$$

Démonstration.

$$e^{-a(t)}|u(t)|_t^2 - e^{-a(s)}|u(s)|_s^2 = e^{-a(t)}(|u(t)|_t^2 - |u(t)|_s^2) + |u(t)|_s^2\,(e^{-a(t)} - e^{-a(s)})$$
$$+ e^{-a(s)}(|u(t)|_s^2 - |u(s)|_s^2) \quad \text{d'où}$$

$$(1.2)\quad e^{-a(t)}|u(t)|_t^2 - e^{-a(s)}|u(s)|_s^2 \leq |u(t)|_s^2\,(e^{-a(t)}(a(t)-a(s)) + e^{-a(t)} - e^{-a(s)})$$

$$+ 2e^{-a(s)}(u(t)-u(s),F_s u(s))_{X,X'}$$

Comme a est croissante on en déduit $e^{-a(t)}(a(t)-a(s)) + e^{-a(t)} - e^{-a(s)} \leq 0$ d'où

$$(1.3)\quad e^{-a(t)}|u(t)|_t^2 - e^{-a(s)}|u(s)|_s^2 \leq 2e^{-a(s)}(u(t)-u(s),F_s u(s)) .$$

Par suite $t \longmapsto e^{-a(t)}|u(t)|_t^2$ est à variation positive absolument continue, et donc également à variations bornées. De plus on a pour $t \geq s$ par Fatou

$$e^{-a(t)}|u(t)|_t^2 - e^{-a(s)}|u(s)|_s^2 \leq \int_s^t \lim_{h\to o} \frac{1}{h}(e^{-a(\tau)+h)}|u(\tau+h)|_{\tau+h}^2 - e^{-a(\tau)}|u(\tau)|_\tau^2)\, d\tau$$

d'où le résultat par (1.3).

2°) Enoncé du théorème.

Soit $(A^t)_{t\in[0,T]}$ une famille d'opérateurs multivoques satisfaisant à

H_1) p.p. $t \in [0,T]$, A^t est m-accrétif pour la norme $|\cdot|_t$.

H_2) Le domaine $D(A^t)$ est essentiellement indépendant de $t \in [0,T]$. On le notera D

H_3) Pour tout $\lambda>0$, on suppose que l'approximation Yosida A_λ^t de A^t vérifie :
$\forall\, r>0$, $\exists\, b_r \in W^{1,1}(0,T)$ avec $x \in \overline{D}$, $|x|\leq r$, $\lambda>0 \implies$ p.p. t $s,t \in [0,T]$

$$|A_\lambda^t x - A_\lambda^s x|_s \leq |b_r(t)-b_r(s)|\,(1+|A_\lambda^s x|_s) .$$

(1.4) Théorème 1. Sous les hypothèses H_o, H_1, H_2, H_3, pour tout u_o de D et toute f de $W^{1,1}(0,T;X)$, il existe une solution forte unique du problème $\frac{du}{dt} + A^t u \ni f$, $u(0) = u_o$, c'est-à-dire

i) $u \in W^{1,1}_{loc}(0,T;X) \cap \mathcal{C}([0,T];X)$

ii) pp.t $\frac{du}{dt}(t) + A^t u(t) \ni f(t)$ (en particulier $u(t) \in D$ pp.)

iii) $u(0) = u_o$.

De plus u est lipschitzienne sur $[0,T]$.

Ce résultat, qui utilise la régularisation Yosida, généralise celui de T. Kato dans [5].

Remarque. Le cas des A^t univoque : L'hypothèse H_3 est alors équivalente à

H_3') Pour tout $r>0$, il existe $b_r \in W^{1,1}(0,T)$, telle que $x \in D$, $|x|\leqslant r \Longrightarrow$ pp. $s,t \in [0,T]$ $|A^t x - A^s x|_s \leqslant |b_r(t)-b_r(s)|(1+|A^s x|_s)$.

En effet $H_3) \Longrightarrow H_3')$ par passage à la limite $\lambda \searrow 0^+$ car dans ce cas $\forall x \in D$, $A^t_\lambda x \rightharpoonup A^t x$ pour $\lambda \longrightarrow 0^+$ (1/2 fermeture des opérateurs m-accrétifs dans un Banach uniformément lisse).

$(H_3') \Longrightarrow (H_3)$. Notons $J^t_\lambda = (I+\lambda A^t)^{-1}$ $(\lambda>0)$ la résolvante de A^t , J^t_λ est une contraction pour la norme $|\cdot|_t$ et on a

$$|J^t_\lambda x - J^s_\lambda x|_t \leqslant |J^t_\lambda(I+\lambda A^s)\, J^s_\lambda x - J^t_\lambda(I+\lambda A^t)\, J^s_\lambda x|_t \leqslant |(I+\lambda A^s)\, J^s_\lambda x - (I+\lambda A^t)\, J^s_\lambda x|_t$$

$$\leqslant \lambda\, |A^s J^s_\lambda x - A^t J^s_\lambda x|_t \, .$$

Soit $r \geqslant |J^s_\lambda x|$, on en déduit

$$|J^t_\lambda x - J^s_\lambda x|_s \leqslant \lambda\, k^2 |b_r(t)-b_r(s)|\, (1+|A^s J^s_\lambda x|_s) \, .$$

Donc $t \longmapsto J^t_\lambda x$ reste bornée pour $t \in [0,T]$. Prenons alors $r \geqslant \sup|J^t x|$ on obtient

$$|J^t_\lambda x - J^s_\lambda x|_s \leqslant \lambda\, k^2 |b_r(t)-br(s)|\, (1+|A^s J^s_\lambda x|_s) \, .$$

Mais $A^s J^s_\lambda x = A^s_\lambda x$ d'où $|A^t_\lambda x - A^s_\lambda x|_s \leqslant k^2 |b_r(t)-b_r(s)|\, (1+|A^s_\lambda x|_s)$.

3°) <u>Réduction du problème au cas</u> $f \equiv 0$.

(1.5) Proposition. Si $f \in W^{1,1}(0,T;X)$ et A^t satisfait aux hypothèses H_1, H_2, H_3, alors l'opérateur $\tilde{A}^t = A^t - f(t)$ satisfait à ces mêmes hypothèses.

Démonstration. Seule H_3 est non-triviale mais si on note $\tilde{J}^t_\lambda$ la résolvante de $\tilde{A}^t$, on a

$$\tilde{J}^t_\lambda x = J^t_\lambda(x+\lambda f(t)) \quad \text{d'où}$$

$$\tilde{A}^t_\lambda x - \tilde{A}^s_\lambda x = \frac{1}{\lambda}(-J^t_\lambda(x+\lambda f(t)) + J^s_\lambda(x+\lambda f(s)) = A^t_\lambda(x+\lambda f(t)) - A^s_\lambda(x+\lambda f(s)) + \lambda(f(s)-f(t)) .$$

On en déduit

$$|\tilde{A}^t_\lambda x - \tilde{A}^s_x|_t \leq |A^t_\lambda(x+\lambda f(t))-A^t_\lambda(x+\lambda f(s))|_t + |A^t_\lambda(x+\lambda f(s))-A^s_\lambda(x+\lambda f(s))|_t + |f(s)-f(t)|_t .$$

Or A^t_λ est lipschitzienne de rapport $\frac{2}{\lambda}$ pour la norme $|\cdot|_t$, d'où

$$|\tilde{A}^t_\lambda x-\tilde{A}^s x|_t \leq (1+ \frac{2\lambda}{\lambda})|f(t)-f(s)|_t + k|b_r(t)-b_r(s)|(1+|A^s_\lambda(x+\lambda f(s))|_s) .$$

D'où le résultat.

4°) Existence de solutions approchées au problème.

Par H_3 on peut résoudre (théorème de Cauchy Lipschitz sur le convexe fermé $\overline{D}$)

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A^t_\lambda u_\lambda(t) = 0 \quad , u_\lambda(0) = u_o$$ avec existence et unicité d'une solution de classe C^1 (l'égalité $\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A^t_\lambda u_\lambda(t) = 0$ étant vérifiée pour tous les t avec A^t m-accrétif).

5°) Estimations uniformes en λ.

Soit x un élément de D. On a $\forall \lambda>0$

$|A^t_\lambda x-A^s_\lambda x|_s \leq |b_r(t)-b_r(s)|(1+|A^s_\lambda x|_s)$ d'où on déduit que $A^t_\lambda x$ reste essentiellement borné en t. Cette majoration est uniforme en λ car

$|A^s_\lambda x|_t \leq |A^s x| = \inf\{|y| \; , \; y \in A^s x \neq \emptyset\}$ majoration classique pour les opérateurs m-accrétifs.

Par la proposition (1.1) on a alors (on se ramène dorénavant à $a(0) = 0$)

$$(1.6) \qquad e^{-a(t)}|u_\lambda(t)-x|_t^2 \leqslant |u_o-x|_o^2 + 2\int_o^t e^{-a(\tau)} \left(\frac{du_\lambda}{d\tau}, F_\tau(u_\lambda(\tau)-x)\right) d\tau .$$

Or $\frac{du_\lambda}{d\tau} = - A_\lambda^\tau u_\lambda(\tau)$ d'où

$$e^{-a(t)}|u_\lambda(t)-x|_t^2 \leqslant |u_o-x|_o^2 - 2\int_o^t e^{-a(\tau)} (A_\lambda^\tau u_\lambda(\tau), F_\tau(u_\lambda(\tau)-x))\, d\tau$$

$$\leqslant |u_o-x|_o^2 - 2\int_o^t e^{-a(\tau)} (A_\lambda^\tau x, F_\tau(u_\lambda(\tau)-x))\, d\tau$$

par l'accrétivité de A_λ^t, par suite

$$(1.7) \qquad e^{-a(t)}|u_\lambda(t)-x|_t^2 \leqslant |u_o-x|_o^2 + 2M\int_o^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}} |u_\lambda(\tau)-x|_\tau \, de$$

où $M = \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{s\in[0,T] \\ \lambda>0}} e^{-\frac{a(s)}{2}} |A_\lambda^s x|_s$.

Par le lemme de Gronwall, (1.7) implique que $|u_\lambda(t)-x|_t$ reste borné indépendamment de $\lambda>0$ et $t \in [0,T]$. Il en est donc de même de $|u_\lambda(t)|$, et soit $r \geqslant \sup|u_\lambda(t)|$ ($\lambda>0$, $t \in [0,T]$).

Soit $v(t) = u_\lambda(t+h)-u_\lambda(t)$. On a alors

$$\left(\frac{dv}{dt}, F_t v\right) = - (A_\lambda^{t+h} u_\lambda(t+h) - A_\lambda^t u_\lambda(t+h), F_t v(t)) - (A_\lambda^t u_\lambda(t+h) - A_\lambda^t u_\lambda(t), F_t v(t))$$

$$\leqslant - (A_\lambda^{t+h} u_\lambda(t+h) - A_\lambda^t u_\lambda(t+h), F_t v(t))$$

$$\leqslant |A_\lambda^{t+h} u_\lambda(t+h) - A_\lambda^t u_\lambda(t+h)|_t \, |v(t)|_t$$

$$\leqslant |v(t)|_t \, |b_r(t+h)-b_r(t)| \, (1+|A_\lambda^t u_\lambda(t+h)|_t) \leqslant |v(t)|_t \, \phi_h(t) .$$

On a donc d'après (1.1)

$$e^{-a(t)}|v(t)|_t^2 \leqslant |v(0)|_o^2 + 2\int_o^t e^{-a(\tau)} |v(\tau)|_\tau \, \phi_h(\tau)\, d\tau \quad \text{d'où (Gronwall)}$$

$$e^{-\frac{a(t)}{2}}|v(t)|_t \leq |v(0)|_o + \int_o^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}} \phi_h(\tau)\, d\tau$$. Divisant par h et faisant $h \to 0^+$ on obtient

$$e^{-\frac{a(t)}{2}}|u_\lambda'(t)|_t \leq |u_\lambda'(0)|_o + \int_o^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}} (1+|A_\lambda^\tau u_\lambda(\tau)|_\tau)|b_r'(\tau)|\, d\tau$$

c'est-à-dire (pp.t)

$$(1.8) \qquad e^{-\frac{a(t)}{2}}|A_\lambda^t\, u_\lambda(t)|_t \leq |A_\lambda^o\, u_o|_o + \int_o^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}} |b_r'(\tau)|\ (1+|A_\lambda^\tau\, u_\lambda(\tau)|_\tau)\, d\tau\ .$$

Comme $u_o \in D$, $|A_\lambda^o\, u_o|_o$ reste borné, et on en déduit qu'il existe $C>0$ telle que $|A_\lambda^t\, u_\lambda(t)|_t \leq C$. On peut donc choisir C pour que

$$(1.9) \qquad |u_\lambda(t)|_t \leq C\ ,\quad |u_\lambda'(t)|_t \leq C \quad \text{uniformément en } t \text{ et } \lambda\ .$$

6°) <u>Passage à la limite pour</u> $\lambda \to 0^+$

Soit $v = u_\lambda - u_\mu$; $(v'(t),F_t\, v(t)) = -(A_\lambda^t\, u_\lambda(t) - A_\mu^t\, u_\mu(t),F_t\, v(t))$ $w(t) = J_\lambda^t\, u_\lambda(t) - J_\mu^t\, u_\mu(t)$. On a par l'accrétivité de A^t et sachant que $A_\lambda^t x \in A^t\, J_\lambda^t x$

$$(v'(t),F_t\, v(t)) \leq -\,(A_\lambda^t\, u_\lambda(t)- A_\mu^t\, u_\mu(t),F_t\, v(t) - F_t\, w(t)) \quad \text{d'où}$$

$$(v'(t),F_t\, v(t)) \leq 2C\,|F_t\, v(t) - F_t\, w(t)|_t^* \quad \text{(norme duale)}\ .$$

Par (1.1) on obtient :

$$(1.10) \qquad e^{-a(t)}|v(t)|_t^2 \leq |v(0)|_o^2 + 4C\int_o^t e^{-a(\tau)}|F_\tau\, v(\tau)-F_\tau\, w(\tau)|_\tau^*\, d\tau\ .$$

Mais $v(0) = 0$ et $|F_\tau\, v(\tau)-F_\tau\, w(\tau)|_\tau^*$ reste borné uniformément en τ , λ et μ . Pour montrer la convergence uniforme de la famille u_λ , il suffit donc de montrer que l'intégrale tend vers 0 pour presque tout τ . Or F_τ est uniformément continue sur les bornées de χ (norme uniformément lisse), il suffit donc de considérer

$$|v(\tau)-w(\tau)|_\tau = |u_\lambda(\tau)-u_\mu(\tau) - J_\lambda^\tau u_\lambda(\tau) + J_\mu^\tau u_\mu(\tau)|_\tau$$

$$\leq \lambda|A_\lambda^\tau u_\lambda(\tau)|_\tau + \mu|A_\mu^\tau u_\mu(\tau)|_\tau \leq (\lambda+\mu)C .$$

Soit alors u la limite uniforme des u_λ . Par (1.9) on voit que u est lipchitzienne, donc presque partout fortement dérivable puisque X est réflexif.

De plus pour tout t avec A^t m-accrétif, on a

$$J_\lambda^t u_\lambda(t) \longrightarrow u(t) \text{ pour } \lambda \longrightarrow 0^+ \text{ car } |A_\lambda^t u_\lambda(t)| \leq C ,$$

et donc $A_\lambda^t u_\lambda(t) \in A^t J_\lambda^t u_\lambda(t)$, on en déduit par la demi fermeture de A^t que $u(t) \in D$.

On considère maintenant l'espace $\mathcal{H} = L^2(0,T;X)$ muni de la norme $|f|_H = (\int_0^T |f(t)|_t^2 d\tau)^{1/2}$. On vérifie aisément que c'est un espace de Banach, de norme duale $(|g|_{H'} = (\int_0^T |g(t)|_t^{*} dt)^{1/2})$ uniformément convexe. L'opérateur $\mathcal{A} = \{[u,v] \in \mathcal{H} ; v(t) \in A^t u(t) \text{ pp.t}\}$ est m-accrétif dans $\mathcal{A}$ comme on le vérifie aisément, donc demi-fermé. Or $[J_\lambda^t u_\lambda(t), A_\lambda^t u_\lambda(t)] \in \mathcal{A}$ pour tout $\lambda>0$ et comme $J_\lambda^t u_\lambda(t)$ converge uniformément vers u , et que $A_\lambda^t u_\lambda(t) = -\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ reste borné dans $L^\infty(0,T;X)$, donc a fortiori dans $\mathcal{H}$, on en déduit alors la convergence dans $\mathcal{H}$ faible de $\frac{du_\lambda}{dt}$ vers $\frac{du}{dt}$ avec $-\frac{du}{dt} \in \mathcal{A}u$. Par suite pp.t on a $\frac{du}{dt}(t) + A^t u(t) \ni 0$. Ceci achève la partie existence du théorème (1.4).

7°) <u>Unicité. Elle provient du résultat suivant.</u>

(1.11) <u>Proposition</u>. Si $\frac{du}{dt} + A^t u \ni f$, $u(0) = u_o$ et $\frac{dv}{dt} + A^t v \ni g$, $v(0) = v_o$, sont solutions fortes au sens du théorème (1.4), on a

$$e^{-\frac{a(t)}{2}} |u(t)-v(t)|_t \leq |u_o-v_o|_o + \int_0^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}} |f(\tau)-g(\tau)|_\tau \, d\tau .$$

<u>Démonstration</u>. En effet on a pp.t $(\frac{d}{dt}(u-v), F_t(u-v)) \leq |f(t)-g(t)|_t |u-v|_t$ d'où par (1.1)

$$(1.12) \qquad e^{-a(t)}|u(t)-v(t)|_t^2 \leq |u_o-v_o|_o^2 + 2\int_o^t e^{-a(\tau)}|f(\tau)-g(\tau)|_\tau \; |u(\tau)-v(\tau)|_\tau \, d\tau$$

d'où (1.11) par le lemme de Gronwall.

8°) Un résultat de sélection de la dérivée à droite.

(1.13) Proposition. Sous les hypothèses du théorème (1.4) et si u est solution forte de $\frac{du}{dt} + A^t u \ni f$, en tout point t où $|.|_t$ est strictement (resp. uniformément) convexe et A^t est m-accrétif, u est faiblement (resp. fortement) dérivable à droite et l'on a $\frac{d^+u}{dt} = (f(t)-A^t\, u(t))_t^o$ où $(B)_t^o$ est l'unique élément de norme $|.|_t$ minimale dans l'ensemble B convexe dans X .

Démonstration. On se ramène au cas $f \equiv 0$ comme précédemment et au point $t = 0$ (en effectuant un changement de variable en t). En effet si on suppose que A^t est m-accrétif, alors $u(t)$ est dans D . Donc par l'unicité de la solution u on se ramène à étudier la dérivée à droite en $t = 0$ de $u(t)$.

Soit v la solution forte unique de

$$\frac{dv}{dt}(t) + A^o\, v(t) \ni 0 \;,\; v(0) = u_o \;.$$

v existe et est la limite uniforme de la solution approchée v_λ

$\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda^o\, v_\lambda(t) = 0$, $v_\lambda(0) = u_o$.

On a alors en comparant les solutions approchées u_λ et v_λ

$$\begin{aligned}(1.14) \quad e^{-a(t)}|u_\lambda(t)-v_\lambda(t)|_t^2 &\leq -2\int_o^t e^{-a(\tau)}(A_\lambda^\tau\, u_\lambda(\tau)-A_\lambda^o\, v_\lambda(\tau),F_\tau(u_\lambda(\tau)-v_\lambda(\tau)))\,d\tau \\ &\leq -2\int_o^t e^{-a(\tau)}(A_\lambda^\tau\, u_\lambda(\tau)-A_\lambda^\tau\, v_\lambda(\tau),F_\tau(u_\lambda(\tau)-v_\lambda(\tau)))\,d\tau \\ &\quad + 2\int_o^t e^{-a(\tau)}(A_\lambda^\tau\, v_\lambda(\tau)-A_\lambda^o\, v_\lambda(\tau),F_\tau(u_\lambda(\tau)-v_\lambda(\tau)))\,d\tau\end{aligned}$$

Par l'accrétivité des A_λ^τ on a donc grâce à H_3

$$e^{-a(t)}|u_\lambda(t)-v_\lambda(t)|_t^2 \leq 2\int_0^t e^{-a(\tau)}|u_\lambda(\tau)-v_\lambda(\tau)|_\tau \, |b_r(\tau)-b_r(0)| \, (1+|A_\lambda^o v_\lambda(\tau)|_o) \, d\tau \quad .$$

D'où

$$e^{-\frac{a(t)}{2}}|u_\lambda(t)-v_\lambda(t)|_t \leq \int_0^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}}|b_r(\tau)-b_r(0)| \, (1+|A_\lambda^o v_\lambda(\tau)|_o) \, d\tau \ .$$

Par (1.9) appliqué à la famille v_λ , on a donc

$$e^{-\frac{a(t)}{2}}|u_\lambda(t)-v_\lambda(t)|_t \leq \int_0^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}}(1+C) \, |b_r(\tau)-b_r(0)| \, d\tau \ .$$

On en déduit passant à la limite $\lambda \longrightarrow 0^+$

$$e^{-\frac{a(t)}{2}}|u(t)-v(t)|_t \leq \int_0^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}}(1+C) \, |b_r(\tau)-b_r(0)| \, d\tau \ .$$

On en déduit que $|u(t)-v(t)|_t = O(t)$ pour $t \longrightarrow 0^+$ c'est-à-dire que u et v sont tangentes en $t = 0^+$. Il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas où A^t ne dépend pas de t .

Ce résultat découle d'une démonstration analogue à celle donnée par exemple dans [6]. En effet si la norme $|.|_o$ est strictement convexe, (resp. uniformément convexe), on vérifie que $\frac{d^+v}{dt}(t)$ est faiblement (resp. fortement) continue en t . Soit v la solution forte de $\frac{dv}{dt} + Av \ni 0$, $v(0) = u_o$. La norme (ici ne dépendant plus de t) sera notée $|.|$. On sait que v est la limite uniforme des fonctions v_λ associées, et est lipschitzienne sur $[0,T]$.

Pour presque tout $s \in [0,T]$, on a $\frac{dv}{ds}(s) + Av(s) \ni 0$, d'où en prenant $u(t) \equiv v(s)$, et pour tout $y \in Av(s)$, on a par (1.11) (ici simplifiée)

$$(1.15) \quad |v(t)-v(s)| \leq \int_s^t |y| d\tau \quad \text{d'où} \quad \left|\frac{dv}{ds}\right| \leq |(Av(s))^o|$$

et par suite de la stricte convexité de la norme, comme $-\frac{dv}{dt} \in Av(s)$ on a $-\frac{dv}{dt} = (Av(s))^o$. Par suite

$$v(t) = u_o - \int_0^t (Av(s))^o \, ds \ .$$

Pour montrer la dérivabilité faible (resp. forte) à droite de v en $t = 0^+$, il suffit de montrer que $t \longmapsto (Av(t))^o$ est faiblement (resp. fortement) continue à droite en 0.

Comme $(Av(s))^o$ reste borné, soit y un point limite faible en $t = 0^+$. Par la demi fermeture de A on a évidemment $y \in Au_o$, donc

(1.16) $$|y| \geq |(Au_o)^o| .$$

Par ailleurs la relation (1.8) se réduit dans ce cas à

$|A_\lambda v_\lambda(t)| \leq |A_\lambda u_o| \leq |(Au_o)^o|$. Comme $J_\lambda v_\lambda(t) \longrightarrow v(t)$ pour $\lambda \longrightarrow 0^+$, et comme $A_\lambda v_\lambda(t) \in AJ_\lambda v_\lambda(t)$, par la demi fermeture de A on a

$|(Av(t))^o| \leq \overline{\lim}_{\lambda \to o^+} |A_\lambda v_\lambda(t)| \leq |(Au_o)^o|$. Faisant $t \longrightarrow 0^+$ (toujours par la demi fermeture de A), on obtient

$$\overline{\lim_{t \searrow o}} \, |(Av(t))^o| \leq |(Au_o)^o| \quad \text{et donc}$$

$$|y| \leq |(Au_o)^o| .$$ En comparant à (1.16) on voit que

$t \longmapsto (Av(t))^o$ est faiblement (resp. fortement) continue dans le cas où $|\cdot|$ est strictement (resp. uniformément) convexe.

Ceci achève la démonstration de la proposition (1.13).

(1.17) Remarque. Comme on le voit sur la démonstration ci-dessus, la condition de stricte convexité peut être omise pour la norme dans le cas où A^t est univoque et le résultat de la proposition (1.13) reste valable.

9°) Solutions faibles de $\frac{du}{dt} + A^t u(t) \ni f(t)$, $u(0) = u_o$.

On définit comme dans le cours de H. Brezis [2] la notion de solution faible. Le graphe de l'opérateur solution faible dans $L^1(0,T;X) \times \mathscr{C}([0,T];X)$ est l'adhérence de l'opérateur solution forte. On a existence et unicité de la solution faible pour toute f de $L^1(0,T;X)$ et toute u_o de $\overline{D}$ grâce à l'estimation (1.11) qui passe aux solutions faibles ainsi que (1.12).

10°) Perturbation lipschitzienne.

(1.18) Théorème. Soit $B(t,x) : [0,T]\times \overline{D} \longrightarrow X$ une application vérifiant $\exists\ K \in L^1(0,T)$, $\forall x,y \in \overline{D}$, $|B(t,x)-B(t,y)|_t \leq K(t)(x-y)_t$ et $\forall x \in \overline{D}$ $t \longmapsto B(t,x) \in L^1(0,T;X)$.

Il existe alors une solution unique de $\frac{du}{dt} + A^t\, u(t) + B(t,u(t)) \ni 0$, $u(0) = u_o \in \overline{D}$ au sens suivant :

Il existe une unique fonction u de $\mathscr{C}([0,T];X)$ qui soit telle que u est solution faible de $\frac{du}{dt} + A^t u(t) \ni v$, $u(0) = u_o$, avec $v(t) = -B(t,u(t))$.

Démonstration : On utilise une méthode de point fixe (cf. Ph. Benilan thèse p.I.21). Soit $S : \mathscr{C}([0,T];\overline{D}) \longrightarrow \mathscr{C}(0,T;\overline{D})$ l'application qui à u associe la solution faible $v = Su$ de $\frac{dv}{dt} + A^t v + B(t,u(t)) \ni 0$, $v(0) = u_o$. Cette fonction existe bien et est unique car $B(t,u(t))$ est dans $L^1(0,T;X)$ (B est de Caratheodory et on a une majoration dans L^1).

D'après (1.11), pour u et $\tilde{u}$ dans $\mathscr{C}(0,T;\overline{D})$ on a

$$e^{-\frac{a(t)}{2}}\, |Su(t)-S\tilde{u}(t)|_t \leq \int_o^t K(\tau)\, e^{-\frac{a(\tau)}{2}}\, |u(\tau)-\tilde{u}(\tau)|_\tau\, d\tau$$

d'où par récurrence

$$e^{-\frac{a(t)}{2}}\, |S^n u(t)-S^n \tilde{u}(t)|_t \leq \frac{1}{n!} \left(\int_o^t K(\tau)\, e^{-\frac{a(\tau)}{2}}\, d\tau\right)^n \sup_{\tau\in[o,t]} |u(\tau)-\tilde{u}(\tau)|_\tau .$$

On en déduit donc que pour n assez grand S^n est contractante de rapport strictement inférieur à 1 , donc que S admet un point fixe unique.

(1.19) Théorème. Soit $B(t,x) : [0,T]\times\overline{D} \longrightarrow X$, une application vérifiant $\exists\ K>0$, pour presque tout t , $\forall x,y \in \overline{D}$, $|B(t,x)-B(t,y)|_t \leq K|x-y|_t$ et $\forall x \in \overline{D}$, $t \longmapsto B(t,x)$ est dans $L^1(0,T;X)$.

On suppose de plus que pour tout $r>0$, il existe $\tilde{b}_r \in W^{1,1}(OT;X)$ tel que

$\forall x \in D$, on a

$$|B(t,x)-B(s,x)|_t \leq |\tilde{b}_r(t)-\tilde{b}_r(s)|\,(1+|(A^s x)^o_s|_s) .$$

Alors, pour tout u_o de D , la solution faible donnée par le théorème (1.18) est une solution forte, c'est-à-dire que u est lipschitzienne et vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A^t\, u(t) + B(t,u(t)) \ni 0 \quad \text{p.p.t} \\ u(0) = u_o . \end{cases}$$

Démonstration : Soit $u_n = S^n u_o$ (avec la notation de la démonstration du théorème (1.18)). On va montrer par récurrence que u_n est solution forte et que les u_n sont bornées dans $W^{1,\infty}(OT;X)$. Comme (u_n) converge, les u_n sont une fonction bornée dans $\mathscr{C}([0,T],X)$.

Soit r un rayon majorant commun. Posons $a_n(t) = |u_n'(t)|_t e^{-\frac{a(t)}{2}}$ et $b_n(t) = |B(t,u_{n-1}(t))|_t\, e^{-\frac{a(t)}{2}}$. Supposons que u_n est dans $W^{1,\infty}(0,T;X)$ (ceci est vrai pour u_o). On a alors

$$|B(t,u_n(t))-B(s,u_n(s))|_t \leq |B(t,u_n(t))-B(t,u_n(s))|_t + |B(t,u_n(s))-B(s,u_n(s)|_t$$

$$\leq K|u_n(t)-u_n(s)|_t + |\tilde{b}_r(t)-\tilde{b}_r(s)|\,(1+|(A^s\, u_n(s)|^o_s|_s) .$$

On en déduit que $t \mapsto B(t,u_n(t))$ est absolument continue et que pour presque tout t ,

$$\left|\frac{d}{dt} B(t,u_n(t))\right|_t \leq K|u_n'(t)|_t + |\tilde{b}_r'(t)|\,(1+|(A^t\, u_n(t))^o_t|_t) .$$

Par ailleurs , u_n est solution forte de

$$\frac{du_n}{dt} + A^t\, u_n(t) \ni - B(t,u_n(t)) \qquad u_n(0) = u_o$$

et donc presque partout en t

$$-\frac{du_n}{dt} - B(t,u_{n-1}(t)) \in A^t\, u_n(t) ,$$

donc $|(A^t\, u_n(t))^o_t|_t \leq |u_n'(t)|_t + |B(t,u_{n-1}(t)|_t$.

Par suite presque partout on a

$$(1.19)\quad \left|\frac{d}{dt} B(t,u_n(t))\right|_t \leq K|u_n'(t)|_t + |\tilde{b}_r'(t)|\,(1+|u_n'(t)|_t + |B(t,u_{n-1}(t)|_t) \ .$$

On en déduit par (1.11), pour $u = u_{n+1}$ et $v(t) = u_{n+1}(t+h)$ et passant à la limite $h \longrightarrow 0$.

$$e^{-\frac{a(t)}{2}} |u_{n+1}'(t)|_t \leq |u_{n+1}'(0)|_o + \int_o^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}} \left|\frac{d}{d\tau} B(\tau,u_n(\tau))\right|_\tau d\tau \ .$$

Comme $u_{n+1}'(0) = A^o u_o + B(0,u_o) = \text{cte}$ on en déduit

$$(1.20)\quad e^{-\frac{a(t)}{2}} |u_{n+1}'(t)|_t \leq C + \int_o^t (K+|\tilde{b}_r'(\tau)|)\, e^{-\frac{a(\tau)}{2}} |u_n'(\tau)|_\tau\, d\tau + \int_o^t |\tilde{b}_r'(\tau)|\, e^{-\frac{a(\tau)}{2}} |B(\tau,u_{n-1}(\tau)|_\tau\, d\tau \ .$$

Par ailleurs par (1.19) on obtient (cf. (1.1))

$$e^{-\frac{a(t)}{2}} |B(t,u_n(t)| \leq |B(0,u_o)|_o + \int_o^t \left|\frac{d}{d\tau} B(\tau,u_n(\tau)\right|_\tau e^{-\frac{a(\tau)}{2}} d\tau$$

d'où

$$(1.21)\quad e^{-\frac{a(t)}{2}} |B(t,u_n(t)| \leq C + \int_o^t (K+|\tilde{b}_r'(\tau)|)\, e^{-\frac{a(\tau)}{2}} |u_n'(\tau)|_\tau\, d\tau + \int_o^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}} |\tilde{b}_r'(\tau)|\,|B(\tau,u_{n-1}(\tau))_\tau|_\tau\, d\tau \ .$$

D'où en appliquant des majorations évidentes :

$$(1.22)\quad \begin{cases} a_{n+1}(t) \leq C + \displaystyle\int_o^t h(\tau)\ (a_n(\tau)+b_n(\tau))\ d\tau \\ b_{n+1}(t) \leq C + \displaystyle\int_o^t h(\tau)\ (a_n(\tau)+b_n(\tau))\ d\tau \end{cases}$$

avec $h \in L^1(0,T)$ h positive ou nulle.

On en déduit $(a_{n+1}(t)+b_{n+1}(t)) \leq 2C + 2\int_o^t h(\tau)(a_n(\tau)+b_n(\tau))\ d\tau$

d'où par récurrence

$$a_n(\tau) + b_n(t) \leqslant 2C \exp(2\int_o^t h(\tau)\, d\tau) .$$

Donc a_n et b_n restent bornés indépendamment de n , c'est-à-dire que les (u_n) restent bornées dans $W^{1,\infty}(0,T;X)$.

Soit alors $\hat{u}$ la solution (forte!) de

$$\frac{d\hat{u}}{dt} + A^t\hat{u} + B(t,u(t)) \ni 0 \quad \hat{u}(0) = u_o .$$

Par (1.11) on a

$$e^{-\frac{a(t)}{2}} |\hat{u}(t)-u_{n+1}(t)|_t \leqslant \int_o^t e^{-\frac{a(\tau)}{2}} K|u(\tau)-u_n(\tau)|_\tau \, d\tau .$$

On en déduit la convergence de u_{n+1} vers $\hat{u}$ dans $\mathscr{C}(0,T,\bar{\mathfrak{D}})$ d'où l'égalité $u = \hat{u}$, ce qui achève la démonstration du théorème (1.19).

II - Une équation hyperbolique du second ordre.

On considère un ouvert borné régulier Ω de $\mathbb{R}^n$ et on fait les hypothèses suivantes :

H.1. $A^t = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j})$ est une famille d'opérateurs différentiels linéaires symétriques du second ordre, uniformément elliptiques sur $L^2(\Omega)$, pour $t \in [0,T]$. Les coefficients a_{ij} vérifient en outre $a_{ij}(t,x) \in W^{1,1}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$.

H.2. La fonction $j : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est telle que $j(t,x,0) = 0$ et que $r \mapsto j(t,x,r)$ est convexe continue sur $\mathbb{R}$ pour $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$. Il existe $b \in W^{1,1}(0,T)$ (croissante) et $C \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ tels que

$$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \quad x \in \Omega \ , \ r \in \mathbb{R} \implies j(t,x,r) \quad j(s,x,r) \leqslant |b(t)-b(s)| \times (j(s,x,r)+c(s,x)) .$$

On note $\beta(t,x,r)$ le sous-différentiel par rapport à r de j , et $\beta^\circ(t,x,r)$

son élément de module minimal. On suppose enfin que $(t,x) \longmapsto \beta^o(t,x,r)$ est dans $L^1((0,T)\times\Omega)$ pour tout réel r .

1°) Enoncé du résultat.

(2.1) Théorème. Sous les hypothèses H.1 et H.2, pour tout u_o de $H_o^1(\Omega)$ tel que $\int_r j(0,x,u_o(x)) < +\infty$, pour tout v_o de $L^2(\Omega)$, et tout f de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, il existe deux fonctions u et g satisfaisant :

$$u \in L^\infty(0,T;H_o^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \ , \ g \in L^1((0,T)\times\Omega) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A^t u + g = f \quad \text{au sens } \mathcal{D}'((0,T\times\Omega)$$

$$u(0,x) = u_o(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_o(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

$$g(t,x) \in \beta(t,u(t(x)) \quad \text{p.p. sur } (0,T)\times\Omega \ .$$

Remarques.

1) Ce théorème généralise au cas A et B dépendant de t et x un résultat de H. Brezis ([3] théorème 33).

2) Il n'y a pas de résultat d'unicité.

2°) Préliminaires.

(2.2) Proposition (Bénilan). Sous l'hypothèse H.2, $\forall \lambda>0$, $\forall r \in \mathbb{R}$, $(t,x) \longmapsto \beta_\lambda(t,x,r)$ est intégrable.

Démonstration : On a en effet $j(t,x,r) = \int_0^r \beta^o(t,x,\rho)\,d\rho$ mesurable à r fixé ; or l'approximation Yosida j_λ de j vérifie $j_\lambda(t,x,r) = \inf_{\rho\in\mathbb{Q}}(j(t,x,\rho) + \frac{1}{2\lambda}(r-\rho)^2)$ et est donc mesurable en t et x . Sa dérivée Fréchet β_λ l'est donc aussi. De plus β_λ est dominée par β^o d'où le résultat.

(2.3) Proposition. Sous l'hypothèse H.2, on a $\forall t\geq s$, $\forall r\in\mathbb{R}$, $\forall \lambda>0$,
$j_\lambda(t,x,r) - j_\lambda(s,x,r) \leq (b(t)-b(s))(j_\lambda(s,x,r)+c(s,x))$.

<u>Démonstration</u> (cf. Watanabe [7]). La variable x joue ici un rôle de paramètre et nous ne la noterons pas dans cette démonstration. Notons $J_\lambda^t = (I+\lambda B(t))^{-1}$ la résolvante Yosida de $B(t)$. On a alors

$j_\lambda(t,r) := j(t,J_\lambda^t r) + \frac{1}{2\lambda}|r-J_\lambda^t r|^2$ d'où par un calcul direct

$$j_\lambda(t,r)-j_\lambda(s,r) \leq j(t,J_\lambda^s r) - j(s,J_\lambda^s r) \leq (b(t)-b(s))(j(s,J_\lambda^s r) + C(s)) .$$

Or $j(s,J_\lambda^s r) \leq j_\lambda(s,r)$ d'où le résultat.

(2.4) <u>Proposition</u>. $\forall\, u \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$, $\forall\, \phi \in W^{1,1}(0,T;L^\infty(\Omega))$ positive, $\forall\, \lambda>0$, $T\geq t\geq s\geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \phi(t,x)\, j_\lambda(t,x,u(t,x))dx - \int_\Omega \phi(s,x)\, j_\lambda(s,x,u(s,x))dx \\
&\quad\leq \int_{[s,t]\times\Omega} \phi(\tau,x)\, \beta_\lambda(\tau,x,u(\tau,x))\, \frac{\partial u}{\partial\tau}(\tau,x)dx\, d\tau \\
&\qquad + \int_{[s,t]\times\Omega} \{j_\lambda(\tau,x,u(\tau,x))\left[\phi(\tau,x)\, \frac{db}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\tau,x)\right]dx\, d\tau \\
&\qquad + \int_{[s,t]\times\Omega} \phi(\tau,x)\, c(\tau,x)\, \frac{db}{d\tau}\, dx\, d\tau .
\end{aligned}$$

<u>Démonstration</u> : Elle est identique à celle de (1.1) et s'obtient en écrivant les différences finies (On montre que $t \longmapsto \int_\Omega \phi(t,x)\, j_\lambda(t,x,u(t,x))dx$ est absolument continue).

3°) <u>Démonstration du Théorème</u>.

Soit $\lambda>0$ et soient $u_{o,\lambda}$ (resp. $v_{o,\lambda}$) dans $H_o^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (resp. $H_o^1(\Omega)$) avec $u_{o,\lambda} \xrightarrow[\lambda\to o^+]{} u_o$ dans $H_o^1(\Omega)$ (resp. $v_{o,\lambda} \xrightarrow[\lambda\to o^+]{} v_o$ dans $L^2(\Omega)$) et avec $\int_\Omega j(0,x,u_{o,\lambda}(x))dx \leq \int_\Omega j(0,x,u_o(x))dx$ lequel est supposé fini (à cet effet, il suffit de prendre $u_{o,\lambda}(x)$ compris entre 0 et $u_o(x)$) .

Soit $f_\lambda \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega)$ avec $f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to o^+]{} f$ dans $L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

On va résoudre le problème approché suivant :

$$\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2}(t,x) + A^t u_\lambda(t,x) + \beta_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x)) = f_\lambda(t,x)$$

$$u_\lambda(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times [0,T] \ ,$$

$$u_\lambda(0,x) = u_{o,\lambda} \quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(0,x) = v_{o,\lambda} \quad \text{sur} \quad \Omega$$ de la manière suivante :

Soit $\mathcal{H} = H_o^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{pmatrix}$ $h = \begin{pmatrix} 0 \\ f_\lambda \end{pmatrix}$.

Le problème approché s'écrit alors :

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} + \mathcal{A}^t\mathcal{U} + B^t\mathcal{U} = h \quad u(0) = u_o = \begin{pmatrix} u_{o,\lambda} \\ v_{o,\lambda} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

où $\mathcal{A}^t = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A^t & 0 \end{bmatrix}$ $B^t\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_\lambda(t,\cdot,u_\lambda(t,\cdot)) \end{bmatrix}$.

On munit $\mathcal{H}$ du produit scalaire variable suivant rendant $\mathcal{A}^t$ monotone (en fait antisymétrique)

$$\{(u_1,v_1),(u_2,v_2)\}_t = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(t,x) \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + v_1 \, v_2 \, dx \ .$$

Alors $\mathcal{A}^t$ est maximal monotone car on a

$$D(\mathcal{A}^t) = \{(u,v) \ ; \quad u \in H^2 \cap H_o^1(\Omega) \ , \quad v \in H_o^1(\Omega)\} \text{ et}$$

$(I+\mathcal{A}^t)\mathcal{U} = G$ s'écrit $u - v = f$ $v + A^t u = g$ d'où $u + A^t u = f + g \in L^2$.
On résoud en u avec $u \in H^2 \cap H_o^1(\Omega)$ (grâce à la régularité des coefficients a_{ij} cf. $H._1$) et l'on en déduit $v \in H_o^1(\Omega)$.

Grâce à l'hypothèse H.1, la norme hilbertienne associée vérifie les hypothèses de dépendance régulière par rapport à t avec une fonction $a(t) \in W^{1,1}(0,T;)$,(croissante) permettant d'utiliser les résultats du premier paragraphe.

Quant à B , il est clair qu'il est lipschitzien (de constante $1/\lambda$).
Le théorème 1.18 assure donc l'existence d'une solution faible $\mathcal{U}$ au problème approché (2.5), (u_λ,v_λ) avec

$$u_\lambda(0) = u_{o,\lambda} \ , \quad v_\lambda(0) = v_{o,\lambda} \quad , \quad u_\lambda \in \mathcal{C}(0,T;H_o^1(\Omega))$$

$$v_\lambda \in \mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega)) \ .$$

Comme les solutions fortes approchant uniformément (u_λ, v_λ) vérifient $\frac{d\tilde{u}_\lambda}{dt} = \tilde{v}_\lambda$, on en déduit $\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} = v_\lambda \in \mathscr{C}([0,T], L^2(\Omega))$.

On a par (1.11), (1.12)

$$\frac{1}{2}\, e^{-a(t)} |u(t)|_t^2 \leqslant \frac{1}{2}|u(0)|_o^2 + \int_o^t e^{-a(\tau)} (-B(\tau)\mathfrak{U}(\tau), \mathfrak{U}(\tau))_\tau \, d\tau$$
$$+ \int_o^t e^{-a(\tau)} (h(\tau), \mathfrak{U}(\tau))_\tau \, d\tau$$

ce qui s'écrit

$$\frac{1}{2}\, e^{-a(t)} \Big[(A^t u_\lambda(t), u_\lambda(t)) + \Big|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big|_{L^2(\Omega)} \Big] \leqslant \frac{1}{2}(A^o u_{o,\lambda}, u_{o,\lambda}) + \frac{1}{2}|v_{o,\lambda}|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \int_o^t e^{-a(\tau)} \Big(f_\lambda(\tau), \frac{du_\lambda}{d\tau}\Big)_{L^2(\Omega)} d\tau - \int_o^t e^{-a(\tau)} \int_\Omega \beta_\lambda(\tau, x, u_\lambda(\tau,x)) \frac{du_\lambda}{d\tau}(\tau, x)\, dx\, d\tau$$

que l'on majore par (2.4) avec $\phi = e^{-a(t)}$ et par les hypothèses sur $u_{o,\lambda}$ et $v_{o,\lambda}$. On obtient

$$\frac{1}{2}\, e^{-a(t)} \Big[(A^t u_\lambda(t), u_\lambda(t)) + \Big|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\Big|_{L^2(\Omega)} \Big] \leqslant Cte + \int_o^t e^{-a(\tau)} \Big(f_\lambda(\tau), \frac{du_\lambda}{d\tau}\Big)_{L^2(\Omega)} d\tau$$
$$+ \int_\Omega e^{-a(s)} j_\lambda(s,x,u_\lambda(s,x)\, dx - \int_\Omega e^{-a(t)} j_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x) dx$$
$$+ \int_{[s,t]\times\Omega} e^{-a(\tau)}\, C(\tau,x) \frac{db}{d\tau}\, dx\, d\tau + \int_{[s,t]\times\Omega} j_\lambda(\tau,x,u(\tau,x)\, e^{-a(\tau)} \Big(\frac{db}{d\tau} - a'(\tau)\Big) dx\, d\tau$$

que l'on majore encore en remplaçant $b' - a'$ par $(b'-a')^+$ dans la dernière intégrale.

Notons $z(t) = \frac{1}{2}\, e^{-a(t)} \Big|\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t)\Big|^2_{L^2(\Omega)} + e^{-a(t)} \int_\Omega j_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x) dx$.

On obtient

$$\frac{1}{2}\, e^{-a(t)} (A^t u_\lambda(t), u_\lambda(t)) + z(t) \leqslant \frac{1}{2}(A^o u_{o,\lambda}, u_{o,\lambda}) + \frac{1}{2}|v_{o,\lambda}|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega j_\lambda(0,x,u_{o,\lambda}(x)) dx$$
$$+ \int_o^t e^{-a(\tau)} \Big(f_\lambda(\tau), \frac{du_\lambda}{d\tau}\Big)_{L^2} d\tau + \int_o^t (b'(\tau) - a'(\tau))^+ \int_\Omega j_\lambda(\tau,x,u_\lambda(\tau,x))\, dx$$
$$+ \text{constante}.$$

Par suite $z(t) \leq C_1 + \int_o^t z(\tau)(1+|b'(\tau)-a'(\tau)|^t)\, d\tau$ car $\int_o^t |f_\lambda|_{L^2(\Omega)}$ reste borné, ainsi que $(A^o u_{o,\lambda}, u_{o,\lambda})$ qui tend vers $(A^o u_o, u_o) \leq k\|h_o\|_{H_o^1(\Omega)}$, que $|v_{o,\lambda}|_{L^2(\Omega)}$ qui tend vers $|v_o|_{L^2(\Omega)}$ et que $\int_\Omega j_\lambda(0,x,u_{o,\lambda}(x))dx$ qui est majoré par $\int_\Omega j(0,x,u_{o,\lambda}(x))dx$.

On en conclut que $z(t)$ reste uniformément borné, en λ et t, d'où l'existence d'une constante C telle que $\forall\ \lambda>0$ voisin de 0, $t \in [0,T]$ on a

$$(2.6) \qquad \left|\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\right|_{L^2(\Omega)},\ (A^t u_\lambda(t), u_\lambda(t))_{H^{-1},H_o^1},\ \int_\Omega j_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x))dx$$

et $|u_\lambda(t)|^2_{H_o^1(\Omega)}$ majorés par C.

On va établir une seconde estimation permettant de passer à la limite lorsque $\lambda \longrightarrow 0^+$. Soit d'abord à cet effet $\mathcal{U} = (u,v)$ une solution forte de $\frac{d\mathcal{U}}{dt} + \mathcal{A}^t\mathcal{U} = (0,g)$. On a alors $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A^t u = g$ dans $L^2(\Omega)$ d'où

$(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u(t)) + (A^t u(t), u(t)) = (g(t), u(t))$ donc en intégrant par parties sur $[0,T]$

$$(2.7) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T), u(T)\right)_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(0), u(0)\right)_{L^2(\Omega)} - \int_o^T \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \int_o^T (g(t), u(t))_{L^2(\Omega)}\, dt\ .$$

L'inégalité (2.7) passe alors aux solutions faibles puisque

$\frac{\partial u_n}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$ dans $\mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega))$, $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{C}(0,T;H_o^1(\Omega))$ et g_n tend vers g dans $L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Appliquons alors (2.7) à la solution u_λ. On a

$$\int_{(0,T)\times\Omega} \beta_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x))\, u_\lambda(t,x)\, dx\, dt + \int_\Omega \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(T,x)\, u_\lambda(T,x)\, dx$$

$$\leq \int_\Omega v_{o,\lambda}(x)\, u_{o,\lambda}(x)\, dx + \int_{[0,T]\times\Omega} \left|\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(t,x)\right|^2 dx\, dt + \int_{[0,T]\times\Omega} f_\lambda(t,x)\, u_\lambda(t,x) dx\, dt$$

Grâce aux majorations 2.6 on voit que

$0 \leq \int_{[0,T]\times\Omega} \beta_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x))\, u_\lambda(t,x)\, dx\, dt$ reste borné lorsque λ tend vers 0 .
Soit $w_\lambda(t,x) = (I+\lambda\beta(t,x))^{-1}\, u_\lambda(t,x)$. On sait qu'alors w_λ est mesurable et p.p. on a

$$\beta_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x)) \in \beta(t,x,w_\lambda(t,x)) \quad \text{et}$$

$0 \leq \beta_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x))\, w_\lambda(t,x) \leq \beta_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x))\, u_\lambda(t,x)$ donc

(2.8) $\quad 0 \leq \int_{[0,T]\times\Omega} \beta_\lambda(t,x,u_\lambda(t,x))\, w_\lambda(t,x)\, dx\, dt \leq$ Cte indépendante de λ .

Grâce à (2.7) on peut extraire une suite $\lambda_n \longrightarrow 0^+$ telle que

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad w - L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$$

$$\frac{\partial u_{\lambda_n}}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{dans} \quad w - L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

et quitte à extraire une nouvelle sous-suite telle que

$$u_{\lambda_n}(t,x) \longrightarrow u(t,x) \quad \text{p.p. sur} \quad [0,T]\times\Omega \ .$$

Dans ces conditions $w_{\lambda_n}(t,x) \longrightarrow u(t,x)$ p.p. sur $[0,T]\times\Omega$ et par suite de (2.8) le résultat suivant de Ph. Bénilan permet de conclure (en extrayant encore une sous-suite) que $\beta_{\lambda_n}(t,x,u_{\lambda_n}(t,x)) \rightharpoonup g(t,x)$ dans $w - L^1((0,T)\times\Omega)$ avec $g(t,x) \in \beta(t,x,u(t,x))$ p.p. sur $[0,T]\times\Omega$.

Le couple u,g satisfait au théorème.

(2.9) <u>Proposition</u> (Ph. Bénilan, généralisant Brezis [3] théorème 18).

Soit H un Hilbert, Ω un espace mesuré borné.
$\phi : \Omega\times H \longrightarrow [0,+\infty[$, $(t,x) \longmapsto \phi(t,x)$ convexe continue en x et telle qu'il existe $\gamma : \Omega\ [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$, $\gamma(t,r)$ croissante en r , intégrable en t avec $|(\partial\phi(t,x))^\circ| \leq \gamma(t,|x|)$ p.p. $t \in \Omega$, $\forall\, x \in H$.

Soient f_n et v_n mesurables de Ω dans H telles que $f_n(t) \in \partial\phi(t,v_n(t))$ p.p. t de Ω , $(f_n-v_n) \in L^1(\Omega)$ et $\int_\Omega (f_n,v_n) \leq$ Cte .

Alors f_n est relativement faiblement compact dans $L^1(\Omega;H)$ et si $v_{n_k}(t) \longrightarrow v(t)$ p.p. $t \in \Omega$, $f_{n_k} \rightharpoonup f$ on a

$$f(t) \in \partial\phi(t,v(t)) \quad \text{p.p.} t \in \Omega .$$

<u>Démonstration</u> : $\partial\phi(t,.)$ étant cycliquement monotone on a

$(f_n(t),v_n(t)-x) + (\partial\phi(t,x)^o,x-0) + (0,\rho(t)-v_n(t)) \geq 0, \forall x \in H$

($\rho(t) \in \partial\phi(t)^{-1}(0)$ non vide) d'où

$$(f_n(t),x) \leq (f_n(t),v_n(t)) + (\partial\phi(t,x)^o,x) \quad \forall x \in H$$

$$f_n(t) \leq \frac{(f_n(t),v_n(t))}{r} + \gamma(t,r) \quad \forall r > 0 .$$

Intégrant sur A mesurable on a $\int_A |f_n(t)|dt \leq \frac{C}{r} + \int_A \gamma(t,r)$.

On en déduit que f_n est equi-intégrable car $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \gamma > 0$, $\mu(A) <$

$\Longrightarrow \int_A \gamma(t,\frac{2C}{\varepsilon})\, dt < \varepsilon/2 \Longrightarrow \int_A |f_n(t)|dt < \varepsilon$. Donc f_n est faiblement relativement compact dans $L^1(\Omega,H)$.

Si $v_n(t) \longrightarrow v(t)$ p.p.t de Ω, et $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^1(\Omega,H)$ soit A mesurable tel que $v_n \longrightarrow v$ uniformément sur A et $\mu(\Omega \setminus A) < \varepsilon$ et que de plus $|v_n(t)| \leq M$ sur A. Soit $A_1 \subset A$ tel que $\gamma(t,2M)$ soit borné sur A_1 et $\mu(A \setminus A_1) < \varepsilon$. On a alors $|f_n(t)| \leq 1/2|f_n(t)| + \sup_{A_1} \gamma(t,2M)$, donc f_n est borné sur A_1 . Considérant des suites extraites telles que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans $L^2(A_1,H)$, on a $v_{n_k} \longrightarrow v$ dans $L^2(A_1,H)$ donc $f(t) \in \partial\phi(t,v(t))$ par la demi fermeture de $\partial\phi(t,.)$, ε étant arbitraire, ceci a lieu p.p. sur Ω .

Bibliographie.

[1] PH. BENILAN - Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications (Thèse).
Publications Mathématiques d'Orsay n°25 (1972).

[2] H. BREZIS - Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.
Math. Studies Vol.5, North Holland.

[3] H. BREZIS - Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non linear partial differential equations.
Contribution to Non-linear Functional Analysis, Zarantonello ed., Academic Press (1971) pp.101-156.

[4] M. CRANDALL - A PAZY - Non linear evolution equations in Banach spaces.
Israel Journal of Mathematics (1972).

[5] T. KATO - Non linear semi-groups and evolution equations.
J. Math. Soc. Japan 19 (1967) pp. 508-520.

[6] A. DAMLAMIAN - Opérateurs maximaux monotones et équations d'évolution.
Séminaire sur les semi-groupes et les équations d'évolution (J. Deny), Orsay 1971-72.

[7] J. WATANABE - On certain non linear evolution equations.
University of Electro-Communications Tokyo (à paraître).

-:-:-:-:-:-

-:-:-:-

-:-