UNIVERSITÉ PARIS XI
U.E.R. MATHÉMATIQUE
91405 ORSAY FRANCE

207

Interpolation dans le Polydisque de C^n

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

207

Interpolation dans le Polydisque de C^n

Eric AMAR

Analyse Harmonique d'Orsay
1976

INTERPOLATION DANS LE POLYDISQUE DE $\mathbb{C}^n$.

INTRODUCTION.

Soit $\mathbb{D}$ le disque unité de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1\}$ le tore de dimension un muni de la mesure de Lebesgue λ.

On note, pour p positif, $H^p(\lambda)$ les classes de Hardy :

$$H^p(\lambda) = \{f \text{ analytique dans } \mathbb{D}, \text{ t.q. } \sup_{r<1} \int |f(rz)|^p d\lambda(z) = \|f\|_p^p < +\infty\} \ ;$$

$$H^\infty(\lambda) = \{f \text{ analytique dans } \mathbb{D}, \text{ t.q. } \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| = \|f\|_\infty < +\infty\}.$$

Soit σ une suite dans $\mathbb{D}$, $\sigma = \{z_k, \ k \in \mathbb{N}\}$, et considérons l'opérateur T_p défini sur $H^p(\lambda)$ ainsi :

$$\forall f \in H^p(\lambda), \quad T_p f = \{(1-|z_i|^2)^{\frac{1}{p}} f(z_i), \quad i \in \mathbb{N}\} \ ;$$

L. Carleson [9] a caractérisé les suites σ qui sont d'interpolation $H^\infty(\lambda)$, c.à.d. telles que $T_\infty H^\infty(\lambda) = \ell^\infty(\mathbb{N})$: il faut et il suffit que $\inf_{i\in\mathbb{N}} \prod_{j\neq i} \left|\frac{z_i - z_j}{1-\bar{z}_i z_j}\right| \geq \delta > 0$ (C).

H. Shapiro et A.L. Shields [12] ont montré que la condition (C) était également nécessaire et suffisante pour que, pour $p \geq 1$, $T_p H^p(\lambda) = \ell^p(\mathbb{N})$ et V. Kabaila [13] a obtenu le même résultat pour $0 < p < 1$; de plus P. Beurling [14] a montré que si (C) était vérifiée alors il y avait extension linéaire bornée de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ dans $H^\infty(\lambda)$, c.à.d. il existe un opérateur U_∞ borné de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ dans $H^\infty(\lambda)$ tel que $T_\infty U_\infty$ = identité de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Dans ce travail on étudie ce type de problèmes dans le polydisque unité $\mathbb{D}^n$ de $\mathbb{C}^n$. Après avoir défini convenablement les classes de Hardy $H^p(\lambda_n)$ et l'opérateur T_p associé à une suite de $\mathbb{D}^n$ on obtient tout d'abord le :

THEOREME 1. Soit σ une suite d'interpolation pour $H^\infty(\lambda_n)$ et T_p l'opérateur associé ; on a alors, pour tout p positif :

i) $T_p\, H^p(\lambda_n) = \ell^p(\mathbb{N})$

ii) il existe une extension linéaire bornée U_p de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $H^p(\lambda_n)$.

On utilise, pour montrer ce théorème l'étude que nous avons faite dans [3] et le théorème d'extension linéaire de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ dans $H^\infty(\lambda_n)$ dû à A. Bernard [2] et qui généralise le résultat de P. Beurling.

On peut remarquer que même dans le cas du disque $\mathbb{D}$ le résultat ii) n'était pas connu, de plus, avec essentiellement la même preuve le théorème 1 reste valable en remplaçant le polydisque de $\mathbb{C}^n$ par un domaine Ω strictement pseudo-convexe.

Dans le cas $n = 1$ on a rappelé que la réciproque du théorème 1 était vraie mais si $n \geq 2$ il n'en est plus de même à cause du contre-exemple étudié dans [1], le

THEOREME 2. Il existe une suite σ dans $\mathbb{D}^2$ qui est telle que $T_2 H^2(\lambda_2) = \ell^2(\mathbb{N})$ mais qui n'est pas d'interpolation $H^\infty(\lambda_2)$.

On introduit ensuite, comme dans [4], la notion d'ensemble de type S dans $\mathbb{D}^n$ et on caractérise de plusieurs manières les suites σ situées dans $W \times \mathbb{D}$, où W est de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$, qui sont telles que $T_p H^p(\lambda_n) = \ell^p(\mathbb{N})$; on montre en particulier le

THEOREME 3. Soit σ une suite dans $W \times \mathbb{D}$, où W est de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$; alors si pour un $p > 0$, $T_p H^p(\lambda_n) = \ell^p(\mathbb{N})$, σ est d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$.

Enfin dans le dernier paragraphe on montre que tous nos résultats se généralisent aux fonctions analytiques à valeurs vectorielles.

1. NOTATIONS ET PREMIERES DEFINITIONS.

Soit $\mathbb{D}^n = \left\{\underline{z} = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n, \quad |z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \ldots n\right\}$ le polydisque unité de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{T}^n = \left\{\underline{z} = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n, \quad |z_i| = 1, i = 1, 2, \ldots n\right\}$ le tore de dimension n que l'on munit de la mesure de Lebesgue normalisée λ_n.

Pour $p > 0$ on note $H^p(\lambda_n)$ les espaces de Hardy classiques :

$$H^p(\lambda_n) = \left\{f \text{ analytique dans } \mathbb{D}^n \text{ t. q. } \sup_{r<1} \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\underline{z})|^p \, d\lambda_n(\underline{z}) = \|f\|_p^p < +\infty\right\}$$

$$\text{et} \quad H^\infty(\lambda_n) = \left\{f \text{ analytique dans } \mathbb{D}^n \text{ t. q. } \sup_{\underline{z} \in \mathbb{D}^n} |f(\underline{z})| = \|f\|_\infty < +\infty\right\}.$$

Soit $\sigma = \left\{\underline{z}_k, \ k \in \mathbb{N}\right\}$ une suite dans $\mathbb{D}^n$ et p t. q. $0 < p \leq +\infty$, on note T_p l'opérateur défini sur $H^p(\lambda_n)$ ainsi : $T_p f = \left\{((1 - |\underline{z}_k|^2))^{\frac{1}{p}} f(\underline{z}_k), \ k \in \mathbb{N}\right\}$ pour $f \in H^p(\lambda_n)$ et avec la <u>convention</u> : $\forall \, \underline{z} \in \mathbb{D}^n$, $\underline{z} = (z^1, \ldots, z^n)$, on pose

$$((1 - |\underline{z}|^2)) = \prod_{j=1}^{n} (1 - |z^j|^2).$$

DEFINITIONS. i) On dit que σ est <u>d'interpolation $H^p(\lambda_n)$</u> si $T_p(H^p(\lambda_n)) \supseteq \ell^p(\mathbb{N})$

ii) On dit que σ est <u>fortement d'interpolation $H^p(\lambda_n)$</u> si, de plus, il existe $C > 0$ avec $\forall \, f \in H^p(\lambda_n)$, $\|T_p f\|_p \leq C \|f\|_p$.

iii) On dit que σ a la propriété d'extension linéaire bornée si il existe un opérateur linéaire U_p de $\ell^p(\mathbb{N})$ dans $H^p(\lambda_n)$ et une constante $D > 0$ tels que :
$\forall\, \omega \in \ell^p(\mathbb{N})$, $T_p U_p(\omega) = \omega$ et $\|U_p(\omega)\|_p \leq D\|\omega\|_p$.

Il est clair que la propriété d'extension linéaire bornée implique celle d'interpolation.

On note, $\forall\, z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}$, $\forall\, \theta \in [0,2\pi]$, $P_z(\theta) = \dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}$ le noyau de Poisson de z ; de même si $\underline{z} = (z^1,\dots,z^n) \in \mathbb{D}^n$ et $\underline{\theta} = (\theta^1,\dots,\theta^n)$ on note $P_{\underline{z}}(\underline{\theta}) = P_{z^1}(\theta^1)\dots P_{z^n}(\theta^n)$.

Soit $p > 1$ et $z \in \mathbb{D}$, le noyau de Cauchy-Szegö normalisé dans $H^p(\lambda_1)$ sera noté $e_z^{(p)}(\zeta) = c(z,p)\dfrac{(1-|z|^2)^{\frac{1}{q}}}{(1-\bar{z}\zeta)}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$ et la constante $c(z) = c(z,p)$ vérifiant $0 < \alpha(p) \leq c(z,p) \leq \beta(p)$ où α et β ne dépendent pas de $z \in \mathbb{D}$; dans $\mathbb{D}^n$ il vient alors :

$$e_{\underline{z}}^{(p)}(\underline{\zeta}) = e_{z^1}^{(p)}(\zeta^1)\dots e_{z^n}^{(p)}(\zeta^n) = c(\underline{z})\frac{(\!(1-|\underline{z}|^2)\!)^{\frac{1}{p}}}{(\!(1-\bar{\underline{z}}\,\underline{\zeta})\!)}$$

avec $c(\underline{z}) = c(z^1)\dots c(z^n)$ et $(\!(1-\bar{\underline{z}}.\underline{\zeta})\!) = \prod_{j=1}^{n}(1-\bar{z}^j\zeta^j)$.

2. RESULTATS GENERAUX

On va montrer le théorème suivant.

THEOREME 2 1. <u>Soit</u> σ <u>une suite d'interpolation</u> $H^\infty(\lambda_n)$ <u>alors</u> :

a) <u>pour tout</u> $p > 0$, σ <u>a la propriété d'extension linéaire bornée</u> ;

b) <u>pour tout</u> $p > 0$, <u>l'opérateur</u> T_p <u>est borné de</u> $H^p(\lambda_n)$ <u>dans</u> $\ell^p(\mathbb{N})$, <u>c'est-à-dire</u> σ <u>est fortement d'interpolation</u> $H^p(\lambda_n)$.

Dans le cas $n = 1$, si σ est d'interpolation $H^p(\lambda_1)$, pour un $p > 0$, alors σ est d'interpolation $H^\infty(\lambda_1)$; ce n'est plus vrai pour $n > 1$ à cause de

THEOREME 2.2. Il existe une suite σ dans $\mathbb{D}^2$ qui est fortement d'interpolation $H^2(\lambda_2)$ mais qui n'est pas d'interpolation $H^\infty(\lambda_2)$.

Le théorème 2.2 a été démontré dans [1] ; montrons le théorème 2.1

a) Supposons d'abord $p > 1$, soit $\sigma = \{\underline{z}_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ une suite d'interpolation dans $H^\infty(\lambda_n)$ de constante $C > 0$, c'est-à-dire $\forall\, \omega \in \ell^\infty(N)$, $\exists\, f \in H^\infty(\lambda_n)$ t. q. $T_\infty f = \omega$ et $\|f\|_\infty \leq C\|\omega\|_\infty$; une telle constante existe toujours grâce au théorème de l'application ouverte .

On sait qu'alors il existe une suite de fonctions $\{\varepsilon_i\ ,\ i \in N\}$ de $H^\infty(\lambda_n)$ telles que [2] :

$$\forall\, i,j \in \mathbb{N}\ ,\quad \varepsilon_i(\underline{z}_j) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i(\underline{z})| \leq C^2, \quad \forall\, \underline{z} \in \mathbb{D}^n \quad (2.1).$$

On définit alors l'opérateur U_p comme suit :

$$\forall\, \omega \in \ell^p(\mathbb{N}),\quad \omega = (\omega_i,\ i \in \mathbb{N}),\quad U_p(\omega)(\underline{\zeta}) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i\ e^{(p)}_{\underline{z}_i}(\underline{\zeta})\, \varepsilon_i(\underline{\zeta}),\quad \underline{\zeta} \in D^n\ ;$$

on a alors, grâce à (2.1) et au fait que $e^{(p)}_{\underline{z}_i}(\underline{z}_i) = c(\underline{z}_i)\,(1 - |\underline{z}_i|^2)^{-\frac{1}{p}}$, $T_p U_p(\omega) = \omega$; d'autre part $\|U_p(\omega)\|_p^p = \int \left|\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i\, c(\underline{z}_i)^{-1}\ e^{(p)}_{\underline{z}_i}(\underline{\zeta})\, \varepsilon_i(\underline{\zeta})\right|^p d\lambda_n(\underline{\zeta})$, par Hölder

$\|U_p(\omega)\|_p^p \leq \int \left(\sum_i |\omega_i\, c(\underline{z}_i)^{-1}\, e^{(p)}_{\underline{z}_i}(\underline{\zeta})|^p\right)\left(\sum_i |\varepsilon_i(\underline{\zeta})|^q\right)^{p/q} d\lambda_n$, mais (2.1) implique $\left(\sum_i |\varepsilon_i(\underline{\zeta})|^q\right)^{p/q} \leq C^{2p}$ et $e^{(p)}_{\underline{z}_i}$ est normalisé dans $H^p(\lambda_n)$ donc

$\|U_p(\omega)\|_p^p \leq C^{2p}\, \alpha^{-np}(p)\|\omega\|_p^p$ puisque $c(\underline{z}_i)^{-1} \leq \alpha^{-n}$.

Supposons que $0 < p \leq 1$, il existe un entier m tel que $p' = mp > 1$; posons alors $f_{\underline{z}}(\underline{\zeta}) = (e_{\underline{z}}^{(p')}(\zeta))^m$, $\underline{z} \in D^n$, $\underline{\zeta} \in D^n$. On a, bien sûr,

$$\|f_{\underline{z}}\|_p^p = \|e_{\underline{z}}^{(p')}\|_{p'}^{p'} = 1, \quad \text{et} \quad f_{\underline{z}}(\underline{z}) = (e_{\underline{z}}^{(p')}(\underline{z}))^m = c^m(\underline{z},p')\,(\!(1-|\underline{z}|^2)\!)^{-\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

Posons alors $U_p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i\, c^{-m}(\underline{z}_i, p')\, f_{\underline{z}_i}(\underline{\zeta})\, \varepsilon_i(\underline{\zeta})$, $\forall\, \omega = \{\omega_i, i\in\mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N})$.

Clairement (2.2) $\Longrightarrow T_p\, U_p(\omega) = \omega$; calculons $\|U_p(\omega)\|_p^p$:

$\|U_p(\omega)\|_p^p = \int |\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i\, c^{-m}(\underline{z}_i,p')\, f_{\underline{z}_i}(\underline{\zeta})\, \varepsilon_i(\underline{\zeta})|^p\, d\lambda_n(\underline{\zeta})$ mais par Hölder,

$|\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i f_{z_i} \varepsilon^i|^{mp} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i f_{\underline{z}_i}|^{mp})(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^{q'})^{\frac{mp}{q'}}$ avec q' conjugué de $p' = mp$

d'où prenant les racines m^e : $|\sum_i \omega_i f_{z_i} \varepsilon_i|^p \leq (\sum |\omega_i f_{\underline{z}_i}|^{mp}(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^{q'})^{p/q'}$

mais, puisque $m \geq 2$, on a $(\sum |\omega_i f_{\underline{z}_i}|^{pm})^{\frac{1}{m}} \leq \sum |\omega_i f_{\underline{z}_i}|^p$

et (2.1) implique $(\sum |\varepsilon_i|^{q'})^{p/q'} \leq C^{2p}$ on en déduit donc

$\|U_p(\omega)\|_p^p \leq C^{2p}\, \alpha^{-mpn} \|\omega\|_p^p$, puisque, par (2.2) $\|f_{\underline{z}}\|_p^p = 1$, ce qui achève la preuve du a).

Montrons le b), nous ferons la démonstration dans D^2, le cas général se montrant de manière identique.

Nous aurons besoin de deux lemmes.

LEMME 2.1. <u>Soit</u> $\sigma_1 = \{(z_k, w_k),\ k\in\mathbb{N}\}$ <u>une suite de</u> D^2 <u>fortement d'interpolation</u> $H^2(\lambda_2)$. <u>Alors les suites</u> $\sigma_2 = \{(z_k, \bar{w}_k),\ k\in\mathbb{N}\}$, $\sigma_3 = \{(\bar{z}_k, w_k),\ k\in\mathbb{N}\}$, $\sigma_4 = \{(\bar{z}_k, \bar{w}_k),\ k\in\mathbb{N}\}$ <u>sont aussi fortement d'interpolation</u> $H^2(\lambda_2)$ <u>et pour les mêmes constantes que</u> σ_1.

Preuve Utilisant [3, chap. II § 3], on sait que σ fortement d'interpolation $H^2(\lambda_2)$ est équivalent au fait qu'il existe une base orthonormale $\{f_k,\ k\in\mathbb{N}\}$

de E_σ, l'espace engendré par $\left\{e^{(2)}_{(z_k,w_k)},\ k\in\mathbb{N}\right\}$ dans $H^2(\lambda_2)$ et un opérateur linéaire Q de $\mathcal{L}(E_\sigma)$ tels que : $\forall\ k\in\mathbb{N}$ $e^{(2)}_{(z_k,w_k)} = Q\,f_k$. On en déduit que l'opérateur Q^*Q a pour matrice, dans la base orthonormale $\left\{f_k\ ,\ k\in\mathbb{N}\right\}$,
$M(\sigma_1) = \left\{\langle e^{(2)}_{(z_k,w_k)}, e^{(2)}_{(z_{k'},w_{k'})}\rangle,\ k,k'\in\mathbb{N}\right\}$, car $\langle Q^*Qf_k,f_\ell\rangle = \langle Qf_k, Qf_\ell\rangle =$
$\langle e^{(2)}_{(z_k,w_k)}, e^{(2)}_{(z_\ell,w_\ell)}\rangle$.

Dire que σ est fortement d'interpolation est donc équivalent au fait que $M(\sigma)$ et $M(\sigma)^{-1}$ sont bornées. Mais ici on a :

$$M(\sigma_1) = M(\sigma_4) \quad \text{et} \quad M(\sigma_2) = M(\sigma_3) = \left\{\overline{\langle e^{(2)}_{(z_k,w_k)}, e^{(2)}_{(z_\ell,w_\ell)}\rangle},\quad k,\ell\in\mathbb{N}\right\} ;$$

donc puisque $M(\sigma_1)$ est bornée et d'inverse bornée il en est de même de $M(\sigma_i)$ et de $M(\sigma_i)^{-1}$, $i = 2, 3, 4$ et ce par les mêmes constantes. On en déduit le lemme 1. (Pour plus de détail, voir [3 chap. II]).

Soit maintenant σ une suite d'interpolation $H^\infty(\lambda_2)$ de constante $C > 0$; on sait [3 chap. II] qu'alors σ est fortement d'interpolation $H^2(\lambda_2)$ de constante C^2.

Si $\sigma = \left\{(z_k,w_k),\ k\in\mathbb{N}\right\}$, notons μ la mesure associée,
$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|^2)(1-|w_k|^2)\,\delta_{(z_k,w_k)}$; si $f\in L^2(\lambda_2)$, notons $\tilde{f}$ l'intégrale de Poisson de f, $\tilde{f}(\underline{z}) = \int f(\underline{\zeta})\,P_{\underline{z}}(\underline{\zeta})\,d\lambda_2(\underline{\zeta})$.

On a alors le

LEMME 2.2. <u>Pour toute</u> f <u>dans</u> $L^2(\lambda_2)$, f <u>positive, on a l'inégalité</u> :
$\int \tilde{f}^2\,d\mu \le 2C^2\,\|f\|_2^2$.

Preuve. Soit $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f et posons, $\theta,\varphi\in[0,2\pi]$:

$$\tilde{f}_1(\theta,\varphi) = \sum_{\ell\geq 0, m\geq 0} \hat{f}(\ell,m)\, e^{i(\ell\theta+m\varphi)} \quad ; \quad \tilde{f}_2(\theta,\varphi) = \sum_{\ell\geq 0, m<0} \hat{f}(\ell,m)\, e^{i(\ell\theta+m\varphi)} \quad ;$$

$$f_3(\theta,\varphi) = \sum_{\ell<0, m\geq 0} \hat{f}(\ell,m)\, e^{i(\ell\theta+m\varphi)} \quad ; \quad f_4(\theta,\varphi) = \sum_{\ell<0, m<0} \hat{f}(\ell,m)\, e^{i(\ell\theta+m\varphi)}.$$

On remarque que, les f_i étant orthogonales dans $L^2(\lambda_2)$ on a :

$$f = f_1 + \ldots + f_4 \quad \text{et} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{i=1}^{4} \|f_i\|_2^2 \qquad (2.3)$$

et $\tilde{f}_1(z,w) = \sum_{\ell\geq 0, m\geq 0} \hat{f}(\ell,m)\, z^\ell w^m$; $\tilde{f}_2(z,w) = \sum_{\ell\geq 0, m>0} \hat{f}(\ell,-m)\, z^\ell \bar{w}^m$;

$$\tilde{f}_2(z,w) = \sum_{\ell>0, m\geq 0} \hat{f}(-\ell,m)\, \bar{z}^\ell w^m \quad \text{et} \quad \tilde{f}_4(z,w) = \sum_{\ell>0, m>0} \hat{f}(-\ell,-m)\, \bar{z}^\ell \bar{w}^m.$$

Posons enfin : $g_1(z,w) = \tilde{f}_1(z,w)$; $g_2(z,w) = \tilde{f}_2(z,\bar{w})$; $g_3(z,w) = \tilde{f}_3(\bar{z},w)$ et $g_4(z,w) = \tilde{f}_4(\bar{z},\bar{w})$; il est clair que, $\forall\, i = 1, 2, 3, 4$, $g_i \in H^2(\lambda_2)$ et $\|g_i\|_2 = \|f_i\|_2$ (2.4).

Calculons alors : $I = \int \tilde{f}^2 d\mu = \int |\tilde{f}_1 + \ldots + \tilde{f}_4|^2\, d\mu \leq \left[\sum_{i=1}^{4} (|f_i|^2\, d\mu)^{1/2}\right]^2$; d'où :

$$I \leq 2 \sum_{i=1}^{4} \int |\tilde{f}_i|^2\, d\mu \qquad (2.5)$$

et $\int |\tilde{f}_1|^2\, d\mu = \int |g_1|^2\, d\mu \leq C^2 \|g_1\|_2^2$ car $g_1 \in H^2(\lambda_2)$

$$\int |\tilde{f}_2|^2\, d\mu = \sum_k (1-|z_k|^2)(1-|w_k|^2)\, |\tilde{f}_2(z_k,w_k)|^2 = \sum_k (1-|z_k|^2)(-|w_k|^2)\, |g_2(z_k,w_k)|$$

mais le lemme 2.1 nous affirme que $\sigma_2 = \{(z_k,\bar{w}_k),\ k\in\mathbb{N}\}$ est aussi fortement d'interpolation $H^2(\lambda_2)$ et pour la même constante que $\sigma = \sigma_1$, donc :

$\int |\tilde{f}_2|^2\, d\mu \leq C^2 \|g_2\|_2^2$ et de même pour $i = 3$ et 4 ; portant cela dans (2.5) il vient $\int \tilde{f}^2\, d\mu \leq 2\, C^2 \sum_{i=1}^{4} \|g_i\|_2^2$; utilisant (2.4) puis (2.3) on a enfin : $\int \tilde{f}^2 d\mu \leq 2C^2 \|f\|_2^2$.

Preuve du b) du théorème 2.1. Soit $\sigma = \{(z_k,w_k),\ k\in\mathbb{N}\}$ une suite de D^2 qui est d'interpolation $H^\infty(\lambda_2)$; pour $p > 0$ considérons $f \in H^p(\lambda_n)$, et, si f^* désigne les valeurs au bord de f, posons $g = |f^*|^{p/2}$; g est dans $L^2(\lambda_2)$ et positive et on peut donc lui appliquer le lemme 2.2.

$$\sum_{k} ((1 - |\underline{z}_k|^2)) |g(\underline{z}_k)|^2 \leq 2C^2 \|g\|_2^2 = 2C^2 \|f\|_p^p .$$

Mais $|f|^{p/2}$ est pluri-sousharmonique donc $|f(\underline{z})|^{p/2} \leq |g(\underline{z})|$ et

$\sum_{k \in \mathbb{N}} ((1 - |\underline{z}_k|^2)) |f(\underline{z}_k)|^p \leq 2C^2 \|f\|_p^p$, ce qui achève la preuve du théorème 2.1.

3. ENSEMBLES DE TYPE S DANS $\mathbb{D}^n$.

Les résultats de ce paragraphe ont tous été montrès dans [4].

Soit σ une suite dans $\mathbb{D}^n$; on dit que σ est séparée si il existe $\delta > 0$ tel que $\forall\, \underline{z}, \underline{w} \in \sigma$, $\underline{z} \neq \underline{w}$, $d_g(\underline{z}, \underline{w}) \geq \delta$, où d_g désigne la distance de Gleason pour $H^\infty(\lambda)$ [5].

DEFINITION. Soit $W \subset \mathbb{D}^n$. On dit que W est un ensemble de type S dans $\mathbb{D}^n$ si on a l'équivalence, pour toute suite σ dans W :

$$\{\sigma \text{ est d'interpolation } H^\infty(\lambda)\} \Longleftrightarrow \{\sigma \text{ est séparée}\}.$$

Le théorème suivant, dû à N. Th. Varopoulos [6 Théorème 1'], nous permettra de montrer qu'une union finie d'ensembles de type S est de type S.

THEOREME 3.1. [N. Varopoulos]. Soit A une algèbre uniforme sur X et $E_i \subset X$, $i = 1, 2$ deux ensembles d'interpolation de constantes C_i, $i = 1, 2$, tels que $E_1 \cup E_2$ soit totalement disconnecté ; supposons de plus qu'il existe $\ell > 0$ tel que la distance de Gleason de deux points distincts de $E_1 \cup E_2$ soit supérieure à ℓ. Alors l'ensemble $E_1 \cup E_2$ est un ensemble d'interpolation de constante

$C = C(\ell, C_1, C_2)$ ne dépendant que de C_1, C_2, ℓ.

En effet, ce théorème admet le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.1. Si σ_1 et σ_2 sont deux suites d'interpolation pour $H^\infty(\lambda)$ telles que $\sigma_1 \cup \sigma_2$ soit séparée, alors $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est d'interpolation pour $H^\infty(\lambda)$.

Un énoncé plus général se trouve dans [3 chap. II].

Preuve. Il suffit de tronquer les suites :

$$\sigma_1 = \{\underline{z}_i, \ i \in \mathbb{N}\} \qquad \sigma_1^{(k)} = \{\underline{z}_i, \ i \leq k\}$$

$$\sigma_2 = \{\underline{w}_i, \ i \in \mathbb{N}\} \qquad \sigma_2^{(k)} = \{w_i, \ i \leq k\}$$ alors $\sigma_1^{(k)}$ et $\sigma_2^{(k)}$ vérifient les hypothèses du théorème d'où interpolation avec une constante indépendante de k. Il ne reste plus qu'à utiliser la propriété de Montel que vérifie $H^\infty(\lambda)$ pour conclure.

COROLLAIRE 3.2. Une union finie d'ensemble de type S dans $\mathbb{D}^n$ est de type S.

Preuve. Evidente avec le corollaire 1.

3.b) EXEMPLES. On dira que $\Gamma_{z_o} \subset \mathbb{D}$ est un cône de sommet $z_o \in T$ et d'angle α si $\bar{\Gamma}_{z_o} \subset \mathbb{D} \cup \{z_o\}$ et $\mathrm{Arg}(z - z_o) \in [-\alpha, +\alpha]$. On voit facilement que Γ_{z_o} est de type S. Plus généralement, si $\{\theta_n\}$ est une suite de réels tendant vers θ exponentiellement, soit $\{\Gamma_n^{(\alpha)}, n \in \mathbb{N}\}$ la famille de cônes de sommet $e^{i\theta_n}$ et d'angles α telle que $\overline{\cup \Gamma_n^{(\alpha)}} \cap \mathbb{T} = \{e^{i\theta_n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{e^{i\theta}\}$, alors on a montré que [4].

PROPOSITION 3.1. $W = \bigcup_n \Gamma_n^{(\alpha)}$ <u>est un ensemble de type</u> S <u>dans</u> $\mathbb{D}$.

De même on a montré le

THEOREME 3.2. <u>Soit</u> w_i, $i = 1, \ldots, n$, <u>une suite d'ensembles de type</u> S <u>dans</u> $\mathbb{D}$. <u>Alors</u> $W = W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$ <u>est de type</u> S <u>dans</u> $\mathbb{D}^n$.

Soit maintenant σ une suite dans $\mathbb{D} \times W$ où W est de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$. Partitionnons W en cellules à la Carleson [7], $\{c_k\ ,\ k \in \mathbb{N}\}$, disjointes et telles que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, \underline{z}, \underline{w} \in C_k$, $d_g(\underline{z}\ ,\ \underline{w}) < \delta$, où d_g représente la distance de Gleason dans $H^\infty(\lambda_{n-1})$; on peut faire cela pour tout $\delta > 0$, la famille $\{C_k\ ,\ k \in \mathbb{N}\}$ dépendant évidemment de δ.

Posons $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k = \sigma \cap (\mathbb{D} \times C_k)$ et $\tilde{\sigma}^k = \{z \in \mathbb{D},\ \text{t. q. } \underline{y} \in C_k \text{ avec } (\underline{z}\ ,\ \underline{y}) \in \sigma^k\}$

c'est-à-dire que $\tilde{\sigma}^k$ est le projection sur la première coordonnée de σ^k.

Utilisant alors le théorème de N. Varopoulos [6] et celui de A. Bernard [2] on a montré le

THEOREME 3.3. <u>Soit</u> σ <u>une suite dans</u> $\mathbb{D} \times W$ <u>où</u> W <u>est un ensemble de type</u> S <u>dans</u> $\mathbb{D}^{n-1}$. <u>Pour que</u> σ <u>soit d'interpolation</u> $H^\infty(\lambda_n)$ <u>il faut et il suffit que</u> :

i) σ <u>soit séparée</u>

ii) $\exists\, \delta > 0$ <u>tel que</u> $\forall\, k \in N$ <u>la suite</u> σ^k <u>soit d'interpolation pour</u> $H^\infty(\lambda_1)$ <u>de constante indépendante de</u> k, <u>c'est-à-dire</u> $\forall\, k \in N$, $\inf_{z \in \sigma^k} \prod_{\substack{w \in \sigma^k \\ w \neq z}} \left| \dfrac{z - w}{1 - \bar{z} w} \right| \geq \delta' > 0$ δ' <u>indépendant de</u> k.

Ce théorème donne une description "concrète" des suites d'interpolation σ de $D \times W$. Utilisant un théorème d'approximation dû à E. Kronstadt [8] on a aussi obtenu une description abstraite de ces suites,

THEOREME 3.4. Soit $\sigma \subset \mathbb{D}\ W$ où W est un ensemble de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$. Pour que σ soit d'interpolation $H^{\infty}(\lambda_n)$ il faut et il suffit que les idempotents élémentaires soient uniformément bornés dans $H^{\infty}(\lambda_n)$.

Rappelons que si $\sigma = \{\underline{z}_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, les idempotents élémentaires dans $H^{\infty}(\lambda_n)$ sont des fonctions $\{\varepsilon_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ telles que $\varepsilon_i(\underline{z}_j) = \delta_{ij}$ et $\varepsilon_i \in H^{\infty}(\lambda_n)\ \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Les résultats rappelés dans cette section généralisent des résultats dû à E. Kronstadt [8], et ce par des méthodes très différentes.

4. INTERPOLATION H^p

Dans le disque unité $\mathbb{D}$ considérons l'ensemble suivant

$0 < h < 1,\ \theta \in [0,2\pi[\qquad S_{h,\theta} = \left\{z \in \mathbb{D},\ z = re^{i\varphi} \text{ t.q. } 1-h \le r < 1 \text{ et } \theta - \frac{h}{2} \le \varphi < \theta + \frac{h}{2}\right\}$

introduit par L. Carleson [7]. Dans $\mathbb{D}^n$ nous considérons les produits de tels ensembles $\forall\ \underline{h} = (h_1,\dots,h_n)$, $\underline{\theta} = (\theta_1,\dots\ \theta_n)$

$$S_{\underline{h},\underline{\theta}} = S_{h_1,\theta_1} \times S_{h_2,\theta_2} \times \dots \times S_{h_n,\theta_n}.$$

Soit alors μ une mesure positive dans $\mathbb{D}^n$, on dit que μ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{D}^n$ si il existe $C > 0$ t.q.

$$\forall\, \underline{h},\ \forall\, \underline{\theta},\quad \mu(S_{\underline{h},\underline{\theta}}) \le C\, h_1, h_2 \dots h_n.$$

On dit que μ vérifie l'inégalité $H^p(\lambda_n)$, $+\infty > p > 0$, si $\exists\, C > 0$, $\forall\, f \in H^p(\lambda_n)$

$$\int_{\mathbb{D}^n} |f(\underline{\zeta})|^p\, d\mu(\underline{\zeta}) \le C^p \|f\|_p^p.$$

On est maintenant en mesure d'énoncer le

THEOREME 4.1. Soit μ une mesure sur $\mathbb{D}^n$, positive et telle que pour un p positif μ vérifie l'inégalité $H^p(\lambda_n)$, alors μ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{D}^n$.

La réciproque de ce théorème, vraie dans le cas $n=1$ [9], est fausse en général pour $n>1$ à cause d'un contre exemple de L. Carleson [10].

Preuve du théorème. Supposons d'abord $p>1$. Soit alors l'ensemble $S_{\underline{h},\underline{\theta}}$ et considérons le point $\underline{z}=z_{\underline{h},\underline{\theta}}=((1-h_1)e^{i\theta_1},\dots,(1-h_n)e^{i\theta_n})$; associons lui le noyau de Cauchy Szegö normalisé dans $H^p(\lambda_n)$

$e_{\underline{z}}^{(p)}=c(\underline{z})\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|z^j|^2)^{\frac{1}{q}}}{(1-\bar{z}^j\zeta^j)}$. Il est facile de vérifier que pour $\zeta^j\in S_{h_j,\theta_j}$ on a $\frac{1}{|1-\bar{z}^j\zeta^j|}\geq\frac{\delta}{(1-|z^j|^2)}$, δ étant une constante strictement positive absolue. On en déduit que $\forall\,\zeta\in S_{\underline{h},\underline{\theta}}$, $|e_{\underline{z}}^{(p)}(\zeta)|\geq\delta\,\alpha(n,p)\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|z^j|^2)^{\frac{1}{q}}}{(1-|z^j|^2)}=\delta\alpha\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(1-|z^j|^2)^{\frac{1}{p}}}$

mais $\underline{z}=z_{\underline{h},\underline{\theta}}$ donc $\forall\,\underline{\zeta}\in S_{\underline{h},\underline{\theta}}$, $|e_{\underline{z}}^{(p)}(\underline{\zeta})|\geq\frac{\delta\alpha}{2^{\frac{1}{p}}}\frac{1}{(h_1h_2\dots h_n)^{\frac{1}{p}}}$. Appliquons à $e_{\underline{z}}^{(p)}$ l'inégalité $H^p(\lambda_n)$ de l'hypothèse, il vient

$$C\|e_{\underline{z}}^{(p)}\|_p^p\geq\int_{\mathbb{D}^n}|e_{\underline{z}}^{(p)}|^p d\mu\geq\int_{S_{\underline{h},\underline{\theta}}}|e_{\underline{z}}^{(p)}(\underline{\zeta})|^p\,d\mu(\underline{\zeta})\geq\frac{\delta^p\alpha^p}{2}\,\frac{\mu(S_{\underline{h},\underline{\theta}})}{h_1h_2\dots h_n}.$$

Comme $e_{\underline{z}}^{(p)}$ est normalisé il vient $\mu(S_{\underline{h},\underline{\theta}})\leq\frac{2c}{\delta^p\alpha^p}h_1h_2\dots h_n$, donc μ est bien de Carleson.

Soit maintenant $0<p<1$. Il existe un entier $m\in\mathbb{N}$ tel que $p'=mp>1$. Soit $f\in H^{p'}(\lambda_n)$ alors $f^m\in H^p(\lambda_n)$ et on a

$$\int_{\mathbb{D}^n}|f^m|^p\,d\mu\leq C\|f^m\|_p^p\qquad\text{donc}\qquad\int_{\mathbb{D}^n}|f|^{p'}d\mu\leq C\|f\|_{p'}^{p'}$$

et l'on est ramené à la preuve ci-dessus. Pour $p=2$ ceci est un cas très particulier de l'étude [3 chap. III], et la preuve est analogue.

On va maintenant donner une réciproque de ce théorème dans le cas où la mesure μ est dans $\mathbb{D}\times W$ où W est de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$.

THEOREME 4.2. <u>Soit</u> μ <u>une mesure positive portée par</u> $\mathbb{D}\times W$ <u>où</u> W <u>est un ensemble de type</u> S <u>dans</u> $\mathbb{D}^{n-1}$. <u>Alors si</u> μ <u>est de Carleson elle vérifie les inégalités</u> $H^p(\lambda_n)$, $\forall\, p>0$.

Ce théorème sera conséquence des lemmes suivants.

Considérons la partition de $\mathbb{D}$ en "cellules" à la Carleson $\forall\, k\in\mathbb{N}, \forall\, \ell\in\mathbb{N}, \ell<2^k$,

$$C_{k,\ell}=\left\{z=re^{i\theta}\in\mathbb{D},\ 2^{-k-1}<1-r\leq 2^{-k},\ \frac{2\pi\ell}{2^k}\leq\theta<\frac{2\pi}{2^k}(\ell+1)\right\}.$$

Un calcul classique montre qu'il existe une constante absolue $M>0$ telle que :

$\forall\, k, \forall\, \ell, \forall\, z\in C_{k,\ell}$, on a $P_z(\theta)\leq M\,P_w(\theta)$, $\forall\,\theta\in[0,2\pi]$ (4.1).

De même, posant $\underline{k}=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{N}^n$, $\underline{\ell}=(\ell_1,\dots,\ell_n)\in\mathbb{N}^n$ on recouvre $\mathbb{D}^n$ par les "cellules" $C_{\underline{k},\underline{\ell}}=C_{k_1,\ell_1}\times\dots\times C_{k_n,\ell_n}$.

Soit maintenant W un ensemble de type S dans $\mathbb{D}^n$ et considérons la famille d'indices $\Lambda=\left\{(\underline{k},\underline{\ell})\ \text{t.q.}\ C_{\underline{k},\underline{\ell}}\cap W\neq\emptyset\right\}$. Pour tout $(\underline{k},\underline{\ell})\in\Lambda$ notons $z_{\underline{k},\underline{\ell}}$ un point de $C_{\underline{k},\underline{\ell}}\cap W$; notons aussi σ la suite $\sigma=\left\{z_{\underline{k},\underline{\ell}},\ (\underline{k},\underline{\ell})\in\Lambda\right\}$. On a alors le lemme

LEMME 4.1. <u>La suite</u> σ <u>est l'union d'au plus</u> 4^n <u>sous-suites</u> σ_i <u>telles que</u>, $\forall\, i=1,\dots,4^n$, σ_i <u>soit séparée, donc d'interpolation</u> $H^\infty(\lambda)$.

En effet, en une dimension posons :

$J_1=\{(k,\ell)$ t.q. $k\equiv 0 \pmod 2$, $\ell\equiv 0 \pmod 2\}$

$J_2=\{(k,\ell)$ t.q. $k\equiv 0 \pmod 2$, $\ell\equiv 1 \pmod 2\}$

$J_3=\{(k,\ell)$ t.q. $k\equiv 1 \pmod 2$, $\ell\equiv 0 \pmod 2\}$

$J_4=\{(k,\ell)$ t.q. $k\equiv 1 \pmod 2$, $\ell\equiv 1 \pmod 2\}$.

Soit alors $i \in [1,\dots,4]$ et $(k,\ell) \in J_i$, $(k',\ell') \in J_i$, $(k,\ell) \neq (k',\ell')$; on voit facilement qu'il existe une constante absolue $\delta > 0$ telle que $\forall z \in C_{k,\ell}$, $\forall w \in C_{k',\ell'}$, $d_g(z,w) \geq \delta > 0$.

Dans $\mathbb{D}^n$, faisant tous les produits possibles, on obtient 4^n familles d'indices $K_1,\dots,K_{4^n}$ vérifiant : $\forall i \in [1,2,\dots,4^n]$, $\forall (\underline{k},\underline{\ell}) \in K_i$, $\forall (\underline{k}',\underline{\ell}') \in K_i$, $(\underline{k}',\underline{\ell}') \neq (\underline{k},\underline{\ell})$, $\forall \underline{z} \in C_{\underline{k},\underline{\ell}}$, $\forall \underline{w} \in C_{\underline{k}',\underline{\ell}'}$ on a $d_g(\underline{z},\underline{w}) \geq \delta > 0$.

Posons alors, $\forall i \in [1,2,\dots,4^n]$, $\Lambda_i = \Lambda \cap K_i$ et $\sigma_i = \left\{z_{\underline{k},\underline{\ell}}\,,\, (\underline{k},\underline{\ell}) \in \Lambda_i\right\}$ on a bien que $\sigma = \bigcup_{i=1}^{4^n} \sigma_i$, et $\forall i \in [1,2,\dots,4^n]$ σ_i est séparée. Comme de plus $\sigma_i \subset W$, $\forall i \in [1,2,\dots,4^n]$, et que W est de type S, σ_i est bien d'interpolation $H^\infty(\lambda)$.

Preuve du théorème 4.2. On fera la démonstration dans $\mathbb{D}^{n+1}$ pour utiliser les notations ci-dessus.

Soit μ une mesure de Carleson portée par $W \times \mathbb{D}$, où W est un ensemble de type S dans $\mathbb{D}^n$.

Recouvrons W par les cellules $C_{\underline{k},\underline{\ell}}$, et posons, si $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell < 2^k$, $S_{k,\ell} = \left\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},\ 0 < 1-r \leq 2^{-k},\ \frac{2\pi\ell}{2^k} \leq \theta < \frac{2\pi}{2^k}(\ell+1)\right\}$; de même dans $\mathbb{D}^n$: $S_{\underline{k},\underline{\ell}} = S_{k_1,\ell_1} \times \dots \times S_{k_n,\ell_n}$; on a, avec les notations du lemme 4.1, $(z_{\underline{k},\underline{\ell}} \in C_{\underline{k},\underline{\ell}} \cap W)$, $2^{-k_1} \dots 2^{-k_n} \leq 2^n((1-|z_{\underline{k},\underline{\ell}}|^2))$. Pour $(\underline{k},\underline{\ell}) \in \Lambda$ définissons la mesure $\mu_{\underline{k},\underline{\ell}}$ ainsi : pour tout borélien B de $\mathbb{D}$, on pose

$$\mu_{\underline{k},\underline{\ell}}(B) = \frac{1}{((1-|z_{\underline{k},\underline{\ell}}|^2))}\ \mu(C_{\underline{k},\underline{\ell}} \times B) ;$$

on voit que $\mu_{\underline{k},\underline{\ell}}$ est une mesure de Carleson dans $\mathbb{D}$ de constante indépendante de $(\underline{k},\underline{\ell})$ car, si $S_{h,\theta}$ est un ensemble de Carleson dans $\mathbb{D}$ il vient :

$$\mu_{\underline{k},\underline{\ell}}(S_{h,\theta}) = \frac{1}{((1-|z_{\underline{k},\underline{\ell}}|^2))}\,\mu(C_{\underline{k},\underline{\ell}} \times S_{h,\theta}) \le Ah\,\frac{2^{-k_1}\ldots 2^{-k_n}}{((1-|z_{\underline{k},\underline{\ell}}|^2))} \le 2^n Ah,$$

où A est la constante de μ.

Soit f continue sur $\mathbb{T}^{n+1}$ et positive, $\tilde{f}(\underline{z},w)$ son intégrale de Poisson dans $\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}$; si $\underline{z} \in \mathbb{D}^n$ et $w \in \mathbb{T}$, on note encore $\tilde{f}(\underline{z},w) = \int_{T^n} f(\underline{\zeta},w)P_{\underline{z}}(\underline{\zeta})d\lambda_n$ de même si $w \in \mathbb{D}$ et $\underline{z} \in \mathbb{T}^n$, $\tilde{f}(\underline{z},w) = \int_T f(\underline{z},\zeta)P_w(\zeta)\,d\lambda_1(\zeta)$. On a :

$$\int \tilde{f}^2 d\mu = \sum_{(\underline{k},\underline{\ell})\in\Lambda} \int_{C_{\underline{k},\underline{\ell}}\times\mathbb{D}} \tilde{f}^2(\underline{z},w)d\mu \le M^{2n} \sum_{(\underline{k},\underline{\ell})\in\Lambda} ((1-|z_{\underline{k},\underline{\ell}}|^2))\int_{\mathbb{D}} \tilde{f}^2(z_{\underline{k},\underline{\ell}},w)d\mu_{\underline{k},\underline{\ell}}(w) \qquad (4.2)$$

car $\tilde{f}(\underline{z},w) = \int f\,P_{\underline{z}}.P_w\,d\lambda_{n+1}$ et si $\underline{z} \in C_{\underline{k},\underline{\ell}}$, par (4.1) itéré :

$$\tilde{f}(\underline{z},w) \le M^n \tilde{f}(z_{\underline{k},\underline{\ell}},w).$$

Mais $\mu_{\underline{k},\underline{\ell}}$ est de Carleson de constante $2^n A$ donc $\exists\, A_1 > 0$ t.q., $\forall(\underline{k},\underline{\ell}) \in \Lambda$, $\int_{\mathbb{D}} \tilde{f}^2(z_{\underline{k},\underline{\ell}},w)\,d\mu_{\underline{k},\underline{\ell}}(w) \le A_1^2 \int_T \tilde{f}^2(z_{\underline{k},\underline{\ell}},w)d\lambda_1(w)$; portant dans (4.2) il vient :

$$\int \tilde{f}^2 d\mu \le A_1^2 M^{2n} \sum_{(\underline{k},\underline{\ell})\in\Lambda} ((1-|z_{\underline{k},\underline{\ell}}|^2)) \int_T \tilde{f}^2(z_{\underline{k},\underline{\ell}},w)\,d\lambda_1(w) \qquad (4.3).$$

Grâce au lemme 4.1 on peut diviser σ en au plus 4^n sous-suites σ_i qui soient d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$ de constante C_i ; posant $C = \sup_i C_i$ il vient, $i = 1,2,\ldots,4^n$,

$$\sum_{(\underline{k},\underline{\ell})\in\Lambda_i} ((1-|z_{\underline{k},\underline{\ell}}|^2))\,\tilde{f}^2(z_{\underline{k},\underline{\ell}},w) \le 2\,C^2 \int_{T^n} \tilde{f}^2(\underline{z},w)\,d\lambda_1(\underline{z}) \qquad (4.4),$$

grâce au lemme 2.2, applicable car σ_i est d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$.

Dans (4.3) on échange somme et intégrale il vient :

$$\int \tilde{f}^2 d\mu \le A_1^2 M^{2n} \sum_{i=1}^{4^n} \int_T \sum_{(\underline{k},\underline{\ell})\in\Lambda_i} ((1-|z_{\underline{k},\underline{\ell}}|^2))\tilde{f}^2(z_{\underline{k},\underline{\ell}},w)\,d\lambda_1(w) ;$$

en y portant (4.4) on arrive à :

$$\int \tilde{f}\,d\mu \le A_1^2 M^{2n}\,4^n.2.C^2 \int_{T^{n+1}} |f|^2 d\lambda_{n+1}.$$

Soit maintenant f dans $L^2(T^{n+1},\lambda_{n+1})$, $f \ge 0$, et $\{f_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ une suite de fonctions positives de $\mathcal{E}(\mathbb{T}^{n+1})$ qui converge vers f en norme $L^2(\lambda_{n+1})$. On a que $\tilde{f}_k$ converge ponctuellement dans $\mathbb{D}^{n+1}$ vers $\tilde{f}$; appliquant le lemme de Fatou il vient alors :

$$\int \liminf_k \tilde{f}_k^2 \, d\mu = \int \tilde{f}^2 \, d\mu \leq \liminf_k \int \tilde{f}_k^2 \, d\mu$$

d'où, puisque les f_k sont dans $\mathscr{C}(\mathbb{T}^{n+1})$:

$$\int \tilde{f}^2 \, d\mu \leq 4^n 2 \, A_1^2 M^{2n} C^2 \, \|f\|_2^2 \, , \; \forall \, f \in L^2(\lambda_{n+1}). \qquad (4.5)$$

On achève alors la preuve du théorème 4.2 comme celle du théorème 2.1 : soit $p > 0$ et $f \in H^p(\lambda_{n+1})$; $|f|^{\frac{p}{2}}$ est pluri-sous-harmonique donc appliquant (4.5) à $g = |f^*|^{\frac{p}{2}} \in L^2(\lambda_{n+1})$ on en déduit le théorème 4.2.

On va donner encore une caractérisation des suites d'interpolation $H^\infty(\lambda_{n+1})$ contenue dans $\mathbb{D} \times W$ où W est de type S dans $\mathbb{D}^n$.

A une suite $\sigma = \{\underline{z}_k, \, k \in \mathbb{N}\}$ on associe la mesure sur $\mathbb{D}^{n+1}$

$$\mu(\sigma) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^{n+1} (1 - |z_k^j|^2) \, \delta_{\underline{z}_k} \, .$$

THEOREME 4.3. <u>Soit</u> σ <u>une suite contenue dans</u> $\mathbb{D} \times W$, <u>où</u> W <u>est un ensemble de type</u> S <u>dans</u> $\mathbb{D}^n$. <u>Pour que</u> σ <u>soit d'interpolation</u> $H^\infty(\lambda_{n+1})$, <u>il faut et il suffit que</u> σ <u>soit séparée et que</u> $\mu(\sigma)$ <u>soit de Carleson</u>.

Si σ est d'interpolation $H^\infty(\lambda_{n+1})$, σ est clairement séparée ; la mesure associée $\mu(\sigma)$ est de Carleson comme cela a été montré, dans un cadre plus général, dans [11] et dans [3 chap. III].

Réciproquement supposons σ séparée et $\mu(\sigma)$ de Carleson dans $\mathbb{D}^{n+1}$. Recouvrons $\mathbb{D}^{n+1}$ par les "cellules" $C_{\underline{k}, \underline{\ell}}$. Puisque σ est séparée, dans chaque cellule $C_{\underline{k}, \underline{\ell}}$ il y a au plus $n_{\underline{k}, \underline{\ell}}$ points de σ avec $n_{\underline{k}, \underline{\ell}} \leq N < +\infty$. On peut donc diviser σ en N sous-suites σ_i telles qu'il n'y ait qu'un point de σ_i dans chaque cellule $C_{\underline{k},\underline{\ell}}$. Grâce au corollaire 3.1 il suffit de montrer que σ_i est d'interpolation $H^\infty(\lambda_{n+1})$. Appelons donc encore σ cette sous-suite σ_i. Elle a la propriété suivante : si nous recouvrons W par des "cellules" $D_{\underline{k},\underline{\ell}} \subset \mathbb{D}^n$ et si nous appelons $\sigma^{\underline{k},\underline{\ell}} = \{(z,\underline{w}) \in \sigma,\ \underline{w} \in D_{\underline{k},\underline{\ell}}\}$ puis $\tilde{\sigma}^{\underline{k},\underline{\ell}} = \{z \in \mathbb{D},\ \text{t.q.}\ \ \underline{w} \in D_{\underline{k},\underline{\ell}},\ (z,\underline{w}) \in \sigma\}$, c.à.d. la projection sur la première coordonnée de $\sigma^{\underline{k},\underline{\ell}}$, alors : la suite $\tilde{\sigma}^{\underline{k},\underline{\ell}}$ est séparée uniformément par rapport à $(\underline{k},\underline{\ell})$ (4.6).

D'autre part, choisissons dans $\mathbb{D}_{\underline{k},\underline{\ell}}$, le point :

$$w_{\underline{k},\underline{\ell}} = \{(w^1_{\underline{k},\underline{\ell}},\dots,w^n_{\underline{k},\underline{\ell}})\ ;\ w^j_{\underline{k},\underline{\ell}} = (1-2^{-kj-1})e^{i2\pi\ell j2^{-kj}}\}.$$

Alors, comme pour la preuve du théorème 4.2 la mesure $\mu_{\underline{k},\underline{\ell}}$ ainsi définie :

$\forall B$ borélien de $\mathbb{D}$, $\mu_{\underline{k},\underline{\ell}}(B) = \mu(\sigma)[B \times D_{\underline{k},\underline{\ell}}]\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1-|w^j_{\underline{k},\underline{\ell}}|^2)}$ est de Carleson dans $\mathbb{D}$ de constante indépendante de $\underline{k},\underline{\ell}$. Mais la mesure $\nu_{\underline{k},\underline{\ell}} = \sum_{z \in \tilde{\sigma}^{\underline{k},\underline{\ell}}}(1-|z|^2)\delta_z$ est telle que $\nu_{\underline{k},\underline{\ell}} \le \mu_{\underline{k},\underline{\ell}}$, grâce au choix de $w_{\underline{k},\underline{\ell}}$, donc $\nu_{\underline{k},\underline{\ell}}$ est de Carleson dans $\mathbb{D}$ de constante indépendante de $\underline{k},\underline{\ell}$: la suite $\sigma^{\underline{k},\underline{\ell}}$ est donc d'interpolation $H^\infty(\lambda_1)$ de constante indépendante de $\underline{k},\underline{\ell}$ et on peut alors appliquer le théorème 3.3 pour conclure puisque σ est dans $\mathbb{D}\times W$ avec W de type S.

COROLLAIRE 4.1. <u>Soit</u> σ <u>une suite de</u> $\mathbb{D} \times W$, <u>où</u> W <u>est de type</u> S <u>dans</u> $\mathbb{D}^{n-1}$. <u>Pour que</u> σ <u>soit d'interpolation</u> $H^\infty(\lambda_n)$ <u>il faut et il suffit que</u> σ <u>soit fortement d'interpolation</u> $H^p(\lambda_n)$ <u>pour un</u> $p>0$.

Si σ est d'interpolation $H^\infty(\lambda_n)$ alors grâce au théorème 2.1 σ est d'interpolation $H^p(\lambda_n)$, $\forall\, p>0$.

Si σ est fortement d'interpolation $H^p(\lambda_n)$, $p>0$, alors le théorème 4.1 nous affirme que $\mu(\sigma)$ est de Carleson. Pour appliquer le théorème 4.3 il reste à vérifier que σ est séparée, ce qui est fait dans le lemme suivant :

LEMME 4.2. Soit σ une suite de $\mathbb{D}^n$ et $p>0$ t.q. $\forall\ \underline{z},\ \underline{w}\in\sigma,\ \underline{z}\neq\underline{w}$, il existe $K>0$ et $f\in H^p(\lambda_n)$ avec $\|f\|_p\le K$ et $((1-|\underline{z}|^2))^{\frac{1}{p}}f(\underline{z})=1$, $f(\underline{w})=0$, alors la suite σ est séparée.

La preuve est très simple si $p=2$ [3 chap.II] mais sans la factorisation en fonction intérieure et extérieure c'est plus long. Soit $p>0$ et $f\in H^p(\lambda_n)$ alors :

$$((1-|\underline{z}|^2))^{\frac{1}{p}}|f(\underline{z})|\le C^n(p)\,\|f\|_p \tag{4.7}$$

en effet pour $n=1$ la mesure $(1-|z|^2)\delta_z$ est de Carleson dans $\mathbb{D}$ donc vérifie les inégalités $H^p(\lambda_1)$, $\forall\ p>0$.

Supposons la vraie dans $\mathbb{D}^{n-1}$, et soit $f\in H^p(\lambda_n)$ on a :

$\forall\underline{z}\in\mathbb{D}^{n-1},\ w\in\mathbb{D}\ :\ |f_r(\underline{z},w)|^p((1-|\underline{z}|^2))\le C^p(p,n-1)\int|f_r(\underline{\zeta},w)|^p d\lambda_{n-1}(\underline{\zeta})$

avec $f_r(\underline{\zeta},\eta)=f(r\underline{\zeta},r\eta)$; mais, $\underline{\zeta}$ fixé, $f_r(\underline{\zeta},\eta)$ est dans $H^p(\lambda_1)$ donc

$|f_r(\underline{\zeta},w)|^p(1-|w|^2)\le C^p(p)\int|f_r(\underline{\zeta},\eta)|^p\,d\lambda_1(\eta)$ d'où en reportant, $\forall r<1$,

$$((1-|\underline{z}|^2))(1-|w|^2)\,|f_r(\underline{z},w)|^p\le C^p(p)\ C^p(p,n-1)\,\|f_r\|_p^p$$

d'où, laissant tendre r vers 1, l'inégalité cherchée avec $C(p,n)=C^n(p)$.

Soit $0<h<1$ et $(z,w)\in\mathbb{C}^2$ t.q. $|z|\le 1-h$; $|w|\le 1-h$; posons

$$r=1-\frac{h}{2}\quad\text{et}\quad z'=\frac{z}{r},\ w'=\frac{w}{r}\ \text{on a :}\ \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|\ge\frac{1}{4}\left|\frac{z'-w'}{1-\bar{z}'w'}\right| \tag{4.8}$$

en effet posons $\rho=\frac{1-h}{r}$, on a $|z-w|=r|z'-w'|$, $|\bar{z}'w'|<\rho^2$ d'où

$$|1-\bar{z}w|=r^2\left|\frac{1}{r^2}-\bar{z}'w'\right|\le r^2\,\frac{(\frac{1}{r^2}-\rho^2)}{1-\rho^2}\,|1-\bar{z}'w'|\le 4r|1-\bar{z}'w'|\quad\text{d'où (4.8).}$$

Soit alors σ, $\underline{z}$, $\underline{w}$ et f comme dans le lemme 4.2 la preuve étant faite dans $\mathbb{D}^2$ et supposons de plus que :

a) $\underline{z} = (z^1, z^2)$; $\underline{w} = (w^1, w^2)$ avec $|z^1| = 1-h_1$; $1 - 2h_1 \leq |w^1| \leq 1-h_1$

et $|z^2| = 1-h_2$; $1 - 2h_2 \leq |w^2| \leq 1-h_2$.

Posons $r_1 = 1 - \frac{h_1}{2}$; $r_2 = 1 - \frac{h_2}{2}$.

Posons $G(\zeta,\eta) = f(r_1\zeta, r_2\eta)\, h_1^{\frac{1}{p}}\, h_2^{\frac{1}{p}}$ on a par (4.7)

$$\|G\|_\infty \leq 4C^2(p)\ \|f\|_p \leq 4\,C^2(p)K$$

d'autre part, posant $\underline{z}' = (\frac{z^1}{r_1}, \frac{z^2}{r_2})$; $\underline{w}' = (\frac{w^1}{r_1}, \frac{w^2}{r_2})$, il vient $G(\underline{z}') \geq \frac{1}{4}$ et $G(\underline{w}') = 0$

donc il existe $\delta > 0$ ne dépendant que de K, C(p) tel que, $d_g(\underline{z}', \underline{w}') \geq \delta > 0$;

utilisant le fait que,

$\underline{\zeta} \in \mathbb{D}^2$, $\underline{\eta} \in \mathbb{D}^2$, $d_g(\underline{\zeta}, \underline{\eta}) = \max[d_g(\zeta^1, \eta^1), d_g(\zeta^2, \eta^2)]$ et (4.8), on a que

$$d_g(\underline{z}, \underline{w}) \geq \frac{\delta}{4}.$$

b) Supposons que $|z^1| = 1-h_1$ et $|w_1| < 1-2h_1$, $0 < h_1 < \frac{1}{2}$, alors on a

$$\left|\frac{z^1 - w^1}{1-\bar{z}^1 w^1}\right| \geq \frac{1-h_1-(1-2h_1)}{1-(1-h_1)(1-2h_1)} \geq \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad d_g(\underline{z}, \underline{w}) \geq \frac{1}{3}.$$

Les autres cas se traitent comme a) ou b) et cela prouve le lemme 4.2 et achève la preuve du corollaire 4.1.

5. FONCTIONS ANALYTIQUES A VALEURS VECTORIELLES

Soit E un espace de Banach de dimension strictement positive, E' le dual de E et E'_1 la boule unité de E'.

On dit qu'une fonction f de $\mathbb{D}^n$ dans E est analytique à valeurs dans E si :

$\forall \ell \in E'_1$, $\ell\circ f(\underline{z})$ est une fonction numérique analytique dans $\mathbb{D}^n$; on note cet espace $\mathcal{O}(\mathbb{D}^n,E)$.

$\forall p>0$ on définit : $H^p(\lambda_n,E) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n,E) \; ; \; \sup\limits_{r<1} \int \|f_r\|_E^p \, d\lambda_n = \|f\|_{p,E}^p < +\infty\}$

où f_r désigne la fonction $f_r(\underline{z}) = f(r\underline{z})$ et $\|a\|_E$ est la norme de a dans E ;

$H^\infty(\lambda_n,E) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n,E), \sup\limits_{\underline{z}\in\mathbb{D}^n} \|f\|_E = \|f\|_{\infty,E} < +\infty\}$. De même :

$$H^p_*(\lambda_n,E) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n,E) \; ; \; \sup_{\ell\in E'_1} \sup_{r<1} \int |\ell\circ f_r|^p d\lambda_n = \|f\|_{p,*}^p < +\infty\}.$$

Pour $p \geq 1$, $\| \ \|_{p,E}$ et $\| \ \|_{p,*}$ sont des normes sur $H^p(\lambda_n,E)$ et $H^p_*(\lambda_n,E)$ qui vérifie : $\forall f \in H^p(\lambda_n,E)$, $\|f\|_{p,*} \leq \|f\|_{p,E}$. Ces normes sont, en général, non équivalentes.

De même, on définit : $\ell^p(\mathbb{N},E) = \{\omega_i \in E, \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|\omega_i\|_E^p = \|\omega\|_{p,E}^p < +\infty\}$

et $\qquad \ell^p_*(\mathbb{N},E) = \{\omega_i \in E, \sup\limits_{\ell\in E'_1} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\ell(\omega_i)|^p = \|\omega\|_{p,*}^p < +\infty\}$.

Ces deux espaces sont différents en général et, bien sûr, $\ell^p(\mathbb{N},E) \subset \ell^p_*(\mathbb{N},E)$.

Soit σ une suite de $\mathbb{D}^n$, $\sigma = \{\underline{z}_k, k \in \mathbb{N}\}$ et T_p l'opérateur linéaire ainsi défini :

$\forall f \in H^p(\lambda_n,E)$, $T_p f = \{((1-|\underline{z}_k|^2))^{\frac{1}{p}} f(\underline{z}_k), \quad k \in \mathbb{N}\}$;

de même $T_{p,*}$ sera l'opérateur :

$\forall f \in H^p_*(\lambda_n,E)$, $T_{p,*} f = \{((1-|\underline{z}_k|^2))^{\frac{1}{p}} f(\underline{z}_k), \ k \in \mathbb{N}\}$.

DEFINITIONS. On dit que - σ est <u>d'interpolation</u> $H^p(\lambda_n,E)$ si $T_p H^p(\lambda_n,E) \supseteq \ell^p(\mathbb{N},E)$.

- σ est <u>fortement d'interpolation</u> $H^p(\lambda_n,E)$, si, de plus $\exists C$ t.q.

$\forall f \in H^p(\lambda_n,E)$, $\Sigma((1-|\underline{z}_k|^2))\|f(\underline{z}_k)\|_E^p \leq C\|f\|_{p,E}^p$.

- σ a la <u>propriété d'extension linéaire bornée de</u> $\ell^p(\mathbb{N},E)$ dans $H^p(\lambda_n,E)$ si il existe un opérateur linéaire U_p de $\ell^p(\mathbb{N},E)$ dans $H^p(\lambda_n,E)$ tel que : $\forall\, \omega \in \ell^p(\mathbb{N},E)$

$$\|U_p(\omega)\|_{p,E} \le C\|\omega\|_{p,E} \quad \text{et} \quad T_pU_p(\omega) = \omega .$$

De même avec H^p_*, ℓ^p_* et $T_{p,*}$.

THEOREME 5.1. <u>Soit</u> E <u>un espace de Banach non trivial et</u> σ <u>une suite d'interpolation</u> $H^\infty(\lambda_n,\mathbb{C})$ <u>alors</u> :

a) $0 < p \le +\infty$, σ <u>a la propriété d'extension linéaire bornée de</u> $\ell^p(\mathbb{N},E)$ <u>dans</u> $H^p(\lambda_n,E)$.

b) $0 < p \le +\infty$, σ <u>est fortement d'interpolation</u> $H^p(\lambda_n,E)$.

a') $0 < p \le +\infty$, σ <u>a la propriété d'extension linéaire bornée de</u> $\ell^p_*(\mathbb{N},E)$ <u>dans</u> $H^p_*(\lambda_n,E)$.

b') $0 < p \le +\infty$, σ <u>est fortement d'interpolation</u> $H^p_*(\lambda_n,E)$.

<u>De plus toutes les constantes sont indépendantes de l'espace de Banach</u> E.

Preuve. a) Avec les notations du §2, soit d'abord $p > 1$ et soit $\omega = \{\omega_k,\ k \in \mathbb{N}\} \in \ell^p(\mathbb{N},E)$; la fonction : $U_p(\omega)(\underline{z}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_k\, c(\underline{z}_k)^{-1} e^{(p)}_{\underline{z}_k}(\underline{z})\ \epsilon_k(\underline{z})$ résoud le problème ; en effet, posant $f = U_p(\omega)$ on a $T_pf = \omega$: immédiat ;

et $\quad \|f_r\|^p_{p,E} = \int \|\sum \omega_k\, c(z_k)^{-1} e^{(p)}_{\underline{z}_k}(r\zeta)\ \epsilon_k(r\zeta)\|^p_E\, d\lambda_n(\zeta)$

utilisant alors Hölder on obtient, comme dans le théorème 2.1

$$\|f_r\|^p_{p,E} \le C^{2p}\alpha(p)^{-np}\, \|\omega\|^p_{p,E} ,$$

où C est la constante d'interpolation de $H^\infty(\lambda_n,\mathbb{C})$; faisant tendre r vers 1 on en déduit a) pour $p > 1$.

<u>$0 < p < 1$</u>. On pose encore $p' = mp > 1$, $m \in \mathbb{N}$ et on introduit les

$f_{\underline{z}_i}(\underline{\zeta}) = [e_{\underline{z}_i}^{(p')}(\underline{\zeta})]^m$; soit $\omega \in \ell^p(\mathbb{N},E)$; $\omega = \{\omega_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, alors

$$f = U_p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i\, [c(\underline{z}_i, p')]^{-m}\, f_{\underline{z}_i}\, \epsilon_i$$

résoud le problème comme dans le théorème 2.1 : $\|U_p(\omega)\|_{p,E}^p \le C^{2p}\, \alpha^{-npm} \|\omega\|_{p,E}^p$,

ce qui résoud a).

b) Soit $p > 0$ et soit $f \in H^p(\lambda_n, E)$; puisque $\|f(\underline{z})\|_E^{\frac{p}{2}} = \sup\limits_{\ell \in E_1'} |\ell \circ f(\underline{z})|^{\frac{p}{2}}$ et que chaque $|\ell \circ f(\underline{z})|^{\frac{p}{2}}$ est pluri-sous-harmonique, $\|f(\underline{z})\|_E^{\frac{p}{2}}$ l'est aussi et, clairement, $\|f(\underline{z})\|_E^{\frac{p}{2}}$ possède un majorant harmonique g, dans $L^2(\lambda_n)$ tel que $\|g\|_2^2 = \|f\|_{p,E}^p$.
Appliquons à g le lemme 2.2, il vient : $\sum\limits_k ((1 - |\underline{z}_k|^2))\ |g(\underline{z}_k)|^2 \le 2\,C^2 \|g\|_2^2$, mais $\|f(\underline{z})\|_E^{\frac{p}{2}} \le g(z)$ donc : $\sum\limits_k ((1-|\underline{z}_k|^2)) \|f(\underline{z}_k)\|_E^p \le 2C^2 \|f\|_{p,E}^p$.

a') <u>Soit $p > 1$</u>, $\omega = \{\omega_k,\ k \in \mathbb{N}\} \in \ell_*^p(\mathbb{N},E)$ alors

$$f = U_{p,*}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k\, c(\underline{z}_k)^{-1}\, e_{\underline{z}_k}^{(p)}\, \epsilon_k$$

résoud le problème, en effet :

$$T_{p,*} f = \omega \text{ : immédiat ;}$$

et $\quad \|f\|_{p,*}^p = \sup\limits_{\ell \in E_1'} \int |\sum\limits_k \ell(\omega_k)\, c(z_k)^{-1}\, e_{\underline{z}_k}^{(p)}\, \epsilon_k|^p\, d\lambda_n$

mais $\{\ell(\omega_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ appartient uniformément à $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{C})$ on a donc par application directe du théorème 2.1

$$\|f\|_{p,*}^p \le C^{2p}\, \alpha^{-np} \|\omega\|_{p,*}^p.$$

Soit <u>$0 < p < 1$</u> et $\omega \in \ell_*^p(\mathbb{N},E)$, $p' = mp > 1$, $m \in \mathbb{N}$; on introduit encore les fonctions $f_{\underline{z}_k}$ et on pose, $f = U_p(\omega) = \Sigma\, \omega_i\, [c(\underline{z}_i, p')]^{-m}\, f_{\underline{z}_i}\, \epsilon_i$ cette fonction résoud le problème $T_{p,*} f = \omega$ et on a encore

$$\|f\|_{p,*}^p \le C^{2p}\, \alpha^{-npm}\, \|\omega\|_{p,*}^p.$$

b') Soit $p>0$ et $f\in H^p_*(\lambda_n,E)$; on applique le théorème 2.1, b) à la fonction $\ell\circ f$ où $\ell\in E'_1$. On en déduit de suite

$$\Sigma(1-|\underline{z}_k|^2))\,|\ell\circ f(\underline{z}_k)|^p=\sum_k(\ell[(1-|\underline{z}_k|^2)^{\frac{1}{p}}f(\underline{z}_k)]|^p\leq 2C^2\|f\|^p_{p,*}.$$

Enfin l'extension linéaire dans $H^\infty(\lambda_n,E)$ est : $\forall\,\omega\in\ell^\infty(\mathbb{N},E)$ on pose $f=U_\infty(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\,\varepsilon_i$ qui résoud le problème avec

$$\|f\|_\infty\leq C^2\|\omega\|_{\infty,E}.$$

On peut donner une réciproque au théorème 5.1 si σ se trouve dans un ensemble $\mathbb{D}\times W$ où W est de type S dans $\mathbb{D}^{n-1}$.

THEOREME 5.2. <u>Soit</u> σ <u>une suite dans</u> $\mathbb{D}\times W$, <u>où</u> W <u>est de type</u> S <u>dans</u> $\mathbb{D}^{n-1}$. <u>Alors si pour un</u> $p>0$, σ <u>est fortement d'interpolation</u> $H^p(\lambda_n,E)$ (<u>ou</u> $H^p_*(\lambda_n,E)$) <u>alors</u> σ <u>est d'interpolation</u> $H^\infty(\lambda_n,\mathbb{C})$.

Preuve. Puisque E est non trivial, par composition avec un élément de E'_1 on se ramène aisément au cas scalaire et on applique alors le corollaire 4.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMAR D. et E. Sur les théorèmes de Schwarz-Rick et Nevanlinna dans $\mathbb{C}^n$. Anal. Harm. Orsay n° 167 (1975).

[2] BERNARD A. Algèbres quotients d'algèbres uniformes. C.R.A.S. 272 (1971) Paris.

[3] AMAR E. Méthodes hilbertiennes et interpolation dans le spectre d'une algèbre de Banach. Anal. Harm. Orsay n° 152 (1975).

[4] AMAR D. et E. Bases d'exponentielles dans $L^2(\mathbf{R}^{+n})$. Anal. Harm. Orsay n° 198 (1976).

[5] GAMELIN T.W. Uniform algebra. Prentice Hall Series in Modern Analysis (1969).

[6] VAROPOULOS N. Th. Sur la réunion de deux compacts d'interpolation. C.R.A.S. 272 (1971).

[7] CARLESON L. The corona Theorem. Proceeding of the 15^{th} Scandinavian Congress, Oslo (1968).

[8] KRONSTADT E.P. Interpolating sequences in polydics. Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1974).

[9] CARLESON L. An interpolation problem for bounded analytic functions. Amer. J. Math. 80 (1958).

[10] CARLESON L. Publ. Institut Mittag-Leffler, Report n° 7 (1974).

[11] VAROPOULOS N. Th. Sur un problème d'interpolation. C.R.A.S. Série A 274 (1972).

[12] SHAPIRO H. et SHIELDS A.L. On some interpolations problems for analytic functions. Amer. J. Math. 83 (1961).

[13] KABAILA V. Interpolation sequences for the H^p classes in the case $p < 1$. Litovsk. Mat. Sb. 3 (1963) n° 1.

[14] CARLESON L. Interpolations by bounded analytic functions and the Corona Problem. Proc. Internat. Congr. Math. Stockholm (1962).