UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

72-7410

La variation totale d'une fonction

(1ère partie)

Michel Bruneau

Publications Mathématiques d'Orsay
1974

La variation totale d'une fonction

(1ère partie)

Michel Bruneau

Publications Mathématiques d'Orsay
1974

INTRODUCTION

Ce livre voudrait redonner un "air de jeunesse" à l'étude des fonctions d'une (ou plusieurs) variable(s) réelle(s) et plus précisément aux remarquables travaux consacrés à ces fonctions par A. S. Besicovitch, A. Denjoy, A. Khintchine, A. Kolmogoroff, N. Lusin, J. Marcinkiewicz, F. Riesz, S. Saks, W. Sierpinski, etc... Nous nous attachons tantôt à élucider des problèmes particuliers (Chapitres I, II, III et Annexes II, III), tantôt à dégager une notion générale (Chapitres IV à VII). Mais dans un cas comme dans l'autre nous avons en vue des applications - aux probabilités : étude des trajectoires des processus stochastiques - à la théorie des séries de Fourier : exemples de fonctions continues, très irrégulières - à la théorie des nombres : problèmes d'approximation - à la théorie de la mesure : association à toute fonction de certaines mesures et étude de ces mesures - à la théorie des groupes : extension aux applications d'un groupe localement compact dans lui-même du concept de variation. (Voir l'Annexe I).

La notion de fonction à p-variation bornée $(p \geq 1)$ est due à L. C. Young et N. Wiener. Une fonction $f : T \to R$, où T est une partie fermée de $\bar{R}$ est à p-variation bornée si et seulement si elle se factorise en une fonction monotone croissante $g : T \to [0,1]$ et une fonction lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{p}$ $f' : [0,1] \to R$. Cette caractérisation est à l'origine d'un certain nombre de propriétés intéressantes, qui ont été établies dans [1] et que nous rappelons au Chapitre I.

Si, pour une fonction $f : T \to \mathbb{R}$ à p-variation bornée, la p-variation est obtenue en considérant des subdivisions de T arbitrairement fines, la fonction f est dite p-fine. Ces fonctions se présentent assez naturellement en analyse et possèdent de curieuses propriétés. Ainsi, pour $p > 1$, les fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-\frac{n}{p}} \cos 2^n \pi x \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-\frac{n}{p}} \sin 2^n \pi x$$

sont p-fines. Au chapitre II nous caractérisons les points extrémaux de la boule unité de l'espace des fonctions à p-variation bornée et montrons en particulier que ce sont des fonctions p-fines.

Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est p,α-fine $(p > 1 \; , \; \alpha > 0)$ si l'on a sur $[0,1]$

$$(2) \qquad \begin{aligned} &|f(y) - f(x)|^p \leq \alpha |y - x| \\ &\overline{\lim_{y \to x}} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|} = \alpha \qquad (\text{p. p.}). \end{aligned}$$

Les fonctions (1) sont p,α-fines. Toute fonction p,α-fine est p-fine et, par un "changement de temps", toute fonction p-fine se ramène à une fonction p,α-fine. Nous établissons au Chapitre III une corrélation entre l'étude des fonctions p,α-fines et un problème d'approximation numérique : l'approximation par une suite (λ_k). Les annexes II et III sont également consacrées aux fonctions p,α-fines.

Dans la suite de ce livre nous adoptons un point de vue tout à fait différent. Au Chapitre IV nous étudions les mesures de Carathéodory, définies sur la droite réelle, à l'aide d'une fonction déterminante $I \to h(I)$, définie elle-même sur l'ensemble des intervalles ouverts de la droite réelle. Les mesures de Hausdorff, les mesures finies positives, les mesures σ-finies, diffuses, positives, sont de Carathéodory. Le principal résultat de ce Chapitre est la généralisation du théorème de A. S. Besicovitch : "On the existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure", à toute mesure de Carathéodory diffuse. Ce théorème, établi en 1951 par A. S. Besicovitch pour les α-mesures de Hausdorff, fut étendu par D. G. Larman aux h-mesures de Hausdorff en 1965.

Le chapitre V est certainement le plus important. Nous y abordons le problème suivant. A toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à variation bornée sont associées de façon naturelle quatre mesures finies. La mesure de Lebesgue-Stieltjes de f : ℓ_f. La croissance et la décroissance de f : c_f et d_f. La variation totale de f : v_f. Ces mesures sont liées entre elles par les relations

$$(3) \qquad \begin{aligned} \ell_f &= c_f - d_f \\ |\ell_f| &\leq c_f + d_f = v_f. \end{aligned}$$

Est-ce que, plus généralement, les mesures ℓ_f, c_f, d_f et v_f peuvent être convenablement définies pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arbitraire ? A cette question, qui semble être à l'origine de certains travaux modernes tels que ceux de B. H. Browne, A. M. Bruckner, J. H. W. Burry, H. W. Ellis et R. L. Jeffery, nous donnons une réponse en deux temps.

Le point de départ, pour l'étude des mesures ℓ_f, c_f et d_f, est un résultat sur les "nombres dérivés", que nous démontrons ici directement, mais qui est en réalité un corollaire du théorème de A. Kolmogoroff et J. Vercenko, dit du "contingent incomplet": toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en presque tout point $x \in \mathbb{R}$ où elle est continue et où

$$\varlimsup_{y \to x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| > 0.$$

Soit alors L_f la réunion de l'ensemble des points de discontinuité de première espèce de f et de l'ensemble des points de continuité vérifiant (4). On prouve que le graphe de la restriction de f à L_f est une réunion dénombrable de graphes de fonctions monotones. Il existe donc des mesures σ-finies ℓ_f, c_f et d_f, associées à f, portées par L_f et généralisant parfaitement les mesures correspondantes, associées à toute fonction à variation bornée. De ces mesures nous donnons ici plusieurs définitions équivalentes. (Voir le Chapitre V, mais également l'Annexe I). Or, tout à fait indépendamment de nous, ces mesures ont également été découvertes par B. H. Browne (Proc. London Math. Soc. 3, 27 (1973), 1-21), qui en donne une définition différente, mais équivalente, et qui n'en prouve la σ-finitude que dans le cas particulier où f est continue.

Reste à définir la variation totale v_f. Sauf dans des cas très particuliers il ne sera pas possible de poser $v_f = c_f + d_f$. En effet, cela suppose au minimum que f soit presque partout dérivable. Par ailleurs, une fonction peut être très irrégulière et vérifier $c_f = d_f = 0$. Nous définissons donc v_f comme la somme d'une mesure de Carathéodory et des masses $+\infty$ portées par les points de discontinuité de deuxième espèce de f. Plus précisément, si f est continue, v_f sera la mesure de Carathéodory de fonction déterminante $h : I \to |f(I)|$. Avec cette définition il est intéressant de noter que, pour toute fonction f,

(5) $$v_f(. \cap L_f) = c_f + d_f.$$

Les Chapitres VI et VII ont pour objet de dégager certains "matériaux" qui devraient à notre avis, intervenir utilement dans le développement futur de l'étude de la variation des fonctions. Au Chapitre VI nous donnons une généralisation du théorème de décomposition de Lebesgue. Etant données deux mesures positives arbitraires, définies sur un même espace mesurable, μ et ν, il existe une décomposition de μ par rapport à ν :

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 \qquad (\nu), \tag{6}$$

telle que, si μ et ν sont σ-finies, $\mu_0 = 0$ et $\mu_1 + \mu_2$ soit la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à ν.

Le Chapitre VII est consacré à la démonstration d'un nouveau résultat sur les "nombres dérivés" d'une fonction, qui généralise un aspect du théorème classique de Denjoy-Young-Saks et qui, curieusement, donne en corollaire un résultat assez récent de S. J. Taylor : la loi bilatérale du logarithme itéré (Voir l'Annexe I).

Enfin l'Annexe IV montre que la notion de variation d'une fonction sur un compact à 60 ans d'âge, que l'idée première revient à N. Lusin et A. Denjoy, et que notre travail s'inscrit tout simplement dans un prolongement de leurs travaux, aussi bien que de ceux de A. Khintchine, S. Saks, etc...

Chaque chapitre peut en principe se lire indépendamment des autres et est suivi de sa propre bibliographie ; il en est de même des annexes. Chapitres et annexes ne sont en fait que des ébauches de questions qui mériteraient sans doute une étude plus approfondie. A cet égard nous avons cherché à dégager et à mettre clairement en évidence les principaux problèmes que nous n'avons pas su résoudre et que nous pensons "ouverts". Nous n'exclusons pas que plusieurs de ces problèmes soient faciles : d'autres en revanche peuvent s'avérer difficiles. Dans chaque cas nous serons toujours très reconnaissants aux lecteurs assidus qui, prenant quelque plaisir à les considérer comme de petits exercices, nous communiqueraient la solution de certains d'entre eux.

Je tiens à remercier vivement MM. J.-P. Kahane, P. A. Meyer et Y. Meyer pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée dans l'élaboration de ce travail. Je remercie également MM. G. Choquet et M. Mendes-France pour de nombreuses et intéressantes remarques et M. B. Volkmann qui a eu la gentillesse de m'écrire au sujet du Chapitre III. Je remercie encore MM. A. Achour, F. Boutang et C. Gachet qui m'ont aidé à relire certaines parties du manuscrit.

Ce livre ne serait jamais paru sans le soutien amical que nous a si généreusement prodigué M. J.-P. Kahane, depuis maintenant plusieurs années; je l'en remercie ainsi que Mme Dumas qui a mis toute sa compétence au service de la frappe de ce texte.

[1] Thèse. Strasbourg 1970.

A Tunis, le 22 janvier 1974

Michel Bruneau
Faculté des Sciences mathématiques,
physique et naturelles
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
Le Belvédère

TUNIS, Tunisie

TABLE DES MATIERES

Chapitre I

FONCTIONS A p-VARIATION BORNEE

Les fonctions à p-variation bornée ont été introduites par N. Wiener en vue d'obtenir un critère de convergence pour les séries de Fourier. La même motivation est à l'origine de l'introduction par L. C. Young de la notion de fonction à φ-variation bornée, puis des autres études portant sur ces fonctions, dues principalement à J. Marcinkiewicz, R. Salem, puis tout récemment à V. I. Goloubov. On pourrait citer d'autres applications telles que celle faite par F. W. Gehring à un problème de moments. Toutefois, ce qui justifie de s'intéresser aux fonctions à p-variation bornée pour elles-mêmes, est leur fréquente apparition en analyse. Ainsi par exemple, du point de vue de l'étude des trajectoires d'un processus, il faut mentionner les très beaux travaux de J. Bretagnole, S. J. Taylor, etc..

Les résultats que nous donnons dans ce premier chapitre, dont les démonstrations figurent dans [5], correspondent semble-t-il à la première étude systématique des fonctions à p-variation bornée.

I. ESPACE DE BANACH DES FONCTIONS A p-VARIATION BORNEE.

Soit une partie fermée T de $\bar{R}$ et un nombre $p > 1$. Pour toute fonction

$f : T \to \mathbb{R}$, désignons par $v_p(f)$ la borne supérieure des nombres

(1) $$\sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^p$$

où $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est une suite ordonnée de points de T. $v_p(f)$ <u>est la p-variation de f. Une fonction f est dite à p-variation bornée (à p-v.b.) si</u> $v_p(f) < +\infty$.

$\mathcal{B}_p(T)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions à p-v.b., définies sur T "modulo une constante".

THEOREME 1. $\mathcal{B}_p(T)$ <u>est un espace de Banach pour la norme</u>

(2) $$V_p(f) = (v_p(f))^{\frac{1}{p}}.$$

Si, pour tout nombre $0 < \alpha \leq 1$, $\Lambda_\alpha(T)$ désigne l'ensemble des fonctions $f : T \to \mathbb{R}$ lipschitziennes d'ordre α, on a :

PROPOSITION 1. <u>Pour tout nombre</u> $p \geq 1$, <u>on a</u>

(3) $$\Lambda_{\frac{1}{p}}(T) \subset \mathcal{B}_p(T)$$

<u>si et seulement si T est borné.</u>

Lorsque T est borné, il est naturel de se demander si, au sens de la norme V_p, $\Lambda_{\frac{1}{p}}(T)$ est une partie fermée de $\mathcal{B}_p(T)$ et sinon, quelle est sa fermeture. Nous répondrons à cette question au paragraphe VI.

II. FACTORISATION DES FONCTIONS A p-v.b.

Pour tout fermé T de $\overline{\mathbb{R}}$, désignons par $\Lambda_{\frac{1}{p}}(T)$ l'ensemble des fonctions

$f : T \to \mathbb{R}$ lipschitziennes d'ordre $\frac{1}{p}$. Par ailleurs étant donnée une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ désignons, quel que soit $x \in T$, par $v_p(f , [-\infty, x])$ la p-variation de la restriction de f à $[-\infty , x] \cap T$ et soit

$$g(x) = v_p(f , [-\infty , x]) \qquad (x \in T). \tag{4}$$

On a le résultat suivant.

THEOREME 2. <u>Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, il existe une fonction $f' \in \Lambda_{\frac{1}{p}}(\overline{g(T)})$ définie de façon unique telle que</u> $f = f' \circ g$.

Nous dirons que $f' \circ g$ <u>est la factorisation canonique de f.</u>

COROLLAIRE. <u>Une</u> C.N.S. <u>pour qu'une fonction</u> $f : T \to \mathbb{R}$ <u>soit à</u> p-v.b. <u>est qu'elle se factorise en une fonction monotone croissante</u> $g : T \to [0 , 1]$ <u>et une fonction lipschitzienne d'ordre</u> $\frac{1}{p}$ $f' : [0 , 1] \to \mathbb{R}$.

III. CALCUL DE LA p-variation D'UNE FONCTION.

Lorsqu'on calcule la variation totale d'une fonction à variation bornée, on utilise des subdivisions de plus en plus fines. De façon précise, pour toute suite finie $t_1 < t_2 \dots < t_n$ de points de T, posons

$$s = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

et

$$S_p^s(f) = \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^p , \tag{5}$$

ceci quels que soient la fonction $f : T \to \mathbb{R}$ et le nombre $p \geq 1$. Pour $p = 1$, si (s_n) est une suite croissante de parties finies de T telles que $\overline{\bigcup_n s_n} = T$, la variation totale de f est égale à

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} S_1^{s_n}(f).$$

Pour $p > 1$, nous dirons qu'une partie fermée F de T est <u>(p-) totale</u> pour f, s'il existe une suite croissante (s_n) de parties finies de F telles que

$$(7) \qquad v_p(f) = \lim_{n\to\infty} S_p^{s_n}(f)$$

et $\overline{\bigcup_n s_n} = F$. Prenons deux exemples.

<u>Exemples.</u>

a) Si f est une bijection continue de $[0\ ,\ 1]$ sur lui-même, $F = \{0, 1\}$ est, pour $p > 1$, la seule partie p-totale pour f.

b) Soit f la fonction continue, monotone sur les intervalles $\left[0\ ,\ \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}\ ,\ 1\right]$, telle que

$$(8) \qquad f(0) = 0\ ,\quad f(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3}\ ,\quad f(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{3}\ ,\quad f(1) = 1.$$

Si $1 < p < 2$, $F = \left\{0\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ 1\right\}$ est la seule partie totale pour f. Si $p = 2$, f admet deux parties totales, F et $G = \{0, 1\}$. Si $p > 2$, G est la seule partie totale pour f.

Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, savoir si elle admet une partie totale est un problème difficile et qui n'admet pas toujours une réponse positive. Ainsi, pour $p > 1$ donné, la fonction

$$(9) \qquad \begin{aligned} f(x) &= x \qquad\qquad (0 \leq x < 1) \\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$

est à p-v.b., mais n'admet aucune partie totale.

On a cependant le résultat suivant, d'où l'on déduit que <u>toute fonction à p-v.b. continue admet au moins une partie totale.</u>

THEOREME 3(*). *Soit une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ continue. Une C.N.S. pour qu'une partie fermée F de T soit totale pour f est qu'il existe une suite (s_n) de parties finies de T, convergeant, au sens de la métrique naturelle sur l'ensemble des parties fermées de $\overline{\mathbb{R}}$, vers F, telle que*

(7)
$$v_p(f) = \lim_{n\to\infty} S_p^{s_n}(f).$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et toute partie A de $\overline{\mathbb{R}}$, désignons par $v_p(f,A)$ la p-variation de la restriction de f à $A \cap T$ (qui peut être définie pour A quelconque). Signalons alors deux conséquences du théorème 3.

THEOREME 4. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ continue et toute suite décroissante (F_n) de fermés de T*

(10)
$$v_p(f\ ,\ \bigcap_n F_n) = \lim_{n\to\infty} v_p(f\ ,\ F_n).$$

THEOREME 5. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ continue l'ensemble des points $x \in T$ vérifiant*

(11)
$$v_p(f) = v_p(f\ ,\ [-\infty, x]) + v_p(f\ ,\ [x\ ,\ +\infty])$$

est une partie totale.

(*) C'est le résultat crucial de l'étude de la p-variation.

Ce dernier résultat, très surprenant, est d'un grand intérêt technique. Or, il est bon de remarquer qu'il ne se généralise pas à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, alors que tous les résultats antérieurs, ainsi que plusieurs des résultats dont nous allons parler maintenant, se généralisent aisément au cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach réel.

Remarque. Soit une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$. Si un point $x \in T$ appartient à une partie totale pour f, on a nécessairement (11). Autrement dit, il résulte du théorème 5 que l'ensemble des $x \in T$ vérifiant (11) est la plus grande partie totale pour f, ceci pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ continue.

IV. p-VARIATION FINE.

L'existence, pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ continue, d'une partie totale, permet déjà de préciser le calcul de la p-variation d'une telle fonction. En fait une étude plus poussée montre que cette p-variation est la somme d'une "variation fine", correspondant à une intégrale, et d'une "variation grossière", correspondant à une série. Soient en effet F une partie fermée de T, totale pour f, $[x_k, y_k]$ $k \in \mathbb{N}$ les intervalles contigus à F et (s_n) une suite croissante de parties finies de F telle que

$$\lim_{n\to\infty} S_p^{s_n}(f) = v_p(f)$$

$$F = \overline{\bigcup_n s_n}.$$

Si nous posons, pour toute partie finie s de T et tout nombre $\alpha > 0$,

$$S^s_{p,\alpha}(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(|f(t_{i+1}) - f(t_i)|^p \wedge \alpha \right),$$

où $s = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, il est immédiat que

$$v_p(f) = \lim_{n\to\infty} S_p^{s_n}(f)$$

$$= \lim_{\alpha\downarrow 0} \lim_{n-\infty} S_{p,\alpha}^{s_n}(f) + \sum_{k=1}^{\infty} |f(y_k) - f(x_k)|^p \quad ;$$

le premier terme, noté $v_p^*(f,F)$, est appelé p-variation fine de f sur F ; le second est appelé p-variation grossière de f sur F. Nous allons donner ici une expression explicite de la p-variation fine : $v_p^*(f,F)$.

DEFINITION 1. Pour toute fonction $f : T \to \mathbb{R}$ et toute partie A de $\overline{\mathbb{R}}$, on appelle p-variation fine de f sur A le nombre

(12) $$v_p^*(f,A) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \sup_{\substack{s\subset A\cap T \\ s \text{ fini}}} \sum_{i=1}^{n-1}(|f(t_{i+1}) - f(t_i)|^p \wedge \alpha) ,$$

où $s = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. En particulier on appelle p-variation fine de f le nombre

(13) $$v_p^*(f) = v_p^*(f,T).$$

Le théorème suivant donne deux autres expressions de la p-variation fine.

THEOREME 6. Soit une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique. Pour toute partie A de T, $[x_k , y_k]$ $(k\in\mathbb{N})$ désignant les intervalles contigus à $\overline{g(A)}$,

(14) $$v_p^*(f,A) = \inf_{s\subset A} \sum_{i=0}^{n} v_p(f ,]t_i , t_{i+1}[\cap A) \quad \cdot$$

(15) $$v_p^*(f,A) + \sum_{k=1}^{\infty} |f'(y_k) - f'(x_k)|^p = \inf_{s\subset A} \sum_{i=0}^{n} v_p(f , [t_i,t_{i+1}]\cap A) ,$$

avec $s = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $t_o = \inf A$, $t_{n+1} = \sup A$.

La p-variation fine possède encore les propriétés suivantes.

THEOREME 7. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et toute partie A de T,

$$v_p^*(f,A) = v_p^*(f,\bar{A}). \tag{16}$$

THEOREME 8. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, il existe une mesure $\nu_p(f,.)$ portée par T, positive, bornée, diffuse, qui coïncide avec $v_p^*(f,.)$ sur l'ensemble des parties fermées de T.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, nous désignons maintenant par $\nu_p(f,.)$ l'unique mesure définie sur la σ-algèbre des boréliens de T, coïncidant avec $v_p^*(f,.)$ sur l'ensemble des parties fermées de T.

DEFINITION 2. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, nous dirons que $\nu_p(f,.)$ est la mesure de la p-variation fine de f et noterons $\eta_p(f,.)$ la densité de la partie absolument continue de cette mesure.

Des théorèmes 7 et 8 on déduit :

COROLLAIRE. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et toute partie A de T,

$$v_p^*(f,A) = \nu_p(f,\bar{A}). \tag{17}$$

En utilisant en particulier le corollaire précédent, on obtient encore :

THEOREME 9. <u>Etant donné une fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$, <u>dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique, la mesure de la p-variation fine de f' est l'image par g de la mesure de la p-variation fine de f.</u>

<u>Remarque.</u> Pour établir les théorèmes 8 et 9 il suffit, comme nous l'avons fait dans [5], de se limiter au cas où $T = [0\ ,\ 1]$. En effet, si $T \subset [0,1]$ et si $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction à p-v.b. prolongeant f, $v_p^*(f,.)$ est la restriction de $v_p^*(\tilde{f},.)$ à l'ensemble des parties de T et $\nu_p(f,.)$ est la restriction de $\nu_p(\tilde{f},.)$ à l'ensemble des boréliens de T.

<u>Exemples.</u>

a) Si une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable, elle peut très bien n'être à p-v.b. pour aucune valeur de $p \geq 1$; cependant si, pour un nombre $p > 1$, f est à p-v.b., $v_p^*(f) = 0$. En effet, il suffit de prouver que la mesure de la p-variation fine de f est la mesure nulle, soit encore que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la mesure de la p-variation fine de f sur

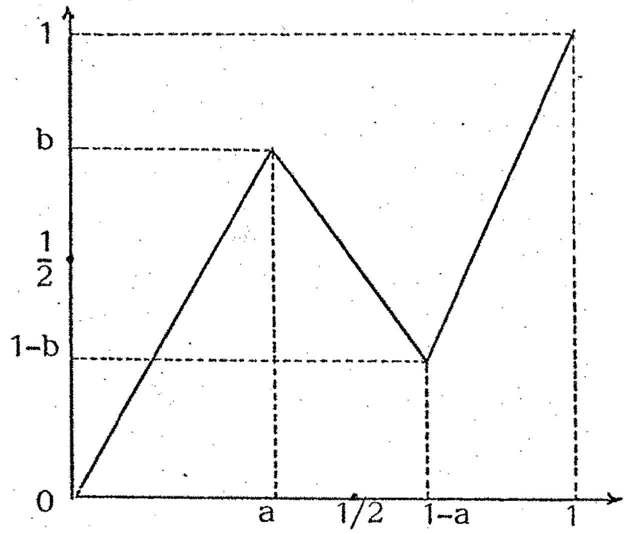
(18) $$\left\{ x \;\middle|\; \left|\frac{df(x)}{dx}\right| \leq n \right\}$$

est nulle, ce qui est immédiat d'après le théorème des accroissements finis.

b) Il existe, pour tous nombres $0 < a < \frac{1}{2} < b < 1$, une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ unique vérifiant, pour $0 \leq \lambda \leq 1$, les conditions suivantes

(19) $$\begin{aligned} & f(0) = 0 \quad , \quad f(a) = b \\ & f(1-\lambda) = 1 - f(\lambda) \\ & f(\lambda a) = f(\lambda)b \\ & f(a+\lambda(1-2a)) = b + f(\lambda)(1-2b) \quad ; \end{aligned}$$

Désignons par $\varphi_{a,b}$ cette fonction. (19) donne un procédé de construction, dont nous représentons la première étape par la graphique ci-dessous.



Soit $p > 1$ l'unique solution de l'équation

$$2b^p + (2b-1)^p = 1. \tag{20}$$

$\varphi_{a,b}$ <u>est une fonction continue à p-v.b.</u>. De plus la fonction lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{p}$ qui lui est associée dans la factorisation canonique est $\varphi_{b^p,b}$.

En particulier à la fonction à 2-v.b., $\varphi_{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}$, est associée, dans la factorisation canonique, la fonction lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{2}$, $\varphi_{\frac{4}{9},\frac{2}{3}}$. $p > 1$ <u>étant défini par</u> (20), <u>la mesure de la p-variation fine de</u> $\varphi_{a,b}$ <u>est une mesure singulière de masse</u> 1 <u>si</u> $a \neq b^p$, <u>et est la mesure de Lebesgue si</u> $a = b^p$.

c) Si une fonction $f : T \to \mathbb{R}$ est à p-v.b., $v^*_q(f) = 0$, pour tout nombre $q > p$.

V. DENSITE DE LA p-VARIATION FINE.

THEOREME 10(*). <u>Soit une fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$, <u>où</u> T <u>est une partie fermée de</u> $\mathbb{R}$ <u>de mesure non nulle.</u>

a) <u>Sur</u> T

(*) Au même titre que le théorème 3, c'est un résultat difficile.

$$(21) \qquad \overline{\lim_{\substack{y\to x\\ y<x}}} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{x-y} = \overline{\lim_{\substack{y\to x\\ x<y}}} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{y-x} \quad (\text{p. p.}).$$

b) <u>La fonction définie sur</u> T <u>par</u>

$$(22) \qquad x \longrightarrow \overline{\lim_{y\to x}} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|}$$

<u>est intégrable et est une version de la densité (de la partie absolument continue) de la mesure de la p-variation fine de</u> f.

c) <u>La partie singulière de la mesure de la p-variation fine de</u> f <u>est portée par l'ensemble</u>

$$(23) \qquad N = \left\{ x \;\middle|\; \overline{\lim_{y\to x}} \frac{|f(y)-f(x)|^p}{|y-x|} = +\infty \right\}.$$

On déduit de ce résultat la forme explicite de la p-variation fine, que nous cherchions à mettre en évidence.

THEOREME 11. <u>Soit une fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$, <u>dont</u> $f' \circ g$ <u>désigne la factorisation canonique. Pour toute partie</u> A <u>de</u> T,

$$(24) \qquad v_p^*(f,A) = \int_{\overline{g(A)}} \overline{\lim_{y\to x}} \frac{|f'(y)-f'(x)|^p}{|y-x|} \, dx .$$

<u>Remarque.</u> Ce résultat se déduit rapidement des précédants. En effet, on a

$$v_p^*(f,A) = v_p^*(f', g(A))$$

et, d'après les théorèmes 7 et 8,

$$v_p^*(f', g(A)) = \nu_p(f', \overline{g(A)}) .$$

La fonction f' étant lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{p}$, la mesure $\nu_p(f',.)$ est absolument continue et il résulte donc du théorème 10 que

$$\nu_p(f', \overline{g(A)}) = \int_{\overline{g(A)}} \overline{\lim_{y - x}} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|} dx .$$

Voici maintenant une nouvelle caractérisation des parties totales.

THEOREME 12. <u>Soit une fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$, <u>dont $f' \circ g$ désigne la factorisation canonique. Pour qu'une partie A de T soit totale pour f, il faut et il suffit que, $[x_k , y_k]$ $(k \in N)$ désignant les intervalles contigus à</u> $\overline{g(A)}$,

(25) $$v_p(f) = \int_{\overline{g(A)}} \overline{\lim_{y \to x}} \frac{|f'(y) - f'(x)|^p}{|y - x|} dx + \sum_{k=1}^{\infty} |f'(y_k) - f'(x_k)|^p .$$

VI. FONCTIONS LIPSCHITZIENNES D'ORDRE $\frac{1}{p}$ ET FONCTIONS p-ABSOLUMENT CONTINUES(*).

Nous allons répondre ici à une question posée au paragraphe I. $\Lambda_{\frac{1}{p}}(T)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}_p(T)$ qui n'est pas fermé au sens de la norme V_p (ceci est facile à prouver). Par ailleurs, pour toute fonction $f \in \Lambda_{\frac{1}{p}}(T)$, la mesure $\nu_p(f,.)$ est absolument continue. Or, la fermeture de $\Lambda_{\frac{1}{p}}(T)$ dans $\mathcal{B}_p(T)$ est justement l'ensemble des $f \in \mathcal{B}_p(T)$ continues, pour lesquelles la mesure $\nu_p(f,.)$ est absolument continue.

DEFINITION 3. <u>Une fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$ <u>est dite p-absolument continue si, pour</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un nombre</u> $\eta > 0$ <u>tel que,</u> $[x_k , y_k]$ $(k \in N)$ <u>étant une suite d'intervalles de</u> $\mathbb{R}$ <u>deux à deux disjoints, on ait</u>

(*) cas où T est borné.

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_p(f\ ,\ ]x_k, y_k[) \leq \varepsilon \tag{26}$$

dès que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k) \leq \eta . \tag{27}$$

THEOREME 13. Soit une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) f est p-absolument continue.

b) f est limite au sens de la norme V_p, de fonctions lipschitziennes d'ordre $\frac{1}{p}$.

c) f est continue et $\nu_p(f,.)$ est absolument continue.

VII. FONCTIONS p-FINES.

D'après les quelques exemples qui ont été donnés précédemment, il apparaît que si une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ n'est constante sur aucun intervalle et est assez régulière, elle ne peut admettre que de "petites" parties totales (par exemple finies ou dénombrables). Ainsi, si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est un polynôme, pour tout nombre $p > 1$, f est à p-v.b. et toute partie p-totale pour f est finie.

Si une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, qui n'est constante sur aucun intervalle, admet une partie totale "assez grosse" (par exemple ayant la puissance du continu), elle est nécessairement très irrégulière. Or, les exemples les plus naturels de telles fonctions correspondent au cas où T est totale pour f.

DEFINITION 4. Une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ est dite (p-)fine si T est totale pour f.

Le théorème 3 permet facilement de construire de telles fonctions. Notons par exemple que les fonctions $\varphi_{a,b}$, définies au paragraphe IV sont p-fines, $p > 1$ étant l'unique nombre vérifiant (20). En revanche, il est très pénible de montrer le résultat suivant (une quinzaine de lemmes techniques sont nécessaires dans l'état actuel de la démonstration).

THEOREME 14. Toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ est somme de deux fonctions fines.

Ce théorème donne lieu à deux interprétations. Tout d'abord, il y a "beaucoup" de fonctions fines. Ensuite, aucune fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ n'est "plus irrégulière" qu'une fonction fine.

Remarque. Si une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ admet une partie totale $F \subset T$, la restriction de f à F est p-fine.

VIII. FONCTIONS p, α-FINES.

La p-variation d'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, p-fine, est déterminée par la connaissance de la mesure $\nu_p(f,.)$. Pour une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ quelconque il faut faire intervenir en outre les nombres $|f(x+) - f(x)|$, $|f(x) - f(x-)|$ correspondant respectivement aux points de discontinuité à droite, à gauche, de la fonction f, ainsi que les nombres $|f(y) - f(x)|$ où $[x , y]$ est un intervalle contigu à T. Un cas particulièrement intéressant est celui où la mesure $\nu_p(f,.)$ est proportionnelle à la trace sur T de la mesure de Lebesgue. Si on impose de plus la continuité, on peut donner de ces fonctions la définition suivante.

DEFINITION 5. Soient une partie compacte T de $\mathbb{R}$, $a = \inf T$, $b = \sup T$. Une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ est p, α-fine, avec $\alpha(b-a) = v_p(f)$, si elle est p-fine et si elle vérifie sur T

(28) $$|f(y) - f(x)|^p \leq \alpha \; |y - x| .$$

THEOREME 15. Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et $f' \circ g$ sa factorisation canonique. Une C.N.S. pour que f soit p-fine est que f' soit p, 1-fine.

Si f' est p, 1-fine, donc p-fine, $\overline{g(T)}$ est une partie totale pour f'. Ainsi, pour toute partie finie $s = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de T, il vient, si l'on pose $t_o = \inf T$, $t_{n+1} = \sup T$,

$$\sum_{i=0}^{n} v_p(f \;,\; [t_i \;,\; t_{i+1}]) = \sum_{i=0}^{n} v_p(f' \;,\; g([t_i \;,\; t_{i+1}]))$$

$$= \sum_{i=0}^{n} v_p(f' \;,\; [g(t_i) \;,\; g(t_{i+1})]) = v_p(f') = v_p(f) ,$$

ce qui prouve que T est une partie totale pour f, donc que f est p-fine.

Réciproquement, si f est p-fine, T est une partie totale pour f ; on en déduit que $\overline{g(T)}$ est une partie totale pour f', donc que f' est p-fine. Par ailleurs $\inf \overline{g(T)} = 0$, $\sup \overline{g(T)} = v_p(f')$ et f' vérifie (28) avec $\alpha = 1$.

□

On peut donner des fonctions p, α-fines, donc des fonctions p-fines, une caractérisation qui ne fasse pas intervenir la notion de fonction à p-v.b.

THEOREME 16. Soit une partie compacte T de $\mathbb{R}$. Une C.N.S. pour qu'une fonction $f : T \to \mathbb{R}$ soit p,α-fine, avec $p > 1$, $\alpha > 0$, est que soient vérifiées les conditions suivantes.

a) Quels que soient x , y dans T,

(28) $$|f(y) - f(x)|^p \leq \alpha\,|y - x|.$$

b) Pour tout intervalle $[x\ ,\ y]$ contigu à T,

(29) $$|f(y) - f(x)|^p = \alpha\,|y - x|.$$

c) Pour presque tout $x \in T$,

(30) $$\overline{\lim_{y \to x}}\ \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|} = \alpha\,.$$

Si f est p,α-fine, donc p-fine, il résulte des théorèmes 10 et 12 que

(31) $$v_p(f) = \int_T \varphi(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} |f(y_k) - f(x_k)|^p$$

où $[x_k\ ,\ y_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ sont les intervalles contigus à T et où

(32) $$\varphi(x) = \overline{\lim_{y \to x}}\ \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|} \qquad (x \in T).$$

On a $\varphi(x) \leq \alpha$ $(x \in T)$. Par ailleurs, si l'on pose $a = \inf T$, $b = \sup T$, il vient puisque f est p,α-fine,

$$v_p(f) = \alpha(b - a) = \int_T \alpha\,dx + \int_{[a,b]-T} \alpha\,dx\ .$$

Ainsi, d'après (31),

$$\int_T (\alpha - \varphi(x))dx = -\int_{[a,b]-T} \alpha\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} |f(y_k) - f(x_k)|^p.$$

soit encore

(33) $$\int_T (\alpha - \varphi(x))dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha(y_k - x_k) - |f(y_k) - f(x_k)|^p\right].$$

Le membre de gauche est positif, puisque $\varphi(x) \leq \alpha$ $(x \in T)$. Or le membre de droite est négatif puisque f, étant p,α-fine, vérifie (28). Il en résulte que

$$\int_T (\alpha - \varphi(x))dx = 0$$

et finalement que $\varphi(x) = \alpha$ presque partout sur T. Il résulte alors de (33) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\alpha(y_k - x_k) - |f(y_k) - f(x_k)|^p] = 0 \tag{34}$$

et on déduit de (28) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(y_k) - f(x_k)|^p = \alpha |y_k - x_k|. \tag{35}$$

Réciproquement, soit une fonction $f : T \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions a), b), c). φ étant la fonction définie par (32) on a pour presque tout $x \in T$, $\varphi(x) = \alpha$. D'autre part, si $[x_k , y_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ sont les intervalles contigus à T, on a (35), pour tout $k \in \mathbb{N}$. Posons $a = \inf T$, $b = \sup T$. On a :

$$\alpha(b - a) = \int_T \varphi(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} |f(y_k) - f(x_k)|^p \le v_p(f) \ ;$$

or, d'après a), $v_p(f) \le \alpha(b - a)$. Ainsi

$$v_p(f) = \alpha(b - a). \tag{36}$$

Il reste à prouver que f est p-fine, soit encore, d'après le théorème 5, que pour tout $x \in T$

$$v_p(f) = v_p(f , [-\infty, x]) + v_p(f , [x , +\infty]). \tag{11}$$

Etant donné un point $x \in T$, $v_p(f , [-\infty, x])$ est minoré par

$$\int_{T \cap [-\infty, x]} \varphi(x)dx + \sum_{\{k \mid y_k \le x\}} |y_k - x_k|^p$$

soit par $\alpha(x - a)$. De même $v_p(f , [x , +\infty])$ est minoré par $\alpha(b - x)$. On a donc

$$v_p(f , [-\infty, x]) + v_p(f , [x , +\infty]) \ge \alpha(b - a) = v_p(f) ,$$

d'où l'égalité.

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRETAGNOLE, J.

[2] BRUNEAU, M. Calcul de la p-variation d'une fonction. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, pp. 173-176.

[3] BRUNEAU, M. p-variation fine d'une fonction à p-variation bornée. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, pp. 585-588.

[4] BRUNEAU, M. Fonctions p,α-fines et fonctions p-fines. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, pp. 1420-1423.

[5] BRUNEAU, M. Thèse. Strasbourg, 1970. A paraître.

[6] GEHRING, F. W. A study of α-variation. Trans. Amer. Math. Soc., 76 (1954), 420-443.

[7] GOFFMAN, G. and LOUGHLIN, J. J. Strong and weak Φ-variation of brownian motion. Indiana Univ. Math. J., 22 (1972), 135-138.

[8] GOLOUBOV, V. I. Fonctions de variation totale généralisée. Convergence de leurs séries de Fourier... (en russe). Doklady Akademii Nauk SSSR, 205 (1972), 1277-1280.

[9] MARCINKIEWICZ, J. On a class of functions and their Fourier series. Collected papers, 36-41.

[10] SALEM, R. Essais sur les séries trigonométriques. Act. Sc. et Ind. , 862, Paris 1940.

[11] WIENER, N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. J. Mass. Inst. of Technology, 3 (1924), 73-94.

[12] YOUNG, L. C. An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration. Acta Math., 67 (1936), 251-282.

[13] YOUNG, L. C. Inequalities connected with bounded p-th power variation in the Wiener sense and with integrated Lipschitz conditions. Proc. London Math. Soc., 2, 43 (1937), 449-467.

Chapitre II

FONCTIONS p-FINES ET POINTS EXTREMAUX

Les points extrémaux de la boule unité de l'espace des fonctions à p-variation bornée constituent une classe remarquable de fonctions irrégulières, dont nous donnons ici une caractérisation. Nous notons en particulier que ce sont des fonctions fines, mais donnons des exemples de fonctions fines de norme 1 qui ne sont pas des points extrémaux.

I. POINTS EXTREMAUX DE LA BOULE UNITE DE $\mathcal{B}_p(T)$.

$\mathcal{B}_p(T)$ désigne l'ensemble des fonctions $f : T \to \mathbb{R}$, à p-v.b., définies "modulo une constante". $\mathcal{B}_p(T)$ muni de la norme

(1) $$V_p(f) = (v_p(f))^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

Une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ est dite (p-)extrémale si c'est un point extrémal de la boule centrée à l'origine, de rayon $V_p(f)$, autrement dit s'il n'existe pas de fonction $\zeta \in \mathcal{B}_p(T)$ non nulle (modulo une constante) telle que

(2) $$v_p(f \pm \zeta) \leq v_p(f).$$

Une fonction extrémale est nécessairement très irrégulière ; en premier lieu, si elle n'est constante sur aucun intervalle, elle n'est monotone sur aucun intervalle. Ainsi par exemple, si f est une bijection continue de $[0, 1]$ sur lui-même, posons pour tout $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$

$$\zeta_\alpha(x) = \sup(0 , \alpha - |x - \tfrac{1}{2}|) \qquad (0 \leq x \leq 1). \tag{3}$$

On a $V_p(f) = 1$, $V_p(\zeta_\alpha) = 2\alpha^p$ et les nombres $v_p(f \pm \zeta_\alpha)$ sont majorés soit par 1, soit par

$$|f(\tfrac{1}{2}) - f(0)|^p + |f(1) - f(\tfrac{1}{2})|^p + 2\,[(1+\alpha)^p - 1]. \tag{4}$$

Le nombre (4) étant inférieur à 1 pour α suffisamment petit, on en déduit la possibilité de choisir $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ tel que $v_p(f \pm \zeta_\alpha) \leq 1$.

Pour qu'une fonction $f \in \mathfrak{B}_p(T)$ soit extrémale, il est tout à fait insuffisant d'imposer que f n'ait aucun intervalle de monotonie. Nous sommes ainsi conduits à poser le problème suivant.

PROBLEME. Caractériser les fonctions extrémales de $\mathfrak{B}_p(T)$.

II. UNE CONDITION NECESSAIRE ET UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UNE FONCTION SOIT EXTREMALE.

Rappelons qu'une fonction $f \in \mathfrak{B}_p(T)$ est (p-)fine si T est totale pour f.

La notion de fonction fine donne une condition nécessaire pour qu'une fonction soit extrémale.

THEOREME 1. *Toute fonction extrémale* $f \in \mathfrak{B}_p(T)$ *est fine.*

La réciproque est fausse. Ainsi les fonctions

$$x \to \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{n}{p}} \cos 2^n \pi x$$

(5)

$$x \to \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\frac{n}{p}} \sin 2^n \pi x ,$$

où $p > 1$ et $0 \leq x \leq 1$, sont fines mais ne sont pas extrémales.

THEOREME 2. Soit une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ continue. Une condition suffisante pour que f soit extrémale est qu'il existe une suite croissante de parties totales pour f, convergeant vers T au sens de la métrique naturelle sur l'ensemble des parties fermées.

Cet énoncé a le mérite de permettre de construire facilement des fonctions extrémales.

Exemple de fonction 2-extrémale. Il existe une fonction bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ unique, vérifiant pour $0 \leq \lambda \leq 1$ les conditions

(6)

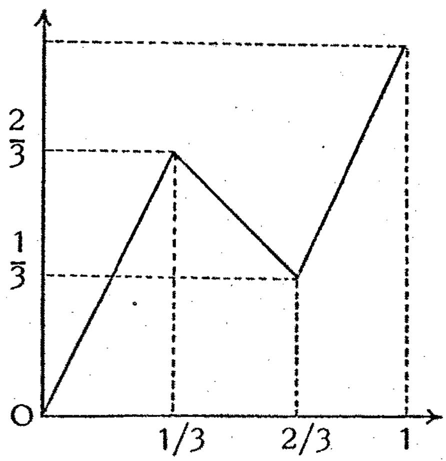
$$f(0) = 0 \quad , \quad f(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3}$$

$$f(1-\lambda) = 1 - f(\lambda)$$

$$f(\tfrac{\lambda}{3}) = \tfrac{2}{3} f(\lambda)$$

$$f(\tfrac{1+\lambda}{3}) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} f(\lambda).$$

(6) donne un procédé de construction de f dont nous représentons la première étape par le graphique ci-dessous.



$s_o = \{0, 1\}$, $s_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ sont des parties 2-totales pour f. Plus généralement

(7) $$s_n = \left\{ \frac{k}{3^n} \,\middle|\, 0 \leq k \leq 3^n \right\} \qquad (n \geq 0)$$

est une suite croissante de parties finies 2-totales pour f, telles que $\overline{\bigcup_n s_n} = [0, 1]$. Il résulte donc du théorème 2 que la fonction f est 2-extrémale.

Remarque. La condition du théorème 2 est suffisante pour que f soit extrémale, mais n'est pas nécessaire.

III. CARACTERISATION DES FONCTIONS FINES.

Il est plus facile de caractériser les fonctions fines que les fonctions extrémales. Nous indiquons donc maintenant deux caractérisations des fonctions fines.

THEOREME 3. *Soient une fonction* $f \in \mathcal{B}_p(T)$ *et* $f' \circ g$ *sa factorisation canonique. Une C.N.S. pour que f soit fine est que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une suite ordonnée* $(t_1, \ldots, t_n)$ *de points de* $\overline{g(T)}$, *telle que tout point de* $\overline{g(T)}$ *soit à moins de* ε *d'un point* t_i, *vérifiant*

(8) $$\sum_{i=1}^{n-1} \left[(t_{i+1} - t_i) - |f'(t_{i+1}) - f'(t_i)|^p \right] \leq \varepsilon.$$

THEOREME 4. *Soient une fonction* $f \in \mathcal{B}_p(T)$ *et* $f' \circ g$ *sa factorisation canonique. Une C.N.S. pour que f soit fine est que soient vérifiées les conditions suivantes.*

a) *Pour tout intervalle* $[y, z]$ *contigu à* $\overline{g(T)}$

(9) $$|f'(z) - f'(y)|^p = z - y.$$

b) *Pour presque tout point* $x \in \overline{g(T)}$

(10) $$\varlimsup_{y \to x} \frac{|f'(y) - f'(x)|^p}{|y - x|} = 1.$$

IV. FONCTIONS TRES FINES.

Les résultats que nous venons d'énoncer expriment que les fonctions fines sont, en un certain sens, les fonctions à p-v.b. "les plus irrégulières". Or les fonctions extrémales s'interprètent comme étant, mais cette fois en un sens plus restrictif, les fonctions à p-v.b. "les plus irrégulières".

Un premier examen montre qu'il est naturel d'espérer caractériser les fonctions extrémales en substituant, dans l'énoncé du théorème 3, à la condition (8) la condition beaucoup plus restrictive

(11) $$\sum_{i=1}^{n-1} \left[(t_{i+1} - t_i)^{\frac{1}{p}} - |f'(t_{i+1}) - f'(t_i)|\right] \leq \varepsilon.$$

On caractérise bien ainsi une classe de fonctions extrémales, mais non toutes les fonctions extrémales. Cela tient au rôle perturbateur joué par l'ensemble des extrémités des intervalles $[y\,,\,z]$ vérifiant $y < z$ et

(9) $$|f'(z) - f'(y)|^p = z - y \;;$$

soit E cet ensemble. Nous montrons que la condition (11) caractérise les fonctions extrémales pour lesquelles E est "assez petit". Pour plus de commodité posons les définitions suivantes.

DEFINITION 1. Une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, dont $f' \circ g$ désigne la factorisation canonique, est dite (p-) très fine si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite ordonnée $(t_1, \dots, t_n)$ de points de $\overline{g(T)}$, telle que tout point de $\overline{g(T)}$ soit à moins de ε d'un point t_i, vérifiant (11).

DEFINITION 2. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique, E désigne l'ensemble des extrémités des intervalles $[y,z]$ tels que $y,z \in \overline{g(T)}$, $y < z$, vérifiant (9).

Si $f(t) = t$ $(0 \leq t \leq 1)$, on a $g(t) = t^p$, $f'(t) = t^{\frac{1}{p}}$ et par conséquent $E = [0,1]$. Cependant, plus une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ est irrégulière, plus E est nécessairement petit. Cela tient à ce que, comme le prouve le lemme suivant, f' est assez régulière sur E. Pour $p > 1$ on a :

LEMME 1. Soient une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition de Lipschitz

$$|f(z) - f(y)| \leq |z - y|^{\frac{1}{p}} \tag{12}$$

et E l'ensemble des extrémités des intervalles $[y, z]$ tels que $y < z$, pour lesquels on a l'égalité dans (12). E est la réunion d'une suite croissante (F_n) de fermés telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de f à F_n soit monotone par morceaux et lipschitzienne d'ordre 1.

On obtient les résultats suivants, où $p > 1$.

THEOREME 5. Soit une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$.

a) Si f est fine, E est de mesure nulle.

b) Si f est très fine la dimension de Hausdorff de E est inférieure ou égale à $\frac{1}{p}$.

THEOREME 6. Soit une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$.

a) Si f est très fine, f est extrémale.

b) Si f est extrémale et si la mesure de Hausdorff de E dans la dimension $\frac{1}{p}$ est nulle, f est très fine.

Remarque. Toutes les fonctions vérifiant la condition du théorème 2 sont très fines, mais la réciproque est inexacte.

V. CARACTERISATION DES FONCTIONS EXTREMALES.

Voici, pour tout nombre $p > 1$, la caractérisation des fonctions extrémales.

THEOREME 7. Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et $f' \circ g$ sa factorisation canonique. Il existe sur $\overline{g(T)}$ une mesure régulière(*) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, diffuse, unique μ_f, prenant sur toute partie fermée F de $\overline{g(T)}$, la valeur

(13) $$\mu_f(F) = \underline{\lim} \sum_{k=1}^{n} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right],$$

où $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de F (tel que les points y_k, z_k appartiennent à $\overline{g(T)}$) et où la limite inférieure est prise lorsque la borne supérieure des nombres $z_k - y_k$ devient arbitrairement petite.

Une C.N.S. pour que f soit extrémale est que soient vérifiées les conditions suivantes.

a) Pour tout intervalle $[y,z]$ contigu à $\overline{g(T)}$

(*) Nous voulons dire ici que μ_f vérifie, pour tout borélien A,

$$\mu_f(A) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset A}} \mu_f(K).$$

(9) $$|f'(z) - f'(y)|^p = z - y.$$

b) L'ensemble E des extrémités des intervalles $[y\ ,\ z]$, tels que $y, z \in \overline{g(T)}$, $y < z$, vérifiant (9), est de mesure nulle.

c) La mesure μ_f est portée par E.

L'énoncé suivant met en relief les liens existant entre les différentes classes de fonctions introduites.

THEOREME 8. Soit une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$.

a) f est extrémale si et seulement si f est fine et μ_f est portée par E.

b) f est très fine si et seulement si f est fine et $\mu_f = 0$.

De même que le théorème 3 nous a suggéré la caractérisation précédente des fonctions extrémales, on peut de la même façon partir du théorème 4. Dans cette voie nous avons obtenu le résultat suivant.

THEOREME 9. Etant donnée une fonction extrémale $f \in \mathcal{B}_p(T)$, dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique, on a, pour toute fonction continue, monotone croissante h vérifiant $t \leq h(t) \leq t^{\frac{1}{p}}$ $(0 \leq t \leq 1)$, sur le complémentaire de E dans $\overline{g(T)}$,

(14) $$\lim_{\substack{y<x<z \\ |z-y|\to 0}} \frac{(z-y)^{\frac{1}{p}} - |f'(z)-f'(y)|}{h(z-y)} = 0 ,$$

sauf aux points x d'un ensemble de h-mesure de Hausdorff nulle.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ dont $f' \circ g$ désigne la factorisation canonique, on a sur $\overline{g(T)}$

$$|f'(z) - f'(y)| \leq |z - y|^{\frac{1}{p}}$$

si bien que le membre de gauche de (14) est toujours positif ou nul ; le fait qu'il soit nul implique donc que la fonction f' "varie très rapidement" au voisinage du point x. Plus précisément (14) exprime l'existence de nombres $y_n < x < z_n$ $(n \in \mathbb{N})$ dans $\overline{g(T)}$ tels que $z_n - y_n \to 0$ $(n \to \infty)$ et

(14')
$$0 \leq (z_n - y_n)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_n) - f'(y_n)| = o(h(z_n - y_n)) ,$$

lorsque n tend vers l'infini.

Le théorème 9 admet deux corollaires intéressants.

COROLLAIRE 1. Etant donnée une fonction extrémale $f \in \mathcal{B}_p(T)$, dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique, on a, pour presque tout $x \in \overline{g(T)}$,

(15)
$$\varliminf_{\substack{y<x<z \\ |z-y| \to 0}} \frac{(z-y)^{\frac{1}{p}} - |f'(z) - f'(y)|}{z - y} = 0.$$

COROLLAIRE 2. Etant donnée une fonction très fine $f \in \mathcal{B}_p(T)$, dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique, on a sur $\overline{g(T)}$

(16)
$$\varlimsup_{\substack{y<x<z \\ |z-y| \to 0}} \frac{|f'(z) - f'(y)|^p}{z - y} = 1 ,$$

sauf aux points x d'un ensemble dont la mesure de Hausdorff dans la dimension $\frac{1}{p}$ est nulle.

Remarques.

a) Etant donné un nombre $\frac{1}{3} < \xi < \frac{1}{2}$, soit $p > 1$ l'unique nombre vérifiant

$\xi^{\frac{1}{p}} > \frac{1}{2}$. et

(17) $$2\xi + (2\xi^{\frac{1}{p}} - 1) = 1.$$

Il existe une fonction bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ unique, vérifiant pour $0 \leq \lambda \leq 1$ les conditions

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(\xi) = \xi^{\frac{1}{p}}$$

$$f(1-\lambda) = 1 - f(\lambda)$$

$$f(\lambda\xi) = f(\lambda)\xi^{1/p}$$

$$f(\xi + \lambda(1-2\xi)) = \xi^{\frac{1}{p}} + f(\lambda)(1 - 2\xi^{\frac{1}{p}}).$$

La fonction f est p-très fine. De plus, on a manifestement

(19) $$|f(z) - f(y)|^p \leq |z - y| \qquad (0 \leq y < z \leq 1)$$

et, pour tout $0 \leq x \leq 1$,

(20) $$\varlimsup_{\substack{y<x<z \\ |z-y| \to 0}} \frac{|f(z) - f(y)|^p}{|z - y|} = 1.$$

Cependant, comme nous le verrons au chapitre III, la dimension de Hausdorff de l'ensemble des $0 \leq x < 1$ tels que

(21) $$\varlimsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|} < 1$$

est égale à 1.

b) Soient un nombre $p > 1$ et une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique. Il ressort des caractérisations précédentes que la fonction f est fine, très fine, extrémale, respectivement si et seulement si la fonction f' est fine, très fine, extrémale.

c) Si $p = 1$, les notions introduites se trivialisent. En effet toute fonction

$f \in \mathcal{B}_1(T)$ est fine, donc très fine et par ailleurs il n'existe dans $\mathcal{B}_1(T)$ aucune fonction extrémale. Pour prouver ce dernier point on peut se limiter au cas d'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ à variation bornée, absolument continue, qui n'est pas monotone décroissante. Il existe un fermé F de mesure non nulle tel que, pour tout $x \in F$, la dérivée au point x, $f'(x)$, existe et soit strictement positive. Si l'on pose

$$\psi(x) = \int_0^x 1_F(t)\, f'(t)dt \qquad (0 \leq x \leq 1) \tag{22}$$

le nombre $\psi(1)$ est fini et non nul. x_0 étant alors le point de l'intervalle $[0,1]$ vérifiant

$$\psi(x_0) = \frac{1}{2}\,\psi(1)\,, \tag{23}$$

la fonction $\zeta : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \psi(x) && (0 \leq x \leq x_0) \\ \zeta(x) &= \frac{1}{2}\,\psi(1) - \psi(x) && (x_0 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

vérifie

$$v_1(f \pm \zeta) = v_1(f)\,, \tag{25}$$

ce qui prouve que f n'est pas extrémale.

<u>Problème</u> 1. Soit une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique. E est l'ensemble des extrémités des intervalles $[y\,,\,z]$ tels que

$$|f'(z) - f'(y)|^p = z - y > 0\,.$$

Si f est extrémale et si $\mu_{\frac{1}{p}}(E) = 0$, f est très fine. Réciproquement si f est très fine, la dimension de Hausdorff de E est $\frac{1}{p}$. Est-ce que, pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ très fine $\mu_{\frac{1}{p}}(E) = 0$ ou est-ce qu'il existe des fonctions $f \in \mathcal{B}_p(T)$ très fines telles que $\mu_{\frac{1}{p}}(E)$ soit arbitrairement grand ?

<u>Problème</u> 2. Le théorème 9 donne une condition nécessaire pour qu'une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ soit extrémale. Cette condition est-elle suffisante ?

<u>Démonstration des théorèmes</u>. Les théorèmes 2 et 4 ont été établis dans [1]. Le théorème 1 avait été établi dans [1], dans le cas particulier où $T = [0,1]$ et f est continue. Enfin le théorème 3 est une conséquence immédiate de la définition des fonctions fines. Nous allons maintenant démontrer successivement le théorème 1, le lemme 1, puis les théorèmes 5, 6, 8, 7 et 9.

VI. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Soit $\mathcal{B}_p$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ à p-v.b.. On établit le théorème 1 pour une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ continue, puis on passe au cas général à l'aide du théorème de factorisation.

<u>Un point</u> $x \in T$ <u>est (p-)extrême pour une fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$ <u>si</u>

(26) $$v_p(f) = v_p(f\ ,\ [-\infty\ ,\ x]) + v_p(f\ ,\ [x\ ,\ +\infty]).$$

Le théorème 5 du chapitre I peut s'énoncer :

LEMME 2. <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$ <u>continue, l'ensemble des points extrêmes est une partie totale.</u>

Le lemme suivant exprime qu'on peut modifier une fonction $f \in \mathcal{B}_p$ continue, au voisinage d'un point qui n'est pas extrême, sans changer la valeur de sa p-variation.

LEMME 3. <u>Soit une fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p$ <u>continue. Une C.N.S. pour qu'un point</u>

x de $[0,1]$ ne soit pas extrême est qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, pour toute fonction $\zeta \in \mathfrak{B}_p$, nulle en dehors de l'intervalle $[x-\varepsilon , x+\varepsilon]$, dont la p-variation est inférieure à ε,

(27) $$v_p(f + \zeta) = v_p(f).$$

Montrons que la condition est suffisante. Soit $\zeta_{n,\varepsilon}$ $(n \in N, \varepsilon > 0)$ la fonction nulle en dehors de l'intervalle $\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]$, linéaire sur les intervalles $[x - \frac{1}{n}, x]$, $[x , x + \frac{1}{n}]$, telle que

(28) $$\zeta_{n,\varepsilon}(x) = (\tfrac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}} .$$

Il est manifeste que si x est extrême

(29) $$\lim_{n\to\infty} v_p(f + \zeta_{n,\varepsilon}) = v_p(f) + \varepsilon ,$$

ce qui montre que la condition du lemme n'est pas réalisée.

Montrons que la condition est nécessaire. Pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{B}_p$ et tout point $0 \leq y \leq 1$, posons

(30) $$v_p^y(\varphi) = v_p(\varphi , [0,y]) + v_p(\varphi , [y,1]).$$

Si x n'est pas extrême pour f,

$$v_p^x(f) < v_p(f).$$

Il résulte alors de la continuité de la p-variation de f sur un intervalle, en fonction de cet intervalle, qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que pour tout point y de l'intervalle $[x-\varepsilon , x+\varepsilon]$,

(31) $$v_p^y(f) + \alpha < v_p(f)$$

avec

(32) $$\alpha = \left[(v_p(f))^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}}\right]^p - v_p(f).$$

Soit $\zeta \in \mathfrak{B}_p$ une fonction nulle en dehors de l'intervalle $[x-\varepsilon , x+\varepsilon]$, dont la p-variation est inférieure à ε. L'intervalle $[x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon]$ ne contenant aucun point extrême pour f,

(33) $$v_p(f) \leq v_p(f + \zeta).$$

Pour toute partie finie s de $[0,1]$ contenant un point y de l'intervalle $[x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon]$, on a

$$S_p^s(f + \zeta) - S_p^s(f) \leq \alpha$$

(la notation $S_p^s(.)$ ayant été introduite au paragraphe III du chapitre I) ; cela résulte de la croissance de la fonction

$$a \to (a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}) - a \qquad (a > 0\ ,\ b > 0).$$

Par suite

$$S_p^s(f + \zeta) \leq v_p^y(f) + \alpha \ ;$$

soit en passant à la borne supérieure sur l'ensemble des parties finies s de $[0,1]$, contenant un point donné y de l'intervalle $[x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon]$,

(34) $$v_p^y(f + \zeta) \leq v_p^y(f) + \alpha.$$

Des inégalités (31), (33) et (34) il résulte alors que, pour tout $x-\varepsilon \leq y \leq x+\varepsilon$,

(35) $$v_p^y(f + \zeta) < v_p(f + \zeta).$$

L'intervalle $[x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon]$ ne contient donc aucun point extrême pour $f+\zeta$ si bien que, A désignant le complémentaire de cet intervalle,

$$v_p(f+\zeta) = v_p(f+\zeta\ ,\ A) = v_p(f,A) = v_p(f).$$

□

LEMME 4. <u>Toute fonction</u> $f \in \mathfrak{B}_p$ <u>continue, extrémale est fine.</u>

Il résulte du lemme 2 que toute fonction $f \in \mathfrak{B}_p$ continue, pour laquelle tout point de $[0,1]$ est extrême, est fine. Tout revient donc à établir que si, pour une fonction continue $f \in \mathcal{B}_p$ un point x n'est pas extrême, il existe une fonction $\zeta \in \mathcal{B}_p$ non nulle, telle que

$$v_p(f + \lambda\zeta) \leq v_p(f) \qquad (-1 \leq \lambda \leq +1)$$

or c'est une conséquence du lemme 3.

□

Nous allons maintenant nous affranchir des hypothèses : $T = [0,1]$ et f est continue.

LEMME 5. <u>Soit une fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$ <u>et</u> $f' \circ g$ <u>sa factorisation canonique. La fonction</u> f <u>est fine, très fine, extrémale, respectivement si et seulement si la fonction</u> f' <u>est fine, très fine, extrémale.</u>

Compte tenu du théorème 3 et de la définition 1, il suffit d'établir que f est extrémale si et seulement si f' est extrémale.

Si f' n'est pas extrémale, il existe une fonction $\zeta' \in \mathcal{B}_p(\overline{g(T)})$ non nulle, telle que

$$v_p(f' + \lambda\zeta') \leq v_p(f') \qquad (-1 \leq \lambda \leq 1).$$

Alors la fonction $\zeta = \zeta' \circ g$ est non nulle, appartient à $\mathcal{B}_p(T)$ et

$$v_p(f + \lambda\zeta) \leq v_p(f) \qquad (-1 \leq \lambda \leq 1)$$

si bien que f n'est pas extrémale.

On sait que lorsque g ne varie pas sur un intervalle, il en est de même pour f. Il est donc facile, en modifiant convenablement T, de se ramener au cas où g est strictement croissante et par conséquent inversible. Compte tenu de cette remarque, la réciproque s'établit comme la proposition directe.

□

Démonstration du théorème 1. Soit $f \in \mathcal{B}_p(T)$ une fonction extrémale et $f' \circ g$ sa factorisation canonique. La fonction f' est lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{p}$, donc continue. D'après le lemme 5 on peut, en substituant f' à f, se ramener au cas d'une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ continue.

Nous admettons maintenant que f est une fonction extrémale, continue. Supposons encore pour fixer les idées que $0 = \inf T$, $1 = \sup T$. Désignons par $\bar{f}$ le prolongement de f en une fonction linéaire sur les intervalles contigus à T ; $\bar{f}$ est une fonction continue sur $[0,1]$. Pour que la fonction f soit fine il faut et il suffit que T soit une partie totale pour $\bar{f}$, c'est-à-dire, d'après le lemme 2, que tout point de T soit extrême pour $\bar{f}$. Supposons l'existence d'un point $x \in T$ qui n'est pas extrême pour $\bar{f}$. Il existe, d'après le lemme 3, une fonction $\bar{\zeta} \in \mathcal{B}_p$ non nulle au point x, telle que $\bar{\zeta}(0) = 0$, pour laquelle

$$v_p(\bar{f} + \lambda\bar{\zeta}) \leq v_p(\bar{f}) \qquad (-1 \leq \lambda \leq 1).$$

Alors la restriction $\bar{\zeta}$ à T est une fonction non constante vérifiant

$$v_p(f + \lambda\zeta) \leq v_p(\bar{f}) = v_p(f) \qquad (-1 \leq \lambda \leq 1),$$

ce qui contredit le fait que f est extrémale. Ainsi, tous les points de T sont extrêmes pour $\bar{f}$ ce qui implique, comme nous l'avons fait remarquer, que f est fine.

□

VII. DEMONSTRATION DU LEMME 1.

Soient un nombre $p > 1$ et une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition de Lipschitz

$$(12) \qquad |f(z) - f(y)| \leq |z - y|^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par F_n l'ensemble des extrémités des intervalles $[y, z]$

de longueur supérieure à $\frac{1}{n}$, vérifiant

(36) $$|f(z) - f(y)| = (z - y)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

(F_n) est une suite croissante de parties fermées dont la réunion est E. Nous allons montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $f|_{F_n}$ de f à F_n est monotone par morceaux et lipschitzienne d'ordre 1.

a) $f|_{F_n}$ est monotone par morceaux.

Le lemme suivant exprime que les intervalles $[y,z]$ vérifiant (36) ne se chevauchent pas.

LEMME 6. Soit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition de lipschitz (12) et des nombres $0 \leq \alpha \leq \beta < \gamma \leq \delta \leq 1$. Des conditions

$$|f(\gamma) - f(\alpha)| = (\gamma - \alpha)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad |f(\delta) - f(\beta)| = (\delta - \beta)^{\frac{1}{p}}$$

il résulte que $\alpha = \beta$ ou $\gamma = \delta$.

Remarquons tout d'abord que $f(\gamma) - f(\alpha)$ et $f(\delta) - f(\beta)$ sont de même signe ; en effet, si par exemple le premier de ces nombres était strictement positif et le second strictement négatif, la condition $f(\beta) \leq f(\gamma)$ impliquerait $f(\gamma) - f(\delta) \geq f(\beta) - f(\delta) = (\delta - \beta)^{\frac{1}{p}} > (\delta - \gamma)^{\frac{1}{p}}$ et la condition $f(\gamma) \leq f(\beta)$ impliquerait $f(\beta) - f(\alpha) \geq f(\gamma) - f(\alpha) = (\gamma - \alpha)^{\frac{1}{p}} > (\beta - \alpha)^{\frac{1}{p}}$, d'où une contradiction avec la condition (12). Supposons donc, pour fixer les idées, $f(\alpha) \leq f(\gamma)$ et $f(\beta) \leq f(\delta)$. Posons

$$\lambda = \gamma - \alpha \quad , \quad \mu = \delta - \beta \quad , \quad \nu = \gamma - \beta .$$

On a

$$f(\gamma) - f(\alpha) = \lambda^{\frac{1}{p}} \quad , \quad f(\delta) - f(\beta) = \mu^{\frac{1}{p}}$$

et par conséquent

$$\lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}} = f(\delta) - f(\alpha) + f(\gamma) - f(\beta)$$

est majorable par

$$|f(\delta) - f(\alpha)| + |f(\gamma) - f(\beta)| \leq (\lambda + \mu - \nu)^{\frac{1}{p}} + \nu^{\frac{1}{p}} .$$

La fonction φ définie sur $[0 , \lambda+\mu]$ par

$$\varphi(x) = (\lambda+\mu - x)^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{p}}$$

vérifie donc

(i) $$\varphi(\nu) \geq \lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}}.$$

Or la fonction φ est concave, n'est constante sur aucun intervalle ouvert et vérifie

(ii) $$\varphi(0) = (\lambda + \mu)^{\frac{1}{p}} < \lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}}$$
$$\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) = \lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}}$$

Puisque ν est inférieur à λ et à μ, il résulte des conditions (i), (ii) que

$$\varphi(\nu) = \lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}}$$

donc que $\nu = \lambda$ ou $\nu = \mu$, d'où le résultat.

□

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Puisque, d'après le lemme 6, les intervalles $[y,z]$ vérifiant la condition (36) ne se chevauchent pas deux à deux, l'ensemble de ces intervalles, dont la longueur est supérieure à $\frac{1}{n}$, est composé d'un nombre inférieur à n de familles d'intervalles emboités. Soit $[y_i , z_i]$ $(i \in I)$ une telle famille. i,j étant deux indices appartenant à I, supposons pour fixer les idées que $f(y_i) \leq f(z_i)$ et

$$y_i \leq y_j < z_j \leq z_i \quad ;$$

on a alors nécessairement

$$f(y_i) \leq f(y_j) < f(z_j) \leq f(z_i).$$

En effet, si par exemple $f(y_j) < f(y_i)$, on aurait

$f(z_i) - f(y_j) > f(z_i) - f(y_i) = (z_i - y_i)^{\frac{1}{p}} > (z_i - y_j)^{\frac{1}{p}}$, ce qui serait en contradiction avec la condition de Lipschitz (12). Les autres inégalités s'établissent de même.

Nous avons ainsi prouvé que la restriction de f à $\{y_i , y_j , z_j , z_i\}$ est monotone. Il en résulte que la restriction de f à l'ensemble des points y_i, z_i $(i \in I)$ est monotone et finalement que la restriction de f à F_n est monotone par morceaux.

b) $f|_{F_n}$ <u>est lipschitzienne d'ordre 1.</u>

Etant donné un nombre $\alpha > 0$, soit G_α l'ensemble des extrémités des intervalles $[y , z]$ vérifiant

$$|f(z) - f(y)|^p = z - y \geq \alpha. \tag{37}$$

D'après le lemme 6, les intervalles vérifiant (37) ne se chevauchent pas. Si l'on considère donc l'ensemble de ces intervalles contenant un point donné, on obtient une famille d'intervalles emboités $[y_i , z_i]$ $(i \in I)$. Soit F l'ensemble des points y_i , z_i $(i \in I)$. Il existe un indice $n \in N$ tel que $F \subset G_\alpha \subset F_n$, si bien que la restriction de f à F est monotone. Pour fixer les idées nous allons supposer que la restriction de f à F est monotone croissante. Nous allons établir que $f|_F$ est lipschitzienne d'ordre 1. Il en résultera que, pour tout $\alpha > 0$, $f|_{G_\alpha}$ est lipschitzienne d'ordre 1, d'où le résultat annoncé en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$.

Soient des nombres positifs $a , b , \beta , \lambda , \mu$ vérifiant les conditions

$$\begin{aligned} &\lambda \geq \alpha \quad , \quad a \leq \beta \quad , \quad b > 0 \\ &\lambda = a^p \quad , \quad \mu \geq (a+b)^p - a^p. \end{aligned} \tag{38}$$

On a

$$b \leq \lambda^{\frac{1}{p}} \left[(1 + \frac{\mu}{\lambda})^{\frac{1}{p}} - 1\right] \leq \beta \left[(1 + \frac{\mu}{\alpha})^{\frac{1}{p}} - 1\right]. \tag{39}$$

Posons maintenant

(40) $$\beta = \sup_{i \in I} [f(z_i) - f(y_i)]$$

et choisissons un nombre $\varepsilon > 0$ tel que la condition $0 < \mu \leq \varepsilon$ implique

(41) $$(1 + \frac{\mu}{\alpha})^{\frac{1}{p}} - 1 \leq \frac{\mu}{\alpha}.$$

Etant donné un indice $i \in I$ tel que $[y_i - \varepsilon , y_i[$ rencontre F, posons, pour un point $x \in F$ vérifiant $y_i - \varepsilon \leq x < y_i$,

(42) $$\lambda = z_i - y_i \quad , \quad \mu = y_i - x$$
$$a = f(z_i) - f(y_i) \quad , \quad b = f(y_i) - f(x).$$

Les nombres (42) vérifient (38). Puisque $0 < \mu \leq \varepsilon$, on déduit donc de (39) et (41) que

(43) $$f(y_i) - f(x) = b \leq \frac{\beta}{\alpha} \mu = \frac{\beta}{\alpha} (y_i - x).$$

La partie fermée F est la réunion de deux fermés disjoints : F' l'ensemble des points y_i $(i \in I)$ et F'' l'ensemble des points z_i $(i \in I)$. La condition (43) exprime que, si deux points u, v de F' sont distants de moins de ε,

(44) $$|f(v) - f(u)| \leq \frac{\beta}{\alpha} |v - u|.$$

On montre de même que la condition (44) est vérifiée si u, v sont deux points de F'' distants de moins de ε. Ainsi f est lipschitzienne sur F' et F'', donc sur la réunion F de ces deux fermés.

□

Nous venons d'obtenir des résultats un peu plus précis que le lemme 1. Avec $\alpha = \frac{1}{n}$ on obtient, en notant que $\beta \leq 1$:

LEMME 7. Avec les notations du lemme 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) La restriction de f à F_n est monotone par morceaux et le nombre des intervalles de monotonie est inférieur à n.

b) Il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, si deux points $u, v \in F_n$ sont distants de moins de ε,

$$(45) \qquad |f(v) - f(u)| \leq n\,|v-u|.$$

VIII. DEMONSTRATION DU THEOREME 5.

Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et $f' \circ g$ sa factorisation canonique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ désignons par F_n l'ensemble des extrémités des intervalles $[y, z]$ vérifiant $y, z \in \overline{g(T)}$, $z-y \geq \frac{1}{n}$ et

$$(9) \qquad |f'(z) - f'(y)|^p = z - y.$$

Pour établir le théorème 5 il suffit de prouver que les ensembles F_n sont de mesure nulle si f est fine et ont une mesure de Hausdorff finie, dans la dimension $\frac{1}{p}$, si f est très fine.

a) Cas où f est fine.

Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et une partie A de $\overline{\mathbb{R}}$, on appelle p-variation fine de f sur A le nombre

$$(46) \qquad v_p^*(f, A) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \sup_{s \subset A} \sum_{i=1}^{n-1} \left(|f(t_{i+1}) - f(t_i)|^p \wedge \alpha \right)$$

où $t_1 < t_2 \ldots < t_n$ et où $s = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ décrit l'ensemble des parties finies de T contenue dans A. Le théorème 11 de chapitre I exprime que, si $f' \circ g$ est la factorisation canonique de f,

$$(47) \qquad v_p^*(f, A) = \int_{\overline{g(A)}} \overline{\lim_{y \to x}} \frac{|f'(y) - f'(x)|^p}{|y - x|}\, dx.$$

On a d'autre part :

LEMME 8. Pour toute fonction monotone croissante $f \in \mathcal{B}_p(T)$, avec $p > 1$,

$v_p^*(f\ ,\ T) = 0.$

On peut sans restriction se limiter au cas où $T = [0,1]$ et f est une fonction continue. Supposons encore que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Etant donné un entier $n \in N$, posons $t_o = 0$, $t_n = 1$ et soient $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ des points de $[0,1]$ tels que

$$f(t_k) = \frac{k}{n} \qquad (0 \leq k \leq n).$$

Pour tout indice $0 \leq k \leq n-1$,

$$v_p(f\ ,\ [t_k\ ,\ t_{k+1}]) = \frac{1}{n^p}$$

si bien que

$$v_p^*(f\ ,\ T) \leq \sum_{k=0}^{n-1} v_p(f\ ,\ [t_k, t_{k+1}]) = \frac{1}{n^{p-1}}.$$

n étant arbitraire et $p > 1$, on en déduit que $v_p^*(f\ ,\ T) = 0$.

$\square$

Soit une fonction fine $f \in \mathcal{B}_p(T)$ dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique. Etant donné un indice $n \in N$, soit F_n l'ensemble des extrémités des intervalles $[y,z]$ vérifiant $y,z \in \overline{g(T)}$, $z-y \geq \frac{1}{n}$ et

(9) $$|f'(z) - f'(y)|^p = z - y.$$

Dans la démonstration du lemme 1 nous avons prouvé que la restriction de f' à F_n est monotone par morceaux. Ainsi, d'après le lemme 8, $v_p^*(f'\ ,\ F_n) = 0$ $(n \in N)$. D'autre part d'après le lemme 5 la fonction f' est fine. Il résulte donc de (47) et du théorème 4 que

$$\int_{F_n} dx = \int_{F_n} \overline{\lim_{y \to x}} \frac{|f'(y) - f'(x)|^p}{|y - x|} dx = v_p^*(f'\ ,\ F_n) = 0.$$

b) Cas où f est très fine.

Soit une fonction très fine $f \in \mathcal{B}_p(T)$ dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique.

Pour un indice $n \in \mathbb{N}$ donné, nous allons établir, avec les notations précédentes, que la mesure de Hausdorff de F_n dans la dimension $\frac{1}{p}$ est finie ; c'est à dire qu'il existe un nombre $c < +\infty$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un recouvrement $[y_i , z_i]$ $(1 \leq i \leq m)$ de F_n, constitué d'intervalles de longueur inférieure à ε, tel que

(48) $$\sum_{i=1}^{m} (z_i - y_i)^{\frac{1}{p}} \leq c.$$

Soit un nombre $\varepsilon > 0$. La fonction f étant très fine, il existe une partie finie $(t_1, \ldots, t_\ell)$ de $\overline{g(T)}$, arbitrairement voisine de $\overline{g(T)}$, au sens de la métrique sur l'ensemble des parties fermées de $\overline{\mathbb{R}}$, vérifiant $t_1 < \ldots < t_\ell$, telle que, si l'on pose $t_o = 0$, $t_{\ell+1} = v_p(f)$,

(49) $$\sum_{i=0}^{\ell} \left[(t_{i+1} - t_i)^{\frac{1}{p}} - |f'(t_{i+1}) - f'(t_i)|\right] \leq \varepsilon.$$

De la condition (49), valable pour tout $\varepsilon > 0$, on déduit immédiatement que, pour tout intervalle $[y,z]$ contigu à $\overline{g(T)}$,

(9) $$|f'(z) - f'(y)|^p = z - y \ ;$$

ainsi, on peut choisir $(t_1, \ldots, t_\ell)$ en sorte que tout intervalle $[t_i , t_{i+1}]$ qui n'est pas contigu à $\overline{g(T)}$, soit de longueur inférieure à ε.

Les intervalles $[t_i , t_{i+1}]$ qui sont de longueur inférieure à ε, forment un recouvrement de $\overline{g(T)}$, donc de F_n. On peut en extraire un recouvrement minimum $[y_i , z_i]$ $(1 \leq i \leq m)$ de F_n. D'après le lemme 7 il existe des nombres

$$a_o = 0 < a_1 < a_2 \ldots < a_{r-1} < a_r = 1,$$

avec $r \leq n$, tels que la restriction de f' à

(50) $$F_{n,j} = F_n \cap [a_j , a_{j+1}] \qquad (0 \leq j \leq r-1)$$

soit, pour tout indice j, monotone. Quel que soit $0 \leq j \leq r-1$, désignons par I_j

l'ensemble des indices $1 \leq i \leq m$ tels que $[y_i , z_i]$ rencontre $F_{n,j}$. Puisque le recouvrement $[y_i , z_i]$ $(1 \leq i \leq m)$ est minimum, on a, pour tout indice $0 \leq j \leq r-1$,

$$\sum_{i \in I_j} |f'(z_i) - f'(y_i)| \leq 2(1 + \varepsilon^{\frac{1}{p}})$$

si bien que

$$(51) \qquad \sum_{i=1}^{m} |f'(z_i) - f'(y_i)| \leq 2n(1 + \varepsilon^{\frac{1}{p}}).$$

Or, on déduit de (49) que

$$\sum_{i=1}^{m} \left[(z_i - y_i)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_i) - f'(y_i)|\right] \leq \varepsilon .$$

Ainsi

$$(52) \qquad \sum_{i=1}^{m} (z_i - y_i)^{\frac{1}{p}} \leq 2n(1 + \varepsilon^{\frac{1}{p}}) + \varepsilon.$$

ε étant un nombre strictement positif arbitraire, on en déduit que la mesure de Hausdorff de F_n dans la dimension $\frac{1}{p}$ est inférieure à $2n$.

IX. DEMONSTRATION DU THEOREME 6.

Le théorème 6 résulte facilement du théorème 8. En effet, si l'on admet ce dernier, on vérifie facilement les points suivants.

a) Si $f \in \mathcal{B}_p(T)$ est très fine, $\mu_f = 0$, ce qui implique que f est extrémale.

b) Si $f \in \mathcal{B}_p(T)$ est extrémale, μ_f est portée par E. Or, $\mu_{\frac{1}{p}}$ désignant la mesure de Hausdorff dans la dimension $\frac{1}{p}$, on a naturellement $\mu_f \leq \mu_{\frac{1}{p}}$. Ainsi, si $\mu_{\frac{1}{p}}(E) = 0$, on a $\mu_f(E) = 0$, soit $\mu_f = 0$. f étant fine d'après le théorème 1, il en résulte que f est très fine.

La démonstration des théorèmes 7 et 8 va demander une étude préalable de la mesure μ_f.

X. ETUDE DE LA MESURE μ_f.

Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et $f' \circ g$ sa factorisation canonique. Pour toute partie fermée F de $\overline{g(T)}$, posons

(13) $$\mu_f(F) = \underline{\lim} \sum_{k=1}^{n} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right]$$

où $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de F et où la limite inférieure est prise lorsque la borne supérieure des nombres $z_k - y_k$ devient arbitrairement petite. Pour toute partie A de $\overline{g(T)}$ posons

(53) $$\mu_f(A) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ fermé}}} \mu_f(F).$$

L'application $\mu_f(.)$ est une mesure extérieure métrique : si A, B sont deux parties de $\overline{g(T)}$ dont la distance est strictement positive,

$$\mu_f(A \cup B) = \mu_f(A) + \mu_f(B).$$

La restriction de l'application $\mu_f(.)$ à la σ-algèbre des boréliens de $\overline{g(T)}$ est donc une mesure régulière. μ_f désignera maintenant cette mesure.

LEMME 9. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, μ_f est une mesure régulière vérifiant $\mu_f \leq \mu_{\frac{1}{p}}$.

Nous allons prouver maintenant que l'on peut, dans la définition de $\mu_f(F)$, ne considérer que des recouvrements de F constitués d'intervalles ne se chevauchant pas. Nous avons pour cela besoin de montrer que, si l'on appelle chaine croissante de longueur $\ell > 0$, toute famille d'intervalles $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$, telle que

(54) $$y_1 < y_2 < z_1 < y_3 < z_2 \quad \dots \quad y_n < z_{n-1} < z_n$$
$$f'(y_1) \leq f'(y_2) \leq f'(z_1) \leq f'(y_3) \leq f'(z_2) \dots f'(y_n) \leq f'(z_{n-1}) \leq f'(z_n),$$

pour laquelle $z_n - y_1 = \ell$, on peut, sous certaines conditions, conclure que ℓ ne peut pas être trop grand. Si on appelle chaine décroissante de longueur $\ell > 0$ relative à f, toute chaine croissante de longueur ℓ relative à $-f$, on a le résultat suivant.

LEMME 10. Pour toute chaîne croissante ou décroissante de longueur ℓ relative à une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, on a

(55)
$$\ell \leq \sup(8^{\frac{p}{p-1}}\alpha \, , \, 4\alpha^{1-\frac{1}{p}}\beta)$$

avec
$$\alpha = \sup_{1 \leq k \leq n} (z_k - y_k)$$

(56)
$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right].$$

On a, pour tout indice $1 \leq k \leq n$,

$$(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} = (z_k - y_k)^{\frac{1}{p}-1}(z_k - y_k) \geq \alpha^{\frac{1}{p}-1}(z_k - y_k)$$

et par conséquent, pour toute suite d'indices $1 \leq k_i \leq n$ $(1 \leq i \leq m)$

(57)
$$\sum_{i=1}^{m}(z_{k_i} - y_{k_i})^{\frac{1}{p}} \geq \alpha^{\frac{1}{p}-1}\sum_{i=1}^{m}(z_i - y_i).$$

S'il existe une suite d'indices $1 \leq k_i \leq n$ $(1 \leq i \leq m)$ tels que

(58)
$$f'(z_{k_i}) - f'(y_{k_i}) \geq \frac{1}{2}(z_{k_i} - y_{k_i})^{\frac{1}{p}}$$
$$\sum_{i=1}^{m}(z_{k_i} - y_{k_i}) \geq \frac{\ell}{2},$$

il vient, compte tenu de (57),

$$\frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{p}-1}\ell \leq \frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{p}-1}\sum_{i=1}^{m}(z_{k_i} - y_{k_i}) \leq \sum_{i=1}^{m}(f'(z_{k_i}) - f'(y_{k_i}))\ ;$$

par ailleurs

$$\sum_{i=1}^{m}(f'(z_{k_i}) - f'(y_{k_i})) \leq 2(f'(z_n) - f'(y_1)) \leq 2\ell^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi, sous l'hypothèse (58),

(59) $$\ell \leq 8^{\frac{p}{p-1}} \alpha$$

Supposons maintenant que la condition (58) est en défaut. Il existe alors une suite d'indices $1 \leq k_i \leq n \quad (1 \leq i \leq m)$ tels que

(60) $$\begin{gathered} f'(z_{k_i}) - f'(y_{k_i}) \leq \frac{1}{2}(z_{k_i} - y_{k_i})^{\frac{1}{p}} \\ \sum_{i=1}^{m}(z_{k_i} - y_{k_i}) \geq \frac{\ell}{2} \end{gathered}$$

et l'on a en particulier

(61) $$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(z_{k_i} - y_{k_i})^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^{m}\left[(z_{k_i} - y_{k_i})^{\frac{1}{p}} - |f'(z_{k_i}) - f'(y_{k_i})|\right] \leq \beta .$$

Dans ces conditions on obtient, compte tenu de (57),

$$\frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{p}-1}\ell \leq \frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{p}-1}\sum_{i=1}^{m}(z_{k_i} - y_{k_i}) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(z_{k_i} - y_{k_i})^{\frac{1}{p}} \ ;$$

donc, d'après (61),

$$\frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{p}-1}\ell \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(z_{k_i} - y_{k_i})^{\frac{1}{p}} \leq \beta ,$$

et par conséquent

(62) $$\ell \leq 4\alpha^{1-\frac{1}{p}}\beta .$$

$\square$

LEMME 11. <u>Pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$, <u>dont</u> $f' \circ g$ <u>est la factorisation canonique, et toute partie fermée</u> F <u>de</u> $\overline{g(T)}$

(13) $$\mu_f(F) = \underline{\lim}\left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right],$$

<u>où</u> $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ <u>est un recouvrement de</u> F <u>formé d'intervalles ne se chevauchant pas, c'est à dire tels que</u> $z_k \leq y_{k+1}$ $(1 \leq k \leq n-1)$, <u>et où la limite inférieure est prise lorsque la borne supérieure des nombres</u> $z_k - y_k$ <u>devient arbitrairement petite.</u>

Le lemme est trivialement vérifié lorsque $\mu_f(F) = +\infty$. Considérons donc le cas où $\mu_f(F) < +\infty$. Si, pour tout nombre $\alpha > 0$, $\mu^{\alpha}(F)$ désigne la borne inférieure des nombres

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right], \tag{63}$$

où $[y_k, z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de F et où $z_k - y_k \leq \alpha$ $(1 \leq k \leq n)$, $\mu^{\alpha}(F)$ est, pour $\alpha > 0$, une fonction décroissante de α et

$$\mu_f(F) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \mu^{\alpha}(F). \tag{64}$$

Si, pour tout $\alpha > 0$, $\nu^{\alpha}(F)$ désigne la borne inférieure des nombres (63), lorsqu'on impose de plus que les intervalles $[y_k, z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ ne se chevauchent pas, il est manifeste que $\mu^{\alpha}(F) \leq \nu^{\alpha}(F)$. Tout revient alors à prouver qu'il existe une fonction continue, strictement croissante $\rho: R_+ \to R_+$, telle que $\rho(0)=0$, vérifiant, quel que soit $\alpha > 0$,

$$\mu^{\alpha}(F) \leq \nu^{\alpha}(F) \leq \mu^{\rho(\alpha)}(F). \tag{65}$$

Etant donnés quatre points $y \leq y_o \leq z \leq z_o$ de $\overline{g(T)}$, nous allons tout d'abord montrer comment l'on peut minorer

$$(z-y)^{\frac{1}{p}} + (z_o - y_o)^{\frac{1}{p}} - |f'(z) - f'(y)| - |f'(z_o) - f'(y_o)| \tag{66}$$

en faisant intervenir des intervalles qui ne se chevauchent pas. Supposons pour fixer les idées que $f'(y) \leq f'(z)$. Si $f'(y_o) \geq f'(z_o)$ il est manifeste que (66) est minoré par

$$(y_o - y)^{\frac{1}{p}} + (z_o - y_o)^{\frac{1}{p}} - |f'(y_o) - f'(y)| - |f'(z_o) - f'(y_o)| \tag{67}$$

si $f'(y_o) \geq f'(z)$ et, dans le cas contraire, est minoré par

$$(z-y)^{\frac{1}{p}} + (z_o - z)^{\frac{1}{p}} - |f'(z) - f'(y)| - |f'(z_o) - f'(z)|. \tag{68}$$

Si $f'(y_o) \leq f'(z_o)$ et si $f'(y_o) \geq f'(z)$ on voit que (66) est minoré par (67) et (68).

Il nous reste alors à envisager le cas où

(69) $$f'(y) \leq f'(y_o) \leq f'(z) \leq f'(z_o) ,$$

c'est à dire le cas où les intervalles $[y,z]$, $[y_o,z_o]$ constituent une chaîne croissante. Nous allons montrer que, sous l'hypothèse (69), (66) est minoré par

(70) $$(z_o-y)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_o) - f'(y)| .$$

Etant donnés trois nombres positifs a, b, c on a nécessairement

(71) $$(a+b+c)^{\frac{1}{p}} + a^{\frac{1}{p}} \leq (a+b)^{\frac{1}{p}} + (a+c)^{\frac{1}{p}} .$$

En effet, supposons $b \leq c$ et posons, pour tout nombre $0 \leq \lambda \leq a+b$

$$\varphi(\lambda) = (a+b-\lambda)^{\frac{1}{p}} + (a+c+\lambda)^{\frac{1}{p}} .$$

La fonction φ est décroissante et par conséquent $\varphi(b) \leq \varphi(0)$, ce qu'exprime (71).

En appliquant (71) on obtient

(72) $$(z_o - y)^{\frac{1}{p}} + (z - y_o)^{\frac{1}{p}} \leq (z - y)^{\frac{1}{p}} + (z_o - y_o)^{\frac{1}{p}} .$$

De (69) il résulte par ailleurs que

$$|f'(z_o) - f'(y)| + |f'(z) - f'(y_o)| = |f'(z) - f'(y)| + |f'(z_o) - f'(y_o)|$$

donc

(73) $$|f'(z_o) - f'(y)| + (z - y_o)^{\frac{1}{p}} \geq |f'(z) - f'(y)| + |f'(z_o) - f'(y_o)| .$$

De (72) et (73) on déduit alors que (66) est minoré par (70).

Soit $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ un recouvrement de F tel que $z_k - y_k \leq \alpha$ $(1 \leq k \leq n)$ et

(74) $$\sum_{k=1}^{n} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right] \leq \mu_f(F) + 1 ;$$

$\mu^{\alpha}(F)$ est la borne inférieure des nombres (63) correspondant à ces recouvrements.

On peut, par modifications successives, en considérant les intervalles $[y_k , z_k]$

deux à deux et en utilisant les minorations que nous venons d'établir, associer à $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ un recouvrement $[y'_k , z'_k]$ $(1 \leq k \leq n')$ de F, constitué d'intervalles ne se chevauchant pas deux à deux, tel que (63) soit minoré par

$$(63') \qquad \sum_{k=1}^{n'} \left[(z'_k - y'_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z'_k) - f'(y'_k)|\right].$$

Tout intervalle $[y'_k , z'_k]$ correspondant à l'une des minorations (67), (68) est de longueur inférieure à α. Il n'en est pas de même pour la minoration (70) qui intervient dans le cas d'une chaîne croissante ou d'une chaîne décroissante. Or, d'après le lemme 10, pour toute chaîne de longueur ℓ,

$$(55) \qquad \ell \leq \sup(8^{\frac{p}{p-1}}\alpha \ , \ 4\alpha^{1-\frac{1}{p}}\beta)$$

et, d'après (74), $\beta \leq \mu_f(F) + 1$. Ainsi

$$\sup_{1 \leq k \leq n'} (z'_k - y'_k) \leq \sup\left[8^{\frac{p}{p-1}}\alpha \ , \ 4\alpha^{1-\frac{1}{p}}(\mu_f(F) + 1)\right].$$

On voit dans ces conditions que la fonction $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, strictement croissante, définie par

$$(75) \qquad \rho^{-1}(\alpha) = \sup\left[8^{\frac{p}{p-1}}\alpha \ , \ 4\alpha^{1-\frac{1}{p}}(\mu_f(F) + 1)\right]$$

s'annule à l'origine et vérifie (65).

$\square$

Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et une partie fermée F de $\overline{g(T)}$. Pour toute partie finie $s = (t_1, \ldots, t_m)$ de F posons

$$(76) \qquad \nu^s(F) = \inf \sum_{k=1}^{n} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right]$$

où $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de F, formé d'intervalles ne se chevauchant pas et dont les extrémités appartiennent à $\overline{g(T)}$, tel que tout point t_i $(1 \leq i \leq m)$ soit un point y_k ou un point z_k $(1 \leq k \leq n)$. Le résultat suivant est immédiat.

LEMME 12. <u>Soient une fonction</u> $f \in \mathcal{B}_p(T)$, <u>dont $f' \circ g$ est la factorisation canonique, et une partie fermée</u> F <u>de</u> $\overline{g(T)}$. <u>Pour toute suite croissante</u> (s_n) <u>de parties finies de</u> F, <u>dont la réunion est dense dans</u> F,

(77) $$\mu_f(F) = \lim_{n\to\infty} \nu^{s_n}(F).$$

XI. DEMONSTRATION DU THEOREME 8.

Le a) du théorème 8 est une conséquence directe du théorème 7 ; quant au b) il peut être établi directement comme nous allons le voir.

Si f est très fine, on constate facilement que f est fine. Par ailleurs, soit une partie finie s de $\overline{g(T)}$. Il est possible, quel que soit $\varepsilon > 0$, de choisir une partie finie $(t_1, \dots, t_n)$ de $\overline{g(T)}$, telle que $t_1 < t_2 \dots < t_n$,

(78) $$t_1 = \inf \overline{g(T)} = 0 \quad , \quad t_n = \sup \overline{g(T)} = v_p(f),$$

contenant les points de s, telle que

(8) $$\sum_{i=1}^{n-1} \left[(t_{i+1} - t_i)^{\frac{1}{p}} - |f'(t_{i+1}) - f'(t_i)|\right] \leq \varepsilon ,$$

d'où il résulte que $\nu^s(\overline{g(T)}) \leq \varepsilon$. Le nombre $\varepsilon > 0$ étant choisi arbitrairement il en résulte que, pour toute partie finie s de $\overline{g(T)}$, $\nu^s(\overline{g(T)}) = 0$ et finalement, d'après le lemme 12, que $\mu_f(\overline{g(T)}) = 0$. La mesure μ_f étant positive, ceci prouve qu'elle est nulle.

Réciproquement supposons que f est fine et que $\mu_f = 0$. Pour tous nombres $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq m)$ de $\overline{g(T)}$, formé d'intervalles de longueur inférieure à ε, dont les extrémités appartiennent à $\overline{g(T)}$, tel que

$$\sum_{k=1}^{m} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right] \leq \varepsilon.$$

Comme nous l'avons prouvé au lemme 11, on peut supposer que les intervalles $[y_k, z_k]$ ne se chevauchent pas. Admettons pour fixer les idées que

$$y_k < z_k \leq y_{k+1} \qquad (1 \leq k \leq n-1).$$

Dans ce cas les intervalles $[z_k , y_{k+1}]$ sont contigus à $\overline{g(T)}$. Or, f étant une fonction fine, on a pour tout intervalle $[x,y]$ contigu à $\overline{g(T)}$,

$$|f'(y) - f'(x)| = |y - x|^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi, si l'on ordonne les points y_k , z_k en une suite croissante $(t_1, \ldots, t_n)$ on constate que tout point de $\overline{g(T)}$ est distant d'un point t_i de moins de α et que la condition (8) est réalisée. Les nombres α et ε étant arbitrairement petits, il en résulte que f est très fine.

$\square$

XII. DEMONSTRATION DU THEOREME 7 <u>(condition nécessaire)</u>.

Soit une fonction extrémale $f \in \mathfrak{B}_p(T)$ telle que $v_p(f) = 1$. D'après le théorème 1 f est fine si bien que les conditions a) et b) sont vérifiées. Il reste à établir c).

Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que la mesure μ_f n'est pas portée par E. Il existe alors une partie fermée F de $\overline{g(T)}$, disjointe de E, telle que $\mu_f(F) > 0$. D'après le lemme 12, il existe dans ces conditions une partie finie $s = (t_1, \ldots, t_m)$ de F telle que $\nu^s(F) > 0$. On peut alors trouver un indice $1 \leq i \leq m-1$ tel que la borne inférieure des nombres

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right], \tag{63}$$

où $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de $F \cap [t_i , t_{i+1}]$ (on suppose toujours que $t_1 < t_2 \ldots < t_n$), formé d'intervalles ne se chevauchant pas et dont les extrémités appartiennent à $\overline{g(T)} \cap [t_i , t_{i+1}]$, est strictement positive. Nous avons en définitive établi le résultat suivant.

LEMME 13. Si, pour une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, la mesure μ_f n'est pas portée par E, il existe une partie fermée F de $\overline{g(T)}$ disjointe de E et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout recouvrement $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ de F, constitué par des intervalles ne se chevauchant pas et dont les extrémités appartiennent à $\overline{g(T)} \cap [a,b]$, avec $a = \inf F$, $b = \sup F$, on ait

(79) $$\sum_{k=1}^{n} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right] \geq \varepsilon.$$

Soit F une partie fermée de $\overline{g(T)}$ vérifiant les conditions du lemme 13. Pour tous points $x \leq y$ dans F désignons par $\eta(x , y)$ la borne inférieure des nombres

(63) $$\sum_{k=1}^{n} \left[(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|\right]$$

où $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de $F \cap [x,y]$, formé d'intervalles ne se chevauchant pas et dont les extrémités appartiennent à $\overline{g(T)} \cap [x,y]$. Si l'on pose $a = \inf F$, $b = \sup F$, on a alors, pour toute suite

$$t_o = a < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$$

de points de F,

(80) $$\sum_{i=0}^{n} \eta(t_i , t_{i+1}) \geq \varepsilon.$$

Supposons, pour simplifier les notations, que $v_p(f) = 1$. Nous allons établir dans ces conditions qu'il existe une fonction $\zeta' : \overline{g(T)} \to R$ continue, non identiquement nulle, à support dans $[a,b]$, constante sur les intervalles contigus à F, vérifiant en outre sur $\overline{g(T)}$ les conditions

(81) $$|f'(y) - f'(x) \mp (\zeta'(y) - \zeta'(x))| \leq |y - x|^{\frac{1}{p}}.$$

Si l'on pose $\zeta = \zeta' \circ g$ on déduit aussitôt de (81) que les nombres $v_p(f + \zeta)$ et $v_p(f - \zeta)$ sont inférieurs à 1 et par conséquent que la fonction f n'est pas extrémale. La possibilité de construire la fonction ζ' résultera facilement du lemme que nous établissons maintenant et où nous nous ramenons au cas d'un ensemble fini.

LEMME 14. Soit $(\eta(j,k))$ une matrice carrée d'ordre m, à valeurs positives. Si, pour toute suite d'entiers $t_o = 1 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = m$, on a

(82) $$\sum_{i=0}^{n} \eta(t_i , t_{i+1}) \geq 1 ,$$

il existe une suite croissante ζ_k $(1 \leq k \leq m)$ de nombres positifs vérifiant

(83) $$\begin{gathered} \zeta_1 = 0 \quad , \quad \zeta_m \geq 1 \\ \zeta_k - \zeta_j \leq \eta(j,k) \quad (1 \leq j < k \leq m). \end{gathered}$$

Raisonnons par récurrence sur m. Si $m = 2$, la propriété est évidente. m étant un entier strictement supérieur à 2, soit

$$\varepsilon = \inf \sum_{i=0}^{n} \eta(t_i , t_{i+1})$$

où $t_o = 1 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = m-1$. Supposons qu'il existe une suite croissante ζ_k $(1 \leq k \leq m-1)$ de nombres positifs vérifiant

$$\begin{gathered} \zeta_1 = 0 \quad , \quad \zeta_{m-1} \geq \varepsilon \\ \zeta_k - \zeta_j \leq \eta(j,k) \qquad (1 \leq j < k \leq m-1). \end{gathered}$$

Posons

$$\zeta_m = \inf_{1 \leq k \leq m-1} [\eta(k,m) - \zeta_k] ;$$

la suite $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1}, \zeta_m$ vérifie manifestement les conditions (83).

$\square$

Plaçons nous dans les hypothèses du lemme 13 et soit F une partie fermée de $\overline{g(T)}$ disjointe de E, vérifiant (79). $\eta(x,y)$ désigne, pour tous points $x \leq y$ de F la borne inférieure des nombres (63), où $[y_k, z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de $F \cap [x,y]$, formé d'intervalles ne se chevauchant pas et dont les extrémités appartiennent à $\overline{g(T)} \cap [x,y]$. On a, quels que soient $x < z < y$ dans F

(84) $$\eta(x,y) \leq \eta(x,z) + \eta(z,y) \;;$$

par ailleurs, pour toute suite

$$t_o = a < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$$

de points de F, où $a = \inf F$, $b = \sup F$, on a

(85) $$\sum_{i=0}^{n} \eta(t_i , t_{i+1}) \geq \varepsilon.$$

Soit D un ensemble dénombrable partout dense de points de F (le cas où F serait fini n'est pas à envisager puisque la mesure μ_f est diffuse et que $\mu_f(F) > 0$). Nous allons supposer que a et b appartiennent à D. Désignons par (x_k) un dénombrement de D tel que $x_1 = a$, $x_2 = b$. On peut, d'après le lemme 14, choisir pour tout entier $m \geq 2$, une suite de nombres $\zeta_k^{(m)}$ $(1 \leq k \leq m)$ vérifiant

$$\zeta_1^{(m)} = 0 \qquad , \qquad \zeta_2^{(m)} \geq \varepsilon$$

et, quels que soient les indices j,k compris entre 1 et m, tels que $x_j < x_k$,

$$0 \leq \zeta_k^{(m)} - \zeta_j^{(m)} \leq \eta(x_j , x_k).$$

De la condition (84) il résulte facilement que l'on peut, pour tout indice $m \geq 3$, construire la suite des nombres $\zeta_k^{(m)}$ $(1 \leq k \leq m)$, à partir de la suite $\zeta_k^{(m-1)}$ $(1 \leq k \leq m-1)$, en prenant

$$\zeta_k^{(m)} = \zeta_k^{(m-1)} \qquad (1 \leq k \leq m-1)$$

et en choisissant convenablement $\zeta_m^{(m)}$. En définitive il existe une suite infinie (ζ_k) de nombres positifs vérifiant

$$(86) \qquad \zeta_1 = 0 \quad , \quad \zeta_2 \geq \varepsilon$$

et, quels que soient les indices j,k tels que $x_j < x_k$,

$$0 \leq \zeta_k - \zeta_j \leq \eta(x_j\,,\,x_k).$$

Cette dernière condition exprime que, quels que soient les indices j,k, tels que $x_j < x_k$,

$$(87) \qquad 0 \leq \zeta_k - \zeta_j \leq (x_k - x_j)^{\frac{1}{p}} - |f'(x_k) - f'(x_j)|.$$

Ainsi, si l'on remarque que, pour tout intervalle $[x,y]$ contigu à F, $\eta(x,y) = 0$, on constate qu'il existe une fonction continue, monotone croissante unique $\tilde{\zeta} : \overline{g(T)} \to \mathbb{R}$, nulle sur $\overline{g(T)} \cap [0,a]$, constante sur les intervalles contigus à F, égale à ζ_2 sur $\overline{g(T)} \cap [b,1]$ et vérifiant

$$(88) \qquad \tilde{\zeta}(x_k) = \zeta_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

La fonction $\tilde{\zeta}$ est définie par

$$(89) \qquad \tilde{\zeta}(x) = \sup_{x_k \leq x} \zeta_k \qquad (x \in \overline{g(T)}).$$

D'après (87) et (88), la fonction $\tilde{\zeta}$ vérifie les conditions

$$(90) \qquad |f'(y) - f'(x) \pm (\tilde{\zeta}(y) - \tilde{\zeta}(x))| \leq |y - x|^{\frac{1}{p}}$$

sur $\overline{g(T)} \cap [a,b]$. Mais on n'est pas assuré que la fonction $\tilde{\zeta}$ vérifie les conditions (90) sur $\overline{g(T)}$. Deux cas risquent de se présenter.

(i) Il existe dans $\overline{g(T)}$ deux points $x < a$, $y > b$ tels que les conditions (90) ne soient pas réalisées.

(ii) Il existe dans $\overline{g(T)}$ deux points vérifiant $x < a \leq y \leq b$ ou $a \leq x \leq b < y$ tels que les conditions (90) ne soient pas réalisées.

Il est facile d'éliminer le cas (i) en substituant à $\tilde{\zeta}$

$$\xi^* = \inf(\tilde{\zeta}\ ,\ \tilde{\zeta}(1) - \tilde{\zeta}).$$

Nous éliminerons simultanément les cas (i), (ii) en substituant à $\tilde{\zeta}$ une fonction ζ' que nous allons construire. La fonction $\tilde{\zeta}$ a une variation totale supérieure à ε. Soit alors un nombre $\alpha > 0$ tel que

$$v_1(\tilde{\zeta},\ [a+\alpha\ ,\ b-\alpha]) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'ensemble des extrémités des intervalles $[y,z]$ tels que

(37) $$|f'(z) - f'(y)|^p = z - y \geq \alpha$$

est une partie fermée G_α de $\overline{g(T)}$ disjointe de F. Il existe donc un sous-intervalle $[c,d]$ de $[a+\alpha\ ,\ b-\alpha]$ disjoint de G_α tel que

(91) $$v_1(\tilde{\zeta}\ ,\ [c,d]) > 0.$$

Il résulte alors de la continuité de la fonction f' qu'il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que, pour tous points x,y de $\overline{g(T)}$ vérifiant $c \leq x \leq d$, $y \leq a$ ou $y \geq b$ on ait

(92) $$|y-x|^{\frac{1}{p}} - |f'(y) - f'(x)| \geq \lambda.$$

On constate dans ces conditions que la fonction ζ', nulle en dehors de l'intervalle $[c,d]$ et définie sur $\overline{g(T)} \cap [c,d]$ par

(93) $$\zeta' = \inf(\tilde{\zeta} - \tilde{\zeta}(c)\ ,\ \tilde{\zeta}(d) - \tilde{\zeta}\ ,\ \lambda),$$

est non nulle et possède toutes les propriétés désirées. Ceci achève de prouver que la fonction f' n'est pas extrémale et par conséquent que les conditions du théorème 7 sont nécessaires.

$\square$

XIII. FIN DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 7 <u>(condition suffisante)</u>.

Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ telle que $v_p(f) = 1$ et $f' \circ g$ sa factorisation canonique. Si la fonction f vérifie les conditions du théorème 7, nous allons établir que c'est un point extrémal de la boule unité de $\mathcal{B}_p(T)$. Cela revient à montrer que toute fonction $\zeta \in \mathcal{B}_p(T)$ vérifiant

(94) $$v_p(f \pm \zeta) \leq 1$$

est nulle (modulo une constante).

Etant donnée une fonction $\zeta \in \mathcal{B}_p(T)$, les lemmes suivants établissent l'existence d'une fonction $\zeta' \in \mathcal{B}_p(\overline{g(T)})$ telle que $(f' + \zeta') \circ g$ et $(f' - \zeta') \circ g$ soient respectivement la factorisation canonique des fonctions $f + \zeta$ et $f - \zeta$. Pour établir que la fonction ζ est nulle, il suffit alors de prouver que la fonction ζ' est nulle, ce qui facilite grandement la démonstration. Naturellement on peut, d'après le lemme 5, substituer f' à f ; cela revient à supposer que g est l'identité, mais il s'agit là d'une simplification illusoire. Nous préférons donc partir d'une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$, vérifiant les conditions du théorème 7, arbitraire.

LEMME 15. Pour toutes fonctions f, ζ dans $\mathcal{B}_p(T)$

(95) $$2v_p(f) \leq v_p(f + \zeta) + v_p(f - \zeta).$$

Cela résulte immédiatement de l'inégalité

(α) $$2|a|^p \leq |a+b|^p + |a-b|^p$$

valable pour tous nombres a, b.

$\square$

LEMME 16. Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et une partie A de T. Pour toute factorisation de f en une fonction $g : T \to \mathbb{R}$ monotone croissante et une fonction continue $f' : \overline{g(T)} \to \mathbb{R}$

(96) $$v_p(f\ ,\ A) = v_p(f'\ ,\ g(A)) = v_p(f'\ ,\ \overline{g(A)}).$$

Cette propriété tout à fait élémentaire est établie dans [1].

LEMME 17. Soient des fonctions f , ζ dans $\mathfrak{B}_p(T)$ telles que

(97) $$v_p(f) = v_p(f+\zeta) = v_p(f-\zeta).$$

Si la fonction f est fine, la fonction ζ est continue et

(98) $$v_p(f\ ,\ I) = v_p(f+\zeta\ ,\ I) = v_p(f-\zeta\ ,\ I),$$

pour tout intervalle I de $\overline{\mathbb{R}}$.

Notons d'abord que, pour toute fonction $f \in \mathfrak{B}_p(T)$ et tous points $x \le y$ de T,

(99) $$v_p(f\ ,\ [x,y]) \le v_p(f) - v_p(f, [-\infty,x]) - v_p(f\ ,\ [y,+\infty]),$$

l'égalité ayant lieu en particulier si f est fine. Plaçons nous maintenant dans les hypothèses du lemme. f étant fine, $2v_p(f\ ,\ [x,y])$ est égal à

$$2v_p(f) - 2v_p(f\ ,\ [-\infty\ ,\ x]) - 2v_p(f\ ,\ [y\ ,\ +\infty]),$$

soit encore d'après (97) à

$$v_p(f+\zeta) + v_p(f-\zeta) - 2v_p(f\ ,\ [-\infty,x]) - 2v_p(f\ ,\ [y\ ,\ +\infty]).$$

En appliquant l'inégalité (95) aux restrictions des fonctions f et ζ aux intervalles $[-\infty\ ,\ x]$, $[y\ ,\ +\infty]$, on voit que $2v_p(f\ ,\ [x,y])$ est minoré par la somme des deux nombres

$$v_p(f+\zeta) - v_p(f+\zeta\ ,\ [-\infty,x]) - v_p(f+\zeta\ ,\ [y,+\infty]),$$

$$v_p(f-\zeta) - v_p(f-\zeta\ ,\ [-\infty,x]) - v_p(f-\zeta\ ,\ [y,+\infty]).$$

En appliquant l'inégalité (99) aux fonctions $f+\zeta$ et $f-\zeta$ on obtient alors

$$2v_p(f\ ,\ [x,y]) \ge v_p(f+\zeta\ ,\ [x,y]) + v_p(f-\zeta\ ,\ [x,y]).$$

L'inégalité contraire résultat de (95), appliquée aux restrictions des fonctions f, ζ à $[x,y]$, nous avons ainsi établi que, quels que soient $x \leq y$ dans T,

(100) $$2v_p(f\ ,\ [x,y]) = v_p(f+\zeta\ ,\ [x,y]) + v_p(f-\zeta\ ,\ [x,y]).$$

$f' \circ g$ désignant la factorisation canonique de f, il résulte de (100) qu'il existe une fonction continue unique $\zeta' : \overline{g(T)} \to \mathbb{R}$, à p-v.b., telle que $\zeta = \zeta' \circ g$.

La fonction f étant fine, quels que soient les points $x \leq y$ dans $\overline{g(T)}$,

$$v_p(f'\ ,\ [x,y]) = y - x.$$

En utilisant le lemme 16, on déduit donc de (100) que, pour tous points $x \leq y$ de $\overline{g(T)}$,

$$v_p(f' + \zeta'\ ,\ [x,y]) + v_p(f' - \zeta'\ ,\ [x,y]) = 2(y - x)$$

et par suite que, quels que soient $x \leq y$ dans $\overline{g(T)}$,

(101) $$|(f' + \zeta')(y) - (f' + \zeta')(x)|^p + |(f' - \zeta')(y) - (f' - \zeta')(x)|^p \leq 2(y - x).$$

f étant une fonction fine, il résulte du théorème 4 que, pour presque tout point $x \in \overline{g(T)}$,

(10) $$\varlimsup_{y \to x} \frac{|f'(y) - f'(x)|^p}{|y - x|} = 1.$$

Soit un point $x \in \overline{g(T)}$ vérifiant (10). Il existe une suite (y_n) dans $\overline{g(T)}$, convergeant vers x, telle que $y_n \neq x$ $(n \in \mathbb{N})$, vérifiant

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|f'(y_n) - f'(x)|^p}{|y_n - x|} = 1.$$

De (101) et du fait que l'égalité dans (α) ne peut avoir lieu que pour $b = 0$, il résulte que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\zeta'(y_n) - \zeta'(x)|^p}{|y_n - x|} = 0.$$

Nous venons ainsi d'établir que, pour presque tout point $x \in \overline{g(T)}$,

(102) $$\varlimsup_{y \to x} \frac{|f'(y) - f'(x) \mp (\zeta'(y) - \zeta'(x))|^p}{|y - x|} = 1.$$

Par ailleurs, pour tout intervalle $[x,y]$ contigu à $\overline{g(T)}$, la condition

(9) $$|f'(y) - f'(x)|^p = y - x$$

est vérifiée si bien que, compte tenu de (101), $\zeta'(x) = \zeta'(y)$ et par suite

(103) $$|f'(y) - f'(x) \pm (\zeta'(y) - \zeta'(x))|^p = y - x \ .$$

Etant donnés maintenant deux points $x \leq y$ de T, il résulte des conditions (102) et (103) que

$$v_p(f' + \zeta' \ , \ [g(x) \ , \ g(y)]) \geq g(y) - g(x) = v_p(f \ , \ [x,y]) \ ;$$

d'autre part on a, d'après le lemme 16,

$$v_p(f' + \zeta' \ , \ [g(x) \ , \ g(y)]) = v_p(f' + \zeta' \ , \ g([x,y])) = v_p(f + \zeta, \ [x,y]).$$

La fonction $f - \zeta$ vérifiant les mêmes conditions que la fonction $f + \zeta$, on a, quels que soient $x \leq y$ dans $\overline{g(T)}$

(104) $$v_p(f \pm \zeta \ , \ [x,y]) \geq v_p(f \ , \ [x,y]).$$

Des conditions (100) et (104) on déduit alors (98) pour tout intervalle $I = [x,y]$, dont les extrémités appartiennent à T et par conséquent pour tout intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour établir que ζ est continue, montrons par exemple que ζ est continue à droite. Soit un point $x \in T$. Si f est continue à droite au point x, il résulte de (100) qu'il en est de même pour les fonctions $f + \zeta$, $f - \zeta$, donc pour ζ. Si f est discontinue à droite au point x, désignons respectivement par $f(x+)$, $g(x+)$, $\zeta(x+)$ les limites à droite, le long de T, au point x, des fonctions f, g, ζ. $f(x) \neq f(x+)$ implique $g(x) \neq g(x+)$. Ainsi, $[g(x) \ , \ g(x+)]$ est un intervalle contigu à $\overline{g(T)}$, si bien que, comme nous l'avons montré, ζ prend la même valeur aux points $g(x)$ et $g(x+)$. On peut donc écrire

$$\zeta(x+) = \zeta'(g(x+)) = \zeta'(g(x)) = \zeta(x).$$

□

Pour appliquer le lemme 17, il faut que la fonction f soit fine, d'où l'intérêt du résultat suivant.

LEMME 18. Toute fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ vérifiant les conditions a), b), c) du théorème 7 est fine.

Il est commode, pour établir ce lemme, d'utiliser une nouvelle caractérisation des fonctions fines.

LEMME 19. Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ et $f' \circ g$ sa factorisation canonique. Une C.N.S. pour que f soit fine est que soient vérifiées les conditions suivantes.

a) Pour tout intervalle $[y,z]$ contigu à $\overline{g(T)}$

$$|f'(z) - f'(y)|^p = z - y. \tag{9}$$

b) Pour presque tout point $x \in \overline{g(T)}$

$$\overline{\lim_{\substack{y<x<z \\ |z-y|\to 0}}} \frac{|f'(z) - f'(y)|^p}{z - y} = 1. \tag{105}$$

Les conditions sont nécessaires d'après le théorème 4. Montrons qu'elles sont suffisantes. Nous allons utiliser la remarque élémentaire suivante. De toute famille d'intervalles $\mathfrak{R}$ formant un recouvrement d'un intervalle I de longueur ℓ, on peut extraire une suite finie d'intervalles deux à deux disjoints dont la somme des longueurs est supérieure à un nombre donné α, ceci pour tout $\alpha < \frac{\ell}{3}$. Ainsi, on peut prendre par exemple $\alpha = \frac{\ell}{4}$. Il en est naturellement de même si $\mathfrak{R}$ est un recouvrement de I à un ensemble négligeable près.

Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$, les intervalles $[y,z]$, dont les extrémités appartiennent à $\overline{g(T)}$, tels que

(106) $$|f'(z) - f'(y)|^p \geq (1 - \varepsilon)(z - y)$$

forment, sous les hypothèses a) et b), un recouvrement de $[0\ ,\ v_p(f)]$ à un ensemble négligeable près ; soit $\mathfrak{R}$ ce recouvrement. On peut extraire de $\mathfrak{R}$ une suite finie $[y_k\ ,\ z_k]$ $(1 \leq k \leq n_1)$ d'intervalles deux à deux disjoints, telle que

$$\sum_{k=1}^{n_1} (z_k - y_k) \geq \frac{1}{4}\, v_p(f).$$

Il est alors facile, en appliquant le même principe aux intervalles restants, de compléter cette suite en une suite finie $[y_k\ ,\ z_k]$ $(1 \leq k \leq n_2)$ d'intervalles deux à deux disjoints, extraite de $\mathfrak{R}$, telle que

$$\sum_{k=1}^{n_2} (z_k - y_k) \geq \frac{7}{16}\, v_p(f).$$

En procédant par récurrence, on peut construire ainsi une suite finie d'intervalles deux à deux disjoints, extraite de $\mathfrak{R}$, $[y_k\ ,\ z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k) \geq (1 - \varepsilon) v_p(f).$$

s désignant alors l'ensemble des points $y_k\ ,\ z_k$ $(1 \leq k \leq n)$ ordonnés en une suite croissante, on a

(107) $$S_p^s(f') \geq (1 - \varepsilon)^2\, v_p(f)\ ,$$

la notation $S_p^s(.)$ étant celle introduite au paragraphe III du Chapitre I. Pour toute partie finie u de $\overline{g(T)}$, il est possible d'imposer de plus à s de contenir les points de u ; en effet les intervalles $[y\ ,\ z]$, dont les extrémités appartiennent à $\overline{g(T)}$, vérifiant (106) et ne contenant aucun point de u, forment, toujours sous les hypothèses a) et b), un recouvrement de $[0\ ,\ v_p(f)]$ à un ensemble négligeable près. $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a en définitive

(108) $$v_p(f) = v_p(f') = \sup_{u \subset s \subset \overline{g(T)}} S_p^s(f').$$

La condition (108), valable pour toute partie finie u de $\overline{g(T)}$, exprime que $\overline{g(T)}$ est une partie totale pour f', autrement dit que f' est une fonction fine. La fonction f est donc fine.

□

Démonstration du lemme 18. Soit une fonction $f \in \mathfrak{B}_p(T)$ vérifiant les conditions a), b), c), du théorème 7. Si f n'est pas fine, il résulte de la condition a) du théorème 7 et des conditions a), b) du lemme 19, qu'il existe une partie fermée F de $\overline{g(T)}$, de mesure strictement positive et un nombre $0 < \alpha < 1$ tels que

$$(109) \qquad \varlimsup_{\substack{y<x<z \\ |z-y|\to 0}} \frac{|f'(z) - f'(y)|}{(z-y)^p} \leq \alpha ,$$

en tout point $x \in F$. On peut donc choisir une partie fermée F de $\overline{g(T)}$ de mesure strictement positive, un nombre $0 < \alpha < 1$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $x \in F$,

$$(110) \qquad \sup_{\substack{y<x<z \\ |z-y|\leq \frac{1}{n}}} \frac{|f'(z) - f'(y)|}{(z-y)^{\frac{1}{p}}} \leq \alpha .$$

La condition b) du théorème 7 exprimant que E est de mesure nulle, on peut supposer de plus que F est disjoint de E. De la condition (110) il résulte que, pour tout intervalle $[y,z]$ de longueur inférieure à $\frac{1}{n}$, dont l'intérieur rencontre F, on a

$$(z - y)^{\frac{1}{p}} - |f'(z) - f'(y)| \geq (1 - \alpha)(z - y)^{\frac{1}{p}} ,$$

soit encore

$$(111) \qquad (z - y)^{\frac{1}{p}} - |f'(z) - f'(y)| \geq (1 - \alpha)n^{1-\frac{1}{p}} (z - y).$$

μ désignant la mesure de Lebesgue on obtient alors

$$(112) \qquad \mu_f(F) \geq (1 - \alpha)n^{1-\frac{1}{p}} \mu(F) > 0 ,$$

d'où une contradiction puisque, d'après la condition c) du théorème 7, la mesure μ_f est portée par E.

□

Démonstration du théorème 7 (Condition suffisante).

Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ vérifiant les conditions du théorème 7, telle que $v_p(f) = 1$, et une fonction $\zeta \in \mathcal{B}_p(T)$ telle que $v_p(f \pm \zeta) \leq 1$. La fonction

$$\lambda \longrightarrow (v_p(f + \lambda\zeta))^{\frac{1}{p}}$$

étant concave, il en résulte que

(97) $$v_p(f) = v_p(f + \zeta) = v_p(f - \zeta).$$

Puisque, d'après le lemme 18, la fonction f est fine, il résulte du lemme 17 que, pour tout intervalle I de $\overline{\mathbb{R}}$,

(98) $$v_p(f, I) = v_p(f+\zeta, I) = v_p(f-\zeta, I),$$

et qu'il existe une fonction continue unique $\zeta' : \overline{g(T)} \to \mathbb{R}$ telle que $\zeta = \zeta' \circ g$.

Il est alors immédiat que $(f' + \zeta') \circ g$ et $(f' - \zeta') \circ g$ sont respectivement les factorisations canoniques des fonctions $f + \zeta$ et $f - \zeta$; en effet, d'après (98), on a, pour tout $x \in T$,

(113) $$g(x) = v_p(f\ ,\ [-\infty, x]) = v_p(f \pm \zeta\ ,\ [-\infty, x]).$$

Il en résulte en particulier que, quels que soient $y \leq z$ dans $\overline{g(T)}$,

(114) $$|f'(z) - f'(y)| \pm (\zeta'(z) - \zeta'(y))| \leq (z - y)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous voulons établir que la fonction ζ' est identiquement nulle (modulo une constante).

Pour simplifier prolongeons les fonctions f', ζ', par linéarité sur les intervalles contigus à $\overline{g(T)}$, en deux fonctions définies sur $[0\ ,\ 1]$; f' et ζ' désignent maintenant ces prolongements. Les inégalités (114) sont alors vérifiées quels que soient

$y \leq z$ dans $[0,1]$.

Désignons par ν la mesure régulière définie sur les boréliens de $[0,1]$, positive, diffuse, prenant sur toute partie fermée F la valeur

$$(115) \qquad \nu(F) = \underline{\lim} \sum_{k=1}^{n} |\zeta'(z_k) - \zeta'(y_k)|,$$

$[y_k, z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ étant des intervalles formant un recouvrement de F et la borne supérieure des nombres $z_k - y_k$ $(1 \leq k \leq n)$ étant arbitrairement petite.

La variation totale de la fonction ζ' est égale à la masse totale de la mesure ν. Il reste donc à établir que ν est la mesure nulle. Comme nous l'avons établi dans la démonstration du lemme 17, pour tout intervalle $[y,z]$ contigu à $\overline{g(T)}$, $\zeta'(y) = \zeta'(z)$. Ainsi la mesure ν est portée par $\overline{g(T)}$. Pour établir que $\nu = 0$, nous montrerons d'abord que ν est portée par E, puis que $\nu(E) = 0$.

Soit une partie fermée F de $\overline{g(T)}$ disjointe de E. Il résulte de (114) que, pour toute suite $[y_k, z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ d'intervalles formant un recouvrement de F, on a

$$(116) \qquad \sum_{k=1}^{n} |\zeta'(z_k) - \zeta'(y_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} [(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|]$$

d'où l'on déduit que $\nu(F) \leq \mu_f(F)$ et par suite que $\nu(F) = 0$, puisque μ_f est portée par E.

Pour tout nombre $n \in N$, désignons par F_n la partie fermée de E constituée par les extrémités des intervalles $[y,z]$ tels que

$$(117) \qquad |f'(z) - f'(y)|^p = z - y \geq \frac{1}{n}.$$

D'après le lemme 7, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, si deux points u, v de F_n sont distants de moins de ε,

$$(118) \qquad |f'(v) - f'(u)| \leq n |v - u|.$$

Des conditions (114) et (117) on déduit que, pour tout intervalle $[y , z]$ vérifiant (117),

(119) $$|f'(z) - f'(y) \pm (\zeta'(z) - \zeta'(y))|^p = z - y \geq \frac{1}{n} \ ;$$

en effet, on a nécessairement $\zeta'(y) = \zeta'(z)$. En appliquant alors le lemme 7 aux fonctions $f' + \zeta'$ et $f' - \zeta'$, on en déduit l'existence d'un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, si deux points u , v de F_n sont distants de moins de ε,

(120) $$|f'(v) - f'(u) \pm (\zeta'(v) - \zeta'(u))| \leq n\,|v-u|.$$

Il résulte de (118) et (120) qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous points u , v de F_n distants de moins de ε,

(121) $$|\zeta'(v) - \zeta'(u)| \leq 2n\,|v-u|.$$

μ désignant la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, on déduit de (121) que

(122) $$\nu(F_n) \leq 2n\,\mu(F_n).$$

D'après la condition b) du théorème 7 $\mu(E) = 0$, donc, pour tout $n \in N$, $\mu(F_n) = 0$. Ainsi, pour tout $n \in N$, $\nu(F_n) = 0$. Puisque E est la réunion de la suite (F_n) et que la mesure ν est portée par E, cela achève de prouver que $\nu = 0$.

$\square$

XIV. DEMONSTRATION DU THEOREME 9.

Soient une fonction $f \in \mathcal{B}_p(T)$ telle que $v_p(f) = 1$ et $f' \circ g$ sa factorisation canonique. Supposons que f vérifie les conditions a) et b) du théorème 7. Tout revient à montrer que, si la condition du théorème 9 n'est pas vérifiée, il existe une partie fermée F de $\overline{g(T)}$ ne rencontrant pas E, telle que $\mu_f(F) > 0$.

Si la condition du théorème 9 n'est pas réalisée, il existe une fonction continue, monotone croissante h, vérifiant

$$t \leq h(t) \leq t^{\frac{1}{p}} \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

et un nombre $c > 0$ tels que

(123) $$\varliminf_{\substack{y<x<z \\ |z-y|\to 0}} \frac{(z-y)^{\frac{1}{p}} - |f'(z) - f'(y)|}{h(z-y)} \geq c$$

en tout point x d'une partie fermée F de $\overline{g(T)}$ ne rencontrant pas E et dont la h-mesure de Hausdorff est strictement positive. Soit $H(F)$ la h-mesure de Hausdorff de E.

Soit, pour tout nombre $\rho > 0$, $H_\rho(F)$ la borne inférieure des nombres

$$\sum_{k=1}^{n} h(z_k - y_k)$$

où $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de F constitué par des intervalles de longueur inférieure à ρ. Puisque $H(F)$ est la limite des nombres $H_\rho(F)$ lorsque ρ tend vers zéro, on peut fixer $\rho_0 > 0$ tel que $H_\rho(F) > 0$, pour tout nombre $0 < \rho < \rho_0$.

Il résulte de (123) que l'on peut choisir $0 < \rho \leq \rho_0$ en sorte que, pour tout intervalle $]y , z[$, de longueur inférieure à ρ, rencontrant F on ait

(124) $$(z - y)^{\frac{1}{p}} - |f'(z) - f'(y)| \geq \frac{c}{2} h(z - y).$$

Dans ces conditions, si $[y_k , z_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de F constitué par des intervalles de longueur inférieure à ρ, dont l'intérieur rencontre F, on a

$$\sum_{k=1}^{n} [(z_k - y_k)^{\frac{1}{p}} - |f'(z_k) - f'(y_k)|] \geq \frac{c}{2} H_\rho(F) ,$$

d'où il résulte que

(125) $$\mu_f(F) \geq \frac{c}{2} H_\rho(F),$$

donc que $\mu_f(F) > 0$. Ceci achève la démonstration puisque F ne rencontre pas E.

$\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUNEAU, M. Thèse. Strasbourg, 1970 (A paraître).

[2] BRUNEAU, M. Caractérisation des pointx extrémaux de la boule unité de l'espace des fonctions à p-variation bornée. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274 (1972), 51-54.

[3] HALMOS, P. R. Measure theory. Van Nostrand 1950.

Chapitre III

FONCTIONS p,α-FINES ET NOMBRES MAL APPROCHEES

Le but de cette étude est de mettre en évidence, à l'aide de quelques résultats partiels, la correspondance existant entre le comportement irrégulier de certaines fonctions et un problème particulier d'approximation sur le tore. De façon précise nous montrons que, pour certaines fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, les points $x \in \mathbb{T}$ au voisinage desquels f "varie particulièrement vite", sont exactement les points du tore qui sont "bien approchés" par les points d'une suite Λ, associée de façon naturelle à f. Cet article, qui est un prolongement naturel de [3] et [4], a des affinités avec les travaux de B. Volkmann ([12], [13] et [14]), portant sur la dimension de Hausdorff d'ensembles de nombres non-normaux, bien qu'il en diffère radicalement, tant par la méthode suivie que par la motivation.

I. MESURES ET DIMENSIONS DE HAUSDORFF.

$\mathbb{T}$ désigne le tore, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels modulo 1. Soit un nombre $0 < \alpha \leq 1$. Pour tout compact $K \subset \mathbb{T}$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, on pose

(1) $$\mu_{\alpha,\varepsilon}(K) = \inf \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^{\alpha} ,$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des recouvrements $]x_k , y_k[$ $(1 \leq k \leq n)$

de K, constitués d'intervalles dont la longueur est inférieure à ε. La mesure de Hausdorff de K, dans la dimension α, est le nombre

$$\mu_\alpha(K) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \mu_{\alpha,\varepsilon}(K). \tag{2}$$

Plus généralement, la mesure de Hausdorff d'un borélien $A \subset \mathbf{T}$, dans la dimension α, est le nombre

$$\mu_\alpha(A) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset A}} \mu_\alpha(K). \tag{3}$$

Etant donné un borélien A de $\mathbf{T}$, on appelle dimension de Hausdorff de A et l'on note $\dim A$, l'unique nombre $0 \leq \alpha_o \leq 1$ tel que $\mu_\alpha(A) = +\infty$ si $0 < \alpha < \alpha_o$ et $\mu_\alpha(A) = 0$ si $\alpha_o < \alpha < 1$.

II. FONCTIONS p,α-FINES ET p,α-FINES *.

Quel que soit $x \in \mathbf{T}$, on désigne par $|x|$ la distance du point x à l'origine.

Soient des nombres $p > 1$, $\alpha > 0$. Une fonction $f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ est dite p,α-fine si

$$(4) \qquad \begin{cases} |f(y) - f(x)|^p \leq \alpha \; |y-x| & (x,y \in \mathbf{T}) \\ \overline{\lim_{y \to x}} \dfrac{|f(y) - f(x)|^p}{|y-x|} = \alpha & (\text{p. p.}). \end{cases}$$

Nous dirons que f est p,α-fine * si de plus

$$\dim \left\{ x \;\middle|\; \overline{\lim_{y \to x}} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y-x|} < \alpha \right\} = 1 \tag{5}$$

et, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\dim \left\{ x \;\middle|\; \overline{\lim_{y \to x}} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y-x|} \leq \alpha - \varepsilon \right\} < 1. \tag{6}$$

THEOREME 1. Soient un nombre $p > 1$ et un entier $g \geq 2$. Pour toute fonction $\zeta : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ concave, paire, telle que $|\zeta(x)| \leq |x|$ $(x \in \mathbf{T})$, la fonction

(7) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{-\frac{n}{p}} \zeta(g^n x)$$

est p, α-fine * avec $\alpha^{\frac{1}{p}} = \overline{\lim}_{x \searrow 0} x^{-1/p} f(x)$.

COROLLAIRE. Pour tout nombre $p > 1$ et tout entier $g \geq 2$, les fonctions

(8)
$$x \to \sum_{n=0}^{\infty} g^{-\frac{n}{p}} |g^n x|$$
$$x \to \sum_{n=0}^{\infty} g^{-\frac{n}{p}} |\sin 2\pi g^n x|$$

sont p, α-fines *.

THEOREME 2. Etant donné un nombre $\frac{1}{3} < \xi < \frac{1}{2}$, soit $p > 1$ l'unique nombre vérifiant $\xi^{\frac{1}{p}} > \frac{1}{2}$ et

(9) $$2\xi + (2\xi^{\frac{1}{p}} - 1)^p = 1.$$

$\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ étant l'unique fonction continue vérifiant, pour $0 < \lambda < 1$, les conditions

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad \varphi(\xi) = \xi^{\frac{1}{p}}$$
$$\varphi(1 - \lambda) = 1 - \varphi(\lambda)$$
$$\varphi(\lambda\xi) = \varphi(\lambda)\xi^{\frac{1}{p}}$$
$$\varphi(\xi + \lambda(1-2\xi)) = \xi^{\frac{1}{p}} + \varphi(\lambda)(1 - 2\xi^{\frac{1}{p}}).$$

la fonction $f = |\varphi|$ est p, 1-fine *.

Dans [3] nous avons établi que les fonctions $f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$, intervenant dans les théorèmes 1 et 2, sont p, α-fines. Le fait qu'elles sont p, α-fines * est lié, comme nous allons le voir, à un même problème d'approximation sur le tore.

III. APPROXIMATION PAR UNE SUITE.

Nous utilisons la même lettre pour représenter un nombre réel λ et le nombre λ

modulo 1. $\Lambda = (\lambda_k)$ désigne une suite strictement croissante de nombres réels, formant un ensemble dense sur $\mathbf{T}$, telle que $\lambda_o = 0$ et

(11) $$\lim_{k\to\infty} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0.$$

DEFINITION 1. Un point $x \in \mathbf{T}$ est bien approché par une suite Λ si l'on peut trouver des indices k aussi grands que l'on veut tels que la distance de x à l'un des points λ_{k-1}, λ_k, soit arbitrairement petite devant $\lambda_k - \lambda_{k-1}$; dans le cas contraire x est mal approché par la suite Λ. Etant donnée une suite Λ, l'ensemble des points mal approchés par Λ est noté $E(\Lambda)$.

Nous allons nous intéresser maintenant à un type particulier de suite Λ. Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_{g-1} < 1$ des nombres donnés. Posons $s = (\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_{g-1})$. Etant donné un intervalle $]a\ ,\ a+\ell[$ de $\mathbf{T}$, on appelle s-section de l'intervalle $]a\ ,\ a+\ell[$, l'ensemble

$$(a\ ,\ a+\lambda_1\ell\ ,\ a+\lambda_2\ell\ \ldots,\ a+\lambda_{g-1}\ell\ ,\ a+\ell).$$

Désignons alors par (s_n) la suite des parties finies du tore obtenues à partir de la s-section de $\mathbf{T}$

$$s_1 = (0\ ,\ \lambda_1\ ,\ \lambda_2 \ldots,\ \lambda_{g-1}\ ,\ 0),$$

de la façon suivante : s_n est la réunion des s-sections des intervalles contigus à s_{n-1}, ceci pour $n \geq 2$. Dans ces conditions, soit Λ_s l'unique suite $\Lambda = (\lambda_k)$ dont la $n^{\text{ième}}$ spire est s_n $(n \in \mathbb{N})$.

Soit alors, pour toute suite finie $s = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1})$ dans $\mathbf{T}$ et tout entier $m \geq 1$, $E_{m,s}$ l'ensemble parfait du tore, dont le complémentaire est

(12) $$E^c_{m,s} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left]\lambda_k - (1-\lambda_{g-1})^m(\lambda_k - \lambda_{k-1})\ ,\ \lambda_k + \lambda_1^m(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\right[,$$

où $\lambda_o = 0$, $\lambda_{-1} = 1 - \lambda_{g-1}$. $(E_{m,s})_{m\geq 1}$ est une suite croissante de parties fermées du tore dont la réunion est $E(\Lambda_s)$. Notons que si $\Phi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ est l'unique homéomorphisme tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi(s_n) = \left\{ \frac{k}{g^n} \,\middle|\, 0 \leq k < g^n \right\}, \tag{13}$$

$\Phi(E_{m,s})$ est la fermeture de l'ensemble des $x \in \mathbf{T}$, dont le développement en base g n'admet pas de plages de 0 ou de plages de $g-1$ de longueur supérieure ou égale à m, soit encore $E_{m,s'}$ où $s' = (\frac{1}{g}, \frac{2}{g} \ldots, \frac{g-1}{g})$.

Dans [3] il a été prouvé que :

PROPOSITION 1. <u>En prenant</u> $s = (\frac{1}{g}, \frac{2}{g} \ldots, \frac{g-1}{g})$ <u>dans l'énoncé du théorème 1 et</u> $s = (\xi, 1-\xi)$ <u>dans l'énoncé du théorème 2, on a les propriétés suivantes.</u>

a)

$$\left\{ x \,\middle|\, \overline{\lim_{y-x}} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|} < \alpha \right\} = E(\Lambda_s). \tag{14}$$

b) <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $m \in \mathbb{N}$ <u>tel que</u>

$$\left\{ x \,\middle|\, \overline{\lim_{y \to x}} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|} \leq \alpha - \varepsilon \right\} \subset E_{m,s}. \tag{15}$$

Ainsi les théorèmes 1 et 2 sont des conséquences du résultat suivant.

THEOREME 3. <u>Pour toute suite finie</u> $s = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1})$ <u>dans</u> $\mathbf{T}$, $\dim E(\Lambda_s) = 1$ <u>et, quel que soit</u> $m \in \mathbb{N}$, $\dim E_{m,s} < 1$.

Plus précisément, nous allons déterminer les nombres $\dim E_{m,s}$.

THEOREME 4. <u>Soit une suite finie</u> $s = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1})$ <u>dans</u> $\mathbf{T}$. <u>Pour tout entier positif non nul</u> $m \geq 5-g$, <u>la dimension de Hausdorff de</u> $E_{m,s}$ <u>est l'unique</u>

nombre $0 < \alpha < 1$ vérifiant

$$\frac{\lambda_1^\alpha - \lambda_1^{m\alpha}}{1 - \lambda_1^{m\alpha}} + \frac{(1-\lambda_{g-1})^\alpha - (1-\lambda_{g-1})^{m\alpha}}{1-(1-\lambda_{g-1})^{m\alpha}} + \sum_{i=1}^{g-2}(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^\alpha = 1$$

et l'on a $0 < \mu_\alpha(E_{m,s}) < +\infty$.

Dans le cas particulier où Λ_s est la suite des nombres g-adyques on obtient :

THEOREME 5. Soit dans $\mathbf{T}$ la suite $s = (\frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots, \frac{g-1}{g})$. Pour tout entier positif non nul $m \geq 5-g$, il existe un nombre unique $1 < \theta_m < g$ racine de l'équation

(17) $$z^{m+1} - gz^m + z + g - 2 = 0.$$

(θ_m) est une suite strictement croissante de nombres de Pisot, convergeant vers g et, pour tout $m \geq 5-g$,

(18) $$\dim E_{m,s} = \frac{\operatorname{Log} \theta_m}{\operatorname{Log} g}.$$

De plus, si α désigne le nombre (18),

(19) $$\left(\frac{g^m - g^{m-1} - 2}{g^m - 1}\right)^\alpha \leq g^{(\alpha-1)(m-1)} \mu_\alpha(E_{m,s}) \leq \left(\frac{g^m - 3}{g^m - 1}\right)^\alpha$$

IV. DEMONSTRATION DU THEOREME 4.

Dans toute la démonstration, on se donne une fois pour toute une partie finie $s = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1})$ de $\mathbf{T}$ et un entier positif $m \geq 5-g$. Dans une première étape, la plus simple, nous allons prouver que s'il existe un nombre $0 < \alpha < 1$ tel que

(20) $$0 < \mu_\alpha(E_{m,s}) < +\infty,$$

ce nombre est nécessairement celui qui vérifie la condition (16). Il restera alors à montrer que pour cette valeur de α on a effectivement (20).

a) Détermination de α. En tenant compte de ce que

$$\lambda_1^m \left[1 + \lambda_1^m(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1) + \lambda_1^{2m}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1)^2 + \dots\right] = \delta_m$$

$$(1 - \lambda_{g-1})^m \left[1 + (1-\lambda_{g-1})^m\left(\frac{1-\lambda_{g-2}}{1-\lambda_{g-1}}-1\right) + (1-\lambda_{g-1})^{2m}\left(\frac{1-\lambda_{g-2}}{1-\lambda_{g-1}}-1\right)^2 + \dots\right] = \delta'_m$$

avec

(21)
$$\delta_m = \frac{\lambda_1^m}{\lambda_1^{m-1}(\lambda_1 - \lambda_2) + 1}$$
$$\delta'_m = \frac{(1 - \lambda_{g-1})^m}{(1-\lambda_{g-1})^{m-1}(\lambda_{g-2} - \lambda_{g-1}) + 1},$$

on vérifie que

(22)
$$E^c_{m,s} = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_{m,k} = \bigcup_{k=0}^{\infty} J_{m,k},$$

où l'on a posé, pour tout entier $k \geq 0$,

(23)
$$I_{m,k} = \left]\lambda_k - (1-\lambda_{g-1})^m(\lambda_k - \lambda_{k-1}), \lambda_k + \lambda_1^m(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\right[$$
$$J_{m,k} = \left]\lambda_k - \delta'_m(\lambda_k - \lambda_{k-1}), \lambda_k + \delta_m(\lambda_{k+1} - \delta_k)\right[$$

avec $\lambda_o = 0$, $\lambda_{-1} = 1 - \lambda_{g-1}$.

LEMME 1. Les intervalles $J_{m,k}$ ($k \in N-gN$) ne se chevauchent pas deux à deux.

En utilisant l'homéomorphisme $\Phi : T \to T$, tel que, pour tout $n \in N$,

(13)
$$\Phi(s_n) = \left\{\frac{k}{g^n} \,\middle|\, 0 \leq k < g^n\right\},$$

on se ramène au cas où $s = (\frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \dots\dots, \frac{g-1}{g})$. Alors

$$\delta_m = \delta'_m = \frac{1}{g^m - 1}$$

et les intervalles $J_{m,\ell}$ ($\ell \in N-gN$) sont les intervalles

$$\left]g^{-n}(k - \frac{1}{g^m-1}), g^{-n}(k + \frac{1}{g^m-1})\right[$$

où $n \geq 1$, $1 \leq k < g^n$ et $k \notin gN$. S'il existe des entiers $n, n' \in \mathbb{N}$, $k, k' \notin gN$ et un point $x \in T$ tels que $1 \leq k < g^n$, $1 \leq k' < g^n$ et

$$(24)\qquad \begin{aligned} \alpha = g^{-n}\left(k - \frac{1}{g^m - 1}\right) \leq x \leq g^{-n}\left(k + \frac{1}{g^m - 1}\right) = \beta \\ \alpha' = g^{-n'}\left(k' - \frac{1}{g^m - 1}\right) \leq x \leq g^{-n'}\left(k' + \frac{1}{g^m - 1}\right) = \beta', \end{aligned}$$

on ne peut avoir $n = n'$ que si $k = k'$. Supposons par exemple $n' < n$. De (24) il résulte que

$$(g^m - 1)k - 1 < g^{n-n'}\left[(g^m - 1)k' + 1\right]$$
$$g^{n-n'}\left[(g^m - 1)k' - 1\right] < (g^m - 1)k + 1.$$

Ainsi, si $\alpha < \alpha'$,

$$(g^m - 1)k - 1 < g^{n-n'}\left[(g^m - 1)k' - 1\right] < (g^m - 1)k + 1,$$

soit
$$(g^m - 1)k = g^{n-n'}\left[(g^m - 1)k' - 1\right],$$

ce qui est impossible. De même, si $\beta' < \beta$,

$$(g^m - 1)k - 1 < g^{n-n'}\left[(g^m - 1)k' + 1\right] < (g^m - 1)k + 1,$$

soit
$$(g^m - 1)k = g^{n-n'}\left[(g^m - 1)k' + 1\right],$$

ce qui est impossible. Finalement on a nécessairement $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$.

$\square$

Nous supposons maintenant l'existence d'un nombre $0 < \alpha < 1$ tel que (20) soit vérifié. Pour déterminer α nous allons essentiellement utiliser le fait que pour tout ensemble $E \subset T$ et tout nombre $0 < \lambda < 1$, $\mu_\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha \mu_\alpha(E)$.

$E_{m,s}$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints $[\lambda_i, \lambda_{i+1}] \cap E_{m,s}$ $(0 \leq i \leq g-1)$, avec $\lambda_0 = 0$. On a naturellement

$$(25)\qquad [\lambda_i, \lambda_{i+1}] \cap E_{m,s} = \lambda_i + (\lambda_{i+1} - \lambda_i)E_{m,s},$$

pour $1 \leq i \leq g-2$, si bien que

(26) $$\mu_\alpha([\lambda_i, \lambda_{i+1}] \cap E_{m,s}) = (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^\alpha \mu_\alpha(E_{m,s}),$$

pour $1 \le i \le g-2$. Il est plus délicat d'exprimer $\mu_\alpha([0,\lambda_1] \cap E_{m,s})$ et $\mu_\alpha([1-\lambda_{g-1}, 1] \cap E_{m,s})$ en fonction de $\mu_\alpha(E_{m,s})$.

Remarquons que

$$\frac{\lambda_1}{\delta_m} = \lambda_1 - \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1^{m-1}}$$

et par conséquent

(27) $$\frac{\delta_m}{\lambda_1^{m-2}} < \lambda_1 < \frac{\delta_m}{\lambda_1^{m-1}}$$

et

(28) $$\lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\delta_m = \frac{\delta_m}{\lambda_1^{m-1}}.$$

On a donc

$$[0,\lambda_1] \cap E_{m,s} = \left[\delta_m, \frac{\delta_m}{\lambda_1^{m-1}}\right] \cap E_{m,s} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \left[\frac{\delta_m}{\lambda_1^{i-1}}, \frac{\delta_m}{\lambda_1^{i}}\right] \cap E_{m,s}$$

et par suite il vient, compte tenu du lemme 1,

$$[0,\lambda_1] \cap E_{m,s} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda_1^i}([\lambda_1\delta_m, \delta_m] \cap \lambda_1 E_{m,s}).$$

Ainsi

(29) $$\mu_\alpha([0,\lambda_1] \cap E_{m,s}) = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_1^{-i\alpha}\right) \mu_\alpha([\lambda_1\delta_m, \delta_m] \cap \lambda_1 E_{m,s}).$$

D'autre part

$$\lambda_1 E_{m,s} = ([0,\lambda_1] \cap E_{m,s}) \cup ([\lambda_1\delta_m, \delta_m] \cap \lambda_1 E_{m,s})$$

si bien que

(30) $$\lambda_1^\alpha \mu_\alpha(E_{m,s}) = \left(\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_1^{-i\alpha}\right) \mu_\alpha([\lambda_1\delta_m, \delta_m] \cap \lambda_1 E_{m,s})$$

et finalement, d'après (29),

(31) $$\mu_\alpha([0,\lambda_1] \cap E_{m,s}) = \frac{\lambda_1^\alpha - \lambda_1^{m\alpha}}{1 - \lambda_1^{m\alpha}} \mu_\alpha(E_{m,s}).$$

On montre de même que

(32) $$\mu_\alpha([1-\lambda_{g-1}, 1] \cap E_{m,s}) = \frac{(1-\lambda_{g-1})^\alpha - (1-\lambda_{g-1})^{m\alpha}}{1 - (1-\lambda_{g-1})^{m\alpha}} \mu_\alpha(E_{m,s}).$$

Des égalités (26), (31), (32) et de (20) il résulte alors que α vérifie (16).

b) Majoration et minoration de $\mu_\alpha(E_{m,s})$.

Pour toute partie fermée E de $\mathbf{T}$, toute partie finie σ de $\mathbf{T}$ et tout nombre $0 < \alpha < 1$, désignons par $\mu_{\alpha,\sigma}(E)$ la borne inférieure des nombres

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^\alpha$$

où $[x_i , y_i]$ $(1 \leq i \leq n)$ est un recouvrement de E tel que $]x_i, y_i[\cap \sigma = \emptyset$ $(1 \leq i \leq n)$.

LEMME 2. Si (σ_n) est une suite croissante de parties finies de $\mathbf{T}$, dont la réunion est partout dense, on a

$$\mu_\alpha(E) = \lim_{n \to \infty} \mu_{\alpha,\sigma_n}(E). \tag{33}$$

Immédiat.

□

A partir de maintenant $0 < \alpha < 1$ est le nombre vérifiant (16). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n désignant la nième spire de la suite Λ_s, nous allons majorer et minorer le nombre $\mu_{\alpha,s_n}(E_{m,s})$. Il en résultera, d'après le lemme 2, une majoration et une minoration de $\mu_\alpha(E_{m,s})$.

LEMME 3.

$$\mu_\alpha(E_{m,s}) = \mu_{\alpha,s_{m-1}}(E_{m,s}). \tag{34}$$

D'après le lemme 2 il suffit de prouver que, pour tout $n \geq m-1$,

$$\mu_{\alpha,s_{n+1}}(E_{m,s}) = \mu_{\alpha,s_n}(E_{m,s}). \tag{35}$$

Or, on établit, comme il a été fait pour les nombres $\mu_\alpha([\lambda_i , \lambda_{i+1}] \cap E_{m,s})$ que, pour $1 \leq i \leq g-2$,

$$\mu_{\alpha,s_{n+1}}([\lambda_i,\lambda_{i+1}]\cap E_{m,s}) = (\lambda_{i+1}-\lambda_i)^\alpha \mu_{\alpha,s_n}(E_{m,s})$$

et, à condition que $n \geq m-1$,

$$\mu_{\alpha,s_{n+1}}([0,\lambda_1]\cap E_{m,s}) = \frac{\lambda_1^\alpha - \lambda_1^{m\alpha}}{1-\lambda_1^{m\alpha}} \mu_{\alpha,s_n}(E_{m,s})$$

$$\mu_{\alpha,s_{n+1}}([1-\lambda_{g-1},1]\cap E_{m,s}) = \frac{(1-\lambda_{g-1})^\alpha - (1-\lambda_{g-1})^{m\alpha}}{1-(1-\lambda_{g-1})^{m\alpha}} \mu_{\alpha,s_n}(E_{m,s}).$$

Le nombre α vérifiant (16) on obtient alors

$$\mu_{\alpha,s_{n+1}}(E_{m,s}) = \sum_{i=0}^{g-1} \mu_{\alpha,s_{n+1}}([\lambda_i\ ,\ \lambda_{i+1}]\cap E_{m,s}) = \mu_{\alpha,s_n}(E_{m,s}).$$

□

Le lemme 3 suffit à prouver que $\mu_\alpha(E_{m,s}) < +\infty$. Il reste à montrer que $\mu_\alpha(E_{m,s}) \neq 0$, mais en vue de la démonstration du théorème 5 nous allons établir une majoration et une minoration de $\mu_\alpha(E_{m,s})$ qui nous demanderons encore quelques efforts. Posons

(36) $$V_o = J_{m,0} =]-\delta'_m\ ,\ \delta_m[$$

et, pour tout $n \in N$,

(37) $$V_n = \bigcup_{0\leq k\leq \frac{g^{n+1}-g}{g-1}} J_{m,k}.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, nous obtiendrons une majoration et une minoration de $\mu_{\alpha,s_n}(E_{m,s})$, avec $s_o = \{0\}$, en faisant intervenir les intervalles fermés contigus à V_n, qui forment effectivement un recouvrement de $E_{m,s}$. Il est alors essentiel de mettre en évidence la transformation permettant de passer de V_{n-1} à V_n.

LEMME 4. <u>Pour tout</u> $n \in N$, $V_n = \mathcal{T}^n(V_o)$, <u>où</u> $\mathcal{T}$ <u>est la transformation définie par</u>

(38) $$\mathscr{C}(A) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{g} \left[\lambda_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1})A\right]\right\} \cup \left]-\delta'_m, -(1-\lambda_{g-1})\delta'_m\right] \cup \left[\lambda_1\delta_m, \delta_m\right[.$$

Soit

$$\mathscr{C}'(A) = \bigcup_{k=1}^{g} [\lambda_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1})A].$$

On a manifestement, pour deux parties A, B de

(39)
$$\mathscr{C}'(A) \cup \mathscr{C}'(B) = \mathscr{C}'(A \cup B)$$
$$\mathscr{C}'(A) \cup \mathscr{C}(B) = \mathscr{C}(A \cup B).$$

Par ailleurs, posons $U_o = V_o$ et, pour tout $n \in N$,

$$U_n = \bigcup_{\frac{g^n - g}{g-1} < k \leq \frac{g^{n+1} - g}{g-1}} J_{m,k} \,.$$

On a

$$V_n = \bigcup_{k=0}^{n} U_k = \left\{ \bigcup_{k=2}^{n} U_k \right\} \cup V_1$$

et d'autre part, pour tout $n \in N$, $U_n = \mathscr{C}'(U_{n-1})$ et

$$V_1 = U_1 \cup U_o = \mathscr{C}'(U_o) \cup U_o = \mathscr{C}(U_o).$$

Ainsi

$$V_n = \left\{ \bigcup_{k=2}^{n} U_k \right\} \cup V_1 = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathscr{C}'(U_k) \right\} \cup \mathscr{C}(U_o)$$

et; d'après (39)

$$V_n = \mathscr{C}'(V_{n-1} \setminus V_o) \cup \mathscr{C}(V_o) = \mathscr{C}(V_{n-1}).$$

$\square$

Pour tout indice $n \geq 0$, soit $\mathscr{R}_n$ le recouvrement de $E_{m,s}$ constitué des intervalles fermés, contigus à $V_n : I_1, I_2, \ldots, I_p$. Posons

(40) $$\alpha_n = |I_1|^\alpha + |I_2|^\alpha + \ldots + |I_p|^\alpha.$$

Les recouvrements $\mathscr{R}_n$ $(n \geq 0)$ jouent ici un rôle naturel et on a en particulier :

LEMME 5. Pour tout $n \geq 0$,

(41) $$\mu_{\alpha,s_n}(E_{m,s}) \leq \alpha_n.$$

Immédiat.

□

Nous ne savons pas de façon générale si on a l'égalité dans (41). Nous ne le montrerons que dans un cas très particulier (voir le paragraphe VI). Notons pour l'instant que

(42) $$\alpha_n = \alpha_{m-1} \qquad (n \geq m-1).$$

La détermination des nombres α_n $(0 \leq n \leq m-1)$ va nous donner une majoration de $\mu_{\alpha,s_{m-1}}(E_{m,s})$, mais va également nous mettre sur la voie d'une minoration. On a

$$\alpha_o = (1-\delta_m - \delta'_m)^\alpha$$

et

$$\alpha_1 = \left[\sum_{i=1}^{g-2}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)^\alpha\right](1-\delta_m-\delta'_m)^\alpha$$

$$+\lambda_1^\alpha(1-\frac{\delta_m}{\lambda_1}-\delta'_m)^\alpha + (1-\lambda_{g-1})^\alpha(1-\delta_m-\frac{\delta'_m}{1-\lambda_{g-1}})^\alpha.$$

Plus généralement.

LEMME 6. Pour tout $0 \leq n \leq m-1$,

(43) $$\alpha_n = \sum_{i_1,i_2\ldots,i_n=0}^{g-1}(\lambda_{i_1+1}-\lambda_{i_1})^\alpha(\lambda_{i_2+2}-\lambda_{i_2})^\alpha\ldots(\lambda_{i_n+1}-\lambda_{i_n})^\alpha \ell^\alpha_{i_1,i_2\ldots,i_n}$$

où

$$\ell_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n} = 1-\delta_m-\delta'_m$$

si $1 \leq i_n \leq g-2$,
$$\ell_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n} = 1-\frac{\delta_m}{\lambda_1^k}-\delta'_m$$

si $i_{n-k} \neq 0$ et $i_\ell = 0$ $(n-k < \ell \leq n)$, et

$$\ell_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n} = 1-\delta_m-\frac{\delta'_m}{(1-\lambda_{g-1})^k}$$

si $i_{n-k} \neq g-1$ et $i_\ell = g-1$ $(n-k < \ell \leq n)$.

Le lemme 4 permet de déduire la valeur de α_n de celle de α_{n-1}, donc finalement de celle de α_o.

□

On obtient alors la majoration et la minoration cherchées pour $\mu_\alpha(E_{m,s})$.

PROPOSITION 2. Etant donnés une suite finie $s = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{g-1})$ dans $\mathbf{T}$ et un entier positif $m \geq 5-g$, soit $0 < \alpha < 1$ l'unique nombre vérifiant (16). On a

(44)
$$\ell^\alpha \leq \frac{\mu_\alpha(E_{m,s})}{\left[\sum_{i=0}^{g-1}(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^\alpha\right]^{m-1}} \leq L^\alpha$$

où

(45)
$$L = 1 - \frac{\lambda_1^m}{\lambda_1^{m-1}(\lambda_1 - \lambda_2) + 1} - \frac{(1-\lambda_{g-1})^m}{(1-\lambda_{g-1})^{m-1}(\lambda_{g-2} - \lambda_{g-1}) + 1}$$

et où ℓ est la borne inférieure des nombres

(46)
$$\left(\frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\right)^{m-1}\left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1^{m-1}(\lambda_1 - \lambda_2) + 1} - \frac{(1-\lambda_{g-1})^m}{(1-\lambda_{g-1})^{m-1}(\lambda_{g-2} - \lambda_{g-1}) + 1}\right]$$
$$\left(\frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\right)^{m-1}\left[1 - \frac{\lambda_1^m}{\lambda_1^{m-1}(\lambda_1 - \lambda_2) + 1} - \frac{1-\lambda_{g-1}}{(1-\lambda_{g-1})^{m-1}(\lambda_{g-2} - \lambda_{g-1}) + 1}\right].$$

D'après le lemme 3 cela revient à prouver que

$$\ell^\alpha \leq \frac{\mu_{\alpha, s_{m-1}}(E_{m,s})}{\left[\sum_{i=0}^{g-1}(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^\alpha\right]^{m-1}} \leq L^\alpha .$$

Or ces inégalités résultent du lemme 4 et de ce que, I désignant l'intervalle contigu à V_{m-1} correspondant aux indices $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$,

$$\frac{\ell}{\eta^{m-1}} \leq \ell_{i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}} \leq L ,$$

où $\eta = \inf \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}$, et par suite

$$\frac{\ell}{\eta^{m-1}} \leq \frac{|I|}{(\lambda_{i_1+1} - \lambda_{i_1})(\lambda_{i_2+1} - \lambda_{i_2})\ldots(\lambda_{i_{m-1}+1} - \lambda_{i_{m-1}})} \leq L .$$

□

La proposition 2 achève la démonstration du théorème 4, puisque $0 < \ell \leq L < +\infty$.

V. DEMONSTRATION DU THEOREME 5.

A) ETUDE DE L'EQUATION 17. Il est facile de vérifier que, étant donné un entier $g \geq 2$, pour tout entier positif $m \geq 5-g$, l'équation

$$z^{m+1} - gz^m + z + g-2 = 0 \tag{17}$$

admet au moins une racine réelle positive. Désignons par θ_m la plus grande de ces racines. Les nombres θ_m vérifient les propriétés suivantes.

LEMME 7. <u>Pour tout</u> $m \geq 5-g$, θ_m <u>est un nombre de Pisot.</u>

Etant donné un nombre $\varepsilon \geq 0$, soit D_ε le disque ouvert du plan complexe, centré à l'origine et de rayon $1+\varepsilon$. Si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit,

$$(g-1)m > 1 + (1+\varepsilon)^m$$

donc

$$(1+\varepsilon)^m(g-1-\varepsilon) > g-1+\varepsilon$$

et par suite, on a en tout point z du bord de D_ε,

$$|z^{m+1} - gz^m| = (1+\varepsilon)^m |z-g| > |z+g-2| .$$

Du théorème de Rouché on déduit alors que l'équation (17) a m racines appartenant à D_ε. $z = 1$ étant la seule racine de (17) de module 1, cela prouve que l'équation (17) a $m-1$ racines appartenant à D_0 puisque, pour $m \geq 5-g$, 1 est une racine simple.

□

LEMME 8.

(47) $$g - \theta_m \sim \frac{2(g-1)}{g^m} \qquad (m \to \infty).$$

Cela résulte immédiatement de ce que θ_m est racine de (17) et $\theta_m \to g$ $(m \to \infty)$.

$\square$

B) DEMONSTRATION DU THEOREME 5. Dans le cas où $s = (\frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots, \frac{g-1}{g})$ l'équation (16) devient

$$2\,\frac{g^{-\alpha} - g^{-m\alpha}}{1 - g^{-m\alpha}} + (g-2)g^{-\alpha} = 1$$

soit après réduction

$$1 - g^{1-\alpha} + g^{-\alpha m} + (g-2)g^{-\alpha(m+1)} = 0$$

ou encore

(48) $$g^{\alpha(m+1)} - g.g^{\alpha m} + g^{\alpha} + g-2 = 0.$$

En comparant (17) et (48) on constate que α est le seul nombre vérifiant $g^{\alpha} = \theta_m$, soit

(18) $$\alpha = \frac{\operatorname{Log} \theta_m}{\log g}.$$

Il reste alors à remarquer que les inégalités (19) se déduisent simplement de la proposition 2.

$\square$

VI. EXEMPLES.

PROPOSITION 3. Si Λ_s est la suite des nombres dyadiques, c'est-à-dire si $s = (\frac{1}{2})$, on a

(49) $$\dim E_{3,s} = \frac{\operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\operatorname{Log} 2}$$

et

(50) $$\dim E_{4,s} = \frac{\operatorname{Log}\left[\frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{11}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{11}{27}}}\right]}{\log 2}$$

PROPOSITION 4. Si $s = (\frac{1}{2})$ et si α est le nombre donné par (49),

$$\mu_\alpha(E_{3,s}) = (1+\sqrt{5})\,\frac{1}{7^\alpha}\,. \tag{51}$$

Il suffit d'établir la proposition 4, puisque la proposition 3 résulte directement du théorème 5.

Pour simplifier nous appellerons intervalles de la $n^{\text{ième}}$ génération $(n \in \mathbb{N})$, les intervalles $\left]2^{-n}(k-\frac{1}{7}),\ 2^{-n}(k+\frac{1}{7})\right[$. U_n désignant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la réunion des intervalles de la $n^{\text{ième}}$ génération, posons, conformément aux notations précédentes,

$$V_o = U_o = \left]-\frac{1}{7},\ +\frac{1}{7}\right[\tag{36}$$

et

$$V_n = \bigcup_{k=0}^{n} U_k \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{37}$$

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est le nombre des intervalles de la $n^{\text{ième}}$ génération inclus dans $V_n \setminus V_{n-1}$, on obtient :

LEMME 9. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et, pour tout $n \geq 3$,

$$a_n = \left(1+\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} + \left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3}. \tag{52}$$

Cela résulte de ce que, pour $n \geq 3$,

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}. \tag{53}$$

$\square$

Nous allons maintenant préciser le nombre des intervalles contigus à V_n et la longueur de ces intervalles. Pour tout $n \geq 0$, soit i_n le nombre d'intervalles contigus à V_n. On a $i_o = 1$, $i_1 = 2$, $i_2 = 4$, $i_3 = 6$ ...

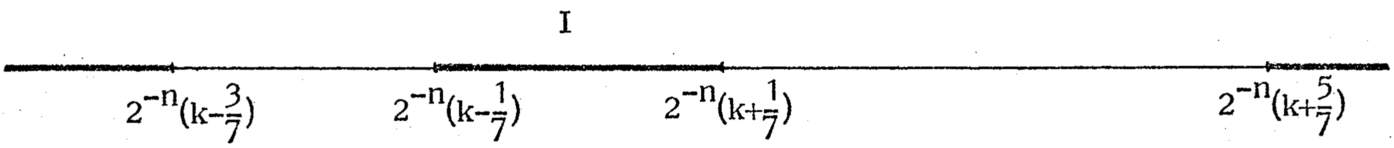
Notons que

$V_o = \left]-\frac{1}{7},\ +\frac{1}{7}\right[$

$$V_1 = V_0 \cup \left]\frac{1}{2} - \frac{1}{14}, \frac{1}{2} + \frac{1}{14}\right[$$

$$V_2 = V_1 \cup \left]\frac{1}{4} - \frac{1}{28}, \frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right[\cup \left]-\frac{1}{4} - \frac{1}{28}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right[$$

et plus généralement que V_n est la réunion de V_{n-1} et des a_n intervalles de la $n^{\text{ième}}$ génération qui ne sont pas inclus dans V_{n-1}. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intervalles contigus à V_n sont soit de longueur $\frac{1}{72^{n-2}}$ (grands intervalles), soit de longueur $\frac{1}{72^{n-1}}$ (petits intervalles) et tout intervalle de la $n^{\text{ième}}$ génération $I \subset V_n \setminus V_{n-1}$ est inclus dans un grand intervalle contigu à V_{n-1} et est situé entre un petit intervalle et un grand intervalle contigus à V_n.



De ce qui précède on peut d'abord déduire la valeur de i_n. Pour tout $n \geq 1$,

(54) $$i_n = i_{n-1} + a_n.$$

Il en résulte que

$$i_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

et par conséquent on déduit de (53) que, pour $n \geq 1$,

$$i_{n+1} + i_n = 6 + \sum_{k=2}^{n} (a_k + a_{k+1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n+2} a_k$$

et finalement

$$i_n = a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

On obtient donc le lemme suivant.

LEMME 10. <u>Pour tout</u> $n \geq 1$, <u>il y a</u> $a_n + a_{n+1}$ <u>intervalles contigus à</u> V_n : a_n <u>sont de longueur</u> $\frac{1}{72^{n-1}}$ <u>(petits intervalles) et</u> a_{n+1} <u>sont de longueur</u> $\frac{1}{72^{n-2}}$ <u>(grands intervalles).</u>

Des lemmes 9 et 10 on déduit :

LEMME 11. Pour tout $0 < \alpha \leq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(55) \qquad \mu_{\alpha, \frac{1}{72^{n-2}}}(E_{3,s}) \leq a_n\left(\frac{1}{72^{n-1}}\right)^\alpha + a_{n+1}\left(\frac{1}{72^{n-2}}\right)^\alpha .$$

De plus on a l'égalité dans (55) en choisissant

$$(49) \qquad \alpha = \frac{\operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\operatorname{Log} 2}.$$

L'inégalité résulte de ce qui précède. Si α est donné par (49), on a

$$(56) \qquad 1 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^\alpha + \left(\tfrac{1}{4}\right)^\alpha ,$$

d'où l'égalité dans (55).

□

Démonstration de la proposition 4. Si l'on donne à α la valeur (49) on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = 1$$

si bien que

$$\lim_{n\to\infty} a_n\left(\frac{1}{72^{n-1}}\right)^\alpha = \frac{2}{7^\alpha\sqrt{5}}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}\left(\frac{1}{72^{n-2}}\right)^\alpha = \frac{1}{7^\alpha}\ \frac{5+3\sqrt{5}}{5}$$

d'où l'on déduit $\mu_\alpha(E_{3,s})$.

Problème 1. Avec les notations des paragraphes précédents, nous savons que

$$(57) \qquad \mu_\alpha(E_{m,s}) = \mu_{\alpha, s_{m-1}}(E_{m,s}) \leq \alpha_{m-1} ,$$

où $s = (\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_{g-1})$ est une partie finie du tore et où $m \geq 5-g$. Dans le cas où $g = 2$, $m = 3$ et $s = (\frac{1}{2})$ nous venons de prouver que

(58) $$\mu_\alpha(E_{m,s}) = \alpha_{m-1}.$$

Est-ce que plus généralement l'égalité (58) reste valable lorsque $s = (\frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots, \frac{g-1}{g})$, pour tout entier $g \geq 2$ et tout entier strictement positif $m \geq 5-g$?

VII. FONCTIONS p,α-FINES ET SUITES ADAPTEES.

A toute fonction p,α-fine $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est associé l'ensemble exceptionnel $E(f)$. A toute suite Λ (croissante et formant un ensemble dense sur $\mathbb{T}$) est associé l'ensemble exceptionnel $E(\Lambda)$. Nous avons jusqu'ici envisagé quelques cas particuliers où à une fonction p,α-fine f est associée une suite Λ telle que $E(f) = E(\Lambda)$. Plus généralement on peut se demander quel lien existe entre les deux notions d'ensembles exceptionnels. Nous avons répondu partiellement à cette question dans [3], grâce à la notion de suite adaptée.

DEFINITION 2. <u>Une suite</u> $\Lambda = (\lambda_k)$ <u>est dite adaptée à une fonction</u> $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ <u>vérifiant, pour</u> $p > 1$, $\alpha > 0$,

(59) $$|f(y) - f(x)|^p \leq \alpha |y-x|$$

<u>si</u>

(60) $$|f(\lambda_k) - f(\lambda_{k-1})|^p \sim \alpha(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \qquad (k \to \infty).$$

On a les résultats suivants, dont les démonstrations figurent dans [3]. (Le théorème 6 est aussi un corollaire du lemme 19 du chapitre II).

THEOREME 6. <u>Soit une fonction</u> $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ <u>vérifiant</u> (59). <u>Une</u> C.N.S. <u>pour que</u> <u>f soit p,α-fine est que</u>

(61) $$\overline{\lim_{\substack{y<x<z \\ z-y \to 0}}} \frac{|f(z) - f(y)|^p}{|z-y|} = \alpha \qquad (\text{p. p.}).$$

THEOREME 7. <u>Soit une fonction</u> $f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ <u>vérifiant</u> (59). <u>Une</u> C.N.S. <u>pour qu'il existe une suite</u> Λ <u>adaptée à</u> f <u>est que</u>

$$\overline{\lim_{\substack{y<x<z \\ z-y \to 0}}} \frac{|f(z) - f(y)|^p}{|z - y|} = \alpha \qquad (x \in \mathbf{T}). \tag{29}$$

THEOREME 8. <u>Soit une fonction</u> $f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ <u>vérifiant</u> (59). <u>S'il existe une suite adaptée à</u> f, f <u>est</u> p, α<u>-fine et</u>

$$E(f) = \bigcap_{\Lambda} E(\Lambda) , \tag{63}$$

<u>l'intersection étant prise sur l'ensemble des suites</u> Λ <u>adaptées à</u> f.

<u>Exemples.</u>

a) La fonction f définie au théorème 2 est $p, 1$-fine, la suite Λ_s, avec $s = (\xi\ , 1-\xi)$, est adaptée à f et $E(f) = E(\Lambda_s)$.

De plus, pour toute suite Λ adaptée à f on a $E(\Lambda_s) \subset E(\Lambda)$, si bien que f vérifie (63).

b) La fonction f définie au théorème 1 est p, α-fine et $E(f) = E(\Lambda_s)$, avec $s = (\frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots, \frac{g-1}{g})$. Cependant la suite Λ_s n'est pas adaptée à f et plus généralement aucune suite n'est adaptée à f.

L'exemple b) suggère le problème suivant.

<u>Problème 2.</u> Etant donnée une fonction p, α-fine $f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ existe-t-il une suite Λ telle que $E(f) \subset E(\Lambda)$? Si oui, a-t-on (63), l'intersection étant prise sur l'ensemble des suites Λ vérifiant $E(f) \subset E(\Lambda)$?

VIII. SUR LES ENSEMBLES DE NOMBRES MAL APPROCHES.

Au paragraphe 6 de [4], nous avons posé deux problèmes : a) et b). Le théorème 3 répond à a). Nous donnons ici la réponse à b).

THEOREME 9. Pour toute suite Λ, croissante et formant un ensemble dense sur $\mathbf{T}$, presque tout point de $\mathbf{T}$ est bien approché.

Autrement dit, pour toute suite Λ, $E(\Lambda)$ est de mesure nulle.

Puisque, pour toute fonction p,α-fine f, $E(f)$ est de mesure nulle, il suffit d'établir :

THEOREME 10. Pour toute suite Λ, croissante et formant un ensemble dense sur $\mathbf{T}$, il existe, quel que soit $p > 1$, une fonction $p,1$-fine $f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ telle que $E(\Lambda) \subset E(f)$.

Il est possible d'établir un résultat un peu plus précis que le théorème 9. En effet on peut dire qu'un point $x \in \mathbf{T}$ est bien approché à droite (respectivement à gauche), par une suite $\Lambda = (\lambda_k)$, s'il existe des indices $k \in \mathbb{N}$ arbitrairement grands tels que $\lambda_{k-1} \leq x \leq \lambda_k$ et que $\lambda_k - x$ (respectivement $x - \lambda_k$) soit arbitrairement petit devant $\lambda_k - \lambda_{k-1}$. Nous allons prouver :

THEOREME 11. Pour toute suite Λ, croissante et formant un ensemble dense sur $\mathbf{T}$, presque tout point de $\mathbf{T}$ est bien approché à droite et à gauche.

On pourrait, comme nous le verrons, déduire le théorème 11 de la démonstration du théorème 10. Mais alors que celle-ci est laborieuse, il est possible de donner du théorème 11 une démonstration très élémentaire, ce par quoi nous allons commencer.

Démonstration du théorème 11. Soit une suite $\Lambda = (\lambda_k)$. Il suffit d'établir que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe, pour presque tout $x \in \mathbf{T}$, deux points consécutifs de la suite $\Lambda : \lambda_{k-1}, \lambda_k$, n'appartenant pas aux n premières spires de la suite Λ, tels que

$$\lambda_{k-1} + (1-\varepsilon)(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \leq x \leq \lambda_k .$$

Or, λ_k parcourant les points de Λ n'appartenant pas aux n premières spires, il est bien évident que les intervalles

$$\left[\lambda_{k-1} + (1-\varepsilon)(\lambda_k - \lambda_{k-1}) , \lambda_k\right]$$

recouvrent presque tout $\mathbf{T}$.

$\square$

Démonstration du théorème 10. Soit une suite $\Lambda = (\lambda_k)$. Désignons, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, par s_n la $n^{\text{ième}}$ spire de la suite Λ :

$$s_n = \left\{\lambda_k \mid n \leq \lambda_k < n+1\right\}. \tag{64}$$

Nous voulons déterminer une fonction $f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$, $p,1$-fine, telle que $E(\Lambda) \subset E(f)$. Pour construire une telle fonction f nous allons associer à chaque spire s_n de Λ une fonction en "dents de scie", convenablement choisie, et nous prendrons $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Il est assez facile de construire ainsi une fonction $f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{gathered} |f(y) - f(x)|^p \leq |y - x| \\ \overline{\lim_{\substack{y<x<z \\ |z-y| \to 0}}} \frac{|f(z) - f(y)|^p}{|z - y|} = 1 \qquad (\text{p. p.}) ; \end{gathered} \tag{65}$$

or le théorème 6 exprime alors que f est $p,1$-fine.

La construction des fonctions f_n $(n \in \mathbb{N})$ est délicate. Il est nécessaire en particulier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distance entre deux points consécutifs de s_{n+1} soit petite devant la distance entre deux points consécutifs de s_n. On peut alors choisir les fonctions f_n $(n\in\mathbb{N})$ en sorte que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n + f_{n+1}$ se comporte, au voisinage de chaque point, à peu près comme f_{n+1}.

Si la suite Λ ne satisfait pas à la condition désirée, on peut toujours lui substituer une sous-suite obtenue en retirant à Λ un ensemble arbitraire de spires. En effet, si (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers naturels, la suite $M = (\mu_j)$, dont la $k^{\text{ième}}$ spire est

$$\sigma_k = s_{n_k},$$

est une sous-suite de la suite Λ et l'on a naturellement $E(\Lambda) \subset E(M)$. Si on construit alors une fonction $p, 1$-fine $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ telle que $E(M) \subset E(f)$, on a $E(\Lambda) \subset E(f)$.

Etant donnée une suite Λ dont la $n^{\text{ième}}$ spire est s_n $(n\in\mathbb{N})$, désignons, quel que soit $n\in\mathbb{N}$, par ε_n la borne supérieure des nombres $\lambda_k - \lambda_{k-1}$, où λ_{k-1}, λ_k sont deux points consécutifs de s_n. On a toujours

(66) $$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

En substituant éventuellement à la suite Λ une sous-suite M, on peut naturellement se ramener au cas d'une suite Λ telle que si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, ε'_n désigne la borne inférieure des nombres $\lambda_k - \lambda_{k-1}$, où λ_{k-1}, λ_k sont deux points consécutifs de s_n,

(67) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon'_n} = 0.$$

Puisque l'on peut substituer à une suite Λ, une sous-suite M obtenue en supprimant un nombre arbitraire de spires, on peut supposer que la suite $n \longrightarrow \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon'_n}$ tend vers zéro arbitrairement vite. Nous allons imposer, pour des raisons qui apparaitront plus loin, que les suites

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_k}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

(68)

$$\beta_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

soient à valeurs inférieures à $\frac{1}{2}$ et tendent, en décroissant, vers zéro.

Envisageons d'abord le cas très particulier où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, m désignant le nombre de points de la spire s_n,

$$s_n = (0\,,\, \frac{1}{m}\,,\, \frac{2}{m}\,,\, \ldots,\, \frac{k}{m}\,,\, \ldots,\, 1-\frac{1}{m}).$$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, désignons par f_n la fonction définie sur $\mathbf{T}$, linéaire sur les intervalles $\left[\frac{k}{m}\,,\, \frac{k+1}{m}\right]$ $(0 \leq k \leq m-1)$, telle que

$$f_n(\frac{2k}{m}) = 0 \qquad (0 \leq k < \frac{m}{2})$$

$$f_n(\frac{2k+1}{m}) = (1 - \alpha_n - \beta_n)(\frac{1}{m})^{\frac{1}{p}} \qquad (0 \leq k < \frac{m-1}{2}).$$

On peut alors montrer que la fonction $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ remplit toutes les conditions souhaitées.

Dans le cas général, plus les points de la suite Λ sont placés irrégulièrement, plus la construction des fonctions f_n semble difficile. On peut cependant utiliser un artifice que nous allons décrire. A toute suite finie s de $\mathbf{T}$ et à tous nombres réels $0 \leq \gamma < 1$, $0 < \lambda < 1$, associons une fonction $f : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$, définie de la façon suivante.

a) $\mathbf{T}$ étant identifié à $[0,1[$, si l'on pose $t_o = 0$, $t_{m+1} = 1$ et

$$s \cap\,]0,1[\, = (t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_m),$$

où $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$, on a

$$f(t_k) = 0 \qquad (0 \leq k \leq m+1).$$

b) Pour tout indice $0 \leq k \leq m$,

$$f(u_k) = \gamma(t_{k+1} - u_k)^{\frac{1}{p}}$$

avec

$$u_k = t_k + \lambda(t_{k+1} - t_k).$$

c) Pour tout indice $0 \leq k \leq m$, f est linéaire sur les intervalles $[t_k, u_k]$, $[u_k, t_{k+1}]$.

La fonction, que nous venons de décrire, étant notée $f_{s,\gamma,\lambda}$, nous allons poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(69) $$f_n = f_{s_n,\gamma_n,\lambda_n}$$

où s_n est la $n^{\text{ième}}$ spire de Λ, où

(70) $$\gamma_n = 1 - \alpha_n - \beta_n,$$

α_n et β_n étant définis par (68), et où la suite (λ_n) est strictement croissante, tend vers 1 et vérifie

(71) $$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda_n) = +\infty.$$

(On peut prendre par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = 1 - \frac{1}{n}$). Il reste alors à prouver que la fonction $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ vérifie les conditions souhaitées.

La suite Λ ayant été choisie de telle façon que les suites (α_n), (β_n) tendent vers zéro, on a

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 1$$

et il résulte alors de la condition (71) que

$$\overline{\lim_{\substack{y<x<z \\ |z-y|\to 0}}} \frac{|f(z) - f(y)|^p}{|z-y|} = 1$$

pour presque tout $x \in \mathbb{T}$. En effet la condition (72) est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{T}$ appartenant à des intervalles du type $[u_k, t_k]$ arbitrairement petits, c'est-à-dire correspondant à ces spires d'indices arbitrairement grands. Or la mesure de l'ensemble de ces points est la limite de la suite double

$$1 - \lambda_n + \lambda_n(1-\lambda_{n+1}) + \lambda_n\lambda_{n+1}(1-\lambda_{n+2})\dots + \lambda_n\lambda_{n+1}\dots\lambda_{n+m-1}(1-\lambda_{n+m}),$$

c'est-à-dire de la suite double

$$1 - \lambda_n\lambda_{n+1}\dots\lambda_{n+m}\ ,$$

lorsque l'on fait tendre successivement m, puis n vers l'infini. Or, d'après (71), cette limite est 1.

Pour établir que la fonction f est $p,1$-fine, il reste à prouver maintenant que, pour tout intervalle $[x,y]$ de $\mathbf{T}$

$$|f(y) - f(x)|^p \leq |y-x|. \tag{73}$$

Il résulte de la construction des fonctions f_n que l'on peut se limiter à vérifier (73) pour les intervalles $[x,y]$ du type $[u_k\ ,\ t_k]$. Soit $[u,t]$ un tel intervalle correspondant à la spire s_n. Or a $f_n(t) = 0$, $f_n(u) = \gamma_n(t-u)^{\frac{1}{p}}$ et par suite

$$|f_n(t) - f_n(u)| = (1 - \alpha_n - \beta_n)(t-u)^{\frac{1}{p}}. \tag{74}$$

A partir de maintenant et dans toute la suite de la démonstration, nous allons supposer que $\lambda_n \geq \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (ce que l'on obtient par exemple en prenant $\lambda_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$). Etant donné un indice $1 \leq k \leq n-1$, $|f_k(t) - f_k(u)|$ est majoré par

$$\frac{t-u}{(1-\lambda_k)\varepsilon'_k}(1-\lambda_k)^{\frac{1}{p}}\varepsilon'^{\frac{1}{p}}_k = \left[\frac{t-u}{(1-\lambda_k)\varepsilon'_k}\right]^{1-\frac{1}{p}}(t-u)^{\frac{1}{p}}$$

donc par

$$\left[\frac{(1-\lambda_n)\varepsilon_n}{(1-\lambda_k)\varepsilon'_k}\right]^{1-\frac{1}{p}}(t-u)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_k}\right)^{1-\frac{1}{p}}(t-u)^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi, pour tout indice $1 \leq k \leq n-1$,

$$|f_k(t) - f_k(u)| \leq \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{1-\frac{1}{p}}(t-u)^{\frac{1}{p}}. \tag{75}$$

D'autre part, pour tout indice $k \geq n+1$,

$$|f_k(t) - f_k(u)| \leq (1 - \lambda_k)^{\frac{1}{p}} \varepsilon_k^{\frac{1}{p}} \leq (1 - \lambda_k)^{\frac{1}{p}} \varepsilon_k^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t - u}{(1-\lambda_n)\varepsilon'_n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

soit

(76) $$|f_k(t) - f_k(u)| \leq (\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon'_n})^{\frac{1}{p}} (t - u)^{\frac{1}{p}} .$$

Des conditions (74), (75), (76) il résulte alors que

(77) $$|f(t) - f(u)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_n(t) - f_n(u)| \leq (t-u)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous venons de prouver que la fonction f est $p,1$-fine. Pour achever la démonstration il faut établir que si, pour un point $x \in T$

(78) $$\overline{\lim_{y \to x}} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|y - x|} = 1 ,$$

le point x est bien approché par la suite Λ. Soit donc un point $x \in T$ vérifiant (78).

Etant donnée une spire s_n $(n \in N)$ de la suite Λ, posons à nouveau $t_o = 0$, $t_{m+1} = 1$,

$$s \cap]0,1[= (t_1, t_2, \ldots, t_m)$$

et, pour tout indice $0 \leq k \leq m$,

$$u_k = t_k + \lambda_k(t_{k+1} - t_k).$$

En tenant compte de ce que les suites (α_n), (β_n), définies par (68), convergent vers zéro, on constate que, x vérifiant (78), il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, des indices $n \in N$ arbitrairement grands tels que, pour un indice $0 \leq k \leq m$,

$$u_k - \varepsilon(t_{k+1} - t_k) \leq x \leq t_{k+1} + \varepsilon(t_{k+1} - t_k).$$

Or, puisque le rapport

$$\frac{t_{k+1} - u_k}{t_{k+1} - t_k} = 1 - \lambda_n$$

tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on en déduit que x est bien approché par la suite Λ.

$\square$

Problème 3. Est-ce que, pour toute suite Λ, il existe une fonction p, 1-fine f telle que $E(f) = E(\Lambda)$?

Le résultat suivant est un simple exercice.

PROPOSITION 5. Il existe des suites Λ telles que $E(\Lambda) = \emptyset$.

Les suites Λ telles que $E(\Lambda) = \emptyset$, que nous savons construire, sont constituées de points irrégulièrement répartis. A la lumière du théorème 3, il semble d'ailleurs que plus les points de la suite Λ sont régulièrement répartis, plus $E(\Lambda)$ est "gros", cette "grosseur" pouvant être mesurée par exemple à l'aide de la notion de dimension de Hausdorff.

Problème 4. Existe-t-il des suites $\Lambda = (\lambda_k)$, telles que la suite $k \to \lambda_k - \lambda_{k-1}$ soit décroissante, vérifiant $E(\Lambda) = \emptyset$? (Nous ne savons même pas s'il existe de telles suites vérifiant $\dim E(\Lambda) < 1$).

Problème 5. Est-ce que, pour tout nombre $0 < \alpha < 1$, il existe une suite Λ telle que $\dim E(\Lambda) = \alpha$?

IX. SUR UNE GENERALISATION DU THEOREME 1.

On peut généraliser le théorème 1 à des fonctions du type

$$x \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \zeta(n_k x)$$

les coefficients a_k, n_k satisfaisant à des conditions convenables, assurant en particulier la convergence uniforme de la série. Nous nous contentons d'énoncer ici ce résultat lorsque ζ est l'une des deux fonctions $x \longrightarrow |x|$, $x \rightarrow |\sin 2\pi x|$.

THEOREME 12. Soient une suite croissante d'entiers naturels (n_k), une suite de nombres réels (a_k) et un nombre $p > 1$ tels que la série de terme général a_k converge et

(79)
$$a_k \sim n_k^{-\frac{1}{p}} \qquad (k \rightarrow \infty)$$
$$a_k \leq n_k^{-\frac{1}{p}} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Les fonctions $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

(80)
$$x \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; |n_k x|$$
$$x \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, |\sin 2\pi n_k x|$$

sont p, α-fines, avec

(81)
$$\alpha = \overline{\lim_{x \downarrow 0}} \; x^{-1}(f(x))^p ,$$

si l'une des deux conditions suivantes est réalisée.

a) La suite $k \rightarrow \dfrac{n_{k+1}}{n_k}$ tend vers $+\infty$.

b) La suite $k \rightarrow \dfrac{n_{k+1}}{n_k}$ est bornée et toutes ses valeurs d'adhérence sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.

De plus, sous l'une des deux conditions a), b), si Λ est la suite dont la $k^{\text{ième}}$ spire est

(82)
$$s_k = \left(0 \; , \; \frac{1}{n_k} \; , \; \frac{2}{n_k} \; \ldots \; , \; \frac{n_k - 1}{n_k}\right),$$

on a

(83)
$$E(f) = E(\Lambda).$$

La démonstration de ce résultat, qui utilise naturellement le théorème 9, s'inspire de celles du théorème 1 et de la proposition 1, qui ont été données dans [3].

Problème 6. Le théorème 12 reste-t-il vrai si l'on substitue aux fonctions (80) la fonction

(84)
$$x \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin 2\pi n_k x \quad ?$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMARA, M. Ensembles fermés de nombres algébriques. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 3ème série, t. 83 (1966), 215-276.

[2] BEST, E. On set of fractional dimension III. Proc. London Math. Soc. II, 47 (1942), 436-454.

[3] BRUNEAU, M. Thèse. Strasbourg 1970. (A paraître).

[4] BRUNEAU, M. Fonctions d'une variable réelle ; fonctions p,α-fines et approximation sur le tore. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274 (1972), 1543-1546.

[5] ERDÖS, P. and TAYLOR, S. J. On the set points of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences. Proc. London Math. Soc., t. 7 (1957), 585-615.

[6] GRANDET-HUGOT, M. (Mme) Ensembles fermés d'entiers algébriques. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 3ème série, t. 92 (1965), 1-35.

[7] HAUSDORFF, F. Dimension und äusseres Mass. Math. Annalen, t. 79 (1916), 157-179.

[8] KAHANE, J.-P. et SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris, Hermann, 1963.

[9] MENDES-FRANCE, M. Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires. J. Anal. Math. Jérusalem, 20 (1967), 1-56.

[10] MENDES-FRANCE, M. A set of nonnormal numbers. Pacific Journ. Math., 15 (1965), 1165-1170.

[11] PISOT, C. La répartition modulo 1 et les nombres algébriques. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Pisa, Ser. 2, 7 (1938), 205-248.

[12] VOLKMANN, B. Über Klassen von Mengen naturlicher Zahlen. J. reine angew. Math. 190 (1952), 199-230.

[13] VOLKMANN, B. Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffereigenschaften charackterisiert sind. III. Math. Zeitschr., t. 59 (1953), 259-270.

[14] VOLKMANN, B.

Chapitre IV

MESURES DE CARATHEODORY ET MESURES DE BESICOVITCH

Sur la droite réelle les mesures de Carathéodory forment une classe assez large de mesures ≥ 0 comprenant entre autre les mesures de Hausdorff, les mesures finies ≥ 0 et les mesures σ-finies ≥ 0, diffuses. Nous introduisons par ailleurs la notion de mesure de Besicovitch. L'étude de ces mesures, que nous faisons ici, est préparatoire au chapitre V, où nous verrons que la variation d'une fonction peut s'interpréter comme étant, à peu de chose près, une mesure de Carathéodory, aussi bien qu'une mesure de Besicovitch.

I. MESURES DE CARATHEODORY.

A) DEFINITION. Soit h une fonction définie sur l'ensemble des couples (x,y) de nombres réels tels que $x \leq y$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Nous dirons que h est une fonction déterminante de Carathéodory si de plus, quels que soient $x \leq y \leq z \leq t$ dans $\mathbb{R}$, on a

(i) $h(y,z) \leq h(x,t)$

(ii) $h(x,t) \leq h(x,z) + h(y,t)$.

Etant donnée une fonction déterminante de Carathéodory h, soit μ_h^* (ou simplement μ^*) la fonction d'ensembles définie sur l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}$ par

$$(1) \qquad \mu_h^*(A) = \underline{\lim} \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k , y_k) \qquad (A \subset \mathbb{R}),$$

où $]x_k , y_k[$ $(k \in \mathbb{N})$ est un recouvrement de A et où la limite inférieure est prise lorsque la borne supérieure des nombres $y_k - x_k$ $(k \in \mathbb{N})$ devient arbitrairement petite.

DEFINITION 1. Pour toute fonction h, on dit que μ_h^* est la mesure extérieure de Carathéodory de fonction déterminante h. La restriction μ_h (encore notée μ) de μ_h^* à la σ-algèbre $\mathfrak{B}$ des boréliens de $\mathbb{R}$, est appelée la mesure de Carathéodory de fonction déterminante h.

Le résultat suivant est sans doute classique.

THEOREME 1. Toute mesure de Carathéodory μ sur $\mathbb{R}$ est une mesure vérifiant, si elle est diffuse,

$$(2) \qquad \mu(A) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset A}} \mu(K) \qquad (A \in \mathfrak{B}).$$

μ est la restriction à $\mathfrak{B}$ d'une mesure extérieure de Carathéodory μ^*. Or μ^* est une mesure extérieure métrique. Cela signifie que μ^* est une mesure extérieure et que de plus, si A, B sont deux parties de $\mathbb{R}$ dont la distance

$$\inf_{x \in A,\ y \in B} |y - x|$$

est strictement positive, on a

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Il en résulte alors (voir par exemple [8] ou [12]) que tout borélien est μ^*-mesurable et par suite que la restriction μ de μ^* à $\mathfrak{B}$ est une mesure. Il reste à prouver (2). Nous le ferons en nous inspirant très largement de [7], mais il est commode pour cela de constater, ce qui est facile, que l'on peut se ramener au cas où, la mesure μ étant diffuse, la fonction déterminante h est continue. Toutefois, avant d'aborder cette question dans le détail, nous allons nous permettre une rapide disgression sur les mesures de Carathéodory discrètes.

B) MESURES DE CARATHEODORY DISCRETES. Toute mesure positive sur R n'est pas une mesure de Carathéodory. Ainsi la masse $+\infty$ placée au point $x \in R$ n'est pas une mesure de Carathéodory. De même une mesure discrète $\mu \geq 0$, telle que l'application $x \to \mu(\{x\})$ soit finie et même bornée, n'est pas nécessairement de Carathéodory. On peut ainsi se convaincre facilement que la mesure positive obtenue en plaçant la masse 1 aux points $\frac{1}{n}$ $(n \in N)$, n'est pas de Carathéodory. Mais contrairement aux mesures de Carathéodory diffuses, qu'il semble difficile de caractériser, les mesures de Carathéodory discrètes admettent une caractérisation simple.

PROPOSITION 1. <u>Une C.N.S. pour qu'une mesure discrète</u> $\mu \geq 0$ <u>soit de Carathéodory est que la fonction</u> $x \to \mu(\{x\})$ <u>soit finie et semi-continue supérieurement.</u>

Soient μ une mesure de Carathéodory discrète et h une fonction déterminante telle que $\mu = \mu_h$. Etant donnés un point $x \in R$ et une suite (x_n) de points de R convergeant vers x, on a

$$(3) \qquad \mu(\{x\}) = \lim_{\substack{y<x<z \\ z-y\to 0}} h(y,z) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(\{x_n\}) ,$$

ce qui prouve que la fonction $x \to \mu(\{x\})$ est semi-continue supérieurement. Par ailleurs cette fonction est nécessairement finie puisque, pour tout $x \in R$ et tout nombre $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{x\}) \leq h(x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon) < +\infty.$$

Réciproquement, soit une mesure discrète $\mu \geq 0$. Pour tous points $x < y$ dans R, posons

(4) $$h(x,y) = \sup_{x<z<y} \mu(\{z\}).$$

La fonction h, qui est généralement à valeurs dans $\overline{R}_+$, vérifie les conditions (i) et (ii). Supposons maintenant que la fonction $x \to \mu(\{x\})$ soit finie et semi-continue supérieurement. h est alors finie et est donc une fonction déterminante. De plus

(5) $$\mu(\{x\}) \leq \lim_{\substack{y<x<z \\ z-y\to 0}} h(y,z) = \overline{\lim_{y\to x}}\, \mu(\{y\}) = \mu(\{x\}),$$

d'où il résulte que $\mu = \mu_h$.

□

Voici trois résultats très simples, nullement surprenants, que nous nous dispensons d'établir.

PROPOSITION 2. Une condition suffisante pour qu'une mesure $\mu \geq 0$ soit de Carathéodory est que la partie discrète et la partie diffuse de μ soient des mesures de Carathéodory.

PROPOSITION 3. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure de Carathéodory μ soit diffuse est qu'il existe une fonction déterminante h vérifiant $\mu = \mu_h$, continue et telle que $h(x,x) = 0$ $(x \in R)$.

PROPOSITION 4. Pour toute mesure de Carathéodory μ et tout ouvert U, la mesure $\mu(.\cap U)$ est de Carathéodory.

C) REGULARITE DE μ^*. Etant donnée une classe $\mathcal{C}$ de parties de R, une fonction d'ensembles $\nu : \mathcal{P}(R) \to \overline{R}_+$ est dite $\mathcal{C}$-régulière si, pour toute partie A de R, il existe une partie $A \subset B$ appartenant à $\mathcal{C}$ telle que $\mu(A) = \mu(B)$. Il résulte directement de la définition des mesures extérieures de Carathéodory que, si $\mathcal{G}_\delta$ est la classe des G_δ de R :

PROPOSITION 5. Toute mesure extérieure de Carathéodory est $\mathcal{G}_\delta$-régulière (donc $\mathcal{B}$-régulière).

Puisque toute mesure de Carathéodory est une mesure, on en déduit :

PROPOSITION 6. Soit μ une mesure de Carathéodory. Pour toute suite croissante (A_n) de parties de R

(6) $$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n).$$

D) DEMONSTRATION DU THEOREME I. Comme nous l'avons déjà dit, cette démonstration est adaptée de [7]. Par ailleurs, compte tenu de la proposition 3, nous supposerons que μ est une mesure de Carathéodory diffuse, dont la fonction déterminante h est continue et vérifie $h(x,x) = 0$ $(x \in R)$.

Pour tout nombre $\rho > 0$ et toute partie A de R, désignons par $\mu_\rho(A)$ la borne inférieure des nombres

(7) $$\sum_{k=1}^{\infty} h(x_k , y_k)$$

où $]x_k , y_k[$ $(k \in N)$ est un recouvrement de A formé d'intervalles de longueur inférieure ou égale à ρ. Pour toute partie A de R.

(8) $$\mu^*(A) = \lim_{\rho \downarrow 0} \mu_\rho(A).$$

On a d'autre part :

LEMME 1. Soit un nombre $\rho > 0$. Pour toute suite croissante (A_n) de parties de $\mathbb{R}$

(9) $$\mu_\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_\rho(A_n).$$

Puisque, pour toute partie A de $\mathbb{R}$

(10) $$\mu_\rho(A) = \lim_{x\to+\infty} \mu_\rho(A \cap [-x, +x]),$$

on peut admettre que $A_n \subset [0,1]$ $(n\in\mathbb{N})$. D'autre part, il résulte de la continuité de h que $\mu_\rho(A)$ est la borne inférieure des nombres (7) où $[x_k, y_k]$ $(k\in\mathbb{N})$ est un recouvrement de A formé d'intervalles de longueur inférieure ou égale à ρ.

Il existe une suite double d'intervalles fermés $[x_{n,k}, y_{n,k}]$ $(n,k \in \mathbb{N})$ de $[0,1]$, telle que

(11) $$\rho \geq y_{n,k} - x_{n,k} \geq y_{n,k+1} - x_{n,k+1},$$

quels que soient $n,k \in \mathbb{N}$, et

(12) $$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [x_{n,k}, y_{n,k}],$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, vérifiant

(13) $$\lambda = \lim_{n\to\infty} \mu_\rho(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(x_{n,k}, y_{n,k}).$$

On peut naturellement, en utilisant la compacité de $[0,1]$ et en remplaçant éventuellement la suite

$$n \longrightarrow ([x_{n,k}, y_{n,k}])_{k\geq 1}$$

par une sous-suite, se ramener au cas où, pour tout indice $k\in\mathbb{N}$, les suites $(x_{n,k})_{n\geq 1}$, $(y_{n,k})_{n\geq 1}$ convergent. Quel que soit $k\in\mathbb{N}$, désignons respectivement par x_k et y_k leurs limites. Pour tout $m\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{m} h(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} h(x_{n,k}, y_{n,k}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} h(x_{n,k}, y_{n,k}) \leq \lambda$$

si bien que

(14) $$\lambda_o = \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k , y_k) \leq \lambda$$

et

(15) $$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq m} h(x_{n,k} , y_{n,k}) = \lambda - \lambda_o .$$

Pour établir le lemme il suffit de montrer que, si A est la réunion de la suite (A_n) et si B est la réunion de la suite d'intervalles $k \to [x_k , y_k]$, que

(16) $$\mu_\rho(A - B) \leq \lambda - \lambda_o .$$

On en déduit en effet que

$$\mu_\rho(A) \leq \mu_\rho(A - B) + \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k , y_k) \leq \lambda - \lambda_o + \lambda_o = \lambda .$$

Pour établir (16) nous allons prouver en premier lieu que si, pour tout indice $k\in N$, V_k est un voisinage de $[x_k , y_k]$, on a

(17) $$\mu_\rho(A - \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) \leq \lambda - \lambda_o .$$

Il est commode pour cela d'imposer que

(18) $$\lim_{k\to+\infty} y_k - x_k = 0 .$$

Or, pour obtenir la condition (18), nous allons montrer d'une part que l'on peut se ramener au cas où $h(x,y) > 0$, quels que soient $x < y$, d'autre part que, dans ces conditions (18) est vérifié.

Posons, pour tout $m\in N$,

(19) $$h_m(x,y) = h(x,y) + \frac{y - x}{2m} .$$

h_m est une fonction déterminante telle que $h_m(x,y) > 0$, quels que soient $x < y$. Si, quel que soit l'indice m, $\mu_{\rho,m}$ est la fonction d'ensembles obtenue à partir de la définition de μ_ρ en substituant h_m à h,

(20) $$0 \leq \mu_{\rho,m}(A) - \mu_\rho(A) \leq \frac{1}{m}$$
$$0 \leq \mu_{\rho,m}(A_n) - \mu_\rho(A_n) \leq \frac{1}{m} \qquad (n \in N).$$

Ainsi, si l'on prouve que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\mu_{\rho,m}(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\rho,m}(A_n)$$

on déduit aisément de (20), en passant à la limite en $m \in \mathbb{N}$, que

(9) $$\mu_{\rho}(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\rho}(A_n).$$

En définitive nous avons prouvé que l'on peut se limiter au cas où $h(x,y) > 0$, quels que soient $x < y$. Or de (14) et du fait que

$$\lambda \le \mu_{\rho}([0,1]) < +\infty,$$

on déduit

(21) $$\lim_{k\to\infty} h(x_k , y_k) = 0,$$

d'où résulte (18) puisque h est continue, μ est diffuse et, d'après (11), la suite $k \to y_k - x_k$ est décroissante.

Nous allons maintenant établir (17), la condition (18) étant vérifiée. Pour tout indice $k \in \mathbb{N}$, V_k désignant un voisinage de $[x_k , y_k]$, nous allons même prouver que

(22) $$\mu^*(A - \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) \le \lambda - \lambda_o.$$

Puisque μ^* est $\mathcal{B}$-régulière

(23) $$\mu^*(A - \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n - \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k)$$

et il suffit donc de montrer que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$

(24) $$\mu_{\varepsilon}(A_n - \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) \le \lambda - \lambda_o.$$

$\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ étant donnés, choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $y_m - x_m \le \frac{\varepsilon}{2}$ (ce qui est possible d'après (18)). Il existe un indice $i \ge n$ tel que

(25) $$[x_{i,k} , y_{i,k}] \subset V_k \qquad (1 \le k \le m)$$

et

(26) $$y_{i,m} - x_{i,m} \le \varepsilon.$$

On a alors $A_n \subset A_i$ si bien que les intervalles $[x_{i,k}, y_{i,k}]$ $(k \in \mathbb{N})$ forment un recouvrement de A_n. On en déduit

(27) $$A_n - \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset A_n - \bigcup_{k \leq m} V_k \subset \bigcup_{k>m} [x_{i,k}, y_{i,k}]$$

et par conséquent, compte tenu de (11) et (26),

(28 $$\mu_\varepsilon(A_n - \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) \leq \sum_{k>m} h(x_{i,k}, y_{i,k}).$$

Puisque dans (28) i et m sont arbitrairement grands, on déduit (24) de (15) et (28).

Finalement nous avons établi

(22) $$\mu^*(A - \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k) \leq \lambda - \lambda_o.$$

Or, puisque μ^* est $\mathfrak{B}$-régulière, on déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de ce que

$$A - (\bigcup_{k \leq n} [x_k, y_k] \cup \bigcup_{k>n} V_k)$$

est égal à

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \left[A - (\bigcup_{k \leq n} [x_k - \tfrac{1}{m}, x_k + \tfrac{1}{m}] \cup \bigcup_{k>n} V_k)\right],$$

l'inégalité

(29) $$\mu^* \left[A - (\bigcup_{k \leq n} [x_k, y_k] \cup \bigcup_{k>n} V_k)\right] \leq \lambda - \lambda_o.$$

Maintenant nous allons prouver

(16) $$\mu_\rho(A - B) \leq \lambda - \lambda_o,$$

où B est la réunion des intervalles $[x_k, y_k]$, $(k \in \mathbb{N})$, ce qui achèvera la démonstration, comme nous l'avons déjà fait remarquer.

Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$, on peut choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que

(30) $$y_n - x_n < \varepsilon \quad , \quad \sum_{k>n} h(x_k, y_k) < \varepsilon.$$

Il est possible dans ces conditions de choisir, pour tout indice $k > n$, un voisinage

(31) $$V_k = [u_k, v_k]$$

de $[x_k , y_k]$, de telle façon que

$$v_k - u_k \leq \varepsilon \qquad (k > n)$$

(32)

$$\sum_{k>n} h(u_k , v_k) \leq \varepsilon.$$

$\mu_\varepsilon(A - B)$ est alors majorable par

$$\mu_\varepsilon\left[(A - \bigcup_{k\leq n} [x_k,y_k]) - \bigcup_{k>n} V_k\right] + \sum_{k>n} h(u_k,v_k),$$

donc par

$$\mu^*\left[A - (\bigcup_{k\leq n} [x_k,y_k] \cup \bigcup_{k>n} V_k)\right] + \varepsilon$$

qui, d'après (29), est inférieur à $\lambda - \lambda_o + \varepsilon$. $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petit, on en déduit que

$$\mu_\rho(A - B) \leq \mu^*(A - B) \leq \lambda - \lambda_o.$$

□

Soit $\mathcal{N} = N^N$, muni de la topologie produit. Une partie A de R est un souslinien si c'est la projection sur R d'un fermé de $R \times \mathcal{N}$. On sait (voir par exemple [7]) que

LEMME 2. Tout borélien de R est un souslinien.

Démonstration du théorème 1. Soit A un borélien de R. Nous voulons prouver que $\mu(A)$ est la borne supérieure des nombres $\mu(K)$ où K parcourt les compacts inclus dans A. Puisque pour tout fermé F de R

$$\mu(F) = \lim_{k\to\infty} \mu(F \cap [-k , +k]),$$

il suffit naturellement de prouver que $\mu(A)$ est la borne supérieure des nombres $\mu(F)$ où F parcourt les fermés inclus dans A.

D'après le lemme 2 A est un souslinien. Il existe donc un fermé Z_o de $R \times \mathcal{N}$ tel que, si p est la projection de $R \times \mathcal{N}$ sur R, $A = p(Z_o)$. Pour tout $n \in \mathcal{N}$ et tout entier $i \in N$, désignons par n_i la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de n. On définit une distance sur $\mathcal{N}$ en posant

(33) $$\delta(m,n) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|m_i - n_i|}{1 + |m_i - n_i|} .$$

La topologie sous-jacente à la métrique de $\mathcal{N}$ est alors la topologie produit, déduite de la topologie discrète de $\mathbb{N}$.

Pour toute suite strictement croissante (m_i) d'entiers naturels, l'ensemble

(34) $$C = \left\{ n \in \mathcal{N} \mid n_i \leq m_i \right\}$$

est une partie compacte de $\mathcal{N}$. Nous allons prouver que

(35) $$F = p(Z_o \cap R \times C),$$

qui est naturellement un sous-ensemble de A, est une partie fermée. Nous établirons ensuite que, pour un choix convenable de la suite (m_i), la μ-mesure de F peut être rendue arbitrairement proche de la μ-mesure de A.

Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ la suite décroissante de parties de $R \times \mathcal{N}$ définie par récurrence à partir de Z_o de la façon suivante :

(36) $$Z_i = Z_{i-1} \cap \left\{ (x,n) \mid n_i \leq m_i \right\} .$$

Nous allons établir que

(37) $$F = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{p(Z_i)} .$$

On a naturellement

$$F \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{p(Z_i)} .$$

Si on n'a pas l'égalité soit

$$a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{p(Z_i)} - F .$$

Nécessairement

$$(\{a\} \times C) \cap Z_o = \emptyset$$

si bien que, $\{a\} \times C$ étant compact et Z_o étant fermé, il existe un voisinage ouvert V de a dans R et un voisinage ouvert W de C dans $\mathcal{N}$ tels que

(38) $$(V \times W) \cap Z_o = \emptyset .$$

Il existe un indice $i \in \mathbb{N}$ pour lequel

(39) $$\delta(C\ ,\ \mathcal{N} - W) > 2^{-i}.$$

Par ailleurs, la condition $(x,n) \in Z_i$ impliquant que $(n_1, n_2, \ldots, n_i, 1, 1, \ldots 1 \ldots) \in C$, on en déduit que

(40) $$\delta(C\ ,\ n) \leq 2^{-i}\ ,$$

donc que $n \in W$. Ainsi $Z_i \subset R \times W$ et, d'après (38),

(41) $$Z_i \subset (R \times W) - (V \times W) = (R - V) \times W.$$

Il existe donc un indice $i \in \mathbb{N}$ pour lequel on a (41), donc tel que $\overline{p(Z_i)} \subset R - V$, ce qui contredit le fait que $a \in \overline{p(Z_j)}$ $(j \in \mathbb{N})$. Ceci achève de prouver que F est fermé.

La deuxième étape va être de montrer que l'on peut choisir la suite (m_i) en sorte que $\mu(F)$ soit arbitrairement proche de $\mu(A)$. Cela revient à prouver que, $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$ étant des nombres donnés, on peut construire la suite (m_i) de telle façon que

(42) $$\mu_\rho(F) + \varepsilon \geq \mu_\rho(A).$$

Etant donné que pour tout indice $i \in \mathbb{N}$

(43) $$\bigcup_{j=1}^{\infty} p(Z_{i-1} \cap \{(x,n) \mid n_i \leq j\}) = p(Z_{i-1}),$$

il est possible, d'après le lemme 1, de construire par récurrence la suite (m_i) pour que

(44) $$\mu_\rho\,[p(Z_{i-1})] - \mu_\rho\,[p(Z_i)] \leq \varepsilon 2^{-i} \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

Il va alors résulter du lemme suivant que

(45) $$\mu_\rho(F) = \lim_{i \to +\infty} \mu_\rho\,[\overline{p(Z_i)}] \geq \mu_\rho(A) - \varepsilon.$$

LEMME 3. <u>Soit un nombre</u> $\rho > 0$. <u>Pour toute suite décroissante</u> (F_n) <u>de fermés de</u> R

(46) $$\mu_\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_\rho(F_n).$$

Il suffit de se limiter au cas où (F_n) est une suite décroissante de compacts et utiliser des recouvrements ouverts.

□

II. PROPRIETE DES VALEURS INTERMEDIAIRES.

Nous dirons qu'une mesure positive μ sur R vérifie la "propriété des valeurs intermédiaires" si, pour tout borélien A, $\mu(A)$ est la borne supérieure des nombres $\mu(K)$, où K décrit l'ensemble des compacts inclus dans A et de μ-mesure finie. L'expression est abusive si la mesure μ n'est pas diffuse, mais lorsque μ est diffuse il en résulte bien que, pour tout borélien A tel que $\mu(A) = +\infty$ et tout nombre $\lambda \in R_+$, il existe un borélien $B \subset A$ pour lequel $\mu(B) = \lambda$.

THEOREME 2. Toute mesure de Carathéodory diffuse μ sur R possède la "propriété des valeurs intermédiaires" :

(47) $$\mu(A) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K\subset A,\, \mu(K)<+\infty}} \mu(K) \qquad (A \in \mathcal{B}).$$

Remarque. Le théorème 2, de même que le théorème 3, reste valable plus généralement pour toute mesure de Carathéodory dont la partie diffuse est de Carathéodory. Soit en effet μ une telle mesure. La mesure

(48) $$\nu(A) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\}) \qquad (A \in \mathcal{B}),$$

qui est la partie discrète de μ, est une mesure de Carathéodory qui, d'après la proposition 1, vérifie (47). Pour établir la "propriété des valeurs intermédiaires", il suffit donc de se limiter à la mesure de Carathéodory

(49) $$\eta(A) = \inf_{B\subset A,\, \nu(B)<+\infty} (\mu - \nu)(B) \qquad (A \in \mathcal{B}),$$

qui est la partie diffuse de μ (on a effectivement $\mu = \nu + \eta$).

Dans toute la suite de ce paragraphe μ désigne une mesure de Carathéodory diffuse. Voici tout d'abord un lemme très simple, mais qui va jouer un rôle essentiel.

LEMME 4. Il existe une fonction déterminante continue h telle que $\mu = \mu_h$, possédant la propriété suivante. Etant donnés trois points $x < y < z$ dans R tels que $h(x,y) \neq 0$ et $h(y,z) \neq 0$, on a

(50) $$h(x,z) < h(x,y) + h(y,z).$$

Si ℓ est une fonction déterminante continue telle que $\mu = \mu_\ell$ on a, pour tous points $x < y < z$ dans R,

$$\ell(x,z) \leq \ell(x,y) + \ell(y,z).$$

Posons

(51) $$h(x,y) = \sup_{x \leq u < v \leq y} \ell(u,v)e^{u-v}.$$

h est une fonction déterminante continue telle que $\mu = \mu_\ell = \mu_h$. De plus si trois points $x < y < z$ sont tels que $h(x,y) \neq 0$ et $h(y,z) \neq 0$ il existe deux points $x \leq u < v \leq z$ pour lesquels

$$h(x,z) = \ell(u,v)e^{u-v}$$

et l'on a effectivement (50). Il suffit de le vérifier lorsque $u < y < v$, or on a dans ce cas

$$\ell(u,v)\, e^{u-v} < \ell(u,y)\, e^{u-y} + \ell(y,v)e^{y-v},$$

d'où le résultat.

$\square$

Dans toute la suite de la démonstration du théorème 2, h désigne une fonction déterminante continue, telle que $\mu = \mu_h$, vérifiant la propriété du lemme 4.

Etant donnés un compact K et une partie finie $s = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ de K, posons

(52) $$\mu_s(K) = \inf \sum_{k=1}^{n} h(x_k , y_k)$$

où $[x_k , y_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ est un recouvrement de K, formé d'intervalles ne se chevauchant pas et dont les extrémités appartiennent à K, tel que tout point t_i soit un point x_k ou un point y_k. Le lemme suivant est immédiat.

LEMME 5. Pour tout compact K et toute suite croissante (s_n) de parties finies de K, dont la réunion est dense dans K, on a

(53) $$\mu(K) = \lim_{n\to\infty} \mu_{s_n}(K).$$

Le but des lemmes suivants est de montrer que, pour tout compact K tel que $\mu(K) = +\infty$, on a deux alternatives possibles.

a) Pour tout nombre réel $\lambda > 0$, il existe un compact $K_o \subset K$ tel que $\mu(K_o)=\lambda$.

b) Pour toute partie finie s de K, il existe au moins un point $x \in K$ tel que

(54) $$\mu_s(K \cap (-\infty, x]) + \mu_s(K \cap [x, +\infty)) > \mu_s(K).$$

Compte-tenu du théorème 1, il restera ensuite, pour achever la démonstration du théorème 2, à prouver que b) implique a).

Soit un compact K. Dans toute la suite s désigne une partie finie de K contenant la borne inférieure et la borne supérieure de K. s étant ainsi choisi désignons par $\mathcal{L}_s$ l'ensemble des parties compactes L de K, contenant s et vérifiant

(55) $$\mu_s(K) = \mu(L) + \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k , y_k)$$

où $[x_k , y_k]$ $(k \in N)$ désignent les intervalles contigus à L tels que $]x_k , y_k[$ rencontre K. Nous allons caractériser les compacts $L \in \mathcal{L}_s$ à l'aide de recouvrements "adaptés" à K et à s.

Nous dirons qu'un recouvrement $\mathcal{R}$ de K est adapté à (K,s) si c'est un recouvrement fini, constitué d'intervalles $[u_k , v_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ ne se chevauchant pas et dont les extrémités appartiennent à K, tel que tout point de s soit un point u_k ou un point v_k. A un tel recouvrement associons le nombre

$$S_{\mathcal{R}} = \sum_{k=1}^{n} h(u_k , v_k). \tag{56}$$

LEMME 6. Une C.N.S. pour qu'une partie compacte L de K appartienne à $\dot{\mathcal{L}}_s$ est qu'il existe une suite $(\mathcal{R}_n)$ de recouvrements adaptés à (K , s), vérifiant

$$\mu_s(K) = \lim_{n \to \infty} S_{\mathcal{R}_n} , \tag{57}$$

telle que si, pour tout $n \in N$, u_n désigne l'ensemble des extrémités des intervalles constituant le recouvrement $\mathcal{R}$, la suite (u_n) converge vers L, au sens de la métrique naturelle sur l'ensemble des parties compactes.

$(\mathcal{R}_n)$ étant une suite de recouvrements adaptés à (K , s), vérifiant (57) et telle que la suite associée (u_n) converge vers une partie compacte L de K, il est immédiat que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et tout $n \in N$,

$$\mu_s(K) \geq \mu_\varepsilon(L) + \sum_{k=1}^{n} h(x_k , y_k), \tag{58}$$

où $[x_k , y_k]$ $(k \in N)$ sont les intervalles contigus à L tels que $[x_k , y_k]$ rencontre K et où $\mu_\varepsilon(L)$ désigne la borne inférieure des nombres (56), lorsque $\mathcal{R}$ décrit l'ensemble des recouvrements de L, constitués d'intervalles de longueur inférieure à ε. Par passage à la limite en ε et en n, on obtient

$$\mu_s(K) \geq \mu(L) + \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k , y_k). \tag{59}$$

Par ailleurs, le membre de droite de (59) est minoré par

$$\mu_s(L) + \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k , y_k) ,$$

qui est supérieur à $\mu_s(K)$. En définitive L est une partie compacte de K contenant s et vérifiant (55) ; autrement dit $L \in \mathcal{L}_s$.

Réciproquement, pour tout $L \in \mathcal{L}_s$, il existe manifestement une suite $(\mathfrak{R}_n)$ de recouvrements adaptés à (K , s), pour laquelle la suite (u_n) converge vers L, telle que l'on ait (57).

$\square$

Désignons toujours par $\mathcal{L}_s$ l'ensemble des parties compactes L de K contenant s et vérifiant (55). Si un point x de K appartient à une partie $L \in \mathcal{L}_s$, on a

(60) $$\mu_s(K \cap (-\infty, x]) + \mu_s(K \cap [x, +\infty)) = \mu_s(K).$$

Réciproquement si un point $x \in K$ vérifie la condition (60) il existe une suite $\mathfrak{R}_n$ de recouvrements adaptés à (K , s) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s \cup \{x\}$ soit contenu dans l'ensemble u_n des extrémités des intervalles formant le recouvrement $\mathfrak{R}_n$, cette suite $(\mathfrak{R}_n)$ vérifiant en outre la condition (57). Il existe alors une sous-suite de la suite (u_n) convergeant vers une partie compacte L de K, contenant naturellement le point x et qui, d'après le lemme 6, appartient à $\mathcal{L}_s$. Enonçons ce résultat sous forme d'un lemme.

LEMME 7. <u>Une C.N.S. pour qu'un point x de K n'appartienne à aucun compact $L \in \mathcal{L}_s$ est que</u>

(54) $$\mu_s(K \cap (-\infty, x]) + \mu_s(K \cap [x, +\infty)) > \mu_s(K).$$

Soit $K \in \mathcal{K}$ tel que $\mu(K) = +\infty$. Nous désirons établir, rappelons le, que l'une des conditions suivantes est réalisée.

a) Pour tout nombre réel $\lambda > 0$, il existe un compact $K_o \subset K$ tel que $\mu(K_o) = \lambda$.

b) Pour toute partie finie s de K, il existe au moins un point $x \in K$ vérifiant

(51).

D'après le lemme 7, il faut montrer que la négation de a) implique, pour toute partie finie s de K, l'existence d'un point $x \in K$ n'appartenant à aucune partie $L \in \mathcal{L}_s$. Nous allons pour cela construire un compact $K^*_\varepsilon \subset K$ qui ne sera pas contenu dans la réunion des parties $L \in \mathcal{L}_s$.

Soit, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, K_ε l'ensemble des points de K n'appartenant à aucun intervalle ouvert $]y,z[$ de longueur inférieure à ε, dont les extrémités sont des points de K et qui vérifie

(61) $$\mu_s(K \cap (-\infty, z]) - \mu_s(K \cap (-\infty, y]) = h(y,z).$$

K_ε est une partie fermée de K qui, d'après les lemmes suivants, ne rencontre aucun intervalle ouvert, de longueur inférieure à ε, contigu à un compact $L \in \mathcal{L}_s$.

LEMME 8. Les fonctions d'ensembles μ_s sont sous σ-additives.

Ce lemme étant immédiat, on obtient :

LEMME 9. Les intervalles contigus à un compact $L \in \mathcal{L}_s$ vérifient (61).

Soient $[x_k, y_k]$ $(k \in N)$ les intervalles contigus à une partie compacte $L \in \mathcal{L}_s$, rencontrant K. Etant donné un indice k_o, soit N_1 l'ensemble des indices $k \in N$ tels que $y_k \leq x_{k_o}$ et N_2 l'ensemble des indices $k \in N$ tels que $y_{k_o} \leq x_k$. On a

$$K_1 = K \cap (-\infty, x_{k_o}] = L_1 \cup (\bigcup_{k \in N_1}]x_k, y_k[\cap K)$$

$$K_2 = K \cap [y_{k_o}, +\infty) = L_2 \cup (\bigcup_{k \in N_2}]x_k, y_k[\cap K),$$

avec $L_1 = L \cap (-\infty, x_{k_o}]$ et $L_2 = L \cap [y_{k_o}, +\infty)$. De la sous σ-additivité de μ_s il résulte que

(62) $$\mu_s(K) \leq \mu_s(K_1) + \mu_s(K_2) + h(x_k, y_k)$$

et d'autre part que, pour $i = 1, 2$,

(63) $$\mu_s(K_i) \leq \mu_s(L_i) + \sum_{k \in N_i} h(x_k , y_k).$$

Puisque

$$\mu_s(L_1) + \mu_s(L_2) \leq \mu(L_1) + \mu(L_2) = \mu(L) ,$$

il résulte de (55) et des inégalités (62) et (63) que

(64) $$\mu_s(K) = \mu_s(K_1) + \mu_s(K_2) + h(x_{k_o} , y_{k_o}).$$

Alors le nombre

$$\mu_s(K \cap (-\infty , y_{k_o}]) - \mu_s(K \cap (-\infty , x_{k_o}]) ,$$

qui est nécessairement inférieur à $h(x_{k_o} , y_{k_o})$, est supérieur à

$$\mu_s(K) - \mu_s(K_1) - \mu_s(K_2) = h(x_{k_o} , y_{k_o})$$

d'où l'égalité.

□

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, on déduit du lemme 9 le résultat suivant.

LEMME 10. <u>Pour tout nombre</u> $\varepsilon > 0$ <u>et tout compact</u> $L \in \mathcal{L}_s$, K_ε <u>ne rencontre aucun intervalle ouvert, de longueur inférieure à</u> ε, <u>contigu à</u> L.

On est évidemment en droit de se demander si K_ε n'est autre que l'ensemble vide. Le lemme que voici prouve que, sous certaines conditions, K_ε a la puissance du continu.

LEMME 11. <u>Si</u> K <u>est un compact vérifiant</u> $\mu(K) = +\infty$, <u>on a l'une des deux éventualités suivantes.</u>

a) <u>Pour tout nombre réel</u> $\lambda > 0$, <u>il existe un compact</u> $K_o \subset K$ <u>tel que</u> $\mu(K_o) = \lambda$.

b) <u>Pour toute partie finie</u> s <u>de</u> K, <u>il existe un nombre</u> $\varepsilon > 0$ <u>tel que</u>

$\mu(K_\varepsilon) = +\infty$.

Supposons que a) ne soit pas vérifié et établissons b). Soient $\varepsilon > 0$ et $]x_k, y_k[$ $(k \in \mathbb{N})$ un recouvrement minimum (c'est à dire dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement autre que lui-même) du complémentaire de K_ε dans K, formé d'intervalles vérifiant (61). On a manifestement

$$\sum_{k=1}^{n} \{\mu_s(K \cap (-\infty, y_k]) - \mu_s(K \cap (-\infty, x_k])\} \leq 2\mu_s(K),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, si bien que, compte tenu de (28),

$$\sum_{k=1}^{\infty} h(x_k, y_k) \leq 2\mu_s(K). \tag{65}$$

Si de plus on impose que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, les points x_k, y_k appartienne à K et que $y_k - x_k$ soit inférieur à ε, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, le nombre

$$\mu(K_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k, y_k)$$

est minoré par la borne inférieure des nombres

$$\sum_{k=1}^{n} h(u_k, v_k),$$

$[u_k, v_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ étant un recouvrement de K constitué d'intervalles de longueur inférieure à ε. Désignons par $\mu_\varepsilon(K)$ cette borne inférieure. Il résulte de (65) que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$,

$$\mu_\varepsilon(K) \leq \mu(K_\varepsilon) + 2\mu_s(K). \tag{66}$$

Remarquons maintenant que, si la condition a) n'est pas réalisée, il existe un nombre $0 < \lambda_o < +\infty$ tel que, pour toute partie compacte $K_o \subset K$, $\mu(K_o) \leq \lambda_o$ ou $\mu(K_o) = +\infty$. En effet, si Λ est l'ensemble des nombres $0 \leq \lambda < +\infty$ pour lesquels il existe un compact $K_o \subset K$ vérifiant $\mu(K_o) = \lambda$, il résulte de la continuité de l'application

$$x \to \mu(K_o \cap (-\infty, x]),$$

lorsque $\mu(K_o) < +\infty$, que Λ est un intervalle et par conséquent est borné s'il diffère de $\mathbb{R}_+$.

Dans ces conditions si, pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $\mu(K_\varepsilon)$ est fini, donc inférieur à λ_o, on déduit de (66) que

(67) $$\mu(K) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon(K) \leq \lambda_o + 2\mu_s(K) ,$$

d'où une contradiction puisque $\mu(K) = +\infty$. Ainsi la négation de a) implique l'existence d'un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(K_\varepsilon) = +\infty$.

□

Dans toute la suite on se donne un compact K tel que $\mu(K) = +\infty$, pour lequel la propriété a) n'est pas vérifiée (nous admettons pour le moment l'existence d'un tel compact, mais prouverons justement qu'il n'y en a pas). Il existe alors un nombre $0 < \lambda_o < +\infty$ tel que, pour tout compact $K_o \subset K$, $\mu(K_o) \leq \lambda_o$ ou $\mu(K_o) = +\infty$. Etant donnée une partie finie s de K, contenant la borne supérieure et la borne inférieure de K (hypothèse que nous imposons toujours à s), rappelons que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, K_ε désigne l'ensemble des points de K n'appartenant à aucun intervalle ouvert $]x,y[$ de longueur inférieure à ε, dont les extrémités sont des points de K, et qui vérifie

(61) $$\mu_s(K \cap (-\infty, y]) - \mu_s(K \cap (-\infty, x]) = h(x,y).$$

Du lemme 11 on déduit que l'on peut choisir $\varepsilon > 0$ en sorte que $\mu(K_\varepsilon) = +\infty$. Nous fixons une fois pour toute un tel nombre $\varepsilon > 0$.

Soit U la réunion des intervalles $]x,y[$, dont les extrémités appartiennent à K_ε, tels que

(68) $$\mu(K_\varepsilon \cap]x,y[) < +\infty.$$

K_ε^* désignant l'ensemble des points de K_ε n'appartenant pas à U, on a les résultats suivants.

LEMME 12. $\mu(K^*_\varepsilon) = +\infty$.

Désignons respectivement par a et b la borne inférieure et la borne supérieure de K. Si $[x_k, y_k]$ $(k \in N)$ sont les intervalles contigus à $K^*_\varepsilon \cup \{a,b\}$ il vient, puisque μ est une mesure,

$$\mu(K_\varepsilon) = \mu(K^*_\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(K_\varepsilon \cap]x_k, y_k[).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(K_\varepsilon \cap]x_k, y_k[) = \lim_{n \to \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{n} (K_\varepsilon \cap (K_\varepsilon \cap [x_k, y_k]))) \le \lambda_o$$

si bien que

$$\mu(K^*_\varepsilon) \ge \mu(K_\varepsilon) - \lambda_o = +\infty.$$

□

LEMME 13. <u>Pour tout compact</u> $L \in \mathscr{L}_s$, K^*_ε <u>est contenu dans la réunion des intervalles contigus à</u> L, <u>dont la longueur est supérieure à</u> ε.

Soit L une partie compacte de K appartenant à $\mathscr{L}_s$, c'est à dire telle que $s \subset L$ et

$$\mu_s(K) = \mu(L) + \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k, y_k) \tag{55}$$

où $[x_k, y_k]$ $(k \in N)$ désignent les intervalles contigus à L, tels que $]x_k, y_k[$ rencontre K, classés par longueur décroissante. Les intervalles de longueur supérieure à ε correspondant aux indices $1 \le k \le m$, il résulte du lemme 10 que K^*_ε, étant inclus dans K_ε, ne rencontre aucun intervalle $]x_k, y_k[$ d'indice $k > m$. Soit alors $]x,y[$ un intervalle dont les extrémités appartiennent à K^*_ε, ne rencontrant aucun des intervalles $[x_k, y_k]$ $(1 \le k \le m)$. Il résulte des hypothèses faites sur K^*_ε que, si $]x,y[$ rencontre K^*_ε, on a

$$\mu(K^*_\varepsilon \cap]x,y[) = +\infty \; ; \tag{69}$$

or $K^*_\varepsilon \cap]x,y[$ étant inclus dans L, on a d'autre part

(70) $$\mu(K^*_\varepsilon \cap]x,y[) \leq \mu(L) \leq \mu_s(K),$$

la seconde inégalité résultant de (55). Puisque $\mu_s(K) < +\infty$, il en résulte une contradiction. Ainsi K^*_ε est contenu dans la réunion des intervalles $[x_k, y_k]$ $(1 \leq k \leq m)$.

□

Nous pouvons maintenant établir l'alternative que nous désirions obtenir.

LEMME 14. Si un compact K vérifie $\mu(K) = +\infty$, on a l'une des deux éventualités suivantes.

a) Pour tout nombre réel $\lambda > 0$, il existe un compact $K_o \subset K$ tel que $\mu(K_o) = \lambda$.

b) Pour toute partie finie s de K, contenant la borne inférieure et la borne supérieure de K, il existe au moins un point $x \in K$ tel que

(54) $$\mu_s(K \cap (-\infty, x]) + \mu_s(K \cap [x, +\infty)) > \mu_s(K).$$

Supposons que a) ne soit pas vérifié et établissons b). s étant une partie finie de K, contenant la borne inférieure et la borne supérieure de K, on définit comme précédemment K_ε, pour tout $\varepsilon > 0$. Il existe, d'après le lemme 11, un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(K_\varepsilon) = +\infty$ et, K^*_ε étant toujours défini de la même façon, on a, d'après le lemme 12, $\mu(K^*_\varepsilon) = +\infty$. Cela prouve que K^*_ε n'est pas dénombrable et par conséquent qu'il existe au moins un point $x \in K^*_\varepsilon$ qui n'appartient ni à s ni à aucun intervalle $[u,v]$ contigu à K^*_ε.

Nous allons montrer que le point x vérifie la condition (54). D'après le lemme 7, cela revient à montrer que x n'appartient à aucune partie $L \in \mathscr{L}_s$. Soit donc un compact $s \subset L \subset K$ appartenant à $\mathscr{L}_s$, c'est-à-dire tel que

(55) $$\mu_s(K) = \mu(L) + \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k, y_k),$$

où $[x_k , y_k]$ $(k\in\mathbb{N})$ désignent les intervalles contigus à L, tels que $]x_k , y_k[$ rencontre K. D'après le lemme 13, K^*_ε est contenu dans la réunion des intervalles contigus à L de longueur supérieure à ε. Par conséquent si $x\in L$, il résulte du choix de x qu'il existe deux indices k , j tels que $x = y_j = x_k$. Le point x n'étant pas l'une des extrémités d'un intervalle contigu à K^*_ε, les intervalles $]x_j,x[$ et $]x,y_k[$ rencontrent K^*_ε, si bien que d'après le choix de K^*_ε

(71) $$\mu(K^*_\varepsilon \cap]x_j,x[) = +\infty$$
$$\mu(K^*_\varepsilon \cap]x,y_k[) = +\infty.$$

Or, dans ces conditions $h(x_j , x) \neq 0$, $h(x,y_k) \neq 0$ et, d'après le lemme 4,

(72) $$h(x_j,y_k) < h(x_j,x) + h(x,y_k),$$

d'où une contradiction puisque le second membre de (72) est égal à $\mu_s(K \cap [x_j,y_k])$.

$\square$

Démonstration du théorème 2. Soient un compact K tel que $\mu(K) = +\infty$ et un nombre réel $\lambda > 0$. Du lemme 5 on déduit qu'il existe une partie finie s de K, contenant la borne inférieure et la borne supérieure de K, telle que

(73) $$\nu = \mu_s(K) \geq \lambda .$$

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des compacts $L \subset K$ tels que $\mu_s(L) = \nu$. On a $K \in \mathcal{J}$. Par ailleurs si $(K_i)_{i\in I}$ est une famille décroissante dans $\mathcal{J}$, dont L désigne l'intersection, on constate facilement que

(74) $$\mu_s(L) = \inf_{i\in I} \mu_s(L_i) = \nu .$$

(Il suffit de remarquer que si V est un voisinage de L, il existe un indice $i_o\in I$ pour lequel $L_{i_o} \subset V$). L'ensemble $\mathcal{J}$, muni de la relation d'inclusion, étant inductif décroissant, il existe d'après le théorème de Zorn un élément minimal $L_o\in \mathcal{J}$.

Supposons que $\mu(L_o) = +\infty$. Si, pour tout nombre $\xi > 0$, il existe un compact $K_o \subset L_o$ tel que $\mu(K_o) = \xi$, K_o est un compact inclus dans K, si bien que K vérifie la condition a) du lemme 14. D'après le lemme 14 il y a une deuxième éventualité : il existe un point $x \in L_o$ pour lequel

(75) $$\mu_s(L_o \cap (-\infty, x]) + \mu_s(L_o \cap [x, +\infty)) > \mu_s(L_o).$$

Mais il existe alors un nombre $\eta > 0$ tel que, L_1 désignant l'ensemble des points de. L_o n'appartenant pas à $]x-\eta\ ,\ x+\eta[$,

$$\mu_s(L_1) = \mu_s(L_o) = \nu,$$

ce qui est impossible puisque L_o est minimal.

Reste le cas où $\mu(L_o) < +\infty$. On a alors $\lambda \leq \mu(L_o) < +\infty$ et il résulte de la continuité en x de $\mu(L_o \cap (-\infty, x])$, que l'on peut choisir $x \in K$ tel que

$$\mu(L_o \cap (-\infty, x]) = \lambda,$$

ce qui achève la démonstration.

□

Nous allons par la suite donner plusieurs exemples de mesures de Carathéodory :

. <u>Les mesures finies, positives.</u>

. <u>Les mesures σ-finies, diffuses, positives.</u>

. <u>Les mesures de Hausdorff.</u>

. <u>La variation totale d'une fonction n'ayant que des points de discontinuité de première espèce.</u>

<u>Problème 1</u>. Est-ce que toute mesure $\mu \geq 0$ sur R, diffuse, $\mathcal{G}_\delta$-régulière et possédant la propriété des valeurs intermédiaires est une mesure de Carathéodory ?

III. MESURES σ-FINIES DIFFUSES.

La notion de mesure de Carathéodory, au même titre que celle de mesure σ-finie, généralise la notion de mesure finie.

PROPOSITION 7. Toute mesure positive, finie μ est de carathéodory et admet pour fonction déterminante

(76) $$h(x,y) = \mu(]x,y[) \qquad (x \leq y).$$

On pourrait s'attendre à ce que toute mesure positive, σ-finie soit de Carathéodory, mais il n'en est rien. Ainsi la mesure obtenue en plaçant la masse 1 aux points $\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ n'est pas de Carathéodory, bien que ce soit une mesure σ-finie. On a en revanche le résultat suivant.

THEOREME 3. Toute mesure positive, σ-finie, diffuse est de Carathéodory.

Etablissons d'abord des lemmes.

LEMME 15. Si une mesure positive μ est σ-finie et diffuse, il existe unesuite (K_n) de compacts deux à deux disjoints, tels que $\mu(K_n) \leq 1$ $(n\in\mathbb{N})$, dont la réunion porte μ.

Il existe une suite (A_n) de boréliens deux à deux disjoints, tels que $\mu(A_n) \leq 1$ $(n\in\mathbb{N})$, dont la réunion porte μ. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe une suite $K_{n,m}$ $(m\in\mathbb{N})$ de compacts deux à deux disjoints, contenus dans A_n, tels que

$$\mu(A_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(K_{n,m}).$$

Toute suite (K_n), obtenue en réindexant les compacts $K_{n,m}$ $(n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N})$, vérifie les conditions du lemme.

$\square$

Tant que nous travaillerons sur des mesures de Carathéodory diffuses, nous pourrons nous limiter à des fonctions déterminantes continues (proposition 3). Le lemme suivant sera alors commode.

LEMME 16. Une C.N.S. pour qu'une fonction continue $(x,y) \to h(x,y)$ $(x \leq y)$, à valeurs dans R_+, soit une fonction déterminante, est que, quels que soient $x < y < z$ dans R,

(i) $h(x,y) \leq h(x,z)$ et $h(y,z) \leq h(x,z)$,

(ii) $h(x,z) \leq h(x,y) + h(y,z)$.

Voici maintenant un résultat qui permet de modifier convenablement une fonction déterminante.

LEMME 17. Si h_1, h_2 sont deux fonctions déterminantes définies sur les couples (x,y) tels que $0 \leq x \leq y \leq 1$, vérifiant $h_1(0,1) \neq 0$ et $h_2(0,1) \leq h_1(0,1)$,

(77) $$\ell = h_1 + \left(1 - \frac{h_1}{h_1(0,1)}\right) h_2$$

est une fonction déterminante.

La fonction ℓ vérifie manifestement (ii). Il suffit donc de montrer que la condition (i) est satisfaite. Pour simplifier nous allons nous limiter au cas où les fonctions h_1, h_2 sont continues, puisque nous utiliserons le lemme dans cette seule situation. Il suffit alors de prouver qu'étant donnés trois points $x < y < z$, $\ell(x,y)$ et $\ell(y,z)$ sont inférieurs à $\ell(x,z)$. On a, d'après la condition (ii) appliquée à la fonction h_2,

$$(h_1h_2)(x,z) \leq h_1(x,z)h_2(x,y) + h_1(x,z)\, h_2(y,z)$$

d'où il résulte que

$$(h_1h_2)(x,z) - (h_1h_2)(x,y) \leq h_1(y,z)h_2(x,y) + h_1(x,z)h_2(y,z).$$

On constate alors que $(\ell(x,z) - \ell(x,y))h_1(0,1)$ est minoré par

$$(h_1(y,z) + h_2(y,z))h_1(0,1) + (h_1h_2)(x,y) - (h_1h_2)(x,z)$$

donc par

$$(h_1(y,z) + h_2(y,z))h_1(0,1) - h_1(y,z)h_2(x,y) - h_1(x,z)h_2(y,z) ;$$

or, du fait que $h_2(0,1) \leq h_1(0,1)$ on déduit que ce dernier nombre est positif. Nous avons ainsi établi que $\ell(x,y)$ est inférieur à $\ell(x,z)$. On prouve de la même façon que $\ell(y,z)$ est inférieur à $\ell(x,z)$.

$\square$

En fait, nous avons besoin d'une forme améliorée du lemme 17, qui se démontre de la même manière.

LEMME 18. Soient h_1, h_2 deux fonctions déterminantes, non nulles. Si la mesure de Carathéodory μ_{h_2} est portée par un intervalle $[x_o , y_o]$ et si $h_2(x_o,y_o) \leq h_1(x_o,y_o)$,

(78) $$\ell(x,y) = h_1(x,y) + \left(1 - \frac{h_1(x',y')}{h_1(x_o,y_o)}\right) h_2(x,y),$$

où $x' = \sup(x,x_o)$, $y' = \inf(y,y_o)$ et où l'on convient que $h_1(x',y') = 0$ si $[x,y]$ ne rencontre pas $[x_o,y_o]$, est une fonction déterminante.

Démonstration du théorème 3. μ étant une mesure positive, σ-finie, diffuse, il existe d'après le lemme 15 une suite (K_n) de compacts deux à deux disjoints tels que $\mu(K_n) \leq 1$ $(n \in N)$, dont la réunion porte μ. Pour tout indice n il existe une fonction déterminante h_n telle que

(79) $$\mu_{h_n} = \mu(. \cap K_n) ;$$

on peut, d'après la proposition 6, prendre

$$h_n(x\ ,\ y) = \mu(]x,y[\cap K_n).$$

Nous désirons maintenant construire, à l'aide des fonctions h_n, une fonction déterminante h telle que $\mu_h = \mu$. On peut être tenté de prendre pour h la somme des fonctions h_n $(n\in\mathbb{N})$, mais on constate que cette fonction peut prendre la valeur $+\infty$. On peut lui substituer la fonction

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \inf(2^{-n}\ ,\ h_n)\ ;$$

h est bien une fonction déterminante et il est facile de voir que $\mu \leq \mu_h$. Malheureusement si les compacts K_n sont par trop imbriqués les uns dans les autres, on ne peut pas espérer obtenir l'égalité. En définitive nous allons construire une fonction déterminante

(80) $$h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n\ ,$$

telle que les fonctions h_n vérifient (79), pour laquelle $\mu_h = \mu$. Seulement le choix des fonctions h_n demandera quelques précautions.

A partir des compacts K_n, on peut construire une suite (A_n) de boréliens, deux à deux disjoints, telle que $A_1 = K_1$ (en admettant que K_1 ait été convenablement choisi), dont la réunion porte μ, vérifiant, pour $n \geq 2$, les propriétés suivantes.

a) $\mu(A_n) \leq 1$

b) Si $]x,y[$ est un intervalle rencontrant A_n,

(81) $$\mu(A_n \cap\ ]x,y[) > 0\ .$$

c) Si $[x,y]$ est un intervalle contigu à A_{n-1}, tel que $]x,y[$ ne rencontre pas A_n,

(82) $$\mu(]x,y[) = 0.$$

d) Si $[x,y]$ est un intervalle contigu à A_{n-1}, $A_n \cap]x,y[$ est soit l'ensemble vide, soit une partie compacte.

Il ressort de ces conditions que, pour tout $n \in N$, A_n est une réunion au plus dénombrable de compacts sans point isolé, deux à deux disjoints. Mais généralement on ne peut pas imposer aux parties A_n d'être compactes.

A partir de maintenant il sera plus commode de supposer, ce qui n'est pas restrictif, que la mesure μ est portée par $[0,1]$. Nous allons admettre également que

(83) $$h_1(0,1) = \mu(K_1) = 1.$$

Etant donné un indice $n \geq 2$, désignons, quels que soient $x \leq y$ dans R, par $[x_k, y_k]$ $(k \in N)$ les intervalles contigus à A_{n-1} rencontrant $[x,y]$ et posons

(84) $$j_n(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \inf\left[(y_k - x_k)^2,\ \mu([x_k,y_k] \cap [x,y] \cap A_n)\right].$$

Posons par ailleurs $j_1 = h_1$. Pour tout indice n, j_n est une fonction déterminante pour laquelle

(85) $$\mu_{j_n} = \mu(. \cap A_n).$$

On va maintenant construire une suite (ℓ_n) de fonctions déterminantes, vérifiant

(86) $$\mu_{\ell_n} = \mu\left[. \cap \left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right)\right] \qquad (n \in N),$$

telle que ℓ_n converge vers une fonction déterminante ℓ pour laquelle $\mu_\ell = \mu$. Cette construction va utiliser les fonctions j_n, mais on ne peut pas prendre $\ell_n = \sum_{m=1}^{n} j_m$ car dans ce cas on pourrait seulement affirmer que $\mu \leq \mu_\ell$. Pour obtenir des fonctions ℓ_n convenables, il ne faut pas que les fonctions j_m interviennent "simultanément" mais "de façon espacée", ce que rend possible le lemme 18.

On peut choisir $\ell_1 = j_1$ et

(87) $$\ell_2 = j_1 + (1 - j_1)j_2.$$

D'après le lemme 17 on définit bien ainsi une fonction déterminante et de plus

(88) $$\mu_{\ell_2} = \mu_{j_1} + \mu_{j_2} = \mu(.\cap(A_1 \cup A_2)).$$

Pour établir (88) il suffit de prouver que les égalités ont lieu pour tout compact $K \subset A_1 \cup A_2$. Or, étant donné un tel compact K, les ensembles $K_i = K \cap A_i$ $(i = 1, 2)$ sont des compacts dont la réunion est K. μ_{ℓ_2} étant une mesure, il vient

(89) $$\mu_{\ell_2}(K) = \mu_{\ell_2}(K_1) + \mu_{\ell_2}(K_2) = \mu_{\ell_2}(K_1) + \mu_{j_2}(K_2),$$

la seconde égalité tenant au fait que l'on peut, pour le calcul de $\mu_{\ell_2}(K)$, se limiter à des recouvrements de K_2 constitués d'intervalles ne rencontrant pas K_1, et que, pour un tel intervalle $]x,y[$,

$$\ell_2(x,y) = j_2(x,y).$$

D'autre part on a

$$\mu_{\ell_2}(K_1) \geq \mu_{j_1}(K_1).$$

Pour établir l'inégalité contraire, il suffit de remarquer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K_1 par des intervalles $[u_i\ ,\ v_i]$ $(1 \leq i \leq n)$ de longueur inférieure à ε, ne rencontrant pas les intervalles contigus à K_1 de longueur supérieure à ε, tels que

(90)
$$\mu_{\ell_2}(K_1) \leq \sum_{i=1}^{n} \ell_2(u_i\ ,\ v_i) + \varepsilon$$
$$\mu_{j_1}(K_1) \geq \sum_{i=1}^{n} j_1(u_i\ ,\ v_i) - \varepsilon.$$

$[x_k, y_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ désignant les intervalles contigus à K_1 de longueur inférieure à ε, il vient alors, puisque $\ell_2 \leq j_1 + j_2$,

$$\sum_{i=1}^{n} \ell_2(u_i\ ,\ v_i) \leq \sum_{i=1}^{n} j_1(u_i\ ,\ v_i) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$$

avec

$$\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2 \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k) \leq \varepsilon.$$

Il résulte alors de (90) que

$$\mu_{\ell_2}(K_1) \leq \mu_{j_1}(K_1) + 3\varepsilon.$$

En définitive, $\mu_{\ell_2}(K_1) = \mu_{j_1}(K_1)$ et il résulte de (89) que

$$\mu_{\ell_2}(K) = \mu_{j_1}(K_1) + \mu_{j_2}(K_2) = \mu(K)$$

d'où l'on déduit (88) puisque par ailleurs $\mu_{j_i}(K_i) = \mu_{j_i}(K)$ pour $i = 1,2$. On peut encore remarquer que, d'après (83),

$$\ell_2(0,1) = j_1(0,1) = h_1(0,1) = 1.$$

Nous allons définir la suite (ℓ_n) par récurrence. Supposons que ℓ_n soit construit, pour un indice donné $n \geq 2$ et vérifie $\ell_n(0,1) = 1$. Soient $[x_i, y_i]$ $(i \in \mathbb{N})$ les intervalles contigus à A_{n-1} tels que μ charge $]x_i\, , y_i[$. Pour tout indice $i \in \mathbb{N}$ et tous points $x \leq y$, posons $k_i(x,y) = 0$ si $[x,y]$ ne rencontre pas $[x_i\, , y_i]$ et, dans le cas contraire,

$$k_i(x,y) = \inf\left[j_{n+1}(x_i', y_i')\, ,\ \ell_n(x_i, y_i)\right] \tag{91}$$

avec

$$x_i' = \sup(x_i\, , x)$$

$$y_i' = \inf(y_i\, , y).$$

On s'assure aisément que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, k_i est une fonction déterminante vérifiant $k_i(x_i, y_i) \leq \ell_n(x_i, y_i)$. Il résulte alors du lemme 18 que la fonction

$$q_1(x,y) = \ell_n(x,y) + \left(1 - \frac{\ell_n(x_1'\, , y_1')}{\ell_n(x_1\, , y_1)}\right) k_1(x,y) \tag{92}$$

est une fonction déterminante telle que $q_1(0,1) = 1$; on remarque en particulier que d'après les conditions imposées à ℓ_n et aux ensembles A_{n-1}, A_n, $\ell_n(x_1\, , y_1) > 0$.

En itérant le procédé on obtient une suite (q_i) de fonctions déterminantes telles que, pour tout $i \geq 2$, $q_i(0,1) = 1$ et

(93) $$q_i(x,y) = q_{i-1}(x,y) + \left(1 - \frac{q_{i-1}(x_i', y_i')}{q_{i-1}(x_i, y_i)}\right) k_i(x,y).$$

Posons

(94) $$\ell_{n+1} = \lim_{i \to \infty} q_i .$$

$\|.\|$ désignant la norme de la convergence uniforme, on a, pour tout $i \in N$,

$$\|\ell_{n+1} - q_i\| \leq \sum_{m=i+1}^{\infty} \|k_m\| \leq \sum_{m=i+1}^{\infty} j_{n+1}(x_m, y_m).$$

Si F_i est, pour tout indice $i \in N$, la réunion des intervalles contigus à A_n, inclus dans l'un des intervalles $[x_m, y_m]$ $(1 \leq m \leq i)$, on déduit alors de (94) que

$$\|\ell_{n+1} - q_i\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (v_k - u_k)^2,$$

$[u_k, v_k]$ $(k \in N)$ étant les intervalles contigus à $A_n \cup F_i$. Puisque la mesure de $A_n \cup F_i$ tend vers 1 lorsque $i \to +\infty$, on en déduit que $\|\ell_{n+1} - q_i\|$ tend vers zéro lorsque $i \to +\infty$. Ainsi ℓ_{n+1}, étant la limite uniforme d'une suite de fonctions déterminantes continues, est une fonction déterminante continue. De plus $\ell_{n+1}(0,1) = 1$ et l'on montre, comme nous l'avons fait pour $n = 1$, que

(95) $$\mu_{\ell_{n+1}} = \mu_{\ell_n} + \mu_{j_{n+1}} = \mu\left[. \cap \left(\bigcup_{m=1}^{n+1} A_m\right)\right].$$

Posons maintenant

(96) $$h = \lim_{n \to \infty} \ell_n .$$

Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$, soient $[x_k, y_k]$ $(1 \leq k \leq m)$ les intervalles contigus au support de μ, de longueur supérieure à ε. Il existe un indice n_o tel que, pour tout $n \geq n_o$ donné on ait, quel que soit $1 \leq k \leq m$,

(97) $$\mu([x_k', x_k] \cap A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2m}$$
$$\mu([y_k, y_k'] \cap A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2m},$$

x'_k désignant la borne supérieure des points de A_{n-1} inférieurs à x_k et y'_k la borne inférieure des points de A_{n-1} supérieurs à y_k. Pour tout indice $n \geq n_o$, on a

$$\|h - \ell_n\| \leq \|j_{n+1}\| \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} (v_k - u_k)^2,$$

où $[u_k , v_k]$ $(k \in N)$ désignent les intervalles contigus à A_n ne rencontrant pas les intervalles $[x_i , y_i]$ $(1 \leq i \leq m)$. On peut choisir n_o assez grand pour que la condition $n \geq n_o$ impose que tous les intervalles $[u_k , v_k]$ $(k \in N)$ soient de longueur inférieure à ε. Dans ces conditions, pour $n \geq n_o$, $\|h - h_n\| \leq 2\varepsilon$. Ainsi la fonction h, qui est la limite uniforme d'une suite de fonctions déterminantes continues, est une fonction déterminante continue.

Pour établir que $\mu_h = \mu$, il suffit de prouver que, pour tout compact K inclus dans $\bigcup_n A_n$, $\mu_h(K) = \mu(K)$. Or, il résulte du choix des A_n que, pour tout n, l'ensemble $K_n = K \cap A_n$ est un compact. En utilisant à nouveau le fait que toute mesure de Carathéodory est une mesure, nous sommes conduits à montrer que, pour tout $n \in N$,

(98) $$\mu_h(K_n) = \mu_{j_n}(K_n) = \mu(K_n).$$

On a naturellement $\mu_h(K_n) \geq \mu_{j_n}(K_n)$ et il suffit donc d'établir l'inégalité contraire.

Nous dirons qu'un intervalle $]u,v[$ est adapté à A_n s'il ne rencontre pas A_{n-1} et s'il ne chevauche aucun intervalle contigu à A_n (autrement dit, si tout intervalle ouvert contigu à A_n rencontrant $]u,v[$ est inclus dans $]u,v[$). Il résulte de la construction de h que, pour tout intervalle $]u,v[$ adapté à A_n,

(99) $$h(u,v) \leq j_n(u,v) + j_{n+1}(u,v).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K_n par des intervalles $]u_i , v_i[$ $(1 \leq i \leq m)$ adaptés à A_n, de longueur inférieure à ε, ne rencontrant pas les intervalles contigus à K_n de longueur supérieure à ε, tels que

$$\mu_h(K_n) \leq \sum_{i=1}^{m} h(u_i\ ,\ v_i) + \varepsilon$$

(100)

$$\mu_{j_n}(K_n) \geq \sum_{i=1}^{m} j_n(u_i\ ,\ v_i) - \varepsilon.$$

$[x_k\ ,\ y_k]$ $(k \in N)$ désignant les intervalles contigus à K_n, de longueur inférieure à ε, puisque $K_n \subset A_n$, il vient d'après (84)

$$\sum_{i=1}^{m} h(u_i\ ,\ v_i) \leq \sum_{i=1}^{m} j_n(u_i\ ,\ v_i) + \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$$

avec

$$\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2 \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k) \leq \varepsilon.$$

De (100) il résulte alors que

$$\mu_h(K_n) \leq \mu_{j_n}(K_n) + 3\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire nous avons établi (98), ce qui achève de prouver que $\mu_h = \mu$.

$\square$

Problème 2. Etant données deux mesures de Carathéodory diffuses μ , ν la mesure $\mu + \nu$ est-elle de Carathéodory ? Si de plus $\mu \leq \nu$, la mesure $\nu - \mu$ est-elle de Carathéodory ? (Les réponses sont peut-être élémentaires).

Problème 3. (μ_n) étant une suite de mesures de Carathéodory diffuses, la mesure $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ est-elle de Carathéodory ?

Problème 4. Une mesure $\mu \geq 0$, définie sur un espace topologique X, est dite borélienne si $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact K de X. Si $X = R$ les mesures boréliennes (≥ 0) sont des mesures σ-finies positives.

Etant donné un espace métrique X, les mesures de Carathéodory étant correctement définies, on peut se poser les questions suivantes.

a) Les mesures positives, diffuses, σ-finies sont-elles de Carathéodory ?

b) Les mesures positives, diffuses, boréliennes sont-elles de Carathéodory ?

Problème 5. Est-ce que tout borélien A de R possède la propriété suivante : pour toute mesure de Carathéodory μ, $\mu(. \cap A)$ est une mesure de Carathéodory ? Sinon caractériser les boréliens ayant cette propriété. (Les ouverts ont cette propriété).

IV. MESURES DE HAUSDORFF.

Soit une fonction continue $h : R_+ \to R_+$ telle que $h(0) = 0$. On dit que h est une fonction déterminante de Hausdorff si $(x,y) \to h(y-x)$ est une fonction déterminante de Carathéodory, c'est-à-dire si les conditions suivantes sont réalisées.

(i) h est monotone croissante.

(ii) Quels que soient les nombres $a \geq 0$, $b \geq 0$, $h(a+b) \leq h(a) + h(b)$.

En particulier toute fonction concave $h : R_+ \to R_+$, telle que $h(0) = 0$, est une fonction déterminante de Hausdorff.

Etant donnée une fonction déterminante de Hausdorff h, on appelle mesure de Hausdorff de fonction déterminante h, la mesure de Carathéodory de fonction déterminante $(x,y) \to h(y-x)$. Un cas particulier important est le suivant. Pour tout nombre $0 < \alpha \leq 1$, soit μ_α la mesure de Hausdorff de fonction déterminante $h(t) = t^\alpha$ $(t \in R_+)$. μ_α est appelée mesure de Hausdorff dans la dimension α.

Problème 6. Toute mesure de Carathéodory diffuse, invariante par translation, est-elle une mesure de Hausdorff ?

V. UNE CONDITION SUFFISANTE POUR QU'UNE FONCTION D'ENSEMBLES SOIT UNE MESURE.

La notion de mesure extérieure a permis de montrer que toute "mesure de Carathéodory" est une mesure, pour prouver que les "mesure de Besicovitch", qui seront introduites au prochain paragraphe, sont des mesures, nous utilisons un procédé tout autre, que nous décrivons ici.

Soient un espace topologique Ω, $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes et $\mathcal{B}$ l'ensemble des boréliens de Ω. Soit d'autre part μ une fonction d'ensembles définie sur $\mathcal{B}$, à valeurs dans $\overline{R}_+$, additive sur $\mathcal{K}$, telle que, pour tout borélien A de Ω,

$$(2) \qquad \mu(A) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset A}} \mu(K).$$

Nous nous demandons à quelles conditions supplémentaires on peut affirmer que μ est alors une mesure.

Un résultat classique exprime que, si μ est additive sur $\mathcal{B}$ et si $\mu(\Omega) < +\infty$, μ est une mesure. Cette propriété est en défaut si $\mu(\Omega) = +\infty$. Ainsi, si $\Omega = [0,1]$, soit $\mu : \mathcal{B} \to \overline{R}_+$, vérifiant (2), telle que, K étant un compact de $[0,1]$,

$$\mu(K) = 0 \quad \text{si} \quad K \quad \text{est fini}$$

$$\mu(K) = +\infty \quad \text{si} \quad K \quad \text{est infini.}$$

Il est évident que μ est additive sur $\mathcal{B}$ mais n'est pas σ-additive.

Notre but est, dans le cas où Ω est un fermé de R^n, de nous affranchir des deux hypothèses supplémentaires : μ est additive sur $\mathcal{B}$ et $\mu(\Omega) < +\infty$, en remplaçant chacune de ces conditions par une condition portant sur la restriction de μ à $\mathcal{K}$. Dans le lemme 19 nous maintenons l'hypothèse $\mu(\Omega) < +\infty$. Le lemme 20 correspond au cas où $\mu(\Omega) = +\infty$.

LEMME 19. Soient Ω un fermé de R^n, $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts et $\mathcal{B}$ l'ensemble des boréliens de Ω. Pour qu'une fonction d'ensembles $\mu : \mathcal{B} \to \overline{R}_+$, additive sur $\mathcal{K}$, vérifiant (2), telle que $\mu(\Omega) < +\infty$, soit une mesure, il suffit que, pour toute suite décroissante (K_m) dans $\mathcal{K}$,

(101) $$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(K_m).$$

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par les ensembles de la forme $\Omega \cap (I_1 \times I_2 \ldots \times I_n)$ où $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sont des intervalles quelconques de la droite réelle. Manifestement μ est additive sur $\mathcal{A}$ et vérifie

$$\mu(A) = \sup_{K\in\mathcal{K}\cap\mathcal{A}, K\subset A} \mu(K) \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Dans ces conditions on sait que μ est σ-additive sur $\mathcal{A}$. La restriction de μ à $\mathcal{A}$ admet donc un prolongement unique en une mesure ν sur $\mathcal{B}$, qui est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$. Or, étant donné un compact K de Ω, il existe une suite décroissante (K_m) dans $\mathcal{K}\cap\mathcal{A}$, dont l'intersection est K. Il vient alors

$$\nu(K) = \lim_{m\to\infty} \nu(K_m) = \lim_{m\to\infty} \mu(K_m) = \mu(K),$$

la dernière égalité résultant de l'hypothèse du lemme. La mesure ν étant nécessairement régulière et μ vérifiant (2), il en résulte que $\nu = \mu$.

$\square$

Si l'on supprime l'une des hypothèses : μ vérifie (101), $\mu(\Omega) < +\infty$, on ne peut même plus assurer que μ est additive sur $\mathcal{B}$. Voici à cet égard deux contre-exemples.

Soient $\Omega = [0,1]$, $\mu : \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, vérifiant (2), telle que, pour tout compact K

$$\mu(K) = 0 \quad \text{si} \quad 1 \notin \overset{\circ}{K}$$

$$\mu(K) = 1 \quad \text{si} \quad 1 \in \overset{\circ}{K}.$$

μ est additive sur $\mathcal{K}$, $\mu(\Omega) = 1$, mais manifestement μ ne vérifie pas (101). Si K est un compact admettant 1 comme point d'accumulation et non comme point intérieur, on a

$$\mu(K) = 0 \quad , \quad \mu(K^c) = 0$$

et $\mu(\Omega) = 1$, ce qui montre que μ n'est pas additive sur $\mathfrak{B}$.

Toujours sur $\Omega = [0,1]$, soit B un borélien qui n'est ni un K_γ ni un G_δ. Etant donné $K \in \mathcal{K}$, posons

$\mu(K) = 0$ si $K \cap B$ et $K \cap B^c$ sont des K_σ,

$\mu(K) = +\infty$ sinon.

μ désignant alors la seule fonction d'ensembles définie sur $\mathfrak{B}$, vérifiant (2) et satisfaisant aux conditions ci-dessus, on constate que μ vérifie (101), est additive sur $\mathcal{K}$, mais n'est cependant pas additive sur $\mathfrak{B}$ puisque $\mu(B) = 0$, $\mu(B^c) = 0$ et $\mu(\Omega) = +\infty$.

Dans le cas où $\mu(\Omega) = +\infty$, on est donc obligé d'imposer à μ une nouvelle condition, ce que nous allons faire en substituant à (2) la condition (47).

LEMME 20. Soient Ω un fermé de R^n, $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts et $\mathfrak{B}$ l'ensemble des boréliens de Ω. Pour qu'une fonction d'ensembles $\mu : \mathfrak{B} \to \overline{R}_+$, additive sur $\mathcal{K}$, vérifiant la "propriété des valeurs intermédiaires" :

(47) $$\mu(A) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset A,\, \mu(K) < +\infty}} \mu(K) \qquad (A \in \mathfrak{B}),$$

soit une mesure, il suffit que, pour toute suite décroissante (K_m) dans $\mathcal{K}$, telle que $\mu(K_m) < +\infty$ $(m \in N)$, on ait

(101) $$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m\right) = \lim_{m \to \infty} \mu(K_m).$$

Etant donnés A, B dans $\mathfrak{B}$, disjoints, pour tous compacts $K \subset A$, $L \subset B$ on a

$$\mu(K) + \mu(L) = \mu(K \cup L) \leq \mu(A \cup B).$$

En passant à la borne supérieure en K et en L, on a donc

$$\mu(A)+\mu(B)\leq\mu(A\cup B). \tag{102}$$

Soit alors (A_m) une suite dans $\mathfrak{B}$, formée d'ensembles deux à deux disjoints. Il résulte de (102) que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m)\leq\lim_{m\to\infty}\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m}A_k\Big)\leq\mu(A)\ , \tag{103}$$

A désignant la réunion des A_m $(m\in N)$. Il suffit donc d'établir l'inégalité contraire

$$\mu(A)\leq\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m). \tag{104}$$

Si le membre de droite de (104) est égal à $+\infty$, l'inégalité est bien vérifiée. Dans le cas contraire, soit un compact $K\subset A$ tel que $\mu(K)<+\infty$. Il résulte du lemme 19 que la restriction de μ aux boréliens inclus dans K est une mesure, si bien que

$$\mu(K)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu(K\cap A_m)\leq\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m). \tag{105}$$

μ vérifiant (47), la condition (105) implique (104).

$\square$

Problème 7. Le lemme 20 reste-t-il valable pour des espaces topologiques Ω plus généraux que les parties fermées de R^n ?

VI. MESURES DE BESICOVITCH.

Les mesures de Besicovitch, que nous définissons ici, ressemblent en plus d'un point aux mesures de Carathéodory, tout d'abord en ce qu'elles généralisent les mesures finies positives et qu'elles sont construites à partir de fonctions déterminantes. Cependant les deux concepts semblent se distinguer assez nettement.

Nous ne savons pas si ces mesures ont déjà été étudiées. Nous leur attribuons le nom prestigieux de Besicovitch, en hommage aux travaux importants que ce grand mathématicien a consacré à la théorie de la mesure.

A) DEFINITION. Soit h une fonction définie sur l'ensemble des couples (x,y) de nombres réels tels que $x \leq y$, à valeurs dans R_+. h est une fonction déterminante de Besicovitch si de plus, quels que soient $x \leq y \leq z$ dans R, on a

(i) $h(x,y) \leq h(x,z)$; $h(y,z) \leq h(x,z)$,

(ii) $h(x,z) \leq h(x,y) + h(y,z)$.

Etant donnée une fonction déterminante de Besicovitch h, soit ν_h^* (ou simplement ν^*) la fonction d'ensembles définie sur l'ensemble $\mathcal{K}$ des parties compactes de R par

$$(106) \qquad \nu_h^*(K) = \overline{\lim} \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k , y_k) \qquad (K \in \mathcal{K}),$$

où $[x_k , y_k]$ $(k \in N)$ est un recouvrement de K, constitué d'intervalles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, dont les extrémités appartiennent à K et tels que, quel que soit $k \in N$, $x_k = y_k$ où $[x_k, y_k] \cap K$ est non dénombrable, la limite supérieure étant prise lorsque

$$\sup_{k \in N} (y_k - x_k)$$

devient arbitrairement petit.

DEFINITION 2. Pour toute fonction h on appelle mesure de Besicovitch de fonction déterminante h l'application $\nu_k : \mathcal{B} \to \overline{R}_+$ (encore notée ν) définie par

$$(107) \qquad \nu_h(A) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset A,\, \nu_h^*(K) < +\infty}} \nu_h^*(K) \qquad (A \in \mathcal{B}).$$

THEOREME 4. Toute mesure de Besicovitch ν est une mesure possédant la "propriété des valeurs intermédiaires" :

$$(47) \qquad \nu(A) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset A,\, \nu(K) < +\infty}} \nu(K) \qquad (A \in \mathcal{B}).$$

Naturellement (47) est une simple traduction de (107). Il suffit donc de prouver que ν est une mesure. Or, d'après le lemme 20 cela revient à établir :

LEMME 21. ν <u>est additive sur</u> $\mathcal{K}$.

LEMME 22. <u>Si</u> (K_m) <u>est une suite décroissante de compacts tels que</u> $\nu(K_m) < +\infty$ $(m \in \mathbb{N})$, <u>on a</u>

(101) $$\nu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m\right) = \lim_{m\to\infty} \nu(K_m).$$

Soit K l'intersection de la suite (K_m). (Evidemment

(108) $$\nu(K) \leq \lim_{m\to\infty} \nu(K_m)$$

et il suffit donc d'établir l'inégalité contraire). $]x,y[$ étant un intervalle contigu à K, soit (I_n) une suite d'intervalles fermés constituant un recouvrement de $]x,y[$, dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que K_m ne rencontre pas I_n. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(109) $$\lim_{m\to\infty} \nu(K_m \cap I_n) = 0.$$

Puisque manifestement, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

(110) $$\nu(K_m \cap \,]x,y[) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(K_m \cap I_n)\,,$$

on déduit de l'additivité de ν sur $\mathcal{K}$ que

(111) $$\nu(K_m \cap \,]x,y[) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(K_m \cap I_n).$$

Puisque $\nu(K_m) < +\infty$, la série qui intervient dans (111) converge et l'on déduit de (109) que

(112) $$\lim_{m\to\infty} \nu(K_m \cap \,]x,y[) = 0.$$

Si $]x_k, y_k[$ $(k \in \mathbb{N})$ désignent les intervalles contigus à K, il résulte facilement de la définition de ν et de l'additivité de ν sur $\mathcal{K}$ que, pour tout $m \in N$,

(113) $$\nu(K_m) = \nu(K) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(K_m \cap]x_k, y_k[)$$

et l'on déduit alors de (112) que

(114) $$\nu(K) = \lim_{m\to\infty} \nu(K_m).$$

Problème 8. Est-ce que, pour toute mesure de Besicovitch ν_h, on a

(115) $$\nu_h(K) = \nu_h^*(K) \qquad (K \in \mathcal{K}) \ ?$$

Si ce résultat est vrai il est, relativement aux mesures de Besicovitch, l'équivalent du théorème 2.

B) MESURES DE BESICOVITCH DISCRETES. Nous nous contentons d'énoncer sans démonstration quelques résultats simples, qui rappellent naturellement ceux donnés au paragraphe I sur les mesures de Carathéodory.

PROPOSITION 8. Une C.N.S. pour qu'une mesure discrète $\nu \geq 0$ soit de Besicovitch est que la fonction $x \to \nu(\{x\})$ soit bornée sur tout compact.

PROPOSITION 9. Une condition suffisante pour qu'une mesure $\nu \geq 0$ soit de Besicovitch est que la partie discrète et la partie diffuse de ν soient des mesures de Besicovitch.

PROPOSITION 10. Une C.N.S. pour qu'une mesure de Besicovitch ν soit diffuse est qu'il existe une fonction déterminante h vérifiant $\nu = \nu_h$, telle que $h(x,x) = 0$, pour tout $x \in R$.

C) MESURES FINIES ET σ-FINIES. Les mesures de Besicovitch, au même titre que les mesures de Carathéodory, représentent une généralisation de la notion de mesure finie.

PROPOSITION 11. Toute mesure positive, finie μ est de Besicovitch et admet pour fonction déterminante

(116) $$h(x,y) = \mu([x,y]) \qquad (x \leq y).$$

Il existe des mesures σ-finies positives qui ne sont pas de Besicovitch ; c'est ainsi le cas de la mesure obtenue en plaçant la masse n en tout point $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Nous établirons cependant au chapitre V le résultat suivant, qui fait pendant au théorème 3.

THEOREME 5. Toute mesure positive, σ-finie, diffuse est de Besicovitch.

D) PROBLEME. Comme on vient de le voir, une grande similitude existe entre les mesures de Besicovitch et les mesures de Carathéodory. Cependant, lorsqu'on se limite aux mesures discrètes, les deux notions se distinguent. Compte tenu de l'éclairage nouveau que donnera sur ces mesures le chapitre V, on est tenté en revanche de conjecturer que pour toute fonction déterminante continue h, telle que $h(x,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$, on a $\mu_h = \nu_h$. Nous ne savons pas répondre aux questions suivantes.

Problème 9. La partie diffuse d'une mesure de Besicovitch (resp. de Carathéodory) est-elle de Besicovitch (resp. de Carathéodory) ?

Problème 10. Est-ce que pour toute fonction déterminante, continue h, telle que $h(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mu_h = \nu_h$?

<u>Problème 11</u>. Toute mesure de Hausdorff est-elle de Besicovitch ?

<u>Problème 12</u>. La somme de deux mesures de Besicovitch est-elle une mesure de Besicovitch ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BESICOVITCH, A. S. On the Kolmogoroff maximum and minimum measures. Math. Ann. 113 (1936), 416-423.

[2] BESICOVITCH, A. S. On the existence of subsets of finite measure of sets of infinite measure. Indag. Math., 14 (1952), 339-344.

[3] BRUNEAU, M. Mesures de Carathéodory et variation totale d'une fonction. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274 (19), 1801-1804.

[4] CARATHEODORY, C. Über das linear Mass von Punktmengen, eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1914, 404-426.

[5] CARATHEODORY, C. Vorlesungen über reelle Funktionen. Teubner, Leipzig, 1927.

[6] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. T. Linear operator I. Interscience, New York, 1957.

[7] FEDERER, H. Geometric measure theory. Springer Verlag, 153, 1969.

[8] HALMOS, P. Measure theory. Van Nostrand, New York, 1950.

[9] HAUSDORFF, F. Dimension und äusseres mass. Math. Ann., 79 (1918), 157-179.

[10] MEYER, P. A. Probabilités et potentiel. Act. Sc. et Ind., 1318, Hermann, Paris, 1966.

[11] NEVEU, J. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson, Paris, 1964.

[12] ROGERS, C. A. Hausdorff measures. Cambridge University Press, 1970.

[13] SAKS, S. Theory of the integral. Warsaw 1937.

[14] ZAANEN, A. C. An introduction to the theory of integration. North-Holland Publishing Cny, Amsterdam, 1958.