UNIVERSITÉ PARIS XI

U. E. R. MATHÉMATIQUE

91405 ORSAY FRANCE

N° 122

QUELQUES RESULTATS SUR LES CLASSES DE CONDITIONS DE FORCING ET LEURS EXTENSIONS GENERIQUES.

par

J.C. ARCHER

N° 122

QUELQUES RESULTATS SUR LES CLASSES DE CONDITIONS DE FORCING ET LEURS EXTENSIONS GENERIQUES.

par

J.C. ARCHER

Jean-Claude ARCHER

Quelques résultats sur les classes de conditions de forcing et leurs extensions génériques

Le présent travail rend compte de résultats obtenus en théorie du forcing de COHEN à partir de classes de conditions de forcing.

On étudie d'abord certaines classes de conditions de forcing (I,1) dont les extensions génériques ont les mêmes ensembles que le modèle initial, ce qui permet, en démontrant un lemme de vérité pour une relation de forcing simplifiée (I,4) de prouver simplement que les extensions génériques satisfont le schéma de remplacement.

Le problème plus général de définition du forcing pour une classe quelconque de conditions est abordé en II. Il est résolu dans le cas où la classe de conditions de forcing se plonge dans une algèbre de BOOLE complète pour les ensembles.

On traite en III des classes de conditions de forcing obtenues comme réunion d'ensembles de conditions de forcing emboîtés (III,2). Les produits d'ensembles de conditions de forcing (du type (2) par exemple) et les itérations transfinies d'extensions génériques (III, 15, 17) rentrent dans ce cadre.

On étudie en IV et V des classes de conditions de forcing emboîtées satisfaisant certaines conditions d'automorphismes formulées booléennement en (IV,2,3). De telles classes fournissent des extensions génériques qui satisfont le schéma de remplacement. Les classes de conditions de forcing qui sont produits d'ensembles de conditions de forcing homogènes (V,4) (du type (2) par exemple) satisfont ces conditions.

En introduisant la notion de classe faiblement générique (V,1) on étudie à ce propos la correspondance entre classes de conditions de forcing et algèbres de BOOLE complètes pour les ensembles.

On examine enfin (VI) à l'aide des résultats précédents, certains problèmes de forcing relatifs à l'axiome E de GODEL.

Je remercie très vivement, monsieur J.L. KRIVINE pour les nombreux conseils, idées et suggestions qu'il m'a donnés avec beaucoup de patience pendant l'élaboration, la correction et la rédaction de ce travail

0 - DEFINITIONS ET NOTATIONS

Les théories axiomatiques considérées sont écrites avec deux symboles de relation binaire , = , $\in$, et éventuellement d'autres symboles de relation à plusieurs arguments et des symboles de constantes. Si par exemple Γ est un symbole de relation à un argument, on désigne par ZF^{Γ} la théorie dont les axiomes sont ceux de ZERMELO-FRAENKEL (extensionalité, union, parties, infini, remplacement) où le schéma de remplacement est écrit pour les énoncés comportant le symbole Γ (en plus des symboles $\in$, = et des symboles logiques).

La notation $< M,G > \models ZF^{\Gamma}$ (ou par abus de langage $< M,G > \models ZF^{G}$) signifie que M est un modèle de la théorie ZF^{Γ} lorsqu'on interprète Γ par G .

M étant une structure quelconque (en pratique un modèle de ZF), on appelle classe de M toute collection définie par un énoncé à paramètres dans M . Ainsi, par exemple, si G est inclus dans M (au sens intuitif), on dira que C est une classe écrite avec G s'il existe un énoncé $E(x, \underline{G}, \underline{a}_1 ,\dots, \underline{a}_n)$ à une variable libre x écrite avec les symboles $\in$, = à deux arguments, $\underline{G}$ à un argument et les symboles de constante $\underline{a}_1 ,\dots, \underline{a}_n$ tel que C soit la collection des éléments a de M tels que

$$<M,G, a_1 ,\dots, a_n> \models E(\underline{a}, \underline{G}, \underline{a}_1 ,\dots, \underline{a}_n)$$

On notera

$$C = \{ a / < M,G > \models E(\underline{a}, \underline{G}, \underline{a}_1 ,\dots, \underline{a}_n) \}$$

ou encore, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre

$$C = \{ a/E(a, G, a_1 ,\dots, a_n) \}$$

on écrira $a \in C$ pour signifier que a est élément de la classe C.

Comme il est d'usage, on identifiera les symboles et leur interprétation (en principe lorsqu'aucune confusion n'est à craindre).

a étant un ensemble de M, on note $P^M(a)$ (ou simplement $P(a)$), l'ensemble des parties de a qui sont dans M. Pour chaque ordinal , on note V_α^M (ou simplement V_α) l'ensemble défini par induction sur les ordinaux par

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} P(V_\beta)$$

Pour chaque x de M, on note $rg(x)$ le rang de x c'est-à-dire le premier ordinal α tel que $x \in V_\alpha$. On note $\text{clôt}(x)$ le plus petit ensemble transitif X tel que $x \subset X$.

On note O_n la collection des ordinaux.

C étant une classe de M partiellement ordonnée, on dit que deux éléments p et q de C sont compatibles s'ils ont un minorant commun, c'est-à-dire s'il existe $r \in C$ $r \leq p$ et $r \leq q$. Sinon on dit qu'ils sont incompatibles.

On dit que C satisfait la condition de plongement si

$\forall p ; q \in C$ $p \leq q \Longrightarrow \exists r \leq p$ r incompatible avec q.

On appelle classe de conditions de forcing (respectivement ensemble de conditions de forcing), une classe (resp. un ensemble) qui satisfait la condition de plongement et qui possède un plus grand élément.

Soit Δ une partie de C qui peut être une classe ou un ensemble. On dit que Δ est saturé si $\forall p, q \in C$ ($p \in \Delta$ et $q \leq p \Longrightarrow q \in \Delta$)

dense si $\forall p \in C$ $\exists q \in \Delta$ $(q \leq p)$

prédense si $\forall p \in C$ $\exists q \in \Delta$ (q compatible avec p)

Dans toute la suite, U désigne un univers satisfaisant ZF + AF + AC et M désigne un ensemble transitif dénombrable de U qui satisfait ZF + AF .

G étant alors une partie de C qui est un ensemble de $\mathcal{M}$, on dit que G est M-générique sur C si

1. $\forall p, q \in G$ (p et q sont compatibles)
2. $\forall p \in G, \forall q \geq p$ $(q \in G)$
3. G rencontre toutes les classes denses de C qui sont dans M .

Le fait que M soit dénombrable entraîne que pour chaque $p \in C$, il existe un M-générique sur C qui contient p .

Les notations concernant le forcing sont celles de [1] . En particulier $\Vdash_C$ désignera le forcing fort sur C et $\vdash_C$ le forcing faible. On omettra le symbole C si aucune confusion n'est à craindre.

On écrira $p \Vdash E(\bar{a}_n, \dots, \bar{a}_n, b_1, \dots, b_p)$ où E est un énoncé écrit avec $\in$, = à paramètres $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p$ pour dire que les interprétations de $b_1, \dots, b_p$ dans toute extension générique contenant p sont encore $b_1, \dots, b_p$. Ainsi si $p \Vdash \bar{a} \subset \omega$, pour tout générique G contenant p , on aura

$$M[G] \models \mathcal{C}a \subset \omega \quad \text{(où } \mathcal{C}a \text{ dénote l'interprétation de } a)$$

Les symboles logiques utilisés pour les formules sont

$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$
et	ou	non	pour tout	il existe

Les opérations booléennes seront représentées par les symboles $\wedge, \vee, {}^c$. Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments d'une algèbre de BOOLE complète, on notera indifféremment

$$\inf_{i \in I} a_i \quad \text{ou} \quad \inf(\{a_i / i \in I\})$$

pour dénoter la borne inférieure de la famille $(a_i)_{i \in I}$ pour l'ordre $\leq$ défini par

$$a \leq b \iff \exists C \quad a = b \wedge C$$

Si f est une fonction, on note $\mathrm{dom}(f)$ son domaine et $\mathrm{Im}(f)$ son image. Si $X \subseteq \mathrm{dom}(f)$, on note $f \upharpoonright X$ la restriction de f à X .

I - FORCING SIMPLIFIE

On se propose d'étudier les classes ordonnées C telles que si G est M-générique sur C, on ait

$$< M,G > \models ZF^G$$

Théorème I.1.

Soit C une classe ordonnée de M. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\forall G$ M-générique sur C, $< M,G > = ZF^G + AF$

2) Pour tout ensemble I et pour toute famille $(\Delta_i)_{i \in I}$ de classes denses saturées, $\bigcap_{i \in I} \Delta_i$ est une classe dense saturée.

Remarque I.2.

La condition (2) est d'une écriture impropre puisqu'on quantifie sur des classes. C'est en fait le schéma d'axiomes suivant

$\forall I\ [\forall i \in I(\{p/\Delta(i,p)\}$ est dense saturé$) \Longrightarrow \{p/\forall i \in I\ \Delta(i,p)\}$ est dense saturé$]$

Δ parcourant la collection des énoncés écrits avec $\in$, $=$, à deux variables libres et à paramètres dans M.

La preuve de ce théorème nécessite la définition d'une relation de forcing.

Lemme I.3.

Soit r un symbole de prédicat unaire. A chaque énoncé $A(r, x_1, \ldots, x_k)$ écrit avec les symboles $\in$, $=$, r et ayant les variables libres $x_1, \ldots, x_k$, on associe un énoncé $A'(p,x_1, \ldots, x_k)$ écrit avec les seuls symboles $\in$, $=$ et ayant les variables libres $p,x_1, \ldots, x_k$. On le note $p \Vdash A(r, x_1, \ldots, x_k)$ (forcing fort).

La définition se fait par induction (au sens intuitif) sur la longueur de l'énoncé $A(\Gamma, x_1, \dots, x_k)$

$p \Vdash x = y$ est l'énoncé $x = y$ et $p \in C$
$p \Vdash x \in y$ est l'énoncé $x \in y$ et $p \in C$
$p \Vdash \Gamma(x)$ est l'énoncé $x \in C$ et $p \in C$ et $p \leq x$
$p \Vdash A$ ou B est l'énoncé $p \Vdash A$ ou $p \Vdash B$ et $p \in C$
$p \Vdash \exists x A(x)$ est l'énoncé $\exists x\ p \Vdash A(x)$ et $p \in C$
$p \Vdash$ non A est l'énoncé $p \in C$ et $\forall q \in C (q \leq p \Rightarrow \text{non}(q \Vdash A))$

On note $p \not\Vdash A$ pour non($p \Vdash A$) et $p \overset{?}{\Vdash} A$ pour $p \Vdash A$ ou $p \Vdash$ non A . (On lit $p \overset{?}{\Vdash} A$ "p décide A") . On vérifie alors sur la définition que $p \Vdash A$ et $q \leq p$ entraîne $q \Vdash A$ et que la classe des p qui décident A est dense saturée.

<u>Lemme I.4. (Lemme de vérité)</u>

Soit G une partie de C M-générique sur C . Pour que l'énoncé $A(\Gamma, a_1, \dots, a_k)$ soit satisfait dans $\langle M,G \rangle$ lorsqu'on interprète par G , il faut et il suffit qu'il existe $p \in G$ tel que $p \Vdash A(\Gamma, a_1, \dots, ak)$.

<u>Démonstration</u> : Par induction (au sens intuitif) sur la longueur de l'énoncé A .

C'est évident si l'énoncé est de la forme $a_1 = a_2$ ou $a_1 \in a_2$.

Si A est l'énoncé $\Gamma(a)$, il est vrai dans $\langle M,G \rangle$ si l'on a $a \in G$.

Mais $a \Vdash \Gamma(a)$ est toujours vrai pour $a \in C$. Inversement si on a $p \in G$ et $p \Vdash \Gamma(a)$, cela signifie que $p \leq a$. Par la propriété 2 des génériques, on a donc $a \in G$ c'est-à-dire que $\langle M,G \rangle \models \Gamma(a)$.

Si A s'écrit B ou C et si $\langle M,G \rangle \models A$, alors $\langle M,G \rangle \models B$ ou bien $\langle M,G \rangle \models C$ c'est-à-dire (hypothèse d'induction) $\exists p \in G\ p \Vdash B$ ou bien $\exists q \in G\ q \Vdash C$. Mais l'on sait que p et q étant deux éléments du générique, il existe $r \in G$ $r \leq p$ et $r \leq q$. On a alors $r \Vdash B$ ou $r \Vdash C$

c'est-à-dire $r \Vdash B$ ou C . Inversement si on a $p \in G$ $p \Vdash B$ ou C , on a $p \Vdash B$ ou $p \Vdash C$. Soit (hypothèse d'induction) $\langle M,G \rangle \models B$ ou $\langle M,G \rangle \models C$ c'est-à-dire $\langle M,G \rangle \models B$ ou C .

Si A s'écrit $\exists x\, B(x)$ et si $\langle M,G \rangle \models A$, il existe un objet a de M tel que $\langle M,G \rangle \models B(a)$. Donc (hypothèse d'induction), $\exists p \in G$ $p \Vdash B(a)$ donc $p \Vdash \exists x\, B(x)$. Inversement si on a $p \in G$ $p \Vdash \exists x\, B(x)$, on a un objet a de M tel que $p \Vdash B(a)$. Donc (hypothèse d'induction), on a $\langle M,G \rangle \models B(a)$ soit $\langle M,G \rangle \models \exists x\, B(x)$.

Si A s'écrit non B et si $\langle M,G \rangle \models B$, on a (hypothèse d'induction) un $p \in G$ $p \Vdash B$. L'énoncé $\exists p \in G$ $p \Vdash$ non B est donc faux. Inversement si l'énoncé $\exists q \in G$ $q \Vdash$ non B est faux, comme la classe des p qui décident B est dense, on sait qu'il existe $p \in G$ qui rencontre cette classe. Par hypothèse $p \nVdash$ non B . Donc $p \Vdash B$ c'est-à-dire (hypothèse d'induction) $\langle M,G \rangle \models B$. C.Q.F.D. (lemme I.4)

<u>Preuve du théorème</u> I.1.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit G une partie de C M-générique sur C . Comme M et $\langle M,G \rangle$ ont les mêmes ensembles, il suffit de prouver le schéma de remplacement pour les énoncés écrits avec Γ .

Soit donc $E(x,y)$ un énoncé à deux variables libres à paramètres dans M écrit avec le symbole Γ . Soit a un élément de M . On suppose que

$$\langle M,G \rangle \models \forall x \forall y \forall y' [E(x,y) \wedge E(x,y') \Longrightarrow y = y'] \wedge \forall x \in a\, \exists y E(x,y)$$

On veut trouver b dans M qui soit l'image de a par la relation fonctionnelle E .

Pour chaque $x \in a$, on pose $\Delta_x = \{ p \in C / p \Vdash^{?} \exists y\, E(x,y) \}$. Cette classe est dense saturée. En appliquant (2), $\bigcap_{x \in a} \Delta_x$ est encore dense saturée. On choisit donc $p_1 \in G \cap \bigcap_{x \in a} \Delta_x$

p_1 décide $\exists y\, E(x,y)$ pour chaque $x \in a$. Comme ces énoncés sont vrais dans $\langle M,G \rangle$, on a $p_1 \Vdash \exists y E(x,y)$ pour chaque $x \in a$.

Or si $y \neq y'$, on ne peut avoir $p_1 \Vdash E(x,y)$ et $p_1 \Vdash E(x,y')$ car, en appliquant le lemme de vérité, on aurait

$$\langle M,G\rangle \models E(x,y) \text{ et } E(x,y')$$

donc

$$\langle M,G\rangle \models y = y' \text{ puisque } E \text{ est fonctionnelle .}$$

La relation $p_1 \Vdash E(x,y)$ est donc fonctionnelle dans M . Par schéma de remplacement dans M ,

$$b = \{ y / \exists x \in a \ \ p_1 \Vdash E(x,y) \}$$

est donc un ensemble de M .

Montrons que b convient.

Soit $x \in a$ et $\langle M,G\rangle \models E(x,y)$. On sait qu'il existe y' tel que $p_1 \Vdash E(x,y')$ par définition de p_1. Comme $p \in G$, on a par le lemme de vérité

$$\langle M,G\rangle \models E(x,y')$$

Comme $\langle M,G\rangle \models$ " E est fonctionnelle " , on a

$$y = y' \text{ donc } p_1 \Vdash E(x,y) \text{ donc } y \in b$$

Inversement si $y \in b$, on a $p_1 \Vdash E(x,y)$ pour un $x \in a$.

Comme $p \in G$, on a par le lemme de vérité

$$\langle M,G\rangle \models E(x,y) \text{ et par conséquent}$$

$$\langle M,G\rangle \models \exists x \in a E(x,y)$$

C.Q.F.D.(théorème I.1)

(2) $\Longrightarrow$(1)

(1)$\Longrightarrow$(2)

Soient I et $(\Delta_i)_{i \in I}$ un ensemble et une famille de classes denses saturées de C . On veut prouver que $\bigcap_{i \in I} \Delta_i$ est encore dense saturée.

Soit $p \in C$. Soit G une partie de C M-générique sur C contenant p . Dans $\langle M,G\rangle$, on considère la relation fonctionnelle qui à chaque $i \in I$ associe l'ensemble des éléments de $G \cap \Delta_i$ de rang minimum.

Puisque par hypothèse $\langle M,G\rangle \models ZF^G$, on en déduit qu'il existe un ensemble a contenu dans G tel que

$$\forall_{i\in I} \quad \Delta_i \cap a \neq \emptyset$$

Mais puisque M et $\langle M,G\rangle$ ont les mêmes ensembles, on a $a \in M$. On en déduit qu'il existe $q \in G$ tel que

$$\forall p \in a \qquad q \leq p$$

En effet soit :

$D = \{p \in C / p\}$ minore tous les éléments de $a\} \cup \{p \in C / p$ incompatible avec tous les éléments de a } .

Comme $a \in M$, cette classe D est donc saturée et c'est une classe de M . Elle rencontre donc le générique G . Soit $q \in D \cap G$. Par la propriété 1 des génériques, q ne peut être incompatible avec un élément de a puisque $a \subset G$. Donc par définition de D , q minore tous les éléments de a . q est compatible avec p . On en déduit donc r , $r \leq p$ et $r \leq q$ qui minore tous les éléments de a.

Comme $\forall i \in I \quad a \cap \Delta_i \neq \emptyset$ et comme Δ_i est saturée, on en déduit que $r \in \bigcap_{i \in I} \Delta_i$

C.Q.F.D. (théorème I.1)
(1) $\Longrightarrow$ (2)

<u>Exemples</u>

<u>A. Soit C une classe ordonnée partiellement par $\leq$ qui vérifie</u>

(3) Tout ensemble de C totalement ordonné par $\leq$ est minoré dans C

<u>Proposition I.5.</u>

Si M satisfait A.C. alors la condition (3) implique la condition (2) du théorème I.1

<u>Démonstration</u>

Soit $(\Delta_i)_{i \in I}$ une famille de classes denses saturées de C .

On veut prouver que $\bigcap_{i \in I} \Delta_i$ est également dense saturée. Grâce à A.C. il suffit de prouver le théorème lorsque I est un ordinal.

$(\Delta_\alpha)_{\alpha < \mu}$ étant donné avec $\mu \in O_n$, soit λ le premier ordinal tel que le théorème soit faux. λ est bien sûr limite. En changeant au besoin $(\Delta_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ en $(\Delta'_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ définie par $\Delta'_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} \Delta_\alpha$, on peut supposer la famille $(\Delta_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ décroissante.

On veut montrer que $\bigcap_{\alpha < \lambda} \Delta_\alpha$ est dense saturée ce qui contredira la définition de λ.

Soit donc $p \in C$. On définit $X_{q,\alpha}$ pour chaque $q \in C$ et chaque $\alpha < \lambda$ par

$X_{q,\alpha}$ = l'ensemble des $r \in C$ de rang minimum tels que $r \leqslant q$ et $r \in \Delta_\alpha$. On définit alors par induction sur les ordinaux $\leqslant \lambda$ une famille $(Y_\alpha)_{\alpha \leqslant \lambda}$ par

$$Y_o = X_{p,o}$$

$$Y_{\alpha+1} = \bigcup_{q \in Y_\alpha} X_{q,\alpha+1}$$

Si α est limite > 0 soit $Y'_\alpha = \{ f \in \prod_{\beta < \alpha} Y_\beta / f \text{ est une chaîne} \}$

On définit alors

$Y_\alpha = \bigcup_{f \in Y'_\alpha} \{q \in \Delta_\alpha$ de rang minimum tels que q minore la chaîne $f.\}$

On prouve alors que $\forall_\alpha \leqslant \lambda \quad Y_\alpha \neq \emptyset$

Sinon soit α_o le premier ordinal tel que $Y_{\alpha_o} = \emptyset$. α_o est limite.

Par A.C. il existe un bon ordre de

$$\bigcup_{\beta < \alpha} \left(\prod_{\gamma < \beta} Y_\gamma \right)$$

On construit donc par induction sur les ordinaux $< \alpha_o$ une famille

$(f_\beta)_{\beta < \alpha_o}$ telle que

i) $f_\beta \in \prod_{\gamma < \beta} Y_\gamma$

ii) f_β prolonge f_γ si $\beta \geqslant \gamma$

iii) $\forall\ \delta \leqslant \gamma < \beta\ f_\beta(\delta) \geqslant f_\beta(\gamma)$

La réunion des $(f_\beta)_{\beta < \alpha_o}$ est alors un élément de Y'_{α_o} qui est donc non vide . Puisque Δ_{α_o} est dense saturée, Y_{α_o} est donc également non vide - contradiction -

Y_λ est donc non vide. Soit $q \in Y_\lambda$. Par construction, on a $q \leqslant p$ et $q \in \bigcap_{\alpha < \lambda} \Delta_\alpha$. C.Q.F.D.

La preuve ci-dessus est compliquée parce que l'on veut utiliser seulement l'axiome du choix pour les ensembles.

La démonstration se simplifie beaucoup si l'on suppose qu'il existe dans M une classe Φ qui ordonne bien M .

En effet étant donné $p \in C$, on définit $(p_\alpha)_{\alpha \leqslant \lambda}$ par induction sur les ordinaux $\leqslant \lambda$.

p_o est le premier élément de Δ_o selon Φ qui minore p . Si $\alpha = \beta + 1$, p_α est le premier élément de Δ_α selon Φ qui minore le premier minorant selon Φ de la chaîne $(p_\beta)_{\beta < \alpha}$.

p_λ est donc par construction un minorant de q qui appartient à $\bigcap_{\alpha < \lambda} \Delta_\alpha$

Grâce au théorème I.1 et à la proposition I.5, on peut toujours supposer dans une démonstration de ZF + AC que l'on a un bon ordre de l'univers.

Plus précisément, on a le théorème suivant dû à SOLOVAY .

Théorème I.6

Soit Φ un énoncé du langage de ZF démontrable dans la théorie GB + "Il existe un bon ordre de l'univers" + AF (où GB désigne la théorie de GODEL-BERNAYS). Alors Φ est démontrable dans ZF + AF + AC.

Démonstration

Supposons que Φ ne soit pas démontrable dans ZF + AF + AC. Il existe donc un modèle M (que l'on peut supposer transitif démontrable) de ZF + AF + AC qui ne satisfait pas Φ .

Soit alors C la classe des fonctions définies sur un ordinal à valeurs dans M . L'ordre sur C étant défini par $p \leqslant q \iff p \supset q$ en tant que graphe.

C satisfait évidemment la condition (3) .

D'après la proposition I.5, C satisfait donc (2) puisque M satisfait l'axiome du choix. D'après le théorème I.1, si G est M-générique sur C, $\langle M,G\rangle \models ZF^G$ + AF + AC . Mais G est clairement une surjection de O_n sur M .

On a $\langle M,G\rangle \models \neg \Phi$ puisque $M \models \neg \Phi$ Φ étant un énoncé du langage de ZF.

D'autre part on a $\langle M,G\rangle \models \Phi$ par hypothèse puisque $\langle M,G\rangle \models$ GB + "Il existe un bon ordre de l'univers" lorsqu'on prend pour classes toutes celles définies par un énoncé écrit avec ϵ, $=$, G à paramètres dans M.

D'où la contradiction. C.Q.F.D.

B. Exemples de classes ordonnées qui satisfont (2)

Théorème I.7.

Soient d un ensemble de conditions de forcing dans M et C une classe de conditions de forcing dans M satisfaisant (3). Alors quels que soient e M-générique sur d et G M-générique sur C , $e \times G$ est M-générique sur $d \times C$ et $\langle M[e],G\rangle \models ZF^G$ + AF

La démonstration (qui utilise A.C.) résulte du lemme suivant :

Lemme I.8.

> Soit $(D_i)_{i<\mu}$ une famille de classes denses saturées dans $d \times C$ indexée par un ordinal μ . Alors la classe Δ définie par
>
> $\Delta = \{ f \in C / \forall p \in d \ \forall_i < \mu \ \exists q \leqslant p \ \ (q,f) \in D_i \}$ est une classe dense saturée de C .

Démonstration

Soit $\lambda = \overline{\overline{d \times \mu}}$ le cardinal de l'ensemble $d \times \mu$. Soit σ une bijection de λ sur $d \times \mu$. Pour $\alpha < \lambda$, on pose $\sigma(\alpha) = (\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha))$ de sorte que $\sigma_1(\alpha) \in d$ et $\sigma_2(\alpha) < \mu$. On définit par induction sur les ordinaux $< \lambda$ deux familles $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ et $(q_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de la manière suivante :

$f \in C$ étant donné, on veut trouver $g \leqslant f$ $g \in \Delta$. On choisit $f_o \leqslant f$ $q_o \leqslant \sigma_1(o)$ tels que $(q_o , f_o) \in D_{\sigma_2(o)}$. Un tel couple existe car $D_{\sigma_2(o)}$ étant dense possède un minorant de $(\sigma_1(o),f)$

On choisit de même $f_{\alpha+1} \leqslant f_\alpha$ $q_{\alpha+1} \leqslant \sigma_1(\alpha+1)$ et $(q_{\alpha+1} , f_{\alpha+1}) \in D_{\sigma_2(\alpha+1)}$. Un tel couple existe pour la même raison.

Si α est limite ($> o$) , d'après l'hypothèse (3) faite sur C on prend f' qui minore chaque f_β pour $\beta < \alpha$. On choisit alors $f_\alpha \leqslant f'$ et $q_\alpha \leqslant \sigma_1(\alpha)$ tel que $(q_\alpha , f_\alpha) \in D_{\sigma_2(\alpha)}$ qui existe car $D_{\sigma_2(\alpha)}$ est dense.

Soit alors g un minorant de $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ qui existe par (3). On a $g \in \Delta$. En effet soit $p \in d$ et $i < \mu$. Il existe $\alpha < \lambda$ tel que $\sigma_1(\alpha) = p$ et $\sigma_2(\alpha) = i$. On a $q_\alpha \leqslant p$ et $(q_\alpha , f_\alpha) \in D_i$ par construction. Comme $g < f_\alpha$ on déduit $(q_\alpha , g) \in D_i$.   C.Q.F.D. (lemme I.9.)

... /

Remarque I.9

La démonstration utilise un bon ordre de l'univers. Mais comme ce lemme est un schéma de théorèmes de ZF + AC , d'après le théorème I.6, ce schéma est démontrable dans ZF + AC .

Démonstration du théorème I.7

Il faut d'abord prouver que si e est M-générique sur d et G M-générique sur C , alors $e \times G$ est M-générique sur $d \times C$.

Il est clair que les éléments de $e \times G$ sont deux à deux compatibles et que tout majorant d'un élément de $e \times G$ est encore dans $e \times G$.

Soit alors D une partie dense saturée de $d \times C$. Par le lemme I.8 , on sait que

$\Delta = \{f \in C / \forall p \in d \ \exists q \leqslant p \ \ (q,f) \in D\}$ est dense saturée.

Soit donc $h \in G \cap \Delta$. On a $\forall p \in d \ \ \exists q \leqslant p \ \ (q,h) \in D$

L'ensemble des $q \in d$ tels que $(q,h) \in D$ est donc dense dans C . Il existe donc $q \in e$ tel que $(q,h) \in D$. On a donc bien $D \cap e \times G \neq \emptyset$

Pour démontrer que $< M[e],G > = ZF^G + AF$, il suffit de vérifier que $M[e],G>$ satisfait les axiomes du schéma de remplacement écrits avec G car $M[e]$ satisfait ZF + AF puisqu'il s'agit d'un forcing ensembliste usuel.

Il suffit donc de prouver que C satisfait (2) dans $M[e]$. Soit $(\Delta_i)_{i < \alpha}$ une famille de classes (de $M[e]$) denses saturées dans C . Soit $p_o \in e$ tel que

$$p_o \Vdash_d \text{"}\forall i < \alpha \ \ \Delta_i \text{ est dense saturée"}$$

On pose

$D_i = \{(p,f)/p \leqslant p_o$ et $p \Vdash_d f \in \Delta_i\} \cup \{(p,f)/p$ incompatible avec $p_o\}$

D_i est saturée car si $q \leqslant p$ et $g \leqslant f$ avec $(p,f) \in D_i$, alors ou bien p est incompatible avec p_o et $(q,g) \in D_i$, ou bien $q \leqslant p_o$ et $q \Vdash_d g \leqslant f$ et $f \in \Delta_i$, donc, comme le forcing faible respecte la conséquence logique

... /

et comme on a $q \| \!\vdash_{\overline{d}}\, g \leqslant f$ et $f \in \Delta_i \rightarrow g \in \Delta_i$, on déduit $(q,g) \in D_i$.

D_i est dense car soit $(p,f) \in d \times C$ avec $p \leqslant p_o$. On veut trouver un minorant de (p,f) dans D_i (si p est incompatible avec p_o , on a $(p_o, f) \in D_i$). Or $p_o \| \!\vdash_{\overline{d}}$ " Δ_i est dense ". Donc par forcing faible

$\forall p \leqslant p_o \ \exists q \leqslant p \ \exists g \leqslant f \ \ q \| \!\vdash_{\overline{d}}\, g \in \Delta_i$. Par conséquent, étant donné $p \leqslant p_o$, il existe bien $q \leqslant p$ tel que $(q,g) \in D_i$.

En appliquant alors le lemme I.8, on sait que

$\Delta = \{ f \in C / \forall i < \alpha \ \forall p \in d \ \ \exists q \leqslant p \quad (q,f) \in D_i \}$ est dense saturée.

On considère alors

$\bar{\Delta} = \{ f \in C / \forall i < \alpha \quad \exists q \in e \quad (q,f) \in D_i \}$. Cette classe $\bar{\Delta}$ est définie dans $M[e]$. Elle est dense saturée, En effet soit $f \in C$. Puisque Δ est saturée, il existe $g \leqslant f$ tel que $\forall i < \alpha \ \ \forall p \in d \ \ \exists q \leqslant p \quad (q,g) \in D_i$. Donc pour i fixé l'ensemble des $q \in d$ tels que $(q,f) \in D_i$ est dense saturé dans d , donc rencontre e. On a bien alors

$$\forall i < \alpha \ \ \exists q \in e \quad (q,g) \in D_i$$

On remarque enfin que $\bar{\Delta} = \bigcap_{i < \alpha} \Delta_i$

Car soit $i < \alpha$. On a $M[e] \models f \in \Delta_i \iff \exists q \in e \ \ q \| \!\vdash_{\overline{d}}\, f \in \Delta_i$ d'après le lemme de vérité pour d.

C satisfait donc (2) dans $M[e]$. C.Q.F.D. (théorème I.8)

Il est alors facile de trouver un modèle N de ZF + AF et une classe ordonnée C de N satisfaisant (2) et ne vérifiant pas (3).

On prend par exemple dans M la classe C des fonctions dont le domaine est un ordinal (l'ordre étant le prolongement des fonctions). Soit d l'ensemble des fonctions définies sur un entier à valeurs dans $\{0,1\}$ et soit e un M-générique sur d (e est une fonction de domaine ω à valeurs dans $\{0,1\}$).

C satisfait (3) dans M, donc, d'après le théorème I.7 C satisfait (2) dans $M[e]$.

... /

Cependant C ne satisfait pas (3) dans $M[e]$ puisque la famille $(e \wedge n)_{n < \omega}$ composé d'éléments deux à deux comparables n'est pas minoré dans C .

II - DEFINITION DU FORCING FAIBLE DANS LE CAS OU LA CLASSE DE CONDITIONS DE FORCING SE PLONGE DE FAÇON DENSE DANS UNE ALGEBRE DE BOOLE COMPLETE POUR LES ENSEMBLES.

Définition II.1

Soient C une classe de conditions de forcing de M et $\mathbb{C}$ une algèbre de BOOLE M-complète pour les ensembles qui est une classe de M.

On dit que C se plonge de façon dense dans $\mathbb{C}$ s'il existe une fonction h (qui est une classe de M) de C dans $\mathbb{C}-\{\mathbb{0}\}$ vérifiant :

1. h est croissante
2. $\forall p,q \in C \quad p$ incompatible avec $q \Rightarrow h(p) \wedge h(q) = \mathbb{0}$
3. $\forall c \in \mathbb{C} - \{\mathbb{0}\} \quad \exists p \in C \quad h(p) \leqslant c$

On donne alors une caractérisation des classes de conditions de forcing C qui se plongent de façon dense dans une algèbre de BOOLE complète pour les ensembles.

On définit pour cela une classe $\mathcal{F}$ de M obtenue à partir de C en clôturant C par conjonction infinie et négation.

Plus précisément on définit par induction sur les ordinaux une famille $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ de la manière suivante :

$\neg$ et $\mathcal{M}$ étant deux symboles distincts et distincts de 0, on pose

$$\mathcal{F}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta \cup \{(\neg,F)/F \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta\} \cup \{(\mathcal{M},\Phi)/\Phi \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta\} \cup \{(o,p)/p \in C \cap V_\alpha\}$$

On pose $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in O_n} \mathcal{F}_\alpha$. Il est clair que $\{o\} \times C \subseteq \mathcal{F}$, que $F \in \mathcal{F} \Rightarrow (\neg,F) \in \mathcal{F}$ et que si Φ est un ensemble d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $(\mathcal{M},\Phi) \in \mathcal{F}$.

On définit la profondeur d'une formule $F \in \mathcal{F}$ comme le premier ordinal α tel que $F \in \mathcal{F}_\alpha$.

Dans U , C est un ensemble. On peut donc définir par induction sur la profondeur de $F \in \mathcal{F}$ une relation notée $p \rhd F$ à deux arguments $p \in C$ et $F \in \mathcal{F}$.

Les clauses d'induction sont :

$$p \rhd (o,q) \iff p \leqslant q$$

$$p \rhd (\neg,F) \iff \forall q \leqslant p \quad q \not\rhd F$$

$$p \rhd (\mathcal{M},\Phi) \iff \forall F \in \Phi \quad p \rhd F$$

On vérifie aisément que $p \rhd F$ et $q \leqslant p \Longrightarrow q \rhd F$, que l'ensemble (dans U) des p tels que $p \rhd F$ ou $p \rhd (\neg,F)$ est dense saturé, que $p \rhd (\neg,(\neg,F)) \iff p \rhd F$ et que $p \rhd F_1$ et $p \rhd F_1 \rightarrow F_2 \Rightarrow p \rhd F_2$ (où le symbole $\rightarrow$ est défini de manière usuelle à partir de $\neg$ et $\mathcal{M}$).

<u>Théorème II.2</u>

Soit C une classe de conditions de forcing de M . Les deux conditions suivantes sont équivalentes

1. La relation $\rhd$ est une classe de M .

2. C se plonge de façon dense dans une algèbre de BOOLE complète pour les ensembles, le plongement étant une classe de M .

<u>Démonstration</u>

$1 \Longrightarrow 2$. On définit la relation de préordre suivant sur $\mathcal{F}$.

$$F_1 \leqslant F_2 \iff \forall p \in C \quad p \rhd F_1 \Longrightarrow p \rhd F_2$$

Sur $\mathcal{F}$, on considère alors la relation d'équivalence

$$F_1 \equiv F_2 \iff F_1 \leqslant F_2 \text{ et } F_2 \leqslant F_1$$

On pose $[F]$ = l'ensemble des éléments F' de $\mathcal{F}$ de rang minimum tels que $F' \equiv F$

Soit $\mathbb{C} = \{[F] / F \in \mathcal{F}\}$. $\mathbb{C}$ est une classe de M . $\mathbb{C}$ peut être munie

... /

d'une structure d'algèbre de BOOLE complète en posant

$$\mathbb{1} = [(0, \mathbb{1}_c)] \qquad (\mathbb{1}_c \text{ est le plus grand élément de } C)$$

$$[F] \wedge [G] = [(\mathcal{M}, \{F,G\})]$$

$$[F]^c = [(\neg, F)]$$

On vérifie que ces définitions sont indépendantes des représentants choisis et que les axiomes des algèbres de BOOLE sont satisfaits, en utilisant les propriétés de $\rhd$.

Montrons que $\mathbb{C}$ est M-complète pour les ensembles. Soit ψ un ensemble d'éléments de $\mathbb{C}$. On peut trouver un ensemble Φ d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que

$$\psi = \{[F] \ / F \in \Phi\}$$

Alors $[(\mathcal{M}, \Phi)]$ est la borne inférieure de ψ . En effet

$$\forall p \in C \quad p \rhd (\mathcal{M}, \Phi) \iff \forall F \in \Phi \quad p \rhd F$$

On a donc

$$[(\mathcal{M}, \Phi)] \leqslant [F]$$

Inversement soit $G \in \mathcal{F}$ tel que $\forall F \in \Phi \quad [G] \leqslant [F]$

On a donc

$$\forall p \in C \quad p \rhd G \Rightarrow p \rhd F$$

donc $G \leqslant (\mathcal{M}, \Phi)$

En passant au quotient $[G] \leqslant [(\mathcal{M}, \Phi)]$

ψ admet donc une borne inférieure.

On définit alors $h : C \to \mathbb{C} - \{0\}$ par

$$h(p) = [(0,p)]$$

h est une fonction croissante.

En effet par définition de $\rhd$, on a

$$p \rhd (o,q) \iff p \leqslant q$$

Soient alors

$$p \text{ et } q \in C \quad p \leqslant q$$

... /

$\forall r \in C \quad r \rhd (o,p) \Longrightarrow r \leqslant p \Longrightarrow r < q \Longrightarrow r \rhd (o,q)$

donc $(o,p) \leqslant (o,q)$ et par conséquent $h(p) \leqslant h(q)$

Soit $c \in \mathbb{C} - \{\mathbb{O}\}$ et $F \in \mathcal{F}$ $[F] = c$

Il existe $p \in C$ $p \rhd F$ sinon $\mathbb{1}_c \rhd (\neg, F)$

On a donc $[(o,p)] \leqslant [F]$ car $q \rhd (o,p) \Longrightarrow q < p \Longrightarrow q \rhd F$

Soient p et $q \in C$

Si $h(p) \wedge h(q) \neq \mathbb{O}$, il existe $r \in C$ $r \rhd (\bigwedge, \{(o,p),(o,q)\})$
c'est-à-dire $r \rhd (o,p)$ et $r \rhd (o,q)$ donc $r \leqslant p$ et $r \leqslant q$.

p et q sont donc compatibles. C.Q.F.D. (1 2)

$2 \Longrightarrow 1$ Soient $\mathbb{C}$ une algèbre de BOOLE complète et h un plongement dense de C dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ et h étant des classes de M .

On définit par induction sur la profondeur de $F \in \mathcal{F}$, une relation fonctionnelle $\bar{h}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{C}$, les clauses d'induction étant :

$$\bar{h}(F) = h(p) \quad \text{si} \quad F = (o,p)$$

$$\bar{h}(F) = (\bar{h}(G))^c \quad \text{si} \quad F = (\neg, G)$$

$$\bar{h}(F) = \inf \{\bar{h}(G) / G \in \Phi\} \quad \text{si} \quad F = (\bigwedge, \Phi)$$

On a alors $p \rhd F \Longleftrightarrow h(p) \leqslant \bar{h}(F)$

En effet par induction sur la profondeur de F , on a

$p \rhd (o,q) \Longleftrightarrow h(p) \leqslant h(q) \Longleftrightarrow p \leqslant q$ (condition de plongement)

$p \rhd (\neg,F) \Longleftrightarrow h(p) \leqslant (\bar{h}(F))^c \Longleftrightarrow h(p) \wedge h(F) = \mathbb{O}$

$\Longleftrightarrow \forall q \leqslant p \quad h(q) \nleqslant \bar{h}(F) \Longleftrightarrow \forall q \leqslant p \quad q \not\rhd F$

$p \rhd (\bigwedge, \Phi) \Longleftrightarrow h(p) \leqslant \inf \{\bar{h}(G) / G \in \Phi\}$

$\Longleftrightarrow \forall G \in \Phi \quad h(p) \leqslant \bar{h}(G) \Longleftrightarrow \forall G \in \Phi \quad p \rhd G$

ce qui prouve que la relation $\rhd$ est une classe de M .

C.Q.F.D. ($2 \Longrightarrow 1$)

... /

<u>Définition du forcing faible avec une classe</u> C <u>de conditions de forcing qui satisfait les conditions équivalentes du théorème II.2</u>

<u>Théorème II.3</u>

Il existe dans M une seule relation à deux arguments notée $p \Vdash \bar{t}$ où p décrit C et t décrit la classe des termes de la forme $a \in b$, $a \notin b$, $a = b$, $a \neq b$ satisfaisant les conditions ci-dessous

$$p \Vdash \bar{a} \in \bar{b} \iff \forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \quad \exists (c,\Delta) \in b \quad r \leqslant \Delta \text{ et } r \Vdash \bar{a} = \bar{c}$$

$$p \Vdash \bar{a} \notin \bar{b} \iff \forall q \leqslant p \quad q \nVdash \bar{a} \in \bar{b}$$

$$p \Vdash \bar{a} \neq \bar{b} \iff \forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \big[\exists (c,\Delta) \in b \ r \leqslant \Delta \text{ et } r \Vdash \bar{c} \notin \bar{a} \text{ ou } \exists (c,\Delta) \in a \ r \leqslant \Delta \text{ et } r \Vdash \bar{c} \notin \bar{b}\big]$$

$$p \Vdash \bar{a} = \bar{b} \iff \forall q \leqslant p \quad q \Vdash \bar{a} = \bar{b}$$

<u>Démonstration</u> : <u>Unicité</u>

On munit la classe des termes de la forme indiquée de la relation bien fondée suivante

$$a * b < c \cdot d \iff$$

$[\text{rga} \cup \text{rgb} < \text{rgc} \cup \text{rgd}]$ ou $[\text{rga} \cup \text{rgb} = \text{rgc} \cup \text{rgd}$ et $\text{rga} \cap \text{rgb} < \text{rgc} \cap \text{rgd}]$ ou $[\text{rga} \cup \text{rgb} = \text{rgc} \cup \text{rgd}$ et $\text{rga} \cap \text{rgb} = \text{rgc} \cap \text{rgd}$ et $\in$ précède $\notin$ et $\neq$ précède $=]$ lorsque $*$, $\cdot$ parcourent l'ensemble des quatre symboles $\in$, $\notin$, $=$, $\neq$. On voit alors par induction sur les termes pour cette relation bien fondée qu'il existe une seule relation satisfaisant les clauses ci-dessus.

<u>Existence</u>

Soient h et $\mathbb{C}$ comme en II.1. On définit simultanément

$[\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_{\mathbb{C}}$ et $[\![\bar{a} = \bar{b}]\!]_{\mathbb{C}}$ par induction sur

$(\text{rga} \cup \text{rgb}, \text{rga} \cap \text{rgb})$ pour le bon ordre

$(\alpha,\beta) \leqslant (\alpha',\beta') \iff \alpha < \alpha'$ ou $\alpha = \alpha'$ et $\beta \leqslant \beta'$

Les clauses d'induction sont

... /

$$[\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_{\mathbb{C}} = \sup_{\substack{(c,p)\in b \\ p \in C}} h(p) \wedge [\![\bar{a} \neq \bar{b}]\!]^c_{\mathbb{C}}$$

$$[\![\bar{a} \neq \bar{b}]\!]_{\mathbb{C}} = \sup_{\substack{(c,p)\in b \\ p \in C}} h(p) \wedge [\![c \in a]\!]^c_{\mathbb{C}} \vee \sup_{\substack{(c,p)\in a \\ p \in C}} h(p) \wedge [\![c \in b]\!]^c_{\mathbb{C}}$$

On pose $p \,|\!\vdash \bar{a} \in \bar{b} \iff h(p) \leqslant [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_{\mathbb{C}}$

$$p \,|\!\vdash \bar{a} \notin \bar{b} \iff h(p) \leqslant [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]^c_{\mathbb{C}}$$

$$p \,|\!\vdash \bar{a} \neq \bar{b} \iff h(p) \leqslant [\![\bar{a} \neq \bar{b}]\!]_{\mathbb{C}}$$

$$p \,|\!\vdash \bar{a} = \bar{b} \iff h(p) \leqslant [\![\bar{a} = \bar{b}]\!]^c_{\mathbb{C}}$$

$(a_i)_{i \in I}$ étant une famille d'éléments de $\mathbb{C}$, on sait que

$$h(p) \leqslant \sup_{i \in I} a_i \iff \forall q \leqslant p \ \exists r \leqslant q \ \exists i \in I \ h(r) \leqslant a_i$$

On a alors

$$p \,|\!\vdash \bar{a} \in \bar{b} \iff h(p) \leqslant \sup_{\substack{(c,s)\in b \\ s \in C}} h(s) \wedge [\![\bar{a} \neq \bar{c}]\!]^c_{C}$$

$$\iff \forall q \leqslant p \ \exists r \leqslant q \ \exists (c,s) \in b \ h(r) \leqslant h(s) \wedge [\![\bar{a} \neq \bar{c}]\!]^c_{C}$$

$$\iff \forall q \leqslant p \ \exists r \leqslant q \ \exists (c,s) \in b \ r \leqslant s \ h(r) \leqslant [\![\bar{a} \neq \bar{c}]\!]^c_{C}$$

donc par définition de $r \,|\!\vdash \bar{a} = \bar{c}$, on a .

$$p \,|\!\vdash \bar{a} \in \bar{b} \iff \forall q \leqslant p \ \exists r \leqslant q \ \exists (c,s) \in b \ r \leqslant s \ r \,|\!\vdash \bar{a} = \bar{c}$$

Les autres formules se démontrent d'une façon analogue. C.Q.F.D.

On étend alors cette relation de forcing faible aux énoncés clos écrits avec $\in$, $=$, Γ (symbole de prédicat unaire) à paramètre dans M . La définition se fait par induction sur la longueur de l'énoncé.

Si E est de la forme $a \in b$, $a \notin b$, $a = b$, $a \neq b$, $p \| \!\!- E$ a déjà été défini.

Si E est $\Gamma(\bar{a})$ on pose

$p \| \!\!- \Gamma(\bar{a}) \iff \forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \quad \exists s \geqslant r \quad r \| \!\!- s = \bar{a}$

$p \| \!\!- E \wedge F \iff p \| \!\!- E$ et $p \| \!\!- F$

$p \| \!\!- \neg E \iff \forall q \leqslant p \quad q \not\| \!\!- E$ lorsque E n'est pas de la forme $\neg (\bar{a} \in \bar{b})$ ou $\neg(\bar{a} \neq \bar{b})$

$p \| \!\!- \forall x E(x) \iff \forall x \quad p \| \!\!- E(x)$

<u>Proposition II.4</u> <u>Propriétés du forcing faible</u>

1. $\forall q \leqslant p \quad p \| \!\!- E \implies q \| \!\!- E$
2. $\forall p \, \exists q \leqslant p \quad q \| \!\!- E$ ou $q \| \!\!- \neg E$
3. $p \| \!\!- E \iff p \| \!\!- \neg\neg E$
4. $p \| \!\!- E$ et $p \| \!\!- E \to F \implies p \| \!\!- F$
5. Pour tout théorème T du calcul des prédicats construit sur le langage $\in$, $=$, Γ, on a $p \| \!\!- T$ pour tout $p \in C$

<u>Démonstration</u>

1. On prouve 1. par induction informelle sur la longueur de E.

Si E est de la forme $a \in b$, $a \notin b$, $a = b$, $a \neq b$, c'est vrai car h est croissante.

Si E est $\Gamma(x)$ c'est vrai par définition de $p \| \!\!- \Gamma(\bar{x})$

Si E est $F \wedge G$ $p \| \!\!- F \wedge G \iff p \| \!\!- F$ et $p \| \!\!- G$ donc par hypothèse d'induction si on a $q \leqslant p$, on a $q \| \!\!- F$ et $q \| \!\!- G$ c'est-à-dire $q \| \!\!- F \wedge G$

Si E est $\neg F$, soient p et $q \leqslant p$ $p \| \!\!- \neg E$. Si $q \not\| \!\!- \neg E$, il existe $r \leqslant q$ $r \| \!\!- \neg\neg E$ c'est-à-dire $\exists r \leqslant q \quad \forall s \leqslant r \quad \exists t \leqslant s \quad t \| \!\!- E$ donc $\exists t \leqslant p \quad t \| \!\!- E$ ce qui contredit le fait que

$$p \| \!\!- \neg E \iff \forall q \leqslant p \quad q \not\| \!\!- E$$

Si E est $\forall x F(x)$ c'est vrai par hypothèse d'induction puisque $p \Vdash \forall x E(x) \iff \forall x \quad p \Vdash E(\bar{x})$

2. Montrons d'abord que pour tout énoncé E, on a

$$p \Vdash \neg E \iff \forall q \leqslant p \quad q \nVdash E$$

C'est la définition lorsque E n'est pas de la forme $\bar{a} \neq \bar{b}$ ou $\bar{a} \in \bar{b}$

Si E est par exemple $\bar{a} \in \bar{b}$, on a

$$p \Vdash \neg E \iff h(p) \leqslant [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]^{c}_{C}$$

donc $p \Vdash \neg E \iff \forall b \in \mathbb{B} \quad b \wedge [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_{\mathbb{C}} = \mathbb{0}$ en particulier

$\forall q \leqslant p \quad h(q) \wedge [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_{\mathbb{C}} = \mathbb{0}$ soit $q \nVdash \bar{a} \in \bar{b}$

Inversement si $\forall q \leqslant p \quad q \nVdash \bar{a} \in \bar{b}$, on a $\forall q \leqslant p \quad h(q) \nleqslant [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]$

c'est-à-dire $\forall q \leqslant p \quad h(q) \wedge [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]^{c}_{\mathbb{C}} \neq \mathbb{0}$

soit par densité

$\forall b \in \mathbb{B} - \{\mathbb{0}\} \quad b \leqslant h(p) \implies b \wedge [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]^{c}_{\mathbb{C}} = \mathbb{0}$

c'est-à-dire $h(p) \leqslant [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]^{c}_{C}$ ou encore $p \Vdash \neg(\bar{a} \in \bar{b})$

Dans ces conditions on a

$\forall p \quad \exists q \leqslant p \quad q \Vdash E$ ou $q \Vdash \neg E$ pour chaque énoncé E.

3. On démontre 3. par induction sur la longueur de E.

C'est évident lorsque E est de la forme $a \in b$, $a = b$, $a \notin b$, $a \neq b$ parce que si $b \in \mathbb{C} \quad b^{cc} = b$

On a :

$p \Vdash \neg\neg\Gamma(x) \iff \forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \quad \forall s \leqslant r \quad \exists t \leqslant s \quad \exists t' \geqslant t \quad t \Vdash \bar{x} = t'$

$\iff \forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \quad \exists s \geqslant r \quad r \Vdash \bar{x} = s \iff p \Vdash \Gamma(\bar{x})$

on a

$p \Vdash \neg\neg\neg E \iff \forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \quad \forall s \leqslant r \quad s \Vdash E \iff \forall q \leqslant p \quad q \nVdash E \iff q \Vdash \neg E$

On a $p \Vdash \neg\neg(E \wedge F) \Longleftrightarrow \forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \quad r \Vdash E$ et $r \Vdash F$

$\Longleftrightarrow$ (hypothèse d'induction) $p \Vdash E$ et $p \Vdash F$

$\Longleftrightarrow$ $p \Vdash E$ et F

On a $p \Vdash \neg\neg \forall x E(x) \Longleftrightarrow \forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \; \forall x \; r \Vdash E(\bar{x})$, ce qui entraîne $\forall x \; \forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \quad r \Vdash E(\bar{x})$ donc par hypothèse d'induction $\forall x \; p \Vdash E(\bar{x})$ soit $p \Vdash \forall x E(x)$. Inversement si $p \Vdash \forall x E(x)$ on a évidemment

$$\forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \quad r \Vdash \forall x E(x)$$

4. $p \Vdash E \rightarrow F \Longleftrightarrow p \Vdash \neg(\neg F \wedge \neg\neg E) \Longleftrightarrow \forall q \leqslant p \quad q \Vdash \neg F$ ou $q \nVdash \neg\neg E$ donc si $p \Vdash E$ on déduit $\forall q \leqslant p \quad q \nVdash F$ donc $p \Vdash \neg\neg F$ donc d'après 3.

$$p \Vdash F$$

5. On vérifie que chaque axiome du calcul des prédicats est forcé par tout élément de C et que chaque règle est compatible avec le forcing.

Le modèle $M[G]$

Soit G une partie de C M-générique sur C. On définit une relation binaire R de domaine M par

$$aRb \Longleftrightarrow \exists p \in G \quad (a,p) \in b$$

Cette relation est bien fondée (A.F)

Soit $\mathfrak{E}$ la fonction contractante pour R sur M définie par

$$\mathfrak{E}a = \{\mathfrak{E}b / bRa\}$$

On pose $M[G] = \mathfrak{E}(M)$

Par construction, $M[G]$ est une ensemble transitif dénombrable.

Proposition II.5

On a $M \subseteq M[G]$

Démonstration

Soit $a \rightsquigarrow \hat{a}$ la fonction de M dans M définie par induction sur le rang de a par

$$\hat{a} = \{(\hat{b}, \mathbb{1}_C)/b \in a\}$$

on a $\mathscr{C}\hat{a} = a$. En effet on le prouve par induction sur le rang de a. Si $b \in a$ on a $b = \mathscr{C}\hat{b}$ mais $(\hat{b}, \mathbb{1}_C) \in \hat{a}$ entraîne $\hat{b}R\hat{a}$ puisque $\mathbb{1}_C \in G$. Donc $\mathscr{C}\hat{b} \in \mathscr{C}\hat{a}$ soit $b \in \mathscr{C}\hat{a}$. Inversement soit $\mathscr{C}u \in \mathscr{C}\hat{a}$. Par définition de $\mathscr{C}$, on a $\mathscr{C}u = \mathscr{C}\hat{b}$ avec $b \in a$. Mais $\mathscr{C}\hat{b} = b$ donc $b \in \mathscr{C}\hat{a}$. C.Q.F.D.

Lemme II.6 (Lemme de vérité).

Soit E énoncé clos écrit avec $\in$, $=$, Γ à paramètres $a_1, \ldots, a_n \in M$

Alors $< M[G], G > \models E(\mathscr{C}a_1, \ldots, \mathscr{C}a_n) \iff \exists p \in G \;\; p \Vdash E(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$

lorsqu'on interprète Γ par G.

Démonstration

On prouve d'abord le lemme pour les formules de la forme $a \in b$, $a \notin b$, $a = b$, $a \neq b$ par induction sur la classe de ces formules pour la relation bien fondée utilisée en II.3.

Si $< M[G], G > \models \mathscr{C}a \in \mathscr{C}b$, on a un c tel que cRb et $\mathscr{C}a = \mathscr{C}c$ donc $\exists q \in G \;\; (c,q) \in b$ et $\mathscr{C}a = \mathscr{C}c$

Par hypothèse d'induction $\exists p \in G \;\; p \Vdash \bar{a} = \bar{c}$

Soit $r \in G \;\; r \leqslant p$ et $r \leqslant q$. On a $r \Vdash \bar{a} \in \bar{b}$ car $\forall s \leqslant r \;\; \exists t \leqslant s \;\; t \leqslant q$ et $t \Vdash \bar{a} = \bar{c}$ implique $r \Vdash \bar{a} \in \bar{b}$ d'après le théorème II.3.

Inversement soit $p \in G \;\; p \Vdash \bar{a} \in \bar{b}$; D'après le théorème II.3, on a

$\forall q \leqslant p \;\; \exists r \leqslant q \;\; \exists (c,s) \in b \;\; r \leqslant s$ et $r \Vdash \bar{a} = \bar{c}$

Comme $p \in G$ et comme la classe des r tels que $\exists (c,s) \in b \;\; r \leqslant s$ et $r \Vdash \bar{a} = \bar{c}$ est dense au-dessous de p, il existe $r \leqslant p \;\; r \in G$, $\exists (c,s) \in b \;\; r \leqslant s$ et $r \Vdash \bar{a} = \bar{c}$

Par hypothèse d'induction on a donc $< M[G],G> \models \mathscr{C}a = \mathscr{C}c$
D'autre part on a $\mathscr{C}c \in \mathscr{C}b$ puisque $(c,r) \in b$ avec $r \in G$
Donc $< M[G],G> \models \mathscr{C}a \in \mathscr{C}b$.

Si $< M[G],G> = \mathscr{C}a \in \mathscr{C}b$ alors, par hypothèse d'induction

$$\forall p \in G \quad p \nVdash \bar{a} \in \bar{b}$$

donc puisque la classe des p qui décident $\bar{a} \in \bar{b}$ est dense, il existe $q \in G \quad q \Vdash \bar{a} \notin \bar{b}$

Inversement s'il existe $q \in G \quad q \Vdash \bar{a} \notin \bar{b}$ alors $\forall p \in G \quad p \nVdash \bar{a} \in \bar{b}$ donc (hypothèse d'induction) $< M[G],G > \not\models \mathscr{C}a \in \mathscr{C}b$

C'est-à-dire $< M[G],G > \models \mathscr{C}a \notin \mathscr{C}b$

Si $< M[G],G > \models \mathscr{C}a \neq \mathscr{C}b$ on a par exemple $(c,q) \in b$ avec $q \in G$ et $< M[G],G > \models \mathscr{C}c \notin \mathscr{C}a$ donc (hypothèse d'induction)

$\exists p \in G \quad p \Vdash \bar{c} \notin \bar{a}$

Soit $r \in G \quad r \leqslant p \quad r \leqslant q$. On a $\forall s \leqslant r \quad \exists t \leqslant s \quad t \Vdash \bar{c} \notin \bar{a}$

Donc par le théorème II.3 $r \Vdash \bar{a} \neq \bar{b}$

Inversement soit $p \in G \quad p \Vdash \bar{a} \neq \bar{b}$

Alors par le théorème II.3 , on a

$\forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q[\exists (c,s) \in b \quad s \geqslant r$ et $r \Vdash \bar{c} \notin \bar{a}$ ou $\exists (c,s) \in a \quad s \geqslant r$ et $s \Vdash \bar{c} \notin \bar{b}]$

Donc la classe des r tels que

$\exists (c,s) \in b \quad s \geqslant r$ et $r \Vdash \bar{c} \notin \bar{a}$ ou $\exists (c,s) \in a \quad s \geqslant r \quad r \Vdash \bar{c} \notin \bar{b}$

est dense au-dessous de p . Comme $p \in G$, on déduit qu'il existe $r \in G$, $r \leqslant p$ et par exemple $(c,s) \in b \quad s \geqslant r$ et $r \Vdash \bar{c} \notin \bar{a}$. Donc $\mathscr{C}c \in \mathscr{C}b$ et par hypothèse d'induction $\mathscr{C}c \notin \mathscr{C}a$

C'est-à-dire $< M[G],G > \models \mathscr{C}a \neq \mathscr{C}b$

Si $< M[G],G > \models \mathscr{C}a = \mathscr{C}b$ alors $\forall p \in G \quad p \nVdash \bar{a} \neq \bar{b}$

donc puisque la classe des p qui décident $\bar{a} \neq \bar{b}$ est dense , on a $p \in G$ $p \Vdash \bar{a} = \bar{b}$.

Inversement soit $p \in G$ $p \Vdash \bar{a} = \bar{b}$. Alors $\forall p \in G$ $p \nVdash \bar{a} \neq \bar{b}$ donc (hypothèse d'induction) $< M[G],G > \nvDash \mathscr{C}a = \mathscr{C}b$

C'est-à-dire $< M[G],G > \models \mathscr{C}a \neq \mathscr{C}b$

On montre alors le lemme de vérité par induction (au sens intuitif) sur la longueur de E .

Si $< M[G],G> \models \mathscr{C}x \in G$, on a $s \in G$ $s = \mathscr{C}x$. Par hypothèse d'induction, il existe $p \in G$ $p \leqslant s$ et $p \Vdash s = \bar{x}$

On a donc $\forall r \leqslant p$ $r \Vdash \bar{x} = s$ donc $p \Vdash \Gamma(x)$

Inversement soit $p \in G$ $p \Vdash \Gamma(x)$ c'est-à-dire

$$\forall q \leqslant p \ \exists r \leqslant q \ \ \exists s \geqslant r \quad r \Vdash \bar{x} = s$$

Par densité sous p , il existe donc $r \in G$ et $s \geqslant r$ $r \Vdash \bar{x} = s$

Par hypothèse d'induction on a $< M[G],G> \models \mathscr{C}x = s$, et par propriété des génériques $r \in G$ et $s \geqslant r \implies s \in G$

$$\text{donc} \quad M[G],G> \models \mathscr{C}x \in G$$

Si $M[G],G> \models \neg E$ alors $\forall p \in G$ $p \nVdash E$ donc puisque la classe des p qui décident E est dense, il existe $p \in G$ $p \Vdash \neg E$. Inversement soit $p \in G$ $p \Vdash \neg E$. Si E était vrai dans $< M[G],G >$ il existerait par hypothèse d'induction $q \in G$ $q \Vdash E$ donc on aurait $s \leqslant p$ $s \leqslant q$ $s \Vdash E$ et $s \Vdash \neg E$ ce qui contredit la définition de $p \Vdash \neg E$

$$\text{donc} < M[G],G > \models \neg E$$

Si $< M[G],G > \models E \wedge F$ alors $\exists p \in G$ $p \Vdash E$ et $\exists q \in G$ $q \Vdash F$ donc $\exists r \in G$ $r \leqslant p$ et $r \leqslant q$ $r \Vdash E$ et $r \Vdash F$ c'est-à-dire $r \Vdash E \wedge F$.

Inversement soit $p \in G$ $p \Vdash E \wedge F$. Alors $p \Vdash E$ et $p \Vdash F$ donc par hypothèse d'induction $< M[G],G > \models E$ et $< M[G],G > \models F$

C'est-à-dire $< M[G],G > \models E \wedge F$

Si $\forall p \in G \quad p \not\Vdash \forall x E(x)$ alors par densité il existe $p \in G$ $p \Vdash \neg \forall x E(x)$ c'est-à-dire $\forall q \leqslant p \quad \exists r \leqslant q \; \exists x \quad r \Vdash \neg E(\bar{x})$ (car autrement on aurait $q \Vdash \neg\neg E(\bar{x})$ et on a prouvé que $q \Vdash E \iff q \Vdash \neg\neg E$). La classe des r tels qu'il existe x $r \Vdash \neg E(\bar{x})$ est dense sous p. Comme $p \in G$, on a $r \in G$ $r \leqslant p$ et x tels que $r \Vdash \neg E(\bar{x})$ c'est-à-dire $< M[G], G > \models \neg E(\mathcal{C} x)$ soit $< M[G], G > \models \neg \forall x E(x)$

Inversement s'il existe $p \in G$ $p \Vdash \forall x E(x)$, on a $\forall x \quad p \Vdash E(\bar{x})$ donc (hypothèse d'induction) $< M[G], G > \models E(\mathcal{C} x)$ pour tout $x \in M$.

Donc $< M[G], G > \models \forall x E(x)$ C.Q.F.D. (Lemme de vérité).

La fin de ce chapitre est consacrée à l'étude de quelques propriétés du forcing et des extensions génériques.

<u>Lemme II.7</u>

Soient C et D deux classes de conditions de forcing. On suppose que $C \subset D$ et que C est dense dans D.
Soit G un M-générique sur C. On sait que

$$H = \{d \in D / \exists p \in G \quad p \leqslant d\} \text{ est M-générique sur } D.$$

Dans ces conditions on a $M[G] \subseteq M[H]$

<u>Démonstration</u>

Soit $\mathcal{C}$ la fonction contractante pour la relation $\exists p \in G (a,p) \in b$.
Soit Ψ celle pour la relation $\exists d \in H \; (a,d) \in b$.

On définit par induction sur le rang de a dans M la fonction $a \rightsquigarrow \tilde{a}$ par

$$\tilde{a} = \{(\tilde{b}, p) / (b,p) \in a \text{ et } p \in C\}$$

On montre par induction sur le rang de a que

$$\mathcal{C} a = \Psi \tilde{a}$$

En effet soit $u \in \mathscr{C}a$. Il existe $(b,p) \in a$ avec $p \in G$ tel que $\mathscr{C}b = u$. Donc $(\tilde{b},p) \in \tilde{a}$. Comme $G \subset H$, on a $\psi\tilde{b} \in \psi\tilde{a}$. Par hypothèse d'induction on a $u = \mathscr{C}b = \psi\tilde{b}$ donc $u \in \psi\tilde{a}$. Inversement si $u \in \psi\tilde{a}$ alors $u = \psi c$ avec $(c,d) \in \tilde{a}$ et $d \in H$. Mais par définition de $\tilde{a}$, il existe $(b,p) \in a$ avec $p \in G$ tel que $(\tilde{b},p) = (c,d)$ donc $\mathscr{C}b \in \mathscr{C}a$ c'est-à-dire

$$u = \psi\tilde{b} = \mathscr{C}b \quad \text{soit} \quad u \in \mathscr{C}a$$

C.Q.F.D.

Remarque :

Sous les conditions du lemme ci-dessus, si C est dense saturée dans D , alors $M[G] = M[H]$

Théorème II.8 Forcing produit

Soient C et D deux classes de conditions de forcing de M . On munit $C \times D$ de l'ordre produit. On suppose que la relation de C-forcing faible est une classe de M .

1. Soit F un M-générique sur $C \times D$

Soit $G = \{f \in C / \exists p \in D \ (f,p) \in F\}$

Soit $H = \{p \in D / \exists f \in C \ (f,p) \in F\}$

Alors $F = G \times H$ et G est M-générique sur C et H est $\langle M[G],G \rangle$ - générique sur D .

2. Inversement soit G une partie de C M-générique sur C et H une partie $\langle M[G],G \rangle$ générique sur D . Alors $G \times H$ est M-générique sur $C \times D$

3. De plus si la relation de D-forcing faible est une classe de M , on a (sous les hypothèses 2)

$$G \text{ est } \langle M[H],H \rangle \text{ générique sur } C .$$

Démonstration

1. Il est clair que $F = G \times H$ d'après les définitions de G et H et les propriétés des génériques.

Montrons que G est M-générique sur C .

Il est clair que deux éléments de G sont compatibles et que tout majorant d'un élément de G est encore dans G .

Reste à prouver que G rencontre toutes les classes denses de M .

Soit X une classe de M dense dans C . Alors $X \times D$ est dense dans $C \times D$ et rencontre donc F . X rencontre donc G qui est la section de F par C .

Montrons que H est $< M[G], G >$ -générique sur D .

Il est clair que deux éléments de H sont compatibles et que tout majorant d'un élément de H est encore dans H .

Il reste à prouver que H rencontre toutes les classes denses de $< M[G], G >$.

Soit Y une classe de $< M[G], G >$ dense dans D . Par le lemme de vérité soit $f_o \in G$ $f_o \Vdash_C$ " Y est dense dans D "

Soit $Z = \{(f,p)/f$ incompatible avec f_o ou $f \leqslant f_o$ et $f \Vdash_C$ "$p \in Y$ "$\}$

On vérifie facilement que cette classe est dans M (car par hypothèse la classe $\Vdash_C$ est dans M) et dense dans $C \times D$.

Soit donc $(f_1, p_1) \in G \times H \cap Z$

Comme $f_1 \in G$ on a nécessairement $f_1 \leqslant f_o$ donc par le lemme de vérité, on a $p_1 \in Y$ c'est-à-dire $Y \cap H \neq \emptyset$

H est donc bien $< M[G], G >$ -générique sur D .

2. Il est clair que deux éléments de $G \times H$ sont compatibles et que tout majorant d'un élément de $G \times H$ est encore dans $G \times H$. Il reste à prouver que $G \times H$ rencontre toutes les classes de M denses dans $C \times D$.

Soit donc Z une classe de M dense dans $C \times D$.

Soit $Y = \{p \in D / \exists f \in G \ (f,p) \in Z\}$. Cette classe est dans $< M[G], G >$ et dense dans D . En effet soit $p \in D$. On pose

$$Y_p = \{f \in C / \exists q \in D \quad q \leqslant p \quad \text{et} \quad (f,q) \in Z\}$$

Y_p est une classe de M dense dans C car Z est dense dans $C \times D$

Soit donc $f_o \in G \cap Y_p$. Il existe $q \in D$ $q \leqslant p$ avec $(f_o, q) \in Z$

c'est-à-dire $q \in Y$

Soit donc $p \in H \cap Y$. Par définition de Y , il existe $f \in G$ tel que $(f,p) \in Z$ donc $Z \cap G \times H \neq \emptyset$

3. L'isomorphisme évident entre $C \times D$ et $D \times C$ montre en utilisant 1 en échangeant les rôles de C et D que

G est $\langle M[H],H\rangle$ -générique sur C . C.Q.F.D.

Théorème II.9 Décomposition du forcing

Soient C et D deux classes de conditions de forcing et $\mathcal{E}$ une fonction (qui est une classe) normale de C dans D c'est-à-dire

1. l'image de C par $\mathcal{E}$ est prédense dans D

2. $\forall p \in C \quad \forall d \leqslant \mathcal{E}p \quad \exists q \leqslant p \quad \mathcal{E}q \leqslant d$

On suppose de plus que les relations de C-forcing faible et de D-forcing faible sont des classes de M .

On pose $H = \{d \in D / \exists p \in G \quad d \geqslant \mathcal{E}p\}$

Soit $C' = \mathcal{E}^{-1}(H)$

Alors H est M-générique sur D et G est $\langle M[H],H\rangle$ -générique sur C'

La démonstration de ce théorème est semblable à celle du cas ensembliste (cf [1]).

Les théorèmes II.11 et II.12 étendent le théorème de décomposition à un cas un peu plus général

Lemme II.10

Soient C et D deux classes de conditions de forcing de M . On suppose que la relation de C-forcing faible est une classe de M . Soit G une partie M-générique de C . Soit H une classe de $\langle M[G],G\rangle$ contenue dans D satisfaisant

1. $d \in H$ et $e \geqslant d \Longrightarrow e \in H$

2. $d \in H$ et $e \in H \Longrightarrow$ d et e sont compatibles

3. $\forall p \in C \quad H \cap Z_p \neq \emptyset$ où $Z_p = Y_p \cup Y_p^c$ avec

$Y_p = \{d \in D / p \Vdash_C \text{"} d \notin \underline{H} \text{"}\}$

et $Y_p^c = \{d \in D /$ d incompatible avec tous les éléments de $Y_p\}$

On pose $\mathscr{C}_p = \{ d \in D / \forall e \leqslant d \quad \exists q \leqslant p \quad q \Vdash_C \text{"} e \in \underline{H} \text{"}\}$

On dit que $d \geqslant \mathscr{C}_p$ si $\forall e \in \mathscr{C}_p \quad e \leqslant d$

Soit enfin $p_o \in G \quad p_o \Vdash_C 1 \wedge 2 \wedge 3$ (Il existe un tel p_o par le lemme de vérité car $1 \wedge 2 \wedge 3$ s'exprime par un énoncé)

i) $\forall p \leqslant p_o \quad \forall d \in \mathscr{C}_p \quad \exists q \leqslant p \quad d \geqslant \mathscr{C}_q$ et $\forall p \leqslant p_o \forall d \quad p \Vdash_C \text{"} d \in \underline{H} \text{"} \Longrightarrow \mathscr{C}_p \leqslant d$

ii) $\forall p \leqslant p_o \quad \mathscr{C}_p \neq \emptyset$

iii) $\forall p \leqslant p_o \quad p \Vdash_C \text{"} \exists d \in \mathscr{C}_p \cap \underline{H} \text{"}$

<u>Démonstration</u>

i) Soit $p \leqslant p_o$ et soit $d \in \mathscr{C}_p$. Par définition de $\mathscr{C}_p$, il existe $q \leqslant p$, $q \Vdash_C \text{"} d \in \underline{H} \text{"}$. Montrons que $\forall e \in \mathscr{C}_q$, on a $e \leqslant d$. Sinon par par l'absurde on aurait $f \in \mathscr{C}_q$ incompatible avec d. Mais $f \in \mathscr{C}_q \Longrightarrow \exists r \leqslant q$ $r \Vdash_C \text{"} f \in \underline{H} \text{"}$. Mais $r \Vdash_C \text{"} d \in \underline{H} \text{"}$ ce qui est impossible parce que f et d sont incompatibles et parce que $r \leqslant p_o \Longrightarrow r \Vdash$ "deux éléments du générique sont compatibles".

D'autre part soient $p \leqslant p_o$ et d tels que $p \Vdash_C \text{"} d \in H \text{"}$. On veut prouver que $\mathscr{C}_p \leqslant d$. Supposons qu'on ait $e \in \mathscr{C}_p$ $e \not\leqslant d$. Il existe alors $f \leqslant e$, f incompatible avec d. Comme $e \in \mathscr{C}_p$, il existe $q \leqslant p$ tel que $q \Vdash_C \text{"} f \in \underline{H} \text{"}$. On aurait alors

$q \Vdash_C \text{"} f \in \underline{H}$ et $d \in \underline{H} \text{"}$ ce qui est impossible car

$q \leqslant p_o \Longrightarrow q \Vdash_C$ "deux éléments de $\underline{H}$ sont compatibles"

ii) Supposons $\mathscr{C}_p = \emptyset$. Alors $\forall d \quad d \notin \mathscr{C}_p$ donc $\exists e \leqslant d$ tel que

$\forall q \leqslant p \quad q \| \!\vdash_C$ "$e \in \underline{H}$" . Par définition du forcing faible $\exists\, e \leqslant d$
$p \| \!\vdash_C$ "$e \notin \underline{H}$" ce qui signifie exactement que $Zp = Yp$. Soit alors G' un M-générique sur C contenant p . Soit H' l'image de $\underline{H}$ dans $\langle M[G'], G' \rangle$. Comme $p \leqslant p_o$, on a $d' \in H' \cap Yp$ c'est-à-dire $p \| \!\vdash_C d' \notin \underline{H}$ – contradiction –

iii) Sinon par l'absurde $\exists\, p \leqslant p_o \quad p \| \!\vdash_C$ "$\forall d \in \varphi p \quad d \in H$" donc (forcing faible) $\forall d \in \varphi p \quad p \| \!\vdash_C d \notin \underline{H}$"

Mais d'après ii) on a $\varphi p \neq \emptyset$. Soit $d \in \varphi p$. Par définition il existe $q \leqslant p \quad q \| \!\vdash_C$ "$d \in \underline{H}$" ce qui contredit le fait que

$$q \leqslant p \implies q \| \!\vdash_C \text{"} d \notin \underline{H} \text{"}$$

C.Q.F.D.

Théorème II.11

| H est M-générique sur D .

Démonstration

On pose $\varphi(G) = \{d \in D / \exists p \leqslant p_o \quad p \in G \quad d \geqslant \varphi p\}$. On a $\varphi(G) = H$
En effet si $d \in \varphi(G)$ il existe $p \leqslant p_o \quad p \in G \quad d \geqslant \varphi p$ donc par II.10 iii) $\exists d_1 \in H \cap \varphi p$ donc $d_1 \leqslant d$ soit $d \in H$. Inversement soit $d \in H$. Il existe $p \leqslant p_o$, $p \in G$ tel que $p \| \!\vdash_C$ "$d \in \underline{H}$" donc par II.10 i) on a $\varphi p \leqslant d$.

Montrons que $\varphi(G)$ est M-générique sur D .

Il suffit de prouver que si X est dense dans D (X classe de M) alors $X \cap \varphi(G) \neq \emptyset$

Posons $Y = \{p \leqslant p_o / \exists x \in X \quad x \geqslant \varphi p\}$

Y est dense dans C sous p_o . En effet soit $p \leqslant p_o$. D'après II.10 ii) on a $\varphi p \neq \emptyset$. Par densité de X on a donc $x \in X \cap \varphi p$.

Donc il existe $q \leqslant p \quad q \| \!\vdash_C$ "$x \in \underline{H}$" donc par II ii) on a $\varphi q \leqslant x$.

C.Q.F.D.

Théorème II.12

Soit $C' = \{p \in C / \exists d \in \varphi p \cap H\}$
On suppose que la relation de D-forcing faible est une classe de M .
Alors G est $< M[H], H >$ -générique sur C' .

Démonstration

On sait d'après II.10 iii) que $G \subset C'$. Il suffit de prouver que G rencontre les classes de $< M[H], H >$ qui sont denses dans C'.

Soit Z une classe de $< M[H], H >$ dense saturée dans C' .

Soit $A = \{q \in C / \exists p \geqslant q \quad \forall d (d \in \varphi q \Longrightarrow d \Vdash_D \text{"} p \in \underline{Z} \text{"})\}$

Montrons que $A \cap C' \subset Z$

Si $q \in A \cap C'$, il existe $p \geqslant q$ tel que $\forall d \in \varphi q \quad d \Vdash_D \text{"} p \in \underline{Z} \text{"}$
Comme $q \in C'$, il existe $d \in H \cap \varphi q$. Donc par le lemme de vérité on a $p \in Z$

Montrons que $A \cap C'_{p_o}$ est dense dans C'_{p_o} (C'_{p_o} représente la classe des minorants de p_o dans C').

Soit en effet $r \in C'_{p_o}$. Comme Z est dense dans C' , soit $p \in Z$ $p \leqslant r$. Il existe donc $d \in H$ tel que $d \Vdash_D \text{"} p \in \underline{Z} \text{"}$. Comme $p \in C'$, il existe $d_1 \in H \cap \varphi p$. Soit d'un minorant commun de d et d_1 . On a $d' \in \varphi p$. Comme $p \leqslant p_o$ on peut appliquer II.10.i). Il existe donc $q \leqslant p$ tel que $\forall e \in \varphi q \quad e \leqslant d'$ ce qui signifie par définition que $q \in A$.

Soit alors $X = A \cup A^c$ (où A^c désigne la classe des éléments de C incompatibles avec tous les éléments de A). X est une partie dense de C . Soit $p \leqslant p_o$ $p \in X \cap G$. On ne peut avoir $p \in A^c$ car $p \in C'_{p_o}$ et $A \cap C'_{p_o}$ étant dense dans C'_{p_o} , on aurait $q \leqslant p$ $q \in A$.

Donc $p \in A \cap G$. Comme $A \cap C' \subset Z$, on a bien $p \in Z \cap G$. C.Q.F.D.

III - EXTENSIONS GENERIQUES EMBOITEES

Préliminaires

Définition III.1

Soient C et D deux ensembles de conditions de forcing. On dit que C est emboité dans D et on note $C \hookrightarrow D$ lorsque

1. $C \subset D$ et $\mathbb{1}_C = \mathbb{1}_D$
2. Si p et $q \in C$ sont incompatibles dans C, ils le sont encore dans D.
3. Si $\pi \subset C$ est une partie prédense de C, alors π est aussi prédense dans D.

Il est alors clair que si H est M-générique sur D, $H \cap C$ est M-générique sur C.

On rappelle que si l'on désigne par $\mathbb{C}$ l'algèbre de BOOLE des bons ouverts de C muni de la topologie de l'ordre, l'application h de C dans $\mathbb{C}$ définie par

$$h(p) = \{q \in C / q \leq p\} \text{ vérifie alors}$$

1. h est croissante
2. p incompatible avec $q \Longrightarrow h(p) \wedge h(q) = \mathbb{0}$
3. $\forall c \in \mathbb{C} - \{0\}$, $\exists p \in C \quad h(p) \leq c$

On appellera h le plongement canonique de C dans $\mathbb{C}$.

Proposition III.2

Soient C et D deux ensembles de conditions de forcing. On suppose C emboité dans D. Soient $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ les algèbres de BOOLE complètes associées comme ci-dessus.

Alors $\mathbb{C}$ est isomorphe à une sous-algèbre de BOOLE complète de $\mathbb{D}$.

Démonstration

Soit $i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ définie par

$$i(X^c_C) = X^c_D \quad \text{pour} \quad X \subseteq C$$

(X^c_C désigne l'ensemble des éléments de C incompatibles dans C avec tous les éléments de X et X^c_D désigne l'ensemble des éléments de D incompatibles dans D avec tous les éléments de X) .

i est évidemment injectif. Montrons que i est croissante . Soit $X^c_C \subseteq Y^c_C$. On veut montrer que $X^c_D \subseteq Y^c_D$

En effet soit $p \in X^c_D$. On sait que $\pi = X \cup X^c_C$ est prédense dans C donc par condition d'enboîtement prédense dans D . Alors $\forall q \leqslant p \quad q \in X^c_D$ et q est compatible avec un élément de π qui est nécessairement dans X^c_D puisque q est incompatible avec tous les éléments de X . Comme $X^c_C \subseteq Y^c_C \subseteq Y^c_D$, on a $\forall q \leqslant p$ q est incompatible avec un élément de Y^c_D c'est-à-dire $p \in Y^c_D$ puisque Y^c_D est un bcn ouvert de D .

i est donc croissante et par suite est un homomorphisme injectif et complet d'algèbres de BOOLE complètes. C.Q.F.D.

Soit alors $(C_\alpha)_{\alpha \in On}$ une famille croissante d'ensembles de conditions de forcing emboîtés c'est-à-dire

$$\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow C_\alpha \hookrightarrow C_\beta$$

On pose $C = \bigcup_{\alpha \in On} C_\alpha$ et $\mathbb{1}_C = \mathbb{1}_{C_\alpha}$ qui ne dépend pas de α. On se propose d'étudier les extensions génériques de M à partir de C .

Soient $\mathbb{C}_\alpha$ l'algèbre de BOOLE complète associée à C_α et h_α le plongement canonique de C_α dans $\mathbb{C}_\alpha$. En remplaçant les $\mathbb{C}_\alpha$ par des algèbres de BOOLE isomorphes notées encore $\mathbb{C}_\alpha$ par abus de langage, on peut supposer que la famille $(\mathbb{C}_\alpha)_{\alpha \in On}$ est croissante et que si $\alpha \leqslant \beta$ $\mathbb{C}_\alpha$ est une sous-algèbre de BOOLE complète de $\mathbb{C}_\beta$.

Dans ces conditions $\mathbb{C} = \bigcup_{\alpha \in On} \mathbb{C}_\alpha$ est une classe qui est une algèbre de BOOLE complète pour les ensembles. L'application h de C dans $\mathbb{C}$ définie par

$$h(p) = h_\alpha(p) \quad \text{si} \quad p \in C_\alpha \quad \text{vérifie}$$

1. h est croissante
2. Si p et q sont incompatibles, alors $h(p) \wedge h(q) = \mathbb{O}$
3. $\forall c \in \mathbb{C} - \{\mathbb{O}\} \; \exists p \in C \quad h(p) \leqslant c$.

On appellera h le plongement canonique de C dans $\mathbb{C}$. On sait donc par le théorème II.3 définir le C-forcing faible.

Proposition III.3

Si (clôt $a \cup$ clôt $b) \cap C \subseteq C_\alpha$ et $p \in C_\alpha$, on a

$p \Vdash_\alpha \bar{a} \in \bar{b} \iff p \Vdash \bar{a} \in \bar{b}$ et $p \Vdash_\alpha \bar{a} \neq \bar{b} \iff p \Vdash \bar{a} \neq \bar{b}$ où $\Vdash_\alpha$ désigne le forcing faible sur C_α

Démonstration

Par induction sur (rga $\cup$ rgb, rga $\cap$ rgb) pour le bon ordre $(\alpha,\beta) \leqslant (\alpha',\beta') \iff \alpha < \alpha'$ ou $\alpha = \alpha'$ et $\beta \leqslant \beta'$ pour les couples (a,b) tels que (clôt $a \cup$ clôt $b) \cap C \subseteq C_\alpha$

On a $[\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_C = \sup\limits_{\substack{(c,p) \in b \\ p \in C}} h(p) \wedge [\![\bar{a} = \bar{c}]\!]_C = \sup\limits_{\substack{(c,p) \in b \\ p \in C_\alpha}} h(p) \wedge [\![\bar{a} = \bar{c}]\!]_{C_\alpha}$

puisque 1. $(c,p) \in b \Longrightarrow p \in C_\alpha$
2. h prolonge h_α
3. $[\![\bar{a} = \bar{c}]\!]_C = [\![\bar{a} = \bar{c}]\!]_{C_\alpha}$ par hypothèse d'induction

donc $[\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_C = [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_{C_\alpha}$

On prouve de même que $[\![\bar{a} \neq \bar{b}]\!]_C = [\![\bar{a} \neq \bar{b}]\!]_{C_\alpha}$

D'après le théorème II.3 , on a pour $p \in C_\alpha$

$$p \Vdash \bar{a} \in \bar{b} \Longleftrightarrow h(p) \leqslant [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_C$$

$$p \Vdash_\alpha \bar{a} \in \bar{b} \Longleftrightarrow h_\alpha(p) \leqslant [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]_{C_\alpha}$$

et les relations analogues pour $a \nsubseteq b$

Donc $p \in C_\alpha \Longrightarrow p \Vdash \bar{a} \in \bar{b} \Longleftrightarrow p \Vdash_\alpha \bar{a} \in \bar{b}$

$$p \Vdash \bar{a} \nsubseteq \bar{b} \Longleftrightarrow p \Vdash_\alpha \bar{a} \nsubseteq \bar{b}$$

C.Q.F.D.

Soit alors G un M-générique sur C . On pose $G_\alpha = G \cap C_\alpha$. Il est clair que G_α est M-générique sur C_α . On note φ la fonction contractante de M pour la relation $\exists p \in G (a,p) \in b$ et φ_α la fonction contractante de M pour la relation $\exists p \in G_\alpha (a,p) \in b$.

Proposition III.4

Si a est tel que $\text{clôt } a \cap C \subseteq C_\alpha$, alors $\varphi a = \varphi_\alpha a$

Démonstration

Par induction sur le rang de a . Soit $u \in \varphi a$. Par définition de φ, il existe $(b,p) \in a$ avec $p \in G$. comme $\text{clôt } a \cap C \subseteq C_\alpha$,on a $p \in G_\alpha$ donc $\varphi_\alpha b \in \varphi_\alpha a$ par définition de φ_α . Par hypothèse d'induction on a $\varphi_\alpha b = \varphi b = u$ donc $u \in \varphi_\alpha a$

Inversement si $v \in \varphi_\alpha a$, il existe $p \in G_\alpha$ et b tels que $(b,p) \in a$. Donc $\varphi b \in \varphi a$. Par hypothèse d'induction on a $\varphi b = \varphi_\alpha b = v$

donc $v \in \varphi a$ C.Q.F.D.

Proposition III.5

Pour chaque ordinal α on définit une fonction de M dans M notée $a \leadsto \tilde{a}^\alpha$ par induction sur le rang de a .

$$\tilde{a}^\alpha = \{ (\tilde{b}^\alpha, p) / p \in C_\alpha \quad \text{rgb} < \text{rga} \quad \text{et} \quad p \Vdash_{C_\alpha} \bar{b} \in \bar{a} \}$$

Alors $\varphi_\alpha a = \varphi_\alpha \tilde{a}^\alpha = \varphi \tilde{a}^\alpha$

<u>Démonstration</u> (Par induction sur le rang de a).

Soit $u \in \varphi_\alpha a$. On a donc $u = \varphi_\alpha b$ avec $(b,p) \in a$ et $p \in G_\alpha$ donc $p \| \vdash_{C_\alpha} \bar{b} \in \bar{a}$ ce qui entraîne $(\tilde{b}^\alpha, p) \in \tilde{a}^\alpha$

On a donc par définition de φ_α

$$\varphi_\alpha \tilde{b}^\alpha \in \varphi_\alpha \tilde{a}^\alpha$$

Par hypothèse d'induction $\varphi_\alpha \tilde{b}^\alpha = \varphi_\alpha b$ donc $u \in \varphi_\alpha \tilde{a}^\alpha$

Inversement soit $u \in \varphi_\alpha \tilde{a}^\alpha$. Alors $u = \varphi_\alpha \tilde{b}^\alpha$ avec $(\tilde{b}^\alpha, p) \in a^\alpha$ $p \in G_\alpha$. Donc $p \| \vdash_{C_\alpha} \bar{b} \in \bar{a}$ d'où $\varphi_\alpha b \in \varphi_\alpha a$. Par hypothèse d'induction $\varphi_\alpha b = \varphi_\alpha \tilde{b}^\alpha$ donc $u \in \varphi_\alpha a$ et par conséquent $\varphi_\alpha a = \varphi_\alpha \tilde{a}^\alpha$.

Soit $u \in \varphi_\alpha a$. $u = \varphi_\alpha b$ avec $(b,p) \in a$ et $p \in G_\alpha$. Donc $(\tilde{b}^\alpha, p) \in \tilde{a}^\alpha$

Donc $\varphi \tilde{b}^\alpha \in \varphi \tilde{a}^\alpha$. Par hypothèse d'induction $\varphi \tilde{b}^\alpha = \varphi_\alpha b$ donc $u \in \varphi \tilde{a}^\alpha$

Inversement si $u \in \varphi \tilde{a}^\alpha$, il existe $p \in G$ et b tels que $(\tilde{b}^\alpha, p) \in \tilde{a}^\alpha$ Par définition de l'application $a \rightsquigarrow \tilde{a}^\alpha$, on a $p \in G_\alpha$ et $p \| \vdash_{C_\alpha} \bar{b} \in \bar{a}$. Donc $\varphi_\alpha b \in \varphi_\alpha a$. C'est-à-dire par hypothèse d'induction $u \in \varphi_\alpha a$.

C.Q.F.D.

<u>Corollaire III.6</u>

$$M[G] = \bigcup_{\alpha \in O_n} M[G_\alpha]$$

<u>Démonstration</u>

Soit $u \in M[G]$. Alors $u = \varphi b$ avec $b \in M$. Il existe donc α tel que clôt $b \cap C \subseteq C_\alpha$. En appliquant III.4 , on a $\varphi b = \varphi_\alpha b$ donc $u \in M[G_\alpha]$.

Inversement si $u \in M[G_\alpha]$, on a $u = \varphi_\alpha a$. D'après la proposition III.5 $u = \varphi \tilde{a}^\alpha$ donc $u \in M$

On se propose de trouver ci-après des conditions combinatoires sur C pour que les extensions génériques $< M[G], G >$ satisfaisant ZF^G

Proposition III.7

Les axiomes d'extensionalité, d'infini, d'union et de fondation sont satisfaits dans $< M[G], G >$. L'axiome du choix est satisfait dans $< M[G], G >$ s'il l'est dans M .

Démonstration

Les axiomes d'extensionalité et de fondation sont vrais dans $< M[G], G >$ car $M[G]$ est un ensemble transitif. L'axiome de l'infini est vrai car $\omega \in M$ et $M \subseteq M[G]$.

Pour vérifier l'axiome de l'union, soit $u \in M[G]$.D'après le corollaire III.6 , on a $u \in M[G_\alpha]$ pour un ordinal α . Comme $M[G_\alpha]$ est une extension générique classique, on sait que $M[G_\alpha]$ satisfait l'axiome de l'union. Soit donc $v = \bigcup_{x \in u} x$ v est encore l'union des éléments de u dans $M[G]$ donc $< M[G], G >$ satisfait l'axiome de l'union.

Supposons maintenant que l'axiome du choix soit vrai dans M et soit $u \in M[G]$. Il existe un ordinal α tel que $u \in M[G_\alpha]$. L'extension $M[G_\alpha]$ étant obtenue à partir de M par forcing ensembliste, on sait que $M[G_\alpha]$ satisfait A.C. Il existe donc une bijection f (dans $M[G_\alpha]$) d'un ordinal γ sur u . f est encore une bijection de γ sur u dans $M[G]$. Donc $< M[G], G >$ satisfait l'énoncé : "tout ensemble est bien ordonnable" .

C.Q.F.D.

Remarque III.8

Il n'est pas toujours vrai que $< M[G], G >$ satisfasse l'axiome des parties. On ne peut donc prouver l'existence d'une fonction de choix pour un ensemble u de $M[G]$ que s'il existe un ensemble des parties de u dans $M[G]$.

Afin de simplifier les énoncés des deux théorèmes ci-après, on suppose que $C = \bigcup_{\alpha \in O_n} C_\alpha$ satisfait la condition suivante :

Condition d'inf :

On dit que $C = \bigcup_{\alpha \in O_n} C_\alpha$ satisfait la condition d'inf si $\forall \alpha \in O_n$, $\forall p,q \in C_\alpha$ compatibles dans C, p et q ont un plus grand minorant commun noté $p \wedge q$ qui est un élément de C_α.

Théorème III.9

Soit $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ une famille d'ensembles de conditions de forcing emboités, soit $C = \bigcup_{\alpha \in O_n} C_\alpha$. On suppose que C satisfait la condition d'inf.

Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes :

1. $\forall G$ M-générique sur C, $< M[G], G >$ satisfait les axiomes du schéma de remplacement écrit avec G.

2. Pour tout ensemble I et toute famille $(\Delta_i)_{i \in I}$ de classes denses saturées de C, on a

Pour tout $p \in C$, il existe $q \leqslant p$, il existe un ordinal α et une famille $(\pi_i)_{i \in I}$ d'ensembles prédenses dans C_α tels que

$$\forall i \in I \quad \forall r_i \in \pi_i \ (r_i \text{ compatible avec } q \Longrightarrow q \wedge r_i \in \Delta_i)$$

Remarque III.10

Cette condition est en fait le schéma d'axiomes suivant :

$\forall I \ \forall i \in I[\{p/\Delta(i,p)\}$ dense saturée $\Longrightarrow \forall p \ \exists q \leqslant p \ \exists \alpha \in O_n \ \exists (\pi_i)_{i \in I}$ famille de parties prédenses de C_α telles que $\forall i \in I \ \forall r_i \in \pi_i$

r_i compatible avec $q \Longrightarrow \Delta(i, r_i \wedge q)]$

Δ parcourant la collection des énoncés du langage $\in, =$ à deux arguments à paramètres dans M.

Démonstration

(2) $\Longrightarrow$ (1) Soit $E(x,y)$ une relation fonctionnelle dans $<M[G],G>$ écrite avec G à paramètres dans $M[G]$. Soit φa un élément de $M[G]$. On veut trouver b tel que φb soit l'image de φa par E.

On pose $I = \text{clôt } a$ et $\Delta_i = \{p \in C / p \Vdash ? \exists y E(\bar{i},y) \wedge \bar{i} \in \bar{a}\}$ pour chaque $i \in I$. On sait que chaque Δ_i est dense saturée.

En appliquant (2), la classe des $p \in C$ vérifiant $\exists \alpha \in O_n \exists (\pi_i)_{i \in I}$ famille de parties prédenses de C_α tels que $\forall i \in I \ \forall r_i \in \pi_i$ r_i compatible avec $p \longrightarrow r_i \wedge p \in \Delta_i$. G rencontre donc cette classe dense. Soit donc $p_o \in G$, soient $\alpha \in O_n$ et $(\pi_i)_{i \in I}$ famille de parties prédenses de C_α tels que $\forall i \in I \ \forall r_i \in \pi_i$ (r_i compatible avec $p_o \Longrightarrow r_i \wedge p_o \in \Delta_i$). On prend $\beta \geqslant \alpha$ tel que $p_o \in C_\beta$. Comme $C_\alpha \hookrightarrow C_\beta$, chaque π_i est encore prédense dans C_β. On définit alors pour $i \in I$ et $p \in C$

$$\Phi(i,p) = \{ y \text{ de rang minimum} / p \Vdash E(\bar{i},\bar{y}) \wedge \bar{i} \in \bar{a}\}$$

On pose

$$b = \{(y,p) / p \in C_\beta \text{ et } \exists i \in I \ \ y \in \Phi(i,p)\}$$

b est un ensemble de M (on utilise ici le schéma de remplacement dans M)

Montrons que b convient

Soit $\varphi u \in \varphi b$. Il existe $p \in G$ et y tels que $\varphi u = \varphi y$ et $(y,p) \in b$ (par définition de la fonction contractante φ). Donc par définition de b, il existe $i \in I$ tel que $p \Vdash E(\bar{i},\bar{y}) \wedge \bar{i} \in \bar{a}$. Comme $p \in G$, par le lemme de vérité on a

$$<M[G],G> \models \varphi i \in \varphi a \text{ et } E(\varphi i, \varphi y)$$

Inversement soit $E(\varphi i, \varphi u)$ avec $\varphi i \in \varphi a$

On prend $p \in \pi_i \cap G$ (π_i rencontre $G \cap C_\beta$ puisqu'il est prédense dans C_β). Il existe donc $p_1 \in C_\beta \cap G$ $p_1 \leqslant p_o$. Par définition de π_i, on a $p_1 \in \Delta_i$. Par définition de Δ_i, p_1 décide $\exists y E(\bar{i},y)$ et $\bar{i} \in \bar{a}$.

Donc $p_1 \Vdash \exists y E(\bar{i},y) \wedge \bar{i} \in \bar{a}$ puisque cet énoncé est vrai dans $< M[G],G >$
On a donc $\Phi(i,p_1) \neq \emptyset$. Soit $y \in \Phi(i,p_1)$. Comme $p_1 \in C_\beta$, on a $(y,p_1) \in b$ par définition de b. Comme $p_1 \in G$, on a (lemme de vérité)
$< M[G],G > \models E(\varphi i, \varphi y) \wedge \varphi y \in \varphi b$. Comme E est une relation fonctionnelle et comme $< M[G],G > \models E(\varphi i, \varphi u)$, on conclut que $\varphi u = \varphi y$ c'est-à-dire $\varphi u \in \varphi b$. C.Q.F.D. $((2) \Longrightarrow (1))$

$(1) \Longrightarrow (2)$ Soit $(\Delta_i)_{i \in I}$ une famille de classes denses saturées indexées par un ensemble I . Soit $p \in C$. On veut trouver $q \leqslant p, \alpha \in O_n$ et $(\pi_i)_{i \in I}$ famille de parties prédenses de C_α tels que $\forall i \in I \ \forall r_i \in \pi_i (r_i$ compatible avec $q \Longrightarrow r_i \wedge q \in \Delta_i)$.

Pour cela soit G un générique contenant p .

$$< M[G],G > \models \exists \alpha \forall i \in I \ G \cap \Delta_i \cap C_\alpha \neq \emptyset$$

En effet on considère la relation fonctionnelle $E(i,X)$ où $X = \{p$ de rang minimum$/ p \in G \cap \Delta_i\}$

Par hypothèse $< M[G],G >$ satisfait le schéma de remplacement écrit avec G . L'image de I par cette relation fonctionnelle est un ensemble χ . $\underset{X \in \chi}{\cup X}$ est donc contenu dans un certain C_α d'où le résultat annoncé. On a donc (lemme de vérité) un $q \in G$ $q \leqslant p$ et $\alpha \in O_n$ avec

$$q \Vdash \forall i \in I \ G \cap \Delta_i \cap C_\alpha \neq \emptyset$$

donc $\forall i \in I$ $q \Vdash G \cap \Delta_i \cap C_\alpha \neq \emptyset$ (forcing faible)

On pose $\pi_i = \Delta_i \cap C_\alpha \cup (\Delta_i \cap C_\alpha)^c$ où $(\Delta_i \cap C_\alpha)^c$ désigne l'ensemble des éléments de C_α imcompatibles avec tous les éléments de $\Delta_i \cap C_\alpha$. π_i est prédense dans C_α .

Soit alors $r_i \in \pi_i$ r_i compatible avec q . On veut prouver que $r_i \wedge q \in \Delta_i$

Or $r_i \wedge q \leqslant q \Longrightarrow r_i \wedge q \Vdash \exists s \in G \cap \Delta_i \cap C_\alpha$ c'est-à-dire (forcing faible) $\exists r_2 \leqslant r_i \wedge q \ \exists s \geqslant r_2 \ s \in \Delta_i \cap C_\alpha$. r_i est donc compatible avec un élément

$t \in \Delta_i \cap C_\alpha$. Par condition d'emboîtement, r et t qui sont des éléments de C_α sont compatibles dans C_α . Donc r_i ne peut appartenir à $(\Delta_i \cap C_\alpha)^c$. C'est-à-dire que $r_i \in \Delta_i \cap C_\alpha$. Comme la classe Δ_i est saturée, $r_i \in \Delta_i$ et $r_i \wedge q \leq r_i \Longrightarrow r_i \wedge q \in \Delta_i$ C.Q.F.D. (1) $\Longrightarrow$ (2)

Théorème III.11

Une condition suffisante pour que $\forall G$ M-générique sur C, $< M[G], G >$ satisfasse l'axiome des parties est que

$\forall p \forall I\ \exists q \leq p\ \exists \alpha \in O_n\ \forall (P_i)_{i \in I}$ famille d'ensembles prédenses de C

$\forall r \leq q\ \exists s \leq r\ \exists (\pi_i)_{i \in I}$ famille de parties prédenses de C_α tels que

$\forall r_i \in \pi_i$ compatible avec s , $r_i \wedge s$ minore un élément de P_i .

Démonstration

Soit $\varphi a \in M[G]$. On pose $I = \text{clôt}(a)$. En appliquant l'hypothèse, on déduit $p_o \in G$ et $\alpha \in O_n$ tels que $\forall (P_i)_{i \in I}$ famille d'ensembles prédenses de C , $\forall p \leq p_o\ \exists q \leq p\ \exists (\pi_i)_{i \in I}$ famille de parties prédenses de C_α tels que $\forall r_i \in \pi_i$ compatible avec q , $r_i \wedge q$ minore un élément de P_i . Soit alors $\varphi b \subset \varphi a$. Il existe β tel que $\text{clôt}(a \cup b) \cap C \subseteq C_\beta$. On pose alors $P_i = \{p \in C_\beta / p \| \overset{?}{\vdash} \bar{i} \in \bar{b}$ pour chaque $i \in I$. P_i est prédense dans C_β donc dans C par condition d'emboîtement. En appliquant l'hypothèse, on déduit $p_1 \in G$ $p_1 \leq p_o$ et $(\pi_i)_{i \in I}$ famille de parties prédenses de C_α tels que $\forall i \in I$ $\forall r_i \in \pi_i$, r_i compatible avec $p_1 \longrightarrow r_i \wedge p_1$ minore un élément de P_i .

Soit $c = \{(i,p) / i \in I\ , p \in C_\alpha$, p compatible avec p_1 et $p \wedge p_1 \| \vdash \bar{i} \in \bar{b}\}$ c est un ensemble par schéma de remplacement dans M . Montrons que $\varphi c = \varphi b$

Si $\varphi u \in \varphi c$ on a $\varphi u = \varphi y$ avec $p \in G$ et $(y,p) \in c$. On a $y \in I$ puisque $(y,p) \in c \cdot p \wedge p_1 \| \!\vdash \bar{y} \in \bar{b}$ donc $\varphi y \in \varphi b$. Inversement si $\varphi i \in \varphi b$ pour $i \in I$, on prend $p \in \pi_i \cap G$ (π_i étant prédense rencontre G). On a donc $p \in C_\alpha$

Comme $p \wedge p_1$ minore un élément de P_i , on a $p \wedge p_1 \| \!\overset{?}{\vdash} \bar{i} \in \bar{b}$. Comme $\varphi i \in \varphi b$ et $p \wedge p_1 \in G$, on a nécessairement $p \wedge p_1 \| \!\vdash \bar{i} \in \bar{b}$. Donc $(i,p) \in c$ c'est-à-dire $\varphi i \in \varphi c$.

Soit alors $d = \{(c,p)/p \in C_\alpha$ clôt $c \cap C \subseteq C_\alpha$ et $p \| \!\vdash_{C_\alpha} \bar{c} \subset \bar{a}\}$

Montrons que φd est l'ensemble des parties de φa qui sont dans $M[G]$

Si $\varphi b \in \varphi d$, on a $\varphi d = \varphi_\alpha d$ d'après la proposition III.4 puisque clôt $d \cap C \subseteq C_\alpha$. On a donc $p \in C_\alpha \cap G$ et $(c,p) \in d$ et $p \| \!\vdash \bar{c} = \bar{b}$. Donc $p \| \!\vdash_{C_\alpha} \bar{c} \subset \bar{a}$ d'où (lemme de vérité) $\varphi_\alpha c \subset \varphi_\alpha a$

Comme $\varphi_\alpha c = \varphi c$ et $\varphi_\alpha a = \varphi a$ et $\varphi c = \varphi b$, on déduit que

$$\varphi b \subset \varphi a .$$

Inversement soit $\varphi b \subset \varphi a$. D'après ce qui précède, on a $\varphi b = \varphi c$ avec $c \subseteq I \times C_\alpha$. Donc $\varphi c = \varphi_\alpha c$. Comme $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha a$, on a $M[G_\alpha] \models \varphi_\alpha c \subseteq \varphi_\alpha a$. D'où (lemme de vérité) il existe $p \in G_\alpha$ $p \| \!\vdash_{C_\alpha} \bar{c} \subset \bar{a}$.

Donc $(c,p) \in d$ c'est-à-dire $\varphi c \in \varphi d$ C.Q.F.D.

<u>Exemples</u>

On donne ci-après une méthode [2] permettant de construire des classes de conditions de forcing emboîtées satisfaisant les conditions des théorèmes III.9 et III.11 .

On donne aussi une méthode permettant de construire des classes de conditions emboîtées satisfaisant les conditions équivalentes du théorème III.9 .

<u>Exemple 1</u>

Soit $(D_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ une famille d'ensembles de conditions de forcing dont le plus grand élément est noté $\mathbb{1}_\alpha$.

On pose $C = \{ f / \exists \alpha f \in \prod_{\beta \leq \alpha} D_\beta \}$

Soient f et g deux éléments de C . On dit que $f \leqslant g$ $\iff \forall \gamma \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g \;\; f(\gamma) \leqslant g(\gamma)$ et si $\forall \gamma \in \mathrm{dom}\, g - \mathrm{dom}\, f \;\; g(\gamma) = \mathbb{1}_\gamma$.
Donc si l'on identifie deux éléments f et g de C tels que
$\forall \gamma \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g \;\; f(\gamma) = g(\gamma)$ et $\forall \gamma \in \mathrm{dom}\, g - \mathrm{dom}\, f \;\; g(\gamma) = \mathbb{1}_\gamma$ et $\forall \gamma \in \mathrm{dom}\, f - \mathrm{dom}\, g \;\; f(\gamma) = \mathbb{1}_\gamma$, la relation de préordre ci-dessus devient une relation d'ordre sur C .

On pose alors pour chaque ordinal α

$$C_\alpha = \{f \in C / \alpha < \beta < \mathrm{dom}\, f \Longrightarrow f(\beta) = \mathbb{1}_\beta\}$$

Il est clair que la famille $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ est croissante et que $C = \bigcup_{\alpha \in O_n} C_\alpha$

Soit $\alpha \leqslant \beta$. Si deux éléments de C_α sont incompatibles dans C_α, ils le sont encore dans C_β .

Si Δ est une partie prédense de C_α, alors Δ est aussi une partie prédense de C_β. En effet soit $f \in C_\beta$. Alors $f \upharpoonright \alpha + 1 \in C_\alpha$ et est par conséquent compatible dans C_α avec un élément g de Δ . Soit h un minorant commun dans C_α à $f \upharpoonright \alpha + 1$ et g . Si on définit $\bar{h}$ par $\bar{h}(\gamma) = h(\gamma)$ pour $\gamma \leqslant \alpha$ et $\bar{h}(\gamma) = f(\gamma)$ si $\gamma > \alpha$, $\bar{h}$ sera clairement un minorant commun à f et g .

C_α est donc emboîté dans C_β .

On suppose désormais que pour chaque ordinal α , deux éléments compatibles de D_α ont un plus grand minorant dans D_α .

On voit alors que $\forall \alpha \in O_n \; \forall p \forall q \; (p \in C_\alpha$ et $q \in C_\alpha$ et p compatible avec q dans $C_\alpha \Longrightarrow$ p et q ont un plus grand minorant dans C_α qui est aussi le plus grand minorant dans C . C satisfait donc la condition d'inf.

Définition III.12

K étant un cardinal et D un ensemble de conditions de forcing, on dit que D satisfait la condition d'antichaîne plus petite que K - et on note $<$ K c.a.c - si toute partie de D constituée d'éléments deux à deux incompatibles a un cardinal strictement plus petit que K .

On dit que D satisfait la condition de chaîne plus petite que K si toute famille d'éléments de D deux à deux comparables de cardinal strictement plus petit que K est minorée par un élément de D . On note $< K$ c.c.

Théorème III.13

> Si $\forall \lambda \in O_n$ il existe un cardinal $K \geqslant \lambda$ et un ordinal α tels que
>
> $$\prod_{\gamma \leqslant \alpha} D_\gamma \text{ satisfasse la } < K \text{ c.a.c}$$
>
> et $\forall \gamma > \alpha$ D_γ satisfasse la $< K$ c c
> alors $\forall G$ M-générique sur C , $< M[G], G > \models ZF^G$

Notations

Soient $f \in C$ et $\alpha \in O_n$. On pose $f_\alpha = f \upharpoonright \alpha + 1$ et on définit f^α par $f^\alpha(\gamma) = f(\gamma)$ si $\gamma > \alpha$ et $f^\alpha(\gamma) = 1\!\!1_\gamma$ si $\gamma \leqslant \alpha$. On a alors $C_\alpha = \{ f_\alpha / f \in C\}$
En posant $C^\alpha = \{f^\alpha / f \in C\}$, on remarque que C est isomorphe à $C_\alpha \times C^\alpha$
La démonstration du théorème III.13 utilise le lemme suivant

Lemme III.14

> Soit $(\Delta_i)_{i \in I}$ une famille de classes denses saturées de C . On pose
> $\Delta_i^\alpha = \{ f^\alpha \in C^\alpha / \exists \pi$ prédense dans C_α tel que $\forall g_\alpha \in \pi \;\; g_\alpha \wedge f^\alpha \in \Delta_i \}$
> où α est tel que C_α satisfasse la $< K$ c.a.c et C^α satisfasse la $< K$ c.c.
> Un tel α existe d'après l'hypothèse du théorème III.13

Démonstration du lemme III.14

La preuve utilise A.C.

Puisque C^α satisfait la $< K$ c.c et puisque $\overline{\overline{I}} < K$, on sait que

$\bigcap_{i \in I} \Delta_i^\alpha$ est dense saturé dès que chaque Δ_i^α l'est.

Soit donc $f_o^\alpha \in C^\alpha$. On veut trouver $h^\alpha \in C^\alpha$ $h^\alpha \leqslant f_o^\alpha$ et π prédense dans C_α tel que $\forall g_\alpha \in \pi$ $g_\alpha \wedge h^\alpha \in \Delta_i$.

On construit pour cela par induction sur les ordinaux deux familles $(f^{\alpha}_{\delta})_{\delta \in O_n}$ et $(g_{\alpha\delta})_{\delta \in O_n}$ qui sont respectivement une chaîne décroissante d'éléments de C^{α} et une antichaîne d'éléments de C_{α}.

Si $\gamma = 0$ on prend f^{α}_{o} et pour $g_{\alpha o}$ n'importe quel élément de C_{α}

Si $\gamma = \delta + 1$, on choisit (A.C) $g \in C_{\alpha}$ incompatible avec tous les $g_{\alpha\delta'}$ $(\delta' \leqslant \delta)$ s'il existe. On déduit donc $f \in \Delta_i$, $f \leqslant f^{\alpha}_{\delta} \wedge g$ puisque Δ_i est dense dans C. On pose alors $f^{\alpha}_{\gamma} = f^{\alpha}$ et $g_{\alpha\gamma} = f_{\alpha}$

Si γ est limite > 0, $(g_{\alpha\delta})_{\delta < \gamma}$ est une famille de conditions de C_{α} deux à deux incompatibles. Par $< K$ c.a.c on a $\gamma < K$. Par $< K$ c.c la chaîne $(f^{\alpha}_{\delta})_{\delta < \gamma}$ est minorée par f^{α}. On choisit alors (A.C) $g \in C_{\alpha}$ incompatible avec la famille $(g_{\alpha\delta})_{\delta < \gamma}$ s'il existe. On déduit $f' \in \Delta_i$ $f' \leqslant f^{\alpha} \wedge g$. On pose alors $g_{\alpha\gamma} = f'_{\alpha}$ et $f^{\alpha}_{\gamma} = f'^{\alpha}$

La construction s'arrête dès que la famille $g_{\alpha\delta}$ est une antichaîne maximale de C_{α}. Par $< K$ c.a.c il existe donc $\gamma < K$ tel que $(g_{\alpha\delta})_{\delta \in O_n} = (g_{\alpha\delta})_{\delta < \gamma}$. Par $< K$ c.c, la chaîne $(f^{\alpha}_{\delta})_{\delta < \gamma}$ est minorée par un élément h^{α} de C_{α}.

Montrons que h^{α} convient. En effet $(g_{\alpha\delta})_{\delta < \gamma}$ étant une antichaîne maximale de C_{α}, les éléments de cette famille constituent une partie prédense de C_{α}.

Si $g_{\alpha\delta}$ est un élément de cette famille, on a $g_{\alpha\delta} \wedge f^{\alpha}_{\delta} \in \Delta_i$ par construction. Donc $g_{\alpha\delta} \wedge h^{\alpha} \in \Delta_i$ puisque Δ_i est saturée. C.Q.F.D.

(lemme III.14)

Démonstration du théorème III.13

Il suffit de prouver les conditions combinatoires des théorèmes III.9 et III.11 ce qui implique le schéma de remplacement et l'axiome des parties dans $< M[G], G >$.

Soit I un ensemble et soit $(\Delta_i)_{i\in I}$ une famille de classes denses saturées. D'après le lemme III.14, il existe un ordinal α tel que $\bigcap_{i\in I} \Delta_i^{\alpha}$, soit une partie dense saturée de C^{α}.

Soit alors $p \in C$. On a $p^{\alpha} \in C^{\alpha}$. Il existe alors par densité $\bar{q}_o^{\alpha} \in C^{\alpha}$ $q_o^{\alpha} \leqslant p^{\alpha}$ et $q_o^{\alpha} \in \bigcap_{i\in I} \Delta_i^{\alpha}$

Donc par définition de Δ_i^{α}, pour chaque $i \in I$, on choisit π_i prédense dans C_{α} tel que $\forall g_{\alpha} \in \pi_i$ $g_{\alpha} \wedge q_o^{\alpha} \in \Delta_i$

On a donc prouvé en prenant pour q $g_{\alpha} \wedge q_o^{\alpha}$ que

$\exists \alpha \in O_n$ $\forall p \exists q \leqslant p$ $\exists (\pi_i)_{i\in I}$ famille de parties prédenses de C_{α} tels que $\forall i \in I$ $\forall r_i \in \pi_i$ (r_i compatible avec $q \Longrightarrow$ $q \wedge r_i \in \Delta_i$)

La condition combinatoire du théorème III.9 est donc satisfaite. Comme α ne dépend que de I, la condition du théorème III.11 l'est également.

C.Q.F.D. (théorème III.13)

Exemple 2.

Introduction :

Lorsqu'on veut faire une itération d'extensions de COHEN à partir d'ensembles de conditions de forcing, on est amené à considérer des ensembles de conditions de forcing C_o, C_1, emboîtés les uns dans les autres.

Si l'on veut faire une itération transfinie, le plus simple est de prendre pour C_{α}, lorsque α est limite, la réunion des C_{β} $\beta < \alpha$.

Théorème III.15

Soit $(C_{\alpha})_{\alpha \in O_n}$ une famille d'ensembles de conditions de forcing emboîtés.

On suppose que cette famille est croissante et continue c'est-à-dire $C_{\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} C_{\beta}$ dès que α est un ordinal limite > 0.

Alors toute antichaîne de C est un ensemble.

Démonstration

On suppose d'abord qu'il existe un bon ordre de l'univers.

Soit alors A une antichaîne maximale de C . A est à priori une classe. On définit une fonction F (qui est une classe) de O_n dans O_n par

$F(\alpha)$ = le 1er ordinal β tel que tout élément de C_α soit compatible avec un élément de $A \cap C_\beta$.

Cette fonction est croissante. Elle est également continue car soit $p \in C$. $p \in C_\beta$ pour un $\beta < \alpha$ puisque $C_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} C_\beta$ p est donc compatible avec un élément de $A \cap C_{F(\beta)}$ Tout élément de C_α est donc compatible avec un élément de $A \cap C_{\sup\limits_{\beta < \alpha} F(\beta)}$. Par définition de F on a donc $F(\alpha) = \sup\limits_{\beta < \alpha} F(\beta)$

La fonction F croissante et continue admet donc un point fixe α_o . Tout élément de C_{α_o} est donc compatible avec un élément de $A \cap C_{\alpha_o}$. $A \cap C_{\alpha_o}$ est donc prédense dans C_{α_o} et par suite dans C . Comme A est une antichaîne maximale de C , on a $A \cap C_{\alpha_o} = A$ ce qui prouve que A est un ensemble.

On remarque alors que ce théorème est en fait un schéma d'énoncés du langage de ZF. Ce schéma est démontrable dans G.B + "Il existe un bon ordre de l'univers". Il est donc démontrable d'après le théorème I.6. dans ZF + AC . C.Q.F.D.

Théorème III.16

Soit $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ une famille croissante et continue d'ensembles de conditions de forcing emboîtés. Alors $C = \bigcup_{\alpha \in O_n} C_\alpha$ satisfait les conditions équivalentes du théorème III.9.

<u>Démonstration</u>

Soit Δ une classe dense saturée de C . Il existe un ordinal α tel que $\Delta \cap C_\alpha$ soit prédense dans C_α . En effet grâce à un bon ordre de l'univers, il existe une antichaîne maximale de Δ . Cette antichaîne est donc d'après le théorème III.15 un ensemble contenu dans un certain C_α . $\Delta \cap C_\alpha$ contient donc une antichaîne maximale dans C_α et par suite est prédense dans C_α .

Soit enfin $(\Delta_i)_{i \in I}$ une famille de classes denses saturées indexée par un un ensemble I . A chaque Δ_i on associe le premier ordinal α_i tel que $\Delta \cap C_{\alpha_i}$ soit prédense dans C_{α_i} . Soit $\alpha = \sup_{i \in I} \alpha_i$. Par condition d'emboîtement, les $\Delta \cap C_{\alpha_i}$ sont prédenses dans C_α .

On a donc pour chaque $p \in C$

$\forall i \in I\ \forall r_i \in \Delta \cap C_{\alpha_i}$ (r_i compatible avec $p \Longrightarrow r_i \wedge p \in \Delta_i$). La condition (2) du théorème III.9 est donc satisfaite. Toujours d'après le théorème I.6 , ce théorème est démontrable dans ZF + AC   C.Q.F.D.

On se propose dans la fin de ce chapitre d'étudier les extensions génériques de M à partir de la classe C des fonctions définies sur un entier à valeurs dans la classe des ordinaux. On suppose pour simplifier les démonstrations qu'il existe une classe de M qui bien ordonne M .

<u>Lemme III.17</u>

Soit D la classe des fonctions définies sur un ordinal à valeurs dans un entier, l'ordre étant le prolongement des fonctions. Il existe alors une fonctionnelle Φ de C dans D injective croissante dont l'image est dense dans D .

<u>Démonstration</u>

Pour $n < \omega$, on pose $\Delta_n = \{p \in D / n \in \mathrm{Im}(p)\}$

Donc $m \geqslant n \Longrightarrow \Delta_m \subseteq \Delta_n$

Il est clair que Δ_n est dense saturé et que $\bigcap_{n<\omega} \Delta_n = \emptyset$

On définit d'abord une fonctionnelle $q_{n,p,\alpha}$ où n parcourt ω, p parcourt D et α parcourt O_n, de la manière suivante :

<u>1er Cas</u>

$n \in \mathrm{dom}(p)$. Soit σ une bijection de O_n sur $O_n \times (\omega - \{0\})$

On pose $\sigma(\alpha) = (\sigma_0(\alpha), \sigma_1(\alpha))$ $\quad \sigma_0(\alpha) \in O_n$ $\quad \sigma_1(\alpha) \in \omega - \{0\}$

On définit alors $q_{n,p,\alpha}$ comme étant la fonction de domaine $\mathrm{dom}(p) + \sigma_0(\alpha) + 1$ par

$$\beta < \mathrm{dom}(p) \Longrightarrow q_{n,p,\alpha}(\beta) = p(\beta)$$

$$\mathrm{dom}\, p \leqslant \beta < \mathrm{dom}(p) + \sigma_0(\alpha) \Longrightarrow q_{n,p,\alpha}(\beta) = 0$$

$$q_{n,p,\alpha}(\mathrm{dom}(p) + \sigma_0(\alpha)) = \sigma_1(\alpha)$$

La famille $(q_{n,p,\alpha})_{\alpha \in O_n}$ est donc une classe propre qui est une antichaîne maximale parmi les minorants de p. Il est en effet clair par construction que deux éléments de cette famille sont incomparables. De plus si $q \leqslant p$, soit α_0 le premier ordinal tel que $\alpha_1 = q(\mathrm{dom}(p) + \alpha_0)$ s'il existe un tel α_0. Alors $q \wedge (\mathrm{dom}(p) + \alpha_0) = q_{n,p,\alpha}$ où α est tel que $\sigma_0(\alpha) = \alpha_0$ $\quad \sigma_1(\alpha) = \alpha_1$

q minore donc un $q_{n,p,\alpha}$

S'il n'existe pas un tel α_0, soit $\alpha'_0 = (\mathrm{dom}(q) - \mathrm{dom}(p)) + 1$ et α tel que $\sigma_0(\alpha) = \alpha'_0$ et $\sigma_1(\alpha) = 1$

On a alors $q_{n,p,\alpha} \leqslant q$ car pour cet α on a

$$\mathrm{dom}(q_{n,p,\alpha}) = \mathrm{dom}(p) + \sigma_o(\alpha) = \mathrm{dom}(q) + 1$$

avec

$$q_{n,p,\alpha}(\mathrm{dom}(q)) = \sigma_1(\alpha) = 1$$

et

$$\mathrm{dom}(p) \leqslant \beta < \mathrm{dom}\ q \Longrightarrow q_{n,p,\alpha}(\beta) = 0$$

c'est-à-dire

$$q_{n,p,\alpha} \leqslant q$$

<u>Deuxième cas</u>

$n \not\subset \mathrm{dom}(p)$. Soit E la classe des $q < p$ tels que $n \subset \mathrm{dom}(q)$ et $\forall r > q \quad n \not\subset \mathrm{Im}(r)$.

E est une classe propre d'éléments deux à deux incomparables par construction.

E est maximale dans la classe des minorants de p car soit q un minorant de p :

ou bien $n \subset \mathrm{Im}(q)$ et alors q minore un élément de E par définition de E.

ou bien $n \not\subset \mathrm{Im}(q)$. Il existe alors $r \leqslant q$ tel que $n \subset \mathrm{Im}(r)$.

On prend r' de domaine minimum, $r' \geqslant r$ et $n \subset \mathrm{Im}(r')$

On a donc $r' \in E$. r' est comparable à q puisque l'on a $r \leqslant q$ et $r \leqslant r'$. On ne peut avoir $r' > q$ puisque $n \subset \mathrm{Im}(r')$. Donc $r' \leqslant q$.

On énumère alors E par $(q_{n,p,\alpha})_{\alpha \in O_n}$ en suivant le bon ordre de l'univers.

Dans les deux cas, n et p étant fixés, $(q_{n,p,\alpha})_{\alpha \in O_n}$ est une famille d'éléments de Δ_n deux à deux incomparables telle que $\forall q \leqslant p \quad \exists \alpha \in O_n$ q incomparable avec $q_{n,p,\alpha}$.

On construit alors $\Phi : C \longrightarrow D$ par induction sur les éléments de C

pour la relation bien fondée R définie par $fRg \Longleftrightarrow g < f$ de sorte que $\mathrm{dom}(f) = n$ entraîne $\Phi(f) \in \Delta_n$.

Les clauses d'induction sont

$$\Phi(\emptyset) = \emptyset$$

Si f est de domaine $n + 1$, on pose

$$\Phi(f) = q_{n+1,\Phi(f \wedge n),f(n)}$$

Par définition de $q_{n,p,\alpha}$, on a bien

$$\mathrm{dom}(f) = n \Longrightarrow \Phi(f) \in \Delta_n$$

Montrons que Φ est croissante

Par définition de Φ, on a $\Phi(f) < \Phi(f \wedge n)$

En itérant ce procédé, on a donc

$$f < g \Longrightarrow \Phi(f) < \Phi(g)$$

Soient d'autre part f et g incomparables

Soit n_o le premier entier tel que $f(n_o) = g(n_o)$

On a

$$\Phi(f \wedge n_o+1) = q_{n_o+1,\Phi(f \wedge n_o),f(n_o)}$$

$$\Phi(g \wedge n_o+1) = q_{n_o+1,\Phi(g \wedge n_o),g(n_o)}$$

Comme $f \wedge n_o = g \wedge n_o$, on a par construction de $q_{n,p,\alpha}$

$$\Phi(g \wedge n_o+1) \text{ incomparable à } \Phi(f \wedge n_o+1)$$

Comme Φ est croissante, on déduit que

$$\Phi(f) \text{ et } \Phi(g) \text{ sont incomparables.}$$

Montrons enfin que $\Phi(C)$ est dense dans D.

Par définition de Φ, il existe pour chaque $n < \omega$ un $f_n \in C$ de domaine n tel que q soit comparable à $\Phi(f_n)$

q ne peut minorer tous les $\Phi(f_n)$ puisque l'on a

$$\Phi(f_n) \in \Delta_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n<\omega} \Delta_n = \emptyset$$

Il existe donc un n tel que q soit minoré par $\Phi(f_n)$. C.Q.F.D.

Lemme III.18

Soit G un M-générique sur C . Alors $M[G] = M$

Démonstration

Soit $H = \{p \in D / \exists f \in G \quad \Phi(f) \leqslant p\}$

D'après le lemme II.7, on sait que H est M-générique sur D et que $M[G] \subseteq M[H]$.

Posons alors $D_\alpha = \{p \in D / \mathrm{dom}(p) \leqslant \alpha\}$

La famille $(D_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ est une famille emboîtée. On a $D = \bigcup_{\alpha \in O_n} D_\alpha$

Si l'on pose $H_\alpha = H \cap D_\alpha$, on sait que H_α est M-générique sur D_α et que $M[H] = \bigcup_{\alpha \in O_n} M[H_\alpha]$ d'après le corollaire III.6.

Mais chaque D_α est un ensemble de conditions de forcing atomique puisque les éléments de domaine n'ont pas de minorant. Donc $M[H_\alpha] = M$ ce qui entraîne $M[G] = M[H] = M$ C.Q.F.D.

Remarque III.19

La classe D étant réunion d'ensembles de conditions de forcing emboîtés, se plonge de façon dense dans une algèbre de BOOLE complète pour les ensembles.

D'après le lemme III.17 , C se plonge aussi de façon dense dans une algèbre de BOOLE complète pour les ensembles. On sait donc définir une relation de forcing faible pour C .

IV - A PROPOS DES MODELES BOOLEENS

Introduction

Soit $\mathbb{B}$ une algèbre de BOOLE qui est une classe propre, complète pour les ensembles.

On définit simultanément $[\![\bar{a} \in \bar{b}]\!]$ et $[\![\bar{a} = \bar{b}]\!]$ pour chaque couple (a,b) d'éléments de M par induction sur (rg a $\cup$ rg b, rg a $\cup$ rg b) pour le bon ordre $(\alpha,\beta) \leqslant (\alpha',\beta') \iff \alpha < \alpha'$ ou $\alpha = \alpha'$ et $\beta \leqslant \beta'$

Les clauses d'induction sont

$$[\![\bar{a} \in \bar{b}]\!] = \sup_{\substack{(v,\theta) \in b \\ \theta \in \mathbb{B}}} \theta \wedge [\![\bar{a} = \bar{v}]\!]$$

$$[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] = \inf_{\substack{(v,\theta) \in b \\ \theta \in \mathbb{B}}} \theta^c \vee [\![\bar{v} \in \bar{a}]\!] \wedge \inf_{\substack{(v,\theta) \in a \\ \theta \in \mathbb{B}}} \theta^c \vee [\![\bar{v} \in \bar{b}]\!]$$

Lemme IV.1

1. $[\![\bar{a} = \bar{a}]\!] = \mathbb{1}$
2. $[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] = [\![\bar{b} = \bar{a}]\!]$
3. $[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] \wedge [\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \leqslant [\![\bar{a} = \bar{c}]\!]$
4. $[\![\bar{a} = \bar{a}']\!] \wedge [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!] \leqslant [\![\bar{a}' \in \bar{b}]\!]$
5. $[\![\bar{b} = \bar{b}']\!] \wedge [\![a \in \bar{b}]\!] \leqslant [\![a \in \bar{b}']\!]$.

Démonstration

1. On le prouve par induction sur le rang de a.

Pour chaque couple (b,θ) qui appartient à a $(\theta \in \mathbb{B})$ on a

$$\theta = \theta \wedge [\![\bar{b} = \bar{b}]\!] \leqslant [\![\bar{b} \in \bar{a}]\!]$$

donc

$$\inf_{\substack{(b,\theta) \in a \\ \theta \in \mathbb{B}}} \theta^c \vee [\![\bar{b} \in \bar{a}]\!] = \mathbb{1} \quad \text{soit} \quad [\![\bar{a} = \bar{a}]\!] = \mathbb{1}$$

2. La définition est symétrique en a et b .

3. Supposons que pour tout $b \in M$ et tout couple $(d,\theta) \in a$ avec $\theta \in \mathbb{B}$, on ait

$$[\![\bar{d} = \bar{b}]\!] \wedge [\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \leqslant [\![\bar{d} = \bar{c}]\!]$$

Soient alors $(d,\theta) \in a$, $(e,\theta') \in b$, $(f,\theta'') \in c$ avec $\theta, \theta', \theta'', \in \mathbb{B}$

on a

$$[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] \wedge [\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \wedge \theta \wedge [\![\bar{d} = \bar{e}]\!] \wedge \theta' \wedge [\![\bar{e} = \bar{f}]\!] \wedge \theta'' \leqslant [\![\bar{d} = \bar{f}]\!] \wedge \theta''$$

par hypothèse d'induction.

En prenant le sup sur les couples (f,θ'') qui sont dans c , on a en utilisant la définition de $[\![\cdot \in \cdot]\!]$

$$[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] \wedge [\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \wedge \theta \wedge [\![\bar{d} = \bar{e}]\!] \wedge \theta' \wedge [\![\bar{e} \in \bar{c}]\!] \leqslant [\![\bar{d} \in \bar{c}]\!]$$

Par définition de $[\![\cdot = \cdot]\!]$, on voit que

$$[\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \wedge \theta' \leqslant [\![\bar{e} = \bar{c}]\!]$$

On déduit alors

$$[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] \wedge [\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \wedge \theta \wedge [\![\bar{d} = \bar{e}]\!] \wedge \theta' \leqslant [\![\bar{d} \in \bar{c}]\!]$$

En prenant le sup sur les couples (e,θ') qui sont dans b , on a

$$[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] \wedge \theta \wedge [\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \wedge [\![\bar{d} \in \bar{b}]\!] \leqslant [\![\bar{d} \in \bar{a}]\!]$$

Mais puisque $[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] \wedge \theta \leqslant [\![\bar{d} \in \bar{b}]\!]$, on a

$$[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] \wedge \theta \wedge [\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \leqslant [\![\bar{d} \in \bar{c}]\!]$$

que l'on peut écrire

$$[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] \wedge [\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \leqslant \inf_{\substack{(d,\theta) \in a \\ \theta \in \mathbb{B}}} [\![\bar{d} \in \bar{c}]\!] \vee \theta^c$$

Par symétrie on peut prouver également

$$[\![\bar{c} = \bar{b}]\!] \wedge [\![\bar{b} = \bar{a}]\!] \leqslant \inf_{\substack{(f,\theta) \in c \\ \theta'' \in \mathbb{B}}} [\![\bar{f} \in \bar{a}]\!] \vee \theta''^c$$

En utilisant encore la symétrie, on déduit que

$$[\![\bar{a} = \bar{b}]\!] \wedge [\![\bar{b} = \bar{c}]\!] \leq [\![\bar{a} = \bar{c}]\!]$$

4. Soit $(e,\theta') \in b$ avec $\theta' \in \mathbb{B}$. On a d'après 3.

$$[\![\bar{a} = \bar{a}']\!] \wedge [\![\bar{a} = \bar{e}]\!] \wedge \theta' \leq [\![\bar{a}' = \bar{e}]\!] \wedge \theta'$$

En prenant le sup sur les couples (e,θ') qui sont dans b, on a

$$[\![\bar{a} = \bar{a}']\!] \wedge [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!] \leq [\![\bar{a}' \in \bar{b}]\!]$$

5. Soit $(e,\theta') \in b$ avec $\theta' \in \mathbb{B}$. On a par définition de $[\![\bar{b} = \bar{b}']\!]$

$$[\![\bar{b} = \bar{b}']\!] \wedge [\![\bar{a} = \bar{e}]\!] \wedge \theta' \leq [\![\bar{a} \in \bar{b}']\!]$$

En prenant le sup sur les couples (e,θ') qui sont dans b , on a

$$[\![\bar{b} = \bar{b}']\!] \wedge [\![\bar{a} \in \bar{b}]\!] \leq [\![\bar{a} \in \bar{b}']\!] \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le procédé classique pour définir $[\![E]\!]$ pour chaque énoncé E clos écrit avec $\in$, $=$ à paramètres dans M ne s'applique pas pour définir par exemple $[\![\forall x E(x)]\!]$ car il faut prendre un inf sur une classe.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un cas pour lequel on peut définir une valeur booléenne pour chaque énoncé clos écrit avec $\in$, $=$ .On montre alors dans ce cas que le schéma de remplacement est booléennement valide pour les énoncés écrits avec $\in$, $=$.

Préliminaires

Soient $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ deux algèbres de BOOLE complètes qui sont des ensembles telles que $\mathbb{C}$ soit une sous-algèbre de BOOLE complète de $\mathbb{D}$.

Soit Γ le groupe des automorphismes de $\mathbb{D}$ qui laissent invariants tous les éléments de $\mathbb{C}$.

Définition IV.2

On dit que $\mathbb{C}$ est homogènement emboîté dans $\mathbb{D}$ si tout élément de $\mathbb{D}$ invariant par tous les automorphismes de Γ est déjà dans $\mathbb{C}$.

Définition IV.3

On dit que $\mathbb{C}$ est bien homogènement emboîté dans $\mathbb{D}$ si $\mathbb{C}$ est homogènement emboîté dans $\mathbb{D}$ et si tout automorphisme de $\mathbb{C}$ s'étend à un automorphisme de $\mathbb{D}$.

Théorème IV.4

Soit $(\mathbb{B}_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ une famille croissante d'algèbres de BOOLE complètes qui sont des ensembles telle que $\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow \mathbb{B}_\alpha$ est bien homogènement emboîtée dans $\mathbb{B}_\beta$. Alors

i) On peut définir une valeur booléenne pour chaque énoncé clos écrit avec $\in$, $=$ à paramètres dans M .

ii) Les axiomes de $ZF + AF$ sauf peut être l'axiome des parties sont booléennement valides (les énoncés du schéma de remplacement étant écrits avec $\in$, $=$).

La démonstration se décompose en les lemmes IV.6 , ..., 13 .

Définition IV.5

Soit β un ordinal et σ un automorphisme de $\mathbb{B}_\beta$. On définit a^σ par induction sur le rang de a pour les ensembles a de M tels que clôt $a \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_\beta$, la clause d'induction étant

$a^\sigma = \{(b^\sigma, \sigma(\theta))/(b,\theta) \in a$ avec $\theta \in \mathbb{B}\} \cup \{i \in a/c$ n'est pas de la forme $(b,\theta), \theta \in \mathbb{B}\}$

Lemme IV.6

Avec les notations de la définition IV.5 , soit σ' un autre automorphisme de $\mathbb{B}_\beta$. On a $a^{\sigma_o \sigma'} = (a^{\sigma'})^\sigma$

Démonstration

Par induction sur le rang de a

$$a^{\sigma_o\sigma'} = \{(b^{\sigma_o\sigma'}, \sigma_o\sigma'(\theta))/(b,\theta) \in a\} \cup \{c \in a/c \text{ n'est pas de la forme } (b,\theta), \theta \in \mathbb{B}\}$$

$$(a^{\sigma'})^{\sigma} = \{(b'^{\sigma},\sigma(\theta'))/(b',\theta')\in a^{\sigma'}\} \cup \{c\in a^{\sigma'} \ / \ c \text{ n'est pas de la forme } (b,\theta), \theta\in \mathbb{B}\}$$

$$= \{((b^{\sigma'})^{\sigma}, \sigma_{o}\sigma'(\theta))/(b,\theta)\in a\} \cup \{c\in a^{\sigma'}/c \text{ n'est pas de la forme } (b,\theta), \theta\in \mathbb{B}\}$$

En appliquant l'hypothèse d'induction, on a $(b^{\sigma'})^{\sigma} = b^{\sigma_o\sigma'}$

$$(a^{\sigma'})^{\sigma} = a^{\sigma_o\sigma'} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Lemme IV.7

Si clôt $a \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_{\alpha}$ et si σ est un automorphisme de $\mathbb{B}_{\beta}$ qui laisse invariant tous les éléments de $\mathbb{B}_{\alpha}$, on a $a^{\sigma} = a$

Démonstration

Par induction sur la longueur de a.

Lemme IV.8

Soient a et b tels que (clôt $a \cup$ clôt $b) \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_{\beta}$ et soit σ un automorphisme de $\mathbb{B}_{\beta}$.

Alors

$$[\![\overline{a^{\sigma}} \in \overline{b^{\sigma}}]\!] = \sigma([\![\overline{a} \in \overline{b}]\!]) \quad \text{et} \quad [\![\overline{a^{\sigma}} = \overline{b^{\sigma}}]\!] = \sigma([\![\overline{a} = \overline{b}]\!])$$

Démonstration

Par induction sur (rg $a \cup$ rg b, rg $a \cap$ rg b) pour le bon ordre

$(\alpha,\beta) \leqslant (\alpha',\beta') \iff \alpha < \alpha'$ ou $\alpha = \alpha'$ et $\beta \leqslant \beta'$

En effet

$$[\![\overline{a^{\sigma}} \in \overline{b^{\sigma}}]\!] = \sup_{\substack{(c,\theta)\in b^{\sigma} \\ \theta\in\mathbb{B}_{\beta}}} \theta \wedge [\![\overline{a^{\sigma}} = \overline{c}]\!] = \sup_{\substack{(d,\theta')\in b \\ \theta'\in\mathbb{B}_{\beta}}} \sigma(\theta') \wedge [\![\overline{a^{\sigma}} = \overline{d^{\sigma}}]\!]$$

donc par hypothèse d'induction on a

$$[\![\overline{a^\sigma} \in \overline{b^\sigma}]\!] = \sup_{\substack{(d,\theta') \in b \\ \theta' \in \mathbb{B}_\beta}} \sigma(\theta') \wedge \sigma([\![\overline{a} = \overline{d}]\!]) = \sigma\left[\sup_{\substack{(d,\theta') \in b \\ \theta' \in \mathbb{B}}} \theta' \wedge [\![\overline{a} = \overline{d}]\!]\right]$$

c'est-à-dire $[\![\overline{a^\sigma} \in \overline{b^\sigma}]\!] = \sigma([\![\overline{a} \in \overline{b}]\!])$

De même

$$[\![\overline{a^\sigma} = \overline{b^\sigma}]\!] = \inf_{\substack{(c,\theta) \in b^\sigma \\ \theta \in \mathbb{B}_\beta}} \theta^c \vee [\![\overline{c} \in \overline{a^\sigma}]\!] \wedge \inf_{\substack{(c,\theta) \in a^\sigma \\ \theta \in \mathbb{B}_\beta}} \theta^c \vee [\![\overline{c} \in \overline{b^\sigma}]\!]$$

Donc par hypothèse d'induction

$$[\![\overline{a^\sigma} = \overline{b^\sigma}]\!] = \inf_{\substack{(d,\theta') \in b \\ \theta' \in \mathbb{B}_\beta}} \sigma(\theta')^c \vee \sigma([\![\overline{d} \in \overline{a}]\!]) \wedge \inf_{\substack{(d,\theta') \in a \\ \theta' \in \mathbb{B}_\beta}} \sigma(\theta')^c \vee \sigma([\![\overline{d} \in \overline{b}]\!])$$

soit $[\![\overline{a^\sigma} = \overline{b^\sigma}]\!] = \sigma\left[\inf_{\substack{(d,\theta') \in b \\ \theta' \in \mathbb{B}_\beta}} \theta'^c \vee [\![\overline{d} \in \overline{a}]\!] \wedge \inf_{\substack{(d,\theta') \in a \\ \theta' \in \mathbb{B}_\beta}} \theta'^c \vee [\![\overline{d} \in \overline{b}]\!]\right]$

c'est-à-dire $[\![\overline{a^\sigma} = \overline{b^\sigma}]\!] = \sigma\left([\![\overline{a} = \overline{b}]\!]\right)$ C.Q.F.D.

<u>Lemme IV.9</u>

A chaque entier n standard et à chaque énoncé $E(x_1, \dots, x_n)$ écrit avec $\in$, $=$ à n variables libres $x_1, \dots, x_n$, on fait correspondre informellement deux relations fonctionnelles X_E et B_E définies par induction sur la longueur de E telles que

(1) $\forall a_1, \dots, a_n \; \forall \beta \in O_n \; [\forall c \in X_E(a_1, \dots, a_n)$

clôt $c \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_\beta \Longrightarrow B_E(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{B}_\beta$ et $\forall \sigma$ automorphisme de $\mathbb{B}_\beta$

$\sigma[B_E(a_1, \dots, a_n)] = B_E(a_1^\sigma, \dots, a_n^\sigma)]$

Les clauses d'induction sont

1) $B_{x_1 \in x_2}(a_1, a_2) = [\![\bar{a}_1 \in \bar{a}_2]\!]$ $B_{x_1 = x_2}(a_1, a_2) = [\![\bar{a}_1 = \bar{a}_2]\!]$

$X_{x_1 \in x_2}(a_1, a_2) = X_{x_1 = x_2}(a_1, a_2) = \text{clôt } a_1 \cup \text{clôt } a_2$

Il résulte du lemme IV.8 que (1) est vérifié pour ces deux énoncés.

2) $B_{\neg E}(a_1, \ldots, a_n) = (B_E(a_1, \ldots, a_n))^c$

$X_{\neg E}(a_1, \ldots, a_n) = X_E(a_1, \ldots, a_n)$

$B_{E \vee F}(a_1, \ldots, a_n) = B_E(a_1, \ldots, a_n) \vee B_F(a_1, \ldots, a_n)$

$X_{E \vee F}(a_1, \ldots, a_n) = X_E(a_1, \ldots, a_n) \cup X_F(a_1, \ldots, a_n)$

On vérifie immédiatement en appliquant l'hypothèse d'induction que (1) est satisfaite.

3) Soit $\exists x E(x, a_1, \ldots, a_n)$.

On pose α = le premier ordinal tel que

$(\text{clôt } a_1 \cup \text{clôt } a_2 \cup, \ldots, \cup \text{clôt } a_n) \cap \mathbb{B} \subseteq B_\alpha$

Soit alors $a \in M$. Soit β le premier ordinal tel que

$$\forall b \in X_E(a, a_1, \ldots, a_n) \text{ clôt } b \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_\beta$$

On pose $\Gamma_{\alpha\beta}$ = l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{B}_\beta$ qui laissent invariant tous les éléments de $\mathbb{B}_\alpha$.

On pose $\psi(a) = \sup\limits_{\sigma \in \Gamma_{\alpha\beta}} B_E(a^\sigma, a_1, \ldots, a_n)$

On sait d'après (1) que $\sigma \in \Gamma_{\alpha\beta} \Longrightarrow B_E(a^\sigma, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}_\beta$

Soit alors $\sigma' \in \Gamma_{\alpha\beta}$.

On a $\sigma'\left[\psi(a)\right] = \sup\limits_{\sigma \in \Gamma_{\alpha\beta}} \sigma'\left[B_E(a^\sigma, a_1, \ldots, a_n)\right]$

soit par hypothèse d'induction

$$\sigma'\left[\psi(a)\right] = \sup_{\sigma \in \Gamma_{\alpha\beta}} B_E\left[(a^{\sigma})^{\sigma'}, a_1^{\sigma'}, \ldots, a_n^{\sigma'}\right]$$

Mais d'après le lemme IV.6 et VI.7 , on a $(a^{\sigma})^{\sigma'} = a^{\sigma_o'\sigma}$

et $a_1^{\sigma'} = a_1, \ldots, a_n^{\sigma'} = a_n$.

Comme d'autre part lorsque σ décrit $\Gamma_{\alpha\beta}$, $\sigma_o'\sigma$ décrit aussi $\Gamma_{\alpha\beta}$, on a

$$\sigma'\left[\psi(a)\right] = \psi(a)$$

$\psi(a)$ est donc invariant par tous les automorphismes de $\Gamma_{\alpha\beta}$. En appliquant l'hypothèse, on a $\psi(a) \in B_\alpha$.

B_α étant un ensemble, il existe par schéma de remplacement un ordinal γ tel que $\forall a \in M\ \exists b \in V_\gamma\ \psi(a) = \psi(b)$.

On prend le premier γ qui convient.

On pose $X_o = V_\gamma$ et on définit par induction sur les entiers

$$X_{n+1} = \bigcup_{\substack{a \in X_n \\ \sigma \in \Gamma_{\alpha\beta_a}}} \left[\{a^\sigma\} \cup X_E(a^\sigma, a_1, \ldots, a_n)\right]$$

où β_a est le premier ordinal tel que clôt $a \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_{\beta_a}$

et $\forall b \in X_E(a, a_1, \ldots, a_n)$ clôt $b \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_{\beta_a}$

On pose $X_{\exists xE(x)}(a_1, \ldots, a_n) = \bigcup_{n<\omega} X_n$

$$B_{\exists xE(x)} = \sup_{a \in X_{\exists xE(x)}(a_1, \ldots, a_n)} B_E(a, a_1, \ldots, a_n)$$

On remarque que $\forall a \in M\quad B_E(a, a_1, \ldots, a_n) \leq B_{\exists xE(x)}(a_1, \ldots, a_n)$

En effet $B_E(a,a_1,\ldots,a_n) \leqslant \psi(a)$ et il existe $b \in V_\gamma$ tel que $\psi(a) = \psi(b)$ et l'on a

$$\psi(b) \leqslant \sup_{c \in X_1} B_E(c,a_1,\ldots,a_n) \leqslant \sup_{c \in X_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)} B_E(c,a_1,\ldots,a_n)$$

Il faut vérifier que (1) est satisfaite.

Soit donc β tel que $\forall c \in X_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)$ clôt $c \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_\beta$

Montrons qu'on a

$$B_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{B}_\beta$$

En effet

$$B_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n) = \sup_{a \in X_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)} B_E(a,a_1,\ldots,a_n) \text{ , et}$$

on a $B_E(a,a_1,\ldots,a_n) \in B_\beta$ pour $a \in X_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)$ car

$X_E(a,a_1,\ldots,a_n) \subseteq X_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)$. Donc $\forall c \in X_E(a,a_1,\ldots,a_n)$

clôt $c \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}_\beta$ donc par hypothèse d'induction $B_E(a,a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{B}_\beta$

Soit alors σ un automorphisme de $\mathbb{B}_\beta$

Soit $Y = X_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n) \cup X_{\exists xE(x)}(a_1^\sigma,\ldots,a_n^\sigma)$

Soit $\tilde{\beta} = \sup_{a \in Y} \beta_a$. Par hypothèse d'induction, si $a \in Y$ on a

$B_E(a,a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{B}_{\tilde{\beta}}$

Soit alors $\tilde{\sigma}$ un automorphisme de $\mathbb{B}_{\tilde{\beta}}$ qui étend σ . On a

$\tilde{\sigma}\left[B_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)\right] = \tilde{\sigma}\left[\sup_{a \in Y} B_E(a,a_1,\ldots,a_n)\right]$ puisque Y contient

$X_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)$. Par conséquent

$$\tilde{\sigma}\left[B_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)\right] = \tilde{\sigma}\left[\sup_{a \in Y} B_E(a,a_1,\ldots,a_n)\right]$$

Par hypothèse d'induction on a alors

$$\tilde{\sigma}\left[B_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)\right] = \sup_{a\in Y} B_E(a^{\tilde{\sigma}}, a_1^{\tilde{\sigma}},\ldots,a_n^{\tilde{\sigma}})$$

Donc $\tilde{\sigma}\left[B_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)\right] \leqslant B_{\exists xE(x)}(a_1^{\sigma},\ldots,a_n^{\sigma})$

puisque $a_1^{\tilde{\sigma}} = a_1^{\sigma},\ldots,a_n^{\tilde{\sigma}} = a_n^{\sigma}$

D'autre part on a

$\tilde{\sigma}^{-1}\left[B_{\exists xE(x)}(a_1^{\tilde{\sigma}},\ldots,a_n^{\tilde{\sigma}})\right] = \tilde{\sigma}^{-1}\left[\sup_{a\in Y} B_E a, a_1^{\tilde{\sigma}},\ldots,a_n^{\tilde{\sigma}}\right]$ puisque Y contient $X_{\exists xE(x)}(a_1^{\sigma},\ldots,a_n^{\sigma})$ donc

$$\tilde{\sigma}^{-1}\left[B_{\exists xE(x)}(a_1^{\tilde{\sigma}},\ldots,a_n^{\tilde{\sigma}})\right] = \sup_{a\in Y} B_E(a^{\tilde{\sigma}^{-1}}, a_1,\ldots,a_n)$$ par hypothèse

d'induction. On a donc

$$B_{\exists xE(x)}(a_1^{\tilde{\sigma}},\ldots,a_n^{\tilde{\sigma}}) \leqslant \tilde{\sigma}\left[B_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)\right]$$

Comme $B_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{B}_{\beta}$, et comme $\tilde{\sigma}$ prolonge σ, on a

$$\sigma\left[B_{\exists xE(x)}(a_1,\ldots,a_n)\right] = B_{\exists xE(x)}(a_1^{\sigma},\ldots,a_n^{\sigma})$$

(1) est donc vérifiée. C.Q.F.D.

On pose alors $B_E(a_1,\ldots,a_n) = [\![E(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)]\!]$

On a par construction de B_E et de X_E

$[\![\neg E]\!] = [\![E]\!]^c \qquad [\![E\vee F]\!] = [\![E]\!] \vee [\![F]\!]$

$[\![\exists xE(x)]\!] = \sup_{x\in X_{\exists xE(x)}} [\![E(\bar{x})]\!]$ et $\forall x\in M \; [\![E(\bar{x})]\!] \leqslant [\![\exists xE(x)]\!]$

<u>Lemme IV.10</u>

Soit Φ un énoncé écrit avec , = à paramètres dans M .
Alors si $u,v \in M$, on a $[\![\bar{u} = \bar{v}]\!] \wedge [\![\Phi(\bar{u})]\!] \leqslant [\![\Phi(\bar{v})]\!]$

<u>Démonstration</u>

Par induction sur la longueur de Φ.

C'est vrai lorsque Φ est atomique d'après le lemme IV.10

Si Φ est $\neg\psi$ ou $\psi_1 \vee \psi_2$ c'est évident

Si Φ est $\exists x\psi(x)$, on pose $Y = X_{\exists x\psi(x)}(u) \cup X_{\exists x\psi(x)}(v)$

on a donc $[\![\exists x\psi(x,\bar{u})]\!] = \sup\limits_{a \in Y} [\![\psi(\bar{a},\bar{u})]\!] \wedge [\![\bar{u} = \bar{v}]\!]$

donc par hypothèse d'induction

$$[\![\bar{u} = \bar{v}]\!] \wedge [\![\exists x\psi(x,\bar{u})]\!] \leqslant \sup_{a \in Y} [\![\psi(\bar{a},\bar{v})]\!]$$

Comme $Y \supset X_{\exists x\psi(x)}(v)$, on a

$$\sup_{a \in Y} [\![\psi(\bar{a},\bar{v})]\!] = [\![\exists x\psi(\bar{x},\bar{v})]\!] \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Lemme IV.11</u>

Soit E un énoncé écrit avec $\in$, = à paramètres dans M et soit $u \in M$. Alors

$$[\![\exists x(x \in \bar{u} \wedge E(x))]\!] = \sup_{\substack{(y,\theta) \in u \\ \theta \in \mathbb{B}}} \theta \wedge [\![E(\bar{y})]\!]$$

et

$$[\![\forall x(x \in \bar{u} \longrightarrow E(x))]\!] = \inf_{\substack{(y,\theta) \in u \\ \theta \in \mathbb{B}}} \theta^c \vee [\![E(\bar{y})]\!]$$

<u>Démonstration</u>

Montrons par exemple la première assertion. Pour cela soit

$$Y = X_{\exists x \in uE(x)} \cup \bigcup_{\substack{b \text{ tel que} \\ rgb < rgu}} X_{\exists x(x = b \ E(x))}$$

On a alors $\left[\exists x \in \bar{u} E(x)\right] = \sup\limits_{a \in Y} \left[E(\bar{a})\right] \wedge \left[\bar{a} \in \bar{u}\right]$ puisque $Y \supset X_{\exists x \in uE(x)}$

donc $\left[\!\left[\exists x \in \bar{u}E(x)\right]\!\right] = \sup\limits_{\substack{a \in Y \\ (b,\theta) \in u \\ \theta \in \mathbb{B}}} \theta \wedge \left[\!\left[\hat{a} = \bar{b}\right]\!\right] \wedge \left[\!\left[E(\bar{a})\right]\!\right] = \sup\limits_{\substack{(b,\theta) \in u \\ \theta \in \mathbb{B}}} \theta \wedge \left[\sup \left[\!\left[\bar{a} = \bar{b}\right]\!\right] \wedge \left[\!\left[E(\bar{a})\right]\!\right]\right]$

D'après le lemme IV.10 , on a $\left[\!\left[\bar{a} = \bar{b}\right]\!\right] \wedge \left[\!\left[E(\bar{a})\right]\!\right] \leqslant \left[\!\left[E(\bar{b})\right]\!\right]$

Par définition de Y , $\sup\limits_{a \in Y} \left[\!\left[\bar{a} = \bar{b}\right]\!\right] \wedge \left[\!\left[E(\bar{a})\right]\!\right] = \left[\!\left[\exists x(x = \bar{b} \wedge E(x)\right]\!\right]$

et $\left[\!\left[\bar{b} = \bar{b}\right]\!\right] \wedge \left[\!\left[E(\bar{b})\right]\!\right] \leqslant \left[\!\left[\exists x(x = \bar{b} \wedge E(x))\right]\!\right]$

c'est-à-dire $\left[\!\left[E(\bar{b})\right]\!\right] = \left[\!\left[\exists x(x = \bar{b} \wedge E(x))\right]\!\right]$

On a donc bien

$$\left[\!\left[\exists x \in \bar{u}E(x)\right]\!\right] = \sup_{\substack{(b,\theta) \in u \\ \theta \in \mathbb{B}}} \theta \wedge \left[\!\left[E(\bar{b})\right]\!\right] \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Lemme IV.12</u>

Les axiomes d'extensionalité, d'union, de fondation et d'infini sont booléennement valides.

<u>Démonstration</u>

Classique à partir du lemme IV.11

<u>Lemme IV.13</u>

Le schéma de remplacement est booléennement valide pour les énoncés écrits avec $\in$, $=$

Démonstration

Il suffit de prouver que les deux schémas suivants sont booléennement valides.

(1) $\forall u \exists v \forall x\ (x \in v \longleftrightarrow x \in u \wedge E(x)$ pour tout énoncé E à une variable libre écrit avec $\in$, $=$ à paramètres dans M

(2) $\forall u \exists v \forall x \in u \exists y \in v\ [\exists y\ \Phi(x,y) \longrightarrow \Phi(x,y)]$ pour tout énoncé Φ à deux variables libres écrit avec $\in$, $=$ à paramètres dans M

Montrons que (1) est booléennement valide

Soit $u \in M$. On pose $a = \text{clôt}(u)$.

Soit $v = \{(x, [\![\bar{x} \in \bar{u}]\!] \wedge [\![E(\bar{x})]\!])/x \in a\}$

Il suffit de prouver que $[\![\forall x \in \bar{v}(x \in \bar{u} \wedge E(x))]\!] = \mathbb{1}$

et $[\![\forall x \in \bar{u}\ (E(x) \longrightarrow x \in \bar{v})]\!] = \mathbb{1}$

D'après le lemme IV.11, il suffit de prouver que

$\forall (x,\theta) \in v$, $\theta \in \mathbb{B}$, on a $[\![\bar{x} \in \bar{u} \wedge E(\bar{x})]\!] \vee \theta^c = \mathbb{1}$ ce qui est évident par définition de v et que $\forall (x,\theta) \in u$, $\theta \in \mathbb{B}$, on a $\theta^c \vee [\![E(\bar{x}) \longrightarrow \bar{x} \in \bar{v}]\!] = \mathbb{1}$

Or $(x,\theta) \in u \Longrightarrow \theta \leqslant [\![\bar{x} \in \bar{u}]\!] \Longrightarrow \theta \wedge [\![E(\bar{x})]\!] \leqslant [\![E(\bar{x})]\!] \wedge [\![\bar{x} \in \bar{u}]\!]$

$\Longrightarrow \theta \wedge [\![E(\bar{x})]\!] \leqslant [\![\bar{x} \in \bar{v}]\!]$ car $x \in a$

ou encore $\theta^c \vee [\![E(\bar{x})]\!] \longrightarrow [\![\bar{x} \in \bar{v}]\!] = \mathbb{1}$

Montrons que (2) est booléennement valide.

Soit $\Phi'(x,y)$ l'énoncé $\exists y\ \Phi(x,y) \longrightarrow \Phi(x,y)$

On a donc $[\![\forall x \exists y\ \Phi'(x,y)]\!] = \mathbb{1}$

Donc pour tout $x \in M$, on a $[\![\exists y\ \Phi'(\bar{x},y)]\!] = \mathbb{1}$

Par construction de la valeur booléenne, on sait que

$$[\![\exists y\ \Phi'(\bar{x},y)]\!] = \sup_{y \in X_{\exists y\ \Phi'(x,y)}} [\![\Phi'(\bar{x},y)]\!]$$

Soit alors $u \in M$. On pose $a = \text{clôt}(u)$ et $Y = \bigcup_{x \in a} X_{\exists y \Phi'(x,y)}$

on a donc

$$\forall x \in a \ [\![\exists y \Phi'(\bar{x},y)]\!] = \sup_{y \in Y} [\![\Phi'(\bar{x},\bar{y})]\!] = 1\!\!1$$

On pose $v = \{(y, 1\!\!1) / y \in Y\}$

On vérifie alors que $[\![\forall x \in \bar{u} \ \exists y \in \bar{v} \ \Phi'(x,y)]\!] = 1\!\!1$

En effet soit $(x,\theta) \in u$ avec $\theta \in \mathbb{B}$

on a

$$[\![\exists y \in \bar{v} \ \Phi'(\bar{x},y)]\!] = \sup_{z \in Y} 1\!\!1 \wedge \Phi'(\bar{x},\bar{z}) = 1\!\!1$$

C.Q.F.D.

V - EXTENSIONS FAIBLEMENT GENERIQUES

Introduction

Soient C un ensemble de conditions de forcing, $\mathbb{C}$ l'algèbre de BOOLE complète des bons ouverts de C muni de la topologie de l'ordre et h le plongement canonique de C dans $\mathbb{C}$.

On sait que si G est M-générique sur C , alors la fonction Θ_G de $\mathbb{C}$ dans $\{0,1\}$ définie par

$$\Theta_G(c) = 1 \iff \exists p \in G \quad h(p) \leqslant c$$

est un homomorphisme M-complet d'algèbres de BOOLE . Et inversement si Θ est un homomorphisme M-complet de $\mathbb{C}$ dans $\{0,1\}$, alors

$$G_\Theta = \{p \in C / \Theta(h(p)) = 1\} \text{ est M-générique sur } C$$

De plus $\overline{G_\Theta}$ défini par $c \in \overline{G_\Theta} \iff \Theta(c) = 1$ est une partie M-générique de $\mathbb{C} - \{0\}$

On a donc $M[\overline{G_\Theta}] = M[G_\Theta]$ puisque $M[G_\Theta]$ est caractérisé comme le plus petit modèle transitif de ZF qui contient G_Θ et tous les éléments de M et que $M[G_\Theta]$ possède la même propriété relativement à $\overline{G_\Theta}$

On se propose d'étudier ces correspondances lorsque C est réunion d'une famille d'ensembles de conditions de forcing emboîtés.

Définition V.1

Soit C une classe de conditions de forcing . Soit G une partie de C . On dit que G est M-générique faible sur C si

1. $\forall p,q \in G$ p et q sont compatibles.

2. $\forall p \in G$ $\forall q \geqslant p$ $q \in G$

3. G rencontre tous les ensembles prédenses de C qui sont dans M .

Soit alors $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ une famille d'ensembles de conditions de forcing emboîtés. Soit $C = \bigcup_{\alpha \in O_n} C_\alpha$. On considère C, $\mathbb{C}_\alpha$, h, h_α comme en III pages 37-38 .

Proposition V.2

Soit G un M-générique faible sur C . Alors la fonction Θ_G de $\mathbb{C}$ dans $\{0,1\}$ définie par

$$\Theta_G(c) = 1 \iff \exists\, p \in G \quad h(p) \leqslant c$$

est un homomorphisme M-complet de $\mathbb{C}$ dans $\{0,1\}$, Inversement soit Θ un homomorphisme M-complet de $\mathbb{C}$ dans $\{0,1\}$, alors $G_\Theta = \{p \in C/\ \Theta(h(p)) = 1\}$ est M-générique faible sur C .

Démonstration

Soit G un M-générique faible sur C . Pour chaque α , on pose $G_\alpha = G \cap C_\alpha$ qui est clairement M-générique sur C_α .

On sait alors que Θ_{G_α} défini par

$$\Theta_{G_\alpha}(c) = 1 \iff \exists\, p \in G_\alpha \quad h_\alpha(p) \leqslant c$$

est un homomorphisme M-complet de C_α dans $\{0,1\}$

Il est clair que $\Theta_G = \bigcup_{\alpha \in O_n} \Theta_{G_\alpha}$

Θ_G est donc un homomorphisme d'algèbres de BOOLE . Pour prouver qu'il est M-complet, soit $(c_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$ $(c_i)_{i \in I}$ étant dans M) telle que

$$\forall i \in I \quad \Theta_G(c_i) = 1$$

Cette famille étant indexée par un ensemble, il existe donc α tel que $\forall i \in I \quad c_i \in C_\alpha$. On a donc $\Theta_G(c_i) = \Theta_{G_\alpha}(c_i)$ ce qui entraîne

$\Theta G_\alpha(\inf_{i \in I} c_i) = 1$ puisque Θ_{G_α} est un homomorphisme M-complet.

Inversement si Θ est un homomorphisme M-complet, on pose $\Theta_\alpha = \Theta \wedge C_\alpha$. Chaque Θ_α est alors un homomorphisme M-complet de $\mathbb{C}_\alpha$ dans $\{0,1\}$. On sait que

$G_{\Theta_\alpha} = \{p \in C_\alpha / \Theta_\alpha(h_\alpha(p)) = 1\}$ est M-générique sur C_α. On a clairement $G_\Theta = \bigcup_{\alpha \in O_n} G_{\Theta_\alpha}$

Il suffit donc de voir que G_Θ rencontre tous les ensembles prédenses de C. Soit donc π un ensemble prédense de C. π étant un ensemble, il existe α tel que $\pi \subseteq C_\alpha$. π est donc prédense dans C_α. Il rencontre donc G_{Θ_α}. Par conséquent il rencontre G_Θ qui contient G_{Θ_α} C.Q.F.D.

On pose alors $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} - \{0\}$ $\quad \overline{\mathbb{C}}_\alpha = \mathbb{C}_\alpha - \{0\}$

Il est clair que $(\overline{\mathbb{C}}_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ est une famille d'ensembles de conditions de forcing emboîtés.

Soit Θ un homomorphisme M-complet de $\mathbb{C}$ dans $\{0,1\}$

On définit $\overline{G}_\Theta \subset \overline{\mathbb{C}}$ par

$$b \in \overline{G}_\Theta \iff \Theta(b) = 1$$

On définit $\overline{G}_{\Theta_\alpha} \subset \overline{\mathbb{C}}_\alpha$ par

$$b \in \overline{G}_{\Theta_\alpha} \iff \Theta_\alpha(b) = 1$$

Il est clair d'après ce qui précède que $\overline{G}_\Theta$ est M-générique faible sur $\overline{\mathbb{C}}$ et que $\overline{G}_{\Theta_\alpha}$ est M-générique sur $\overline{\mathbb{C}}_\alpha$. En utilisant les résultats du chapitre III , on a

$$M\left[\overline{G}_\Theta\right] = \bigcup_{\alpha \in O_n} M\left[\overline{G}_{\Theta_\alpha}\right]$$

Si on pose $G = \{p \in C / \Theta(h(p)) = 1\}$ et $G_\alpha = G \cap C_\alpha$

on a

$$M[\overline{G}_\Theta] = \bigcup_{\alpha \in O_n} M[G_\alpha] = M[G]$$

puisque

$$M[\overline{G}_{\Theta_\alpha}] = M[G_\alpha]$$

On suppose désormais que $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ est une famille d'algèbres de BOOLE complètes bien homogènement emboîtée. On sait donc d'après le théorème IV.4 définir une valeur booléenne pour chaque énoncé écrit avec $\in$, = à paramètres dans M .

On pose $\mathbb{C} = \bigcup_{\alpha \in O_n} \mathbb{C}_\alpha$

Soient $\overline{\mathbb{C}}$, $\overline{\mathbb{C}_\alpha}$, Θ , $\overline{G_\Theta}$, Θ_α , $\overline{G_{\Theta_\alpha}}$ comme ci-dessus.

Soit φ la fonction contractante sur M pour $\overline{G_\Theta}$.

Proposition V.3

> Pour chaque énoncé E clos écrit avec , = à paramètres dans M , on a
> $M[\overline{G_\Theta}] \models E(\varphi a_1 , \ldots, \varphi a_k) \iff \Theta(\llbracket E(\overline{a}_1 , \ldots, \overline{a}_k)\rrbracket) = 1$

Démonstration

C'est la définition si E est de la forme $a \in b$ ou $a = b$. Puis par induction informelle sur la longueur de E , on le vérifie aisément lorsque E est $\neg F$ ou $F \vee G$. Le seul cas non trivial étant celui où E est $\exists x F(x)$. Dans ce cas si $M[\overline{G_\Theta}] \models E$, il existe $x_o \in M$ tel que $M[\overline{G_\Theta}] \models F(\varphi\, x_o)$ donc par hypothèse d'induction on a $\Theta(\llbracket F(\overline{x}_o)\rrbracket) = 1$. Comme $\llbracket \exists x F(x)\rrbracket \geq \llbracket F(\overline{x}_o)\rrbracket$, on a

$$\Theta(\llbracket \exists x F(x)\rrbracket) = 1$$

Inversement si $\Theta(\llbracket \exists xF(x) \rrbracket) = \mathbb{1}$ on a

$$\llbracket \exists xF(x) \rrbracket = \sup_{a \in X_{\exists xF(x)}} \llbracket F(\bar{a}) \rrbracket$$

Θ étant un homomorphisme M-complet pour les ensembles, il existe $a \in X_{\exists xF(x)}$ tel que $\Theta(\llbracket F(\bar{a}) \rrbracket) = 1$, donc par hypothèse d'induction $M[G_\Theta] \models F(\varphi a)$ c'est-à-dire $M[G_\Theta] \models \exists xF(x)$ C.Q.F.D.

Définition V.4

On dit qu'un ensemble C de conditions de forcing est homogène si

$\forall p,q \in C$ il existe un automorphisme σ de C tel que $\sigma(p)$ soit compatible avec q .

Soit alors $(D_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ une famille d'ensembles de conditions de forcing homogènes.

Soit $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ la famille d'ensembles de conditions de forcing emboîtés associée à $(D_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ comme à la page

Soit enfin $(\mathbb{C}_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ la famille croissante d'algèbres de BOOLE complètes associée à $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ comme à la page

Théorème V.5

La famille $(\mathbb{C}_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ est bien homogènement emboîtée.

La démonstration résulte du lemme suivant :

Lemme V.6

Soient C et C' deux ensembles de conditions de forcing ayant pour plus grand élément respectivement $\mathbb{1}_C$ et $\mathbb{1}_{C'}$. On suppose C' homogène.

Soit $\mathbb{C}$ l'algèbre de BOOLE complète des bons ouverts de C muni de la topologie de l'ordre

Soit $\mathbb{D}$ l'algèbre de BOOLE des bons ouverts de $D = C \times C'$ muni de la topologie de l'ordre produit.

Alors $\mathbb{C}$ est isomorphe à une sous-algèbre de BOOLE complète de $\mathbb{D}$ bien emboîtée dans $\mathbb{D}$.

Démonstration

Il est clair que $C \times \{\mathbb{1}_{C'}\}$ est emboîté dans D . On note encore $\mathbb{C}$ l'algèbre de BOOLE des bons ouverts de $C \times \{\mathbb{1}_{C'}\}$ muni de la topologie de l'ordre.

Avec les notations de la proposition III.2 la fonction i de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{D}$ définie par

$$i(X^c_{C \times \{1_{C'}\}}) = X^c_D \quad \text{où} \quad X \subseteq C \times \{1_{C'}\}$$

est un homomorphisme complet injectif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{D}$.

Soit alors σ un automorphisme de C' . On définit $\overline{\sigma}$ automorphisme de $\mathbb{D}$ par

$$\overline{\sigma}(Z^c_D) = \{(p,\sigma(p'))/(p,p') \in Z^c_D\} \quad \text{pour chaque} \quad Z \subset D .$$

Soit alors $Y \subset D$. On suppose que Y^c_D est invariant par tous les automorphismes de $\mathbb{D}$ qui laissent invariant tous les éléments de $i(\mathbb{C})$. En particulier Y^c_D est invariant par tous les automorphismes de la forme $\overline{\sigma}$.

Montrons que si $(p,p') \in Y^c_D$ alors $\forall q' \in C'$ $(p,q') \in Y^c_D$

Il suffit de prouver que $\forall (p_1, q'_1) \leqslant (p,q')$, il existe $(p_2, q'_2) \leqslant (p_1, q'_1)$ tel que $(p_2, q'_2) \in Y^c_D$ puisque Y^c_D est un bon ouvert.

Soit donc $(p_1, q'_1) \leqslant (p,q')$. Soit σ' un automorphisme de C' tel que $\sigma(p')$ soit compatible avec q'_1. Il existe donc $r' \leqslant p'$ tel que $\sigma'(r') \leqslant q'_1$. Par hypothèse on a $(p, \sigma'(p')) \in Y^c_D$. Comme $p_1 \leqslant p$ et $r' \leqslant p'$, on a aussi $(p_1, \sigma'(r')) \in Y^c_D$ puisque Y^c_D est un ouvert. Et par construction $(p_1, \sigma'(r')) \leqslant (p_1, q'_1)$

On en déduit que si l'on choisit $X \subset C \times \{\mathbb{1}_{C'}\}$ tel que

$$X^c_{C \times \{1_{C'}\}} = \{(p, \mathbb{1}_{C'}) / \exists\, q' \in C' \quad (p,q') \in Y^c_D\}$$

alors $X^c_D = Y^c_D$ donc $Y^c_D \in i(\mathbb{C})$

Montrons enfin que tout automorphisme σ de $i(\mathbb{C})$ s'étend à un automorphisme de $\mathbb{D}$.

En effet $\overline{\sigma} = \sigma \wedge (i(\mathbb{C}) - \{\mathbb{0}\})$ est un automorphisme de $i(\mathbb{C}) - \{\mathbb{0}\}$ donc $(\sigma, id_{C'})$ est un automorphisme de $(i(\mathbb{C}) - \{\mathbb{0}\} \times C'$ qui s'étend de manière unique à un automorphisme de $\mathbb{D}$. C.Q.F.D. (lemme V.6)

<u>Démonstration du théorème V.5.</u>

Soit $(D_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ la famille d'ensembles de conditions de forcing homogènes.

Soient β et γ deux ordinaux avec $\beta \leqslant \gamma$. On pose

$$C_\beta = \prod_{\alpha \leqslant \beta} D_\alpha \qquad C' = \prod_{\beta < \alpha \leqslant \gamma} D_\alpha$$

Il est clair que C et C' sont homogènes. Avec les notations du chapitre III page , $\mathbb{C}_\beta$ est une algèbre de BOOLE complète bien homogènement emboîtée dans $\mathbb{C}_\gamma$ d'après le lemme V.6. C.Q.F.D. (théorème V.5)

On obtient finalement le théorème suivant

<u>Théorème V.7</u>

Soit $(D_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ une famille d'ensembles de conditions de forcing homogènes. Soit $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ la famille d'ensembles de conditions de

forcing emboîtés qui lui est associée comme au chapitre III pages 46-47
On pose $C = \bigcup_{\alpha \in O_n} C_\alpha$. Alors si G est un M-générique faible sur C, $M[G]$ satisfait tous les axiomes de ZF + AF sauf peut-être l'axiome des parties. Et si M satisfait AC , $M[G]$ le satisfait aussi.

Démonstration

Le fait que $M[G]$ satisfasse les axiomes d'extensionalité, d'union, d'infini et de fondation, résulte de la proposition III.7 . Le fait que, si M satisfait A.C, $M[G]$ le satisfasse aussi résulte de cette même proposition.

Pour vérifier que $M[G]$ satisfait le schéma de remplacement pour les énoncés écrits avec $\in$, $=$ on considère la famille $(\mathbb{C}_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ d'algèbres de BOOLE complètes bien homogènement emboîtées associée à la famille $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$. On pose $\mathbb{C} = \bigcup_{\alpha \in O_n} \mathbb{C}_\alpha$. En notant h le plongement canonique de C dans $\mathbb{C}$, on définit Θ par $\Theta(c) = 1 \Longleftrightarrow \exists\, p \in G \quad h(p) \leqslant c$

Θ est un homomorphisme M-complet de $\mathbb{C}$ dans $\{0,1\}$ d'après la proposition V.2.

Avec les notations de la proposition V.3 , on a

$$M[G] = M[G_\Theta] \quad \text{et} \quad M[G_\Theta] \models E \Longleftrightarrow \Theta(\llbracket E \rrbracket) = 1$$

lorsque E est un énoncé clos avec paramètres dans M écrit avec $\in$, $=$.

D'après le lemme IV.11 , on a $\llbracket E \rrbracket = \mathbb{1}$ pour chaque axiome du schéma de remplacement.

On en conclut que $M[G]$ satisfait le schéma de remplacement. C.Q.F.D.

VI - A PROPOS DE L'AXIOME E DE GODEL

Avec axiome de fondation l'axiome E de GODEL peut s'écrire sous la forme suivante dans la théorie de GODEL-BERNAYS

$$\exists\Phi[\forall x\forall y\forall y'[(x,y)\in\Phi \wedge (x,y')\in\Phi \longrightarrow y=y'] \wedge \forall y\forall x\,[(x,y)\in\Phi \longrightarrow x\in O_n] \wedge \forall y\,\exists\, x[(x,y)\in\Phi]]$$

Autrement dit, il existe une surjection de la classe des ordinaux sur l'univers .

On note $A_{\mathcal{U}}$ la classe des fonctions de M définies sur un ordinal à valeurs dans $\mathcal{U}$ (qui est une classe de M).

On munit $A_{\mathcal{U}}$ de l'ordre usuel : $f \leqslant g \Longleftrightarrow g = f \restriction \mathrm{dom}\, g$

On suppose alors que M satisfait AC . D'après le théorème I.6 , on sait que si G est M-générique sur A_M , $\langle M,G\rangle \models ZF^G + E$.

On peut montrer que si H est M-générique sur A_2 alors $\langle M,H\rangle \models ZF^H + E$ parce que M est forcé d'être égal à $L[H]$ classe des constructibles à l'aide de H).

On se propose de prouver que ces deux forcings sur A_M et sur A_2 sont équivalents.

Notation

G et H étant deux parties de M (non nécessairement des classes de M) on écrira $\langle M,G\rangle = \langle M,H\rangle$ pour signifier que $\langle M,G\rangle$ et $\langle M,H\rangle$ ont les mêmes classes, autrement dit que G est défini par un énoncé à partir de H et inversement.

Définition VI.1

C et D étant deux classe de conditions de forcing de M , on dit qu'une application Φ (classe de M) est un plongement dense de C dans D si

i) Φ est croissante

ii) Si f et g sont incompatibles dans C , $\Phi(f)$ et $\Phi(g)$ sont incompatibles dans D .

iii) $\forall p \in D \ \exists f \in C \ \Phi(f) \leqslant p$

Lemme VI.2

Il existe un plongement dense de A_{0_n} dans A_2

Démonstration

On définit $\Phi(f)$ par induction sur f pour la relation bien fondée

$g \geqslant f \iff g = f \wedge \mathrm{dom}\,(g)$

Si $\mathrm{dom}(f)$ est un ordinal limite, on pose

$$\Phi(f) = \bigcup_{\beta < \mathrm{dom}(f)} \Phi(f \wedge \beta)$$

Si $\mathrm{dom}(f) = \beta + 1$, $\Phi(f)$ est le fonction définie sur $\mathrm{dom}(\Phi(f \wedge \alpha)) + f(\alpha) + 1$ (somme d'ordinaux) à valeurs dans 2 telle que $\Phi(f) \wedge \mathrm{dom}(\Phi(f \wedge \alpha)) = \Phi(f \wedge \alpha)$ et $\Phi(f)(i) = 0$ pour tout i tel que $\mathrm{dom}(\Phi(f \wedge \alpha)) \leqslant i < \mathrm{dom}(\Phi(f \wedge \alpha)) + f(\alpha)$

$$\text{et} \quad \Phi(f)\left[\mathrm{dom}(\Phi(f \wedge \alpha)) + f(\alpha)\right] = 1$$

Montrons par induction sur $\mathrm{dom}(g)$ que

$$\forall f \in A_{0_n} \quad f \leqslant g \implies \Phi(f) \wedge \mathrm{dom}(\Phi(g)) = \Phi(g)$$

Si $\mathrm{dom}(g)$ est un ordinal limite, on a

$$\Phi(g) = \bigcup_{\beta < \mathrm{dom}(g)} \Phi(g \wedge \beta) = \bigcup_{\beta < \mathrm{dom}(g)} \Phi(f) \wedge \mathrm{dom}(\Phi(g \wedge \beta))$$

En appliquant l'hypothèse d'induction, on a alors

$$\Phi(g) = \Phi(f) \wedge \bigcup_{\beta < \mathrm{dom}(g)} \mathrm{dom}(\Phi(g \wedge \beta)) = \Phi(f) \wedge \mathrm{dom}(\Phi(g))$$

Si $\mathrm{dom}(g) = \beta + 1$, on a par hypothèse d'induction

$\Phi(g\wedge\beta) = \Phi(f)\wedge \mathrm{dom}[\Phi(g\wedge\beta)]$ et comme $f \leqslant g$ entraîne $f(\beta) = g(\beta)$, on déduit que

$\Phi(g)(i) = [\Phi(f)\wedge \mathrm{dom}(\Phi(g))](i) = 0$ lorsque i est tel que

$$\mathrm{dom}(\Phi(g\wedge\beta)) \leqslant i < \mathrm{dom}[\Phi(g\wedge\beta)] + g(\beta)$$

et $\Phi(g)[\mathrm{dom}(\Phi(g\wedge\beta)) + g(\beta)] = \Phi(f)[\mathrm{dom}(\Phi(g\wedge\beta)) + g(\beta)] = 1$

Φ est donc une fonction croissante

D'autre part si $\Phi(f) \leqslant \Phi(g)$, on a $f \leqslant g$.

En effet par définition de Φ, on a $\mathrm{dom}(f)$ = l'unique ordinal isomorphe à l'ensemble des $i \in \mathrm{dom}(\Phi(f))$ tels que $\Phi(f)(i) = 1$

Donc $\Phi(f) \leqslant \Phi(g) \Longrightarrow \mathrm{dom}(f) \geqslant \mathrm{dom}(g)$

Supposons alors que l'on ait $f \not\leqslant g$. Soit β le premier ordinal de $\mathrm{dom}(g)$ tel que $f(\beta) \neq g(\beta)$ (pour fixer les idées $f(\beta) < g(\beta)$).

Alors $f\wedge\beta = g\wedge\beta$ et $\Phi(f\wedge\beta+1) \neq \Phi(g\wedge\beta+1)$ puisque $\Phi(f\wedge\beta+1)(\gamma) = 1$ et $\Phi(g\wedge\beta+1)(\gamma) = 0$ où l'on a posé $\gamma = \mathrm{dom}(\Phi(f\wedge\beta)) + f(\beta)$. Il y a donc contradiction.

$$\text{Donc } \Phi(f) \leqslant \Phi(g) \Longrightarrow f \leqslant g .$$

En combinant avec le fait que $f \leqslant g \Longrightarrow \Phi(f) \leqslant \Phi(g)$, on en déduit que si f et g sont incomparables, $\Phi(f)$ et $\Phi(g)$ le sont également .

Reste à vérifier iii). On prouve par induction sur l'ordinal β que toute fonction $p \in A_2$ de domaine $\beta + 1$ telle que $p(\beta) = 1$ est atteinte par Φ.

Pour cela soit $\gamma = \sup\{i < \beta / p(i) = 1\}$

1er cas

$\gamma < \beta$ et $p(\gamma) = 1$. On a donc $p\wedge\gamma + 1 = \Phi(f)$ par hypothèse d'induction. On définit alors g par $g(\delta) = f(\delta)$ si $\delta < \mathrm{dom}(f)$ et $g(\delta) = \beta - (\gamma+1)$ si $\delta = \mathrm{dom}(f)$

Par définition de Φ , on aura $\Phi(g) = p$

2ème cas

$\gamma < \beta$ et $p(\gamma) = 0$ ou $\gamma = \beta$. On a nécessairement γ limite. Par hypothèse d'induction, pour chaque $i < \gamma$ tel que $p(i) = 1$, il existe f_i tel que $\Phi(f_i) = p \wedge i + 1$

On pose $f = \bigcup f_i$. On définit alors g par $g(\delta) = f(\delta)$ si $\delta <$ dom f et $g(\delta) = \beta - \gamma$ si $\delta =$ dom f . Par définition de Φ , on a

$$\Phi(g) = p \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Lemme VI.3

Il existe un plongement dense Ψ de A_2 dans $A_2 \times A_2$.

Démonstration

Soit $p \in A_2$. On définit $\Psi(p) = \langle \Psi_o(p), \Psi_1(p) \rangle$ par :

$\Psi_o(p)$ est la fonction de domaine l'unique ordinal isomorphe aux ordinaux pairs de dom(p) (τ_o^{-1} étant l'isomorphisme) telle que $\Psi_o(p)(i) = \Psi(p(\tau_o(i)))$, $\Psi_1(p)$ étant définie de la même façon à l'aide des ordinaux impairs. On vérifie aisément que Ψ est un plongement de A_2 dans $A_2 \times A_2$ C.Q.F.D.

Théorème VI.4

Soit G un M-générique sur A_M

Il existe alors K M-générique sur A_2 tel que

$$\langle M,G \rangle = \langle M,K \rangle$$

Démonstration

Soit φ la fonction de A_M dans A_2 définie par : $\varphi(f)$ est la fonction de domaine dom(f) telle que si $\beta \in$ dom(f) alors $\varphi(f)(\beta) = 0 \iff$ le rang de $f(\beta)$ est pair.

Il est clair que φ est une fonction normale.

Soit alors G un M-générique sur A_M. D'après le théorème II.9, on sait que

$H = \{p \in A_2 / \exists f \in G \; p \geqslant \varphi(f)\}$ est M-générique sur A_2 et par conséquent que $\langle M,H \rangle$ satisfait l'axiome E de GODEL.

Donc $\varphi^{-1}(H)$ est isomorphe dans $\langle M,H \rangle$ à A_{O_n}. Soit σ cet isomorphisme. Puisque G est $\langle M,H \rangle$ - générique sur $\varphi^{-1}(H)$ (théorème II.9) $\sigma(G)$ est $\langle M,H \rangle$ -générique sur A_{O_n}.

Soit $\Gamma = \{p \in A_2 / \exists f \in G \; p \geqslant \Phi(\sigma(f))\}$.

Puisque Φ est un plongement dense de A_{O_n} dans A_2, Γ est $\langle M,H \rangle$ - générique sur A_2.

D'après le théorème II.8, $H \times \Gamma$ est M-générique sur $A_2 \times A_2$.

La classe $K = \{p \in A_2 / \Psi(p) \in H \times \Gamma\}$ est donc M-générique sur A_2.

K est bien définie à partir de G puisque H et Γ le sont

Inversement on a $H = \{p \in A_2 / \exists q \in K \; \Psi_1(q) \leqslant p\}$

et $G = \{f \in A_M / \varphi(f) \in H$ et $\Phi(\sigma(f)) \in \Gamma\}$

On a donc bien $\langle M,G \rangle = \langle M,K \rangle$ C.Q.F.D.

Etant donné un modèle M qui ne satisfait pas l'axiome E de GODEL, on se pose le problème de savoir si toute extension générique non triviale $\langle M,G \rangle$ (qui ne rajoute pas d'ensemble) qui satisfait ZF^G régénère l'axiome de GODEL.

La réponse est consistamment non. Plus précisément :

Soit M satisfaisant l'axiome E de GODEL. Soit $(D_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ la famille d'ensembles de conditions de forcing suivante :

$\aleph_\alpha$ régulier $\Longrightarrow D_\alpha$ est l'ensemble des fonctions définies sur un ordinal $< \aleph_\alpha$ à valeurs dans 2.

$\aleph_\alpha$ singulier $\Longrightarrow D_\alpha = \{\mathbb{1}_\alpha\}$

Soit G un M-générique sur A_2. On sait que $<M,G>$ satisfait ZF^G. Il est facile de vérifier que $(D_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ satisfait les hypothèses du théorèmes III.13 dans $<M,G>$.

Soit alors $(C_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ la famille d'ensembles de conditions de forcing emboîtés associée à $(D_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ comme au chapitre III pages 46-47.

En appliquant le théorème III.13, on a donc

$\forall H <M,G>$ -générique sur $C = \bigcup_{\alpha \in O_n} C_\alpha$, $<M[H], G,H> = ZF^{G,H}$

On sait que $M[H]$ ne satisfait pas l'axiome de GODEL.

($<M[H],H>$ le satisfait évidemment).

Théorème VI.5

| $<M[H],G>$ ne satisfait pas l'axiome E de GODEL.

Démonstration

Supposons par l'absurde que l'on ait une fonction Φ (classe de $M[H],G>$), définie avec G, qui surjecte O_n sur $M[H]$. On sait d'après le théorème II.8 sur le forcing produit que G est $M[H]$-générique sur A_2.

Soit donc $p_o \in A_2$, $p_o \Vdash_{A_2}$ " Φ surjecte O_n sur $M[H]$"

En notant A_{p_o} la classe des minorants de p_o dans A_2, soit Ψ la fonction de domaine $A_{p_o} \times O_n$ (écrite sans G) à valeurs dans $M[H]$ définie par

$\Psi(p,\alpha)$ = le seul $x \in M[H]$ tel que $p \Vdash_{A_2}$ "$\Phi(\alpha) = x$"

si un tel x existe

= 0 sinon

Ψ est bien une fonction car si $p \Vdash_{A_2}$ "$\Phi(\alpha) = x$" et $p \Vdash_{A_2}$ "$\Phi(\alpha) = x'$"

on aura (forcing faible) $p \Vdash_{A_2}$ "$\Phi(\alpha) = x \wedge \Phi(\alpha) = x'$"

Comme $p_o \Vdash_{A_2}$ "Φ est une fonction" et comme $p \leqslant p_o$, on en déduit

$p \Vdash_{A_2} x = x'$ c'est-à-dire $x = x'$.

Ψ est surjective car $p_o \Vdash_{A_2}$ "Φ est surjective" c'est-à-dire

$\forall x \in M[H] \ \forall p \leqslant p_o \ \exists q \leqslant p \ \exists \alpha \in O_n \quad q \Vdash_{A_2}$ "$\Phi(\alpha) = x$"

On a donc un couple (q,α) avec $q \leqslant p_o$ tel que $\Psi(q,\alpha) = x$.

Mais par hypothèse A_2 est bien ordonnée puisque c'est une classe de M qui est supposée satisfaire l'axiome E de GODEL.

$A_2 \times O_n$ l'est donc également. Ψ étant surjective, on aurait donc un bon ordre de $M[H]$ ce qui est contraire à l'hypothèse. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

1 J.L. KRIVINE *Cours de Forcing*

2 C.C. CHANG *Séminaire de théorie des ensembles U.C.L.A. 1967-68 Théorème d'Easton*