

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

80.04

EQUATIONS DIFFERENTIELLES : ETUDE ASYMPTOTIQUE ;
APPLICATIONS AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

S. ALINHAC

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

Code matière AMS (1980) 34 E 05 - 35 C 20

PUBLICATIONS

MATHEMATIQUES

D'ORSAY

80.04

EQUATIONS DIFFERENTIELLES : ETUDE ASYMPTOTIQUE ;
APPLICATIONS AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

S. ALINHAC

Université de Paris-Sud
Département de Mathématique

Bât. 425

91405 **ORSAY** France

EQUATIONS DIFFERENTIELLES : ETUDE ASYMPTOTIQUE ;
APPLICATIONS AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

S. ALINHAC

(COURS PROFESSE AU 1ER SEMESTRE 79-80)

INTRODUCTION

Ce texte a été rédigé à partir des notes de cours prises par Mlles BAHOURI et OUNAÏES et M. DEHMAN.

Qu'ils trouvent ici mes remerciements pour ce travail.

Son but est double :

- a) D'une part, présenter un ensemble de faits classiques concernant les équations différentielles ordinaires. Ces faits, rarement enseignés en Maîtrise, sont généralement méconnus des analystes, bien que leurs implications dans de nombreux domaines des Mathématiques et de la Physique soient considérables. Il semble que le petit nombre de spécialistes Français de ces questions et, paradoxalement, l'essor important des équations aux dérivées partielles soient cause de ce délaissement.
- b) D'autre part, montrer que certains développements récents des équations aux dérivées partielles (opérateurs pseudo-différentiels classiques, étude des singularités à l'aide de solutions asymptotiques approchées, théorie de Maslov, etc ...) ne sont pas aussi indépendants de la théorie des équations ordinaires que certaines présentations le laisseraient supposer. Bien plus, la réduction à un problème d'équation différentielle ordinaire s'est avérée être, dans certains cas, un outil efficace (pour l'étude de l'hypo-ellipticité, des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles, etc ...).

On s'est efforcé d'écrire un texte se suffisant à lui-même, accessible à des étudiants du niveau de Maîtrise ; le chapitre concernant les équations aux dérivées partielles ne présuppose aucune connaissance spéciale. On s'est abstenu de faire montre d'une érudition que l'on ne possédait pas, et de surcharger le texte de références.

Les ouvrages les plus accessibles que le lecteur pourra consulter, à propos de chaque chapitre, sont les suivants :

CHAPITRE I : J. Dieudonné "Calcul infinitésimal" , Hermann, Paris 1968.

A. Erdelyi "Asymptotic expansions" , Dover Public, New York, 1956.

CHAPITRE II : Les 3 conférences de B. Malgrange au Séminaire Goulaouic - Schwartz 1971-72 (Ecole Polytechnique, Paris ; exposés n° XX, XXI, XXII).

CHAPITRE III, IV, V : W. Wasow "Asymptotic expansions for ordinary differential equations", Krieger Publishing Comp. New York 1976.

CHAPITRE VI : Consulter Wasow et Erdelyi pour les §§.I-IV.

Le §.V est emprunté à Lynn et Keller "Uniform Asymptotic solutions of second order linear ordinary differential equations with turning points", Communications on Pure and Applied Math., vol. XXIII, (1970).

Le §.VI rend compte du chapitre X de Y. Sibuya "Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient", North-Holland/Amer. Elsevier, n° 18.

CHAPITRE VII : Le matériel du §.I est couvert par la plupart des cours sur les opérateurs intégraux de Fourier (par exemple celui, assez peu accessible, de Duistermaat "Fourier integral operators", Courant Inst., New York 1973).

Le §.II,2 a peut être rapproché de l'article de P.D. Lax "Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems", Duke Math. J. 24 (1957).

Le §.II,2 b est emprunté à Flashka et Strang "The correctness of the Cauchy problem", Adv. in Math. 6, 1971.

Le §.III,1 est une partie de l'article de Ludwig "Uniform asymptotic expansions at a caustic", Comm. on Pure and Appl. Math. vol. XIX, 1966.

Les §§.III,2,3,4 sont empruntés au livre très difficile de Guillemin et Sternberg "Geometric asymptotics", Math. Survey n° 14, AMS, 1977.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : EXPANSIONS ASYMPTOTIQUES D'INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE.

- I - La méthode de Laplace
- II - Equations différentielles et intégrales de contour
 - 1 - Méthode
 - 2 - Equation d'Airy
 - 3 - Equation de Weber
 - 4 - Equation de Bessel
- III - La méthode du col
 - 1 - Principe
 - 2 - Exemples

CHAPITRE II : GENERALITES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

- I - Etude au voisinage d'un point régulier
- II - Mesure de l'irrégularité d'une équation
 - 1 - Action dans θ et $\hat{\theta}$
 - 2 - Définition de l'irrégularité
 - 3 - Irrégularité et comportement des solutions
- III - Extension aux systèmes du 1er ordre
 - 1 - Passage d'une équation à un système
 - 2 - Mesure de l'irrégularité d'un système
 - 3 - Irrégularité à l'infini

CHAPITRE III : SYSTEMES A POINTS SINGULIERS REGULIERS.

- I - Solutions formelles et vraies solutions : le fait fondamental.
- II - Simplifications du système et solutions explicites
 - 1 - Le cas "standard"
 - 2 - Réduction du cas général

3 - Forme des solutions

- a) Cas d'un système
- b) Cas d'une équation

III - Cas d'un système à coefficients C^∞

CHAPITRE IV : SYSTEMES A POINTS SINGULIERS IRREGULIERS : SOLUTIONS FORMELLES ET VRAIES SOLUTIONS.

I - Développements asymptotiques dans des secteurs

- 1 - Propriétés algébriques
- 2 - Propriétés analytiques

II - Solutions formelles et vraies solutions : le fait fondamental

III - Cas d'un système à coefficients C^∞

CHAPITRE V : SYSTEMES A POINTS SINGULIERS IRREGULIERS : FORMES SIMPLIFIEES ET SOLUTIONS EXPLICITES.

I - Découplage des systèmes linéaires

- 1 - Aspect formel du calcul
- 2 - Aspect analytique
- 3 - Applications du découplage dans le cas standard : forme des solutions
- 4 - Esquisse du cas général

II - Phénomène de Stokes

- 1 - Rayons séparants
- 2 - Solutions sous-dominantes (exemples : Airy, Weber, Bessel)

CHAPITRE VI : SYSTEMES CONTENANT UN GRAND PARAMETRE : THEORIE CLASSIQUE ET POINTS DE TRANSITION.

I - Solutions formelles et vraies solutions

- 1 - Le cas d'un petit paramètre
- 2 - Lien "solutions formelles - vraies solutions"

II - Découplage des systèmes

- 1 - Aspect formel du calcul
- 2 - Aspect analytique

III - Applications du découplage dans le cas standard : forme des solutions

- 1 - Théorie
- 2 - Exemple : équation de Bessel et formules de Debye

IV - Points de transition d'Airy

- 1 - Points de transition et "shearing"
- 2 - Points de transition d'Airy : définition
- 3 - Réduction formelle
- 4 - Aspect analytique du calcul
- 5 - Exemple : équation de Bessel

V - Points de transition (cas général) : réduction formelle

- 1 - Mise en place du calcul
- 2 - Résolution de l'équation de phase
- 3 - Résolution des équations de transport
- 4 - Réduction finale

VI - Etude asymptotique dans un domaine non-borné en x

- 1 - Equation de Riccati associée et solutions formelles
- 2 - Domaines canoniques et lignes de Stokes
- 3 - Solutions dans des domaines canoniques

CHAPITRE VII : SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES

I - La méthode de l'optique géométrique

- 1 - Schéma de la méthode
 - a) Notations
 - b) Opérateurs
 - c) Optique géométrique
 - d) Remarques

2 - Résolution de l'équation de phase

- a) Remarques
- b) Un peu de géométrie symplectique
- c) Phase et variété Lagrangienne
- d) Remarque sur l'équation de transport

II - Equations différentielles et équations aux dérivées partielles

1 - Quelques remarques générales

- a) Opérateurs pseudo-différentiels
- b) Transformation de Fourier partielle
- c) Applications du chapitre VI
- d) Caractère pseudo-différentiel des transformations
- e) Solutions formelles ou vraies solutions ?

2 - Optique géométrique et phases "par morceaux"

- a) Opérateurs hyperboliques stricts
- b) Opérateurs à caractéristiques de multiplicité constante

3 - Points de transition

III - Esquisse de la théorie de Maslov

1 - Caustiques

- a) Introduction
- b) Forme à priori
- c) Géométrie des rayons
- c) Equations de transport
- e) Conclusion

2 - Relèvement de l'équation de transport sur la variété Lagrangienne

- a) Introduction
- b) Densité ; dérivée de Lie
- c) Relèvement de l'équation de transport

3 - Méthode de la phase stationnaire

4 - Solution uniforme et recollement des phases

- a) Paramétrisation de la variété Lagrangienne
- b) Détermination de l'amplitude
- c) Conclusion

CHAPITRE I - EXPANSIONS ASYMPTOTIQUES D'INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE.

Nous présentons ici quelques faits élémentaires concernant la méthode de Laplace et la méthode du col. Les intégrales oscillantes et la méthode de la phase stationnaire sont introduites au Chapitre VII, où elles trouvent naturellement leurs places dans l'étude de solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles.

La raison d'être de ce chapitre est que de nombreuses solutions d'équations classiques (Bessel, Airy, Weber ...) peuvent être représentées à l'aide d'intégrales de contour : ces cas sont illustrés dans les exemples. De plus, il apparaît que les intégrales oscillantes (cf. Chapitre VII) fournissent des modes plus généraux d'écriture des solutions, ce qui ne pouvait être compris que par comparaison avec des cas simples.

I - La Méthode de Laplace

Le résultat principal est le suivant.

Théorème : Considérons l'intégrale $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{t h(x)} g(x) dx$, où g et h sont réelles, continues par morceaux, et vérifiant les conditions :

i) $\int_0^{+\infty} |g(x)| e^{h(x)} dx < +\infty.$

ii) $\exists \delta_0 > 0, \forall \delta < \delta_0, \forall x \geq \delta, h(x) \leq h(\delta).$

iii) Au voisinage de zéro, g et h admettent les approximations suivantes :

$g(x) \sim Ax^\alpha, h(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta), \alpha > -1, \beta > 0, c > 0, A \neq 0.$

Alors :

(I.1) $I(t) \sim \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{at} (ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$ lorsque $t \rightarrow +\infty.$

Preuve : 1) on examine $J(t) = \int_0^b x^\alpha e^{-ctx^\beta} dx$ (b fixé, $b > 0$). En posant $u = ctx^\beta$, il vient

$$J(t) = \frac{1}{\beta} (ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^{ctb^\beta} e^{-u} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} du ,$$

et $\int_0^{ctb^\beta} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} e^{-u} du \rightarrow \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, par définition de la fonction Γ .

2) Notons $K(t) = \frac{A}{B} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{at} (ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$.

Pour tout $\lambda > 0$, il existe $\delta(\lambda) > 0$ tel que, pour $0 \leq x \leq \delta(\lambda)$,

$x^\alpha(A-\lambda) \leq g(x) \leq x^\alpha(A+\lambda)$, $a - (c+\lambda)x^\beta \leq h(x) \leq a - (c-\lambda)x^\beta$.

D'où

$\int_0^{\delta(\lambda)} x^\alpha(A-\lambda) e^{t[a-(c+\lambda)x^\beta]} dx \leq \int_0^{\delta(\lambda)} g(x) e^{th(x)} dx \leq \int_0^{\delta(\lambda)} x^\alpha(A+\lambda) e^{t[a-(c-\lambda)x^\beta]} dx$,

pour $t > 0$. Du point 1) et de cet encadrement on déduit facilement :

$\forall \epsilon > 0, \exists \lambda > 0, \exists t_1 > 0, t \geq t_1 \Rightarrow \left| \frac{\int_0^{\delta(\lambda)} g(x) e^{th(x)} dx}{K(t)} - 1 \right| \leq \epsilon$.

3) Enfin

$\int_{\delta(\lambda)}^{+\infty} g(x) e^{th(x)} dx = \int_{\delta(\lambda)}^{+\infty} g(x) e^{(t-1)h(x)} e^{h(x)} dx$, et si $\delta(\lambda) < \delta_0$, on obtient

$\left| \frac{\int_{\delta(\lambda)}^{+\infty} g(x) e^{th(x)} dx}{K(t)} \right| \leq \frac{e^{(t-1)h(\delta(\lambda))}}{K(t)} \int_0^{+\infty} |g(x)| e^{h(x)} dx =$

$= cte x t^{\frac{\alpha+1}{\beta}} e^{-t[h(0)-h(\delta(\lambda))]} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Ce théorème formule de façon précise l'idée fondamentale de la méthode de Laplace: puisque h décroît à partir de 0, seuls les comportements de h et g près de 0 importent dans l'étude de I lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Corollaire : Soient h et g deux fonctions réelles de classe C^2 sur $]a, b[$ (non nécessairement borné), telles que :

i) $\int_a^b |g(x)| e^{h(x)} dx < +\infty$.

ii) $\exists c \in]a, b[$, $g(c) \neq 0$ et h admet un maximum strict en c ($h''(c) < 0$).

Alors $\int_a^b g(x) e^{th(x)} dx \sim \sqrt{\pi} g(c) e^{th(c)} \sqrt{\frac{2}{-th''(c)}}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Preuve : On coupe l'intégrale en $\int_a^c + \int_c^b$. Pour la seconde intégrale, $\alpha = 0$, $A = g(c)$,

$h(x) = h(c) + \frac{(x-c)^2}{2} h''(c) + O((x-c)^2)$, avec les notations du théorème. Pour la première, on fait le changement $u = -(x-c)$. Compte tenu du fait que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, les estimations du théorème donnent celles du corollaire.

Exemple : Formule de Stirling. Par définition

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{x(\log u - u)} du \quad (\text{en posant } t = xu).$$

La fonction $\log u - u$ ayant un unique maximum en $u = 1$, le corollaire donne

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} (x/e)^x \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty \text{ (on rappelle que } \Gamma(n+1) = n!).$$

II - Equations différentielles et intégrales de contour

1 - Soit une équation différentielle linéaire $\sum_{j=0}^m a_j(x)y^{(j)} = 0$, dont les coefficients $a_j(x)$ sont des polynômes.

Il est loisible de chercher des solutions de cette équation sous la forme $y(x) = \int_{\Gamma} e^{xz} v(z) dz$, où v est une fonction holomorphe et Γ un chemin du plan complexe, tous deux à déterminer. Puisque y apparaît comme une transformée de Laplace de v , dériver y revient à multiplier v par z , et multiplier y par $-x$ à dériver v (formellement). L'équation initiale est remplacée par une équation différentielle sur v , dont l'ordre est le degré maximum des a_j (ce qui n'est intéressant que si ce degré est inférieur à m).

Les principales difficultés sont :

i) Choisir v et Γ en sorte que les opérations formelles décrites ci-dessus aient un sens.

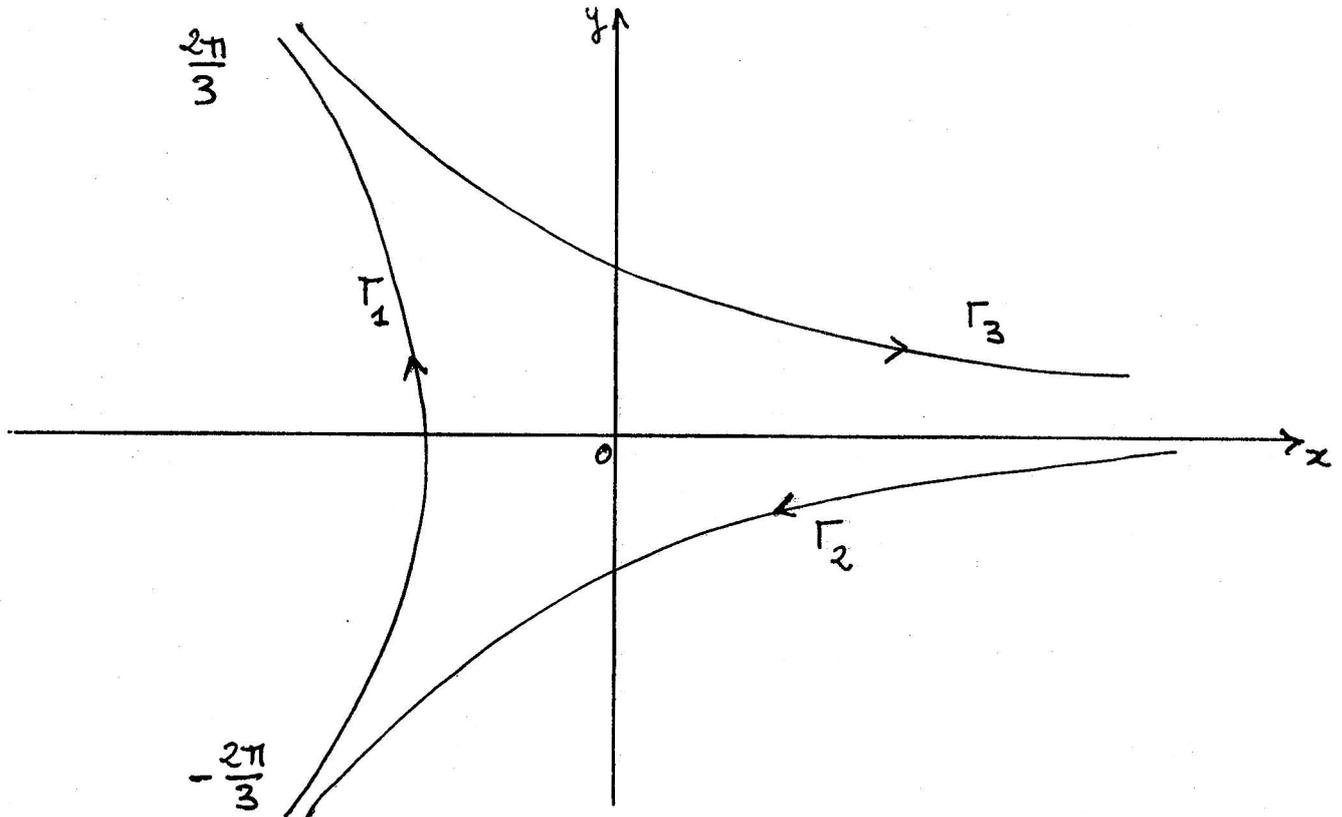
ii) S'assurer que y n'est pas identiquement nulle.

2 - Exemple 1 : l'équation d'Airy.

C'est l'équation (II.1) $y'' - xy = 0$.

a) Formellement, v doit satisfaire $z^2 v + v' = 0$, soit $v(z) = e^{-\frac{z^3}{3}}$. Le chemin Γ doit être choisi infini, et tel que $\operatorname{Re} z^3$ tende vers $+\infty$ assez vite (par rapport à $|z|$) dans les directions à l'infini de Γ .

Classiquement, trois chemins s'offrent :



à l'infini sur ces chemins, $|z|$ tend vers l'infini et $\arg z^3$ est voisin de 0, ce qui assure i). On obtient ainsi trois solutions

$$(II.2) \quad u_i(x) = \int_{\Gamma_i} e^{xz - \frac{z^3}{3}} dz \quad (i = 1, 2, 3) .$$

Grâce au théorème de Cauchy et à la décroissance rapide de $e^{xz - \frac{z^3}{3}}$ dans les directions à l'infini sur les Γ_i , on obtient facilement

$$(II.3) \quad u_1 + u_2 + u_3 = 0 .$$

Si les chemins Γ_j se déduisent les uns des autres par des rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$, on a de plus

$$(II.4) \quad u_1(x) = j u_3(jx) = j^2 u_2(j^2x), \quad \text{où } j = e^{2i \frac{\pi}{3}}.$$

Enfin, on note

$$Ai(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} u_1(x) \quad (\text{cette solution est appelée intégrale d'Airy}).$$

b) Comportement de $Ai(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Nous allons montrer que :

$$(II.5) \quad Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-2/3 x^{3/2}}, \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

Cela assure en particulier que Ai n'est pas identiquement nulle.

Preuve : Posons $z = x^{1/2} u$: $u_1(x) = x^{1/2} \int_{x^{-1/2}\Gamma_1} e^{x^{3/2} (u - u^3/3)} du$, et grâce au

Théorème de Cauchy, on a en fait :

$$u_1(x) = x^{1/2} \int_{\Gamma_1} e^{x^{3/2} (u - \frac{u^3}{3})} du.$$

• On va maintenant préciser Γ_1 .

$$\text{Posons } u = \alpha + i\beta : \operatorname{Re}(u - \frac{u^3}{3}) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \alpha \beta^2, \quad \operatorname{Im}(u - \frac{u^3}{3}) = \beta - \alpha^2 \beta + \frac{\beta^3}{3}.$$

Sur l'hyperbole $\alpha^2 - \frac{\beta^2}{3} = 1$, on a donc $\operatorname{Im}(u - \frac{u^3}{3}) = 0$, et $\operatorname{Re}(u - \frac{u^3}{3}) = -\frac{2}{3} (1 + \frac{\beta^2}{3})^{1/2} (1 + \frac{4}{3} \beta^2) = h(\beta)$ pour la branche où $\alpha < 0$. Cette branche a pour asymptotes les droites $\beta = \pm \sqrt{3} \alpha = \pm (\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}) \alpha$, on la choisit donc pour Γ_1 , et $u_1(x) = x^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^{3/2} h(\beta)} [i - \frac{\beta}{3} (1 + \frac{\beta^2}{3})^{-1/2}] d\beta$.

L'application du Corollaire de I. (h possède un maximum strict en 0) conduit à
(II.5)

3 - Exemple 2 : l'équation de Weber.

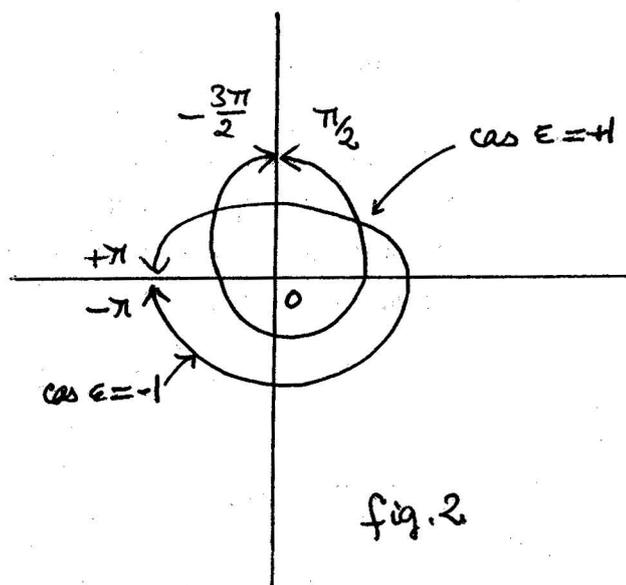
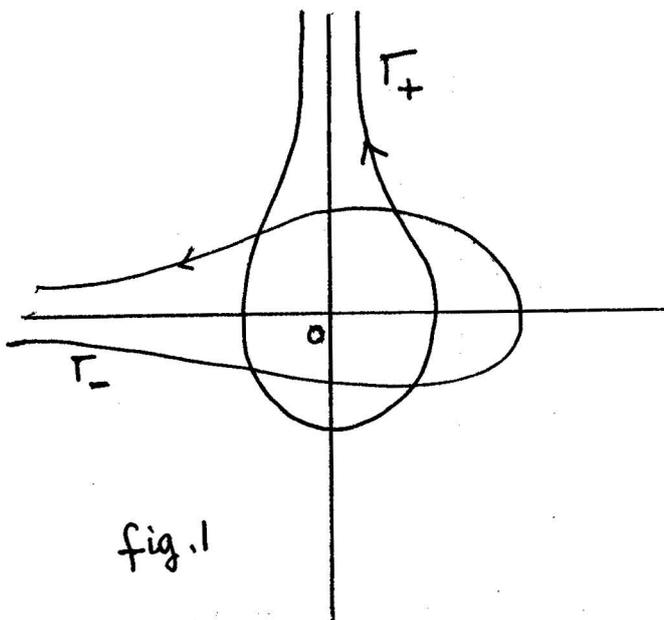
C'est l'équation $y'' - (\frac{x^2}{4} + a)y = 0$, où $a \in \mathbb{C}$.

a) Posons $y = e^{\frac{\epsilon x^2}{4}} u$ ($\epsilon = \pm 1$) : il vient $y' = (\epsilon \frac{x}{2} u + u') e^{\frac{\epsilon x^2}{4}}$,
 $y'' = [\frac{\epsilon}{2} u + \epsilon \frac{x}{2} u' + u'' + \epsilon \frac{x}{2} (\epsilon \frac{x}{2} u + u')] e^{\frac{\epsilon x^2}{4}}$, et la nouvelle équation s'écrit :

$$u'' + \epsilon x u' - (a - \frac{\epsilon}{2})u = 0.$$

• Cherchons des solutions $u(x)$ sous la forme $u(x) = \int_{\Gamma} e^{xz} v(z) dz$. La fonction v doit satisfaire $z^2 v - \epsilon(zv)' - (a - \frac{\epsilon}{2})v = 0$, soit $v(z) = e^{\epsilon \frac{z^2}{2}} z^{-1/2 - a\epsilon}$.

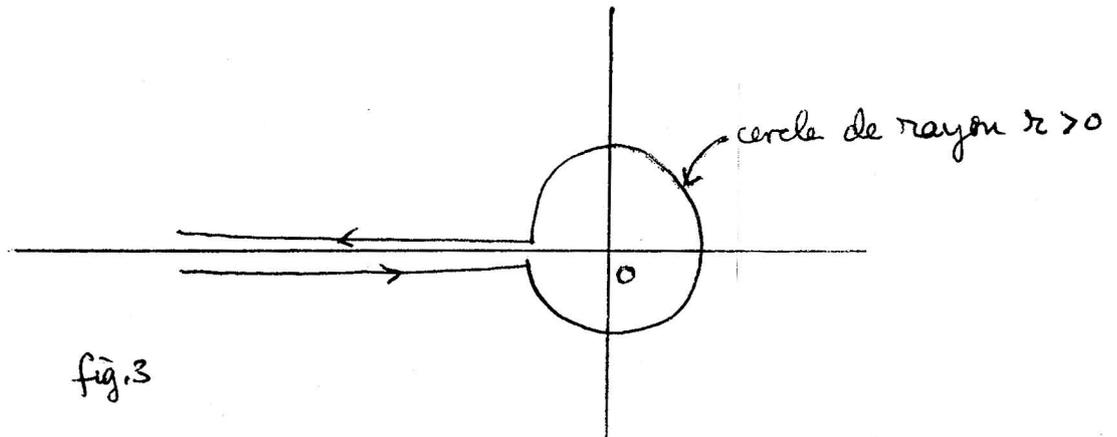
• Pour $\epsilon = \pm 1$, nous choisissons les chemins Γ_{\pm} indiqués sur la figure 1 ; les déterminations de $\arg z$ sont indiquées sur la figure 2.



avec ces choix, v décroît comme $e^{-|z|^2}$ à l'infini sur Γ_{\pm} , et le calcul formel est justifié.

b) Considérons par exemple la solution correspondant à $\epsilon = -1$ (on verra au chapitre V, II.2, que c'est la solution sous-dominante de l'équation de Weber dans le secteur $-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}$) : $y(x) = e^{-x^2/4} \int_{\Gamma_-} e^{xz} e^{-z^2/2} z^{a-1/2} dz$.

- Pour $\text{Re } a > -\frac{1}{2}$, on peut remplacer le contour Γ_- par celui de la figure 3 :



En faisant tendre ensuite r vers 0, on obtient, pour $x > 0$, la formule :

$$y(x) = e^{-x^2/4} i(\cos \pi a) \int_0^{+\infty} e^{-xs} e^{-s^2/2} s^{a-1/2} ds . \text{ D'où :}$$

$$y(x) = e^{-x^2/4} i(\cos \pi a) x^{-(a+1/2)} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma} e^{-\sigma^2/2x^2} \sigma^{a-1/2} d\sigma$$

$$\sim i(\cos \pi a) \Gamma(a+1/2) e^{-x^2/4} x^{-(a+1/2)}, \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty .$$

Bien sûr, pour $a = 1/2, 3/2, \dots$, on a $\cos \pi a = 0$, et $y(x) \equiv 0$: c'est évident, car pour ces valeurs de a , $z^{a-1/2}$ est holomorphe, et l'on peut déformer Γ_- en le passant "à travers 0" pour le faire s'évanouir à l'infini. Dans ces cas, on prendra comme solution :

$$i e^{-x^2/4} \int_0^{+\infty} e^{-xs} e^{-s^2/2} s^{a-1/2} ds ,$$

et non pas $y(x)$.

- A l'aide d'une intégration par parties, on voit facilement que :

$$- I_{a+1}(x) + x I_a(x) + (a-1/2) I_{a-1}(x) = 0,$$

où

$$I_a(x) = \int_{\Gamma_-} e^{xz} e^{-z^2/2} z^{a-1/2} dz.$$

Supposons alors $\text{Re } a > -\frac{3}{2}$, $a \neq -\frac{1}{2}$: cette formule, combinée avec l'équivalent de $I_b(x)$ (lorsque $\text{Re } b > -\frac{1}{2}$) trouvé au point précédent, permet d'obtenir

$I_a(x) \sim \frac{-x}{a+1/2} i(\cos(a+1)\pi)\Gamma(a+3/2)x^{-(a+3/2)} = i(\cos \pi a) \Gamma(a+1/2)x^{-(a+1/2)}$, car $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$. Autrement dit, l'équivalence asymptotique (lorsque $x \rightarrow +\infty$) établie pour y lorsque $\text{Re } a > -1/2$, demeure valable pour tout a , $a \neq -1/2, -3/2, \dots$

• Pour les valeurs $a = -1/2, -3/2, \dots$, $\Gamma(a+1/2)$ a un pôle simple, qui est compensé par le fait que $\cos \pi a = 0$. En fait, $(\cos \pi a) \Gamma(a+1/2) = \frac{\pi}{\Gamma(1/2-a)}$, comme le montre la formule des compléments d'Euler $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

Du reste, $I_a(x)$ est alors un polynôme, puisque $\frac{d^k}{dx^k} I_a(x) = \int_{\Gamma} e^{xz} e^{-z^2/2} z^{k+a-1/2} dz = 0$ pour $k + a - 1/2 = 0$.

4 - Exemple 3 : l'Equation de Bessel.

C'est l'équation $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$ ($\lambda \in \mathbb{C}$).

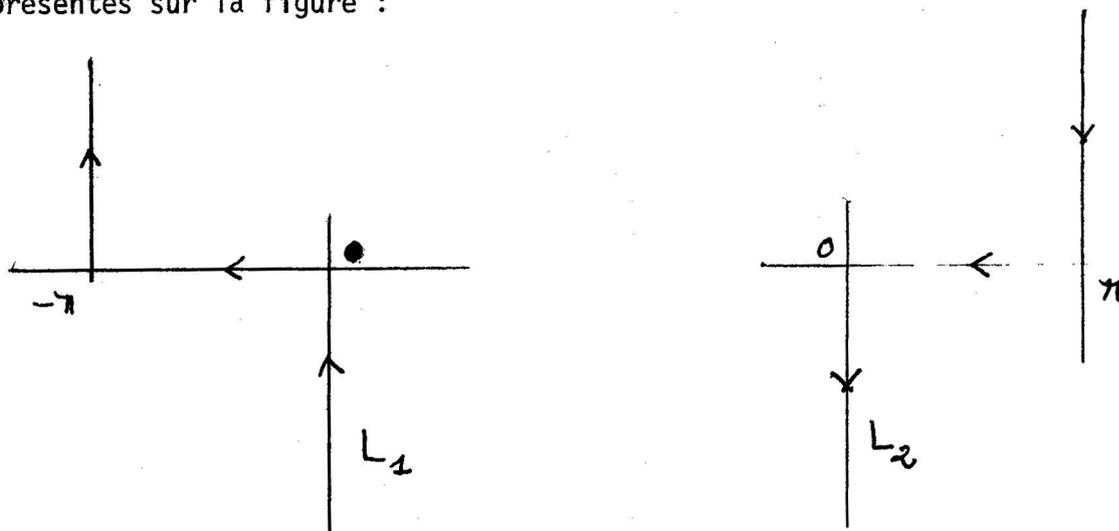
i) Nous nous écartons un peu de la lettre de la méthode utilisée dans les deux premiers exemples en cherchant cette fois une solution sous la forme

$$y(x) = \int_{\Gamma} e^{-ix \sin z} v(z) dz.$$

En posant $F(x,z) = e^{-ix \sin z}$, on observe que $\frac{\partial}{\partial z} (Fv' - v \frac{\partial F}{\partial z}) = Fv'' - v \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$, et donc

on devra prendre v tel que $v''(z) + \lambda^2 v(z) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z} v - Fv' \rightarrow 0$ à l'infini sur Γ .

Nous choisissons $v(z) = e^{i\lambda z}$, et pour Γ l'un des deux contours L_1 ou L_2 représentés sur la figure :



Les fonctions correspondantes

$$H_{\lambda}^1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{-ix \sin z + i\lambda z} dz \quad \text{et}$$

$$H_{\lambda}^2(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_2} e^{-ix \sin z + i\lambda z} dz$$

sont appelées fonctions de Hankel d'indice λ .

ii) Vérifions que ces intégrales ont un sens et définissent effectivement des solutions de l'équation de Bessel pour $\text{Re } x > 0$.

Avec $x = \alpha + i\beta$, $z = \xi + i\eta$, $\lambda = a + ib$, on a :

$$\text{Re}(-ix \sin z + i\lambda z) = \alpha \cos \xi \text{sh} \eta + \beta \sin \xi \text{ch} \eta - (a\eta + b\xi) .$$

Pour $\xi = 0$, $\eta \rightarrow -\infty$, $\text{Re } x > 0$, $\text{Re}(-ix \sin z + i\lambda z) \sim -\frac{\alpha}{2} e^{-\eta} \rightarrow -\infty$ rapidement.

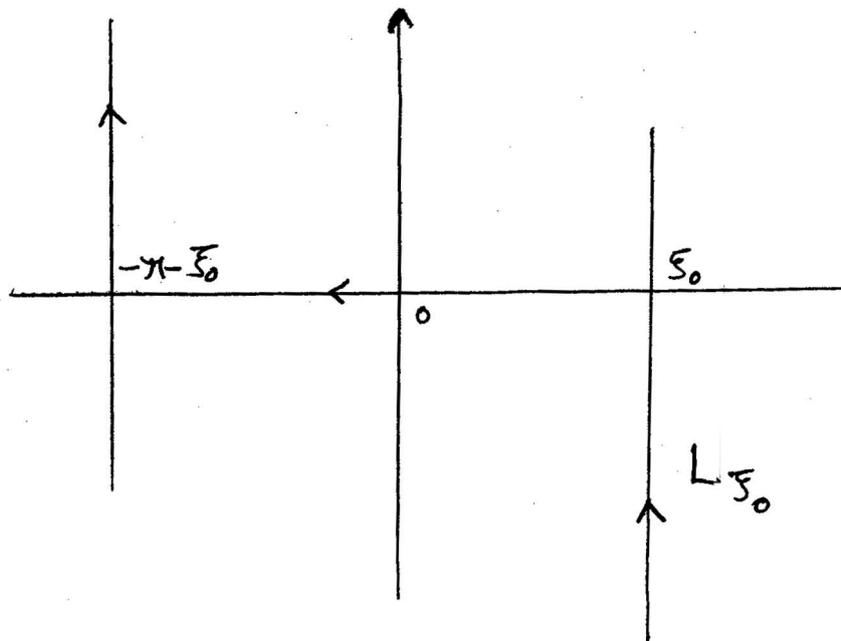
Pour $\xi = \pm \pi$, $\eta \rightarrow +\infty$, $\text{Re } x > 0$, $\text{Re}(-ix \sin z + i\lambda z) \sim -\frac{\alpha}{2} e^{\eta} \rightarrow -\infty$ rapidement.

D'autre part, dans l'expression $\frac{\partial F}{\partial z} v - Fv' = e^{-ix \sin z + i\lambda z} (-ix \cos z - i\lambda)$,

le facteur $-ix \cos z - i\lambda$ a une influence négligeable sur l'exponentielle lorsque z tend vers l'infini sur L_1 ou L_2 , $\text{Re } x > 0$. Cela prouve l'assertion.

iii) Nous prolongeons maintenant H_{λ}^1 et H_{λ}^2 à tout $\mathbb{C} - \{\mathbb{R}_-\}$ de la façon suivante.

Soit ξ_0 , $-\pi < \xi_0 < \pi$, et L_{ξ_0} le chemin représenté sur la figure :



La fonction $H_{\xi_0}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_{\xi_0}} e^{-ix \sin z + i\lambda z} dz$ sera une solution bien définie de

l'équation de Bessel pourvu que $\operatorname{Re}(-ix \sin z + i\lambda z)$ tende rapidement vers $-\infty$ lorsque $z \rightarrow \infty$ sur L_{ξ_0} . Or $\operatorname{Re}(-ix \sin z + i\lambda z) \sim \frac{e^{-\eta}}{2} (\beta \sin \xi_0 - \alpha \cos \xi_0)$ pour $\xi = \xi_0$,

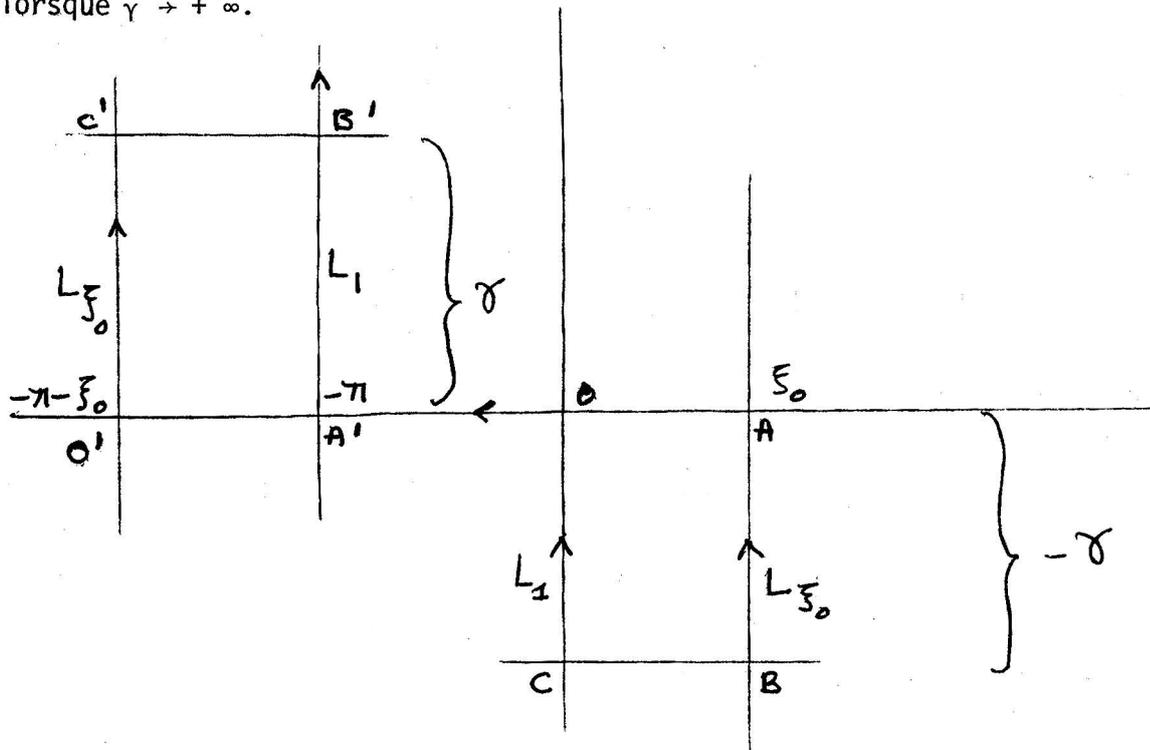
$\eta \rightarrow -\infty$, et $\operatorname{Re}(-ix \sin z + i\lambda z) \sim \frac{e^{\eta}}{2} (\beta \sin \xi_0 - \alpha \cos \xi_0)$ pour $\xi = \xi_0 - \pi$, $\eta \rightarrow +\infty$.

Donc H_{ξ_0} est définie dans le demi-plan complexe $-\beta \sin \xi_0 + \alpha \cos \xi_0 > 0$.

D'autre part, si on a à la fois $\operatorname{Re} x > 0$ et $\alpha \cos \xi_0 - \beta \sin \xi_0 > 0$, alors $H_{\lambda}^1(x) = H_{\xi_0}(x)$. En effet, il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy aux contours

OABC ou O'A'B'C' représentés sur la figure, et de s'assurer que $\int_{BC} \rightarrow 0$ et $\int_{B'C'} \rightarrow 0$

lorsque $\gamma \rightarrow +\infty$.



Or $\operatorname{Re}(ix \sin z + i\lambda z) \sim \frac{e^{-\eta}}{2} (\beta \sin \xi - \alpha \cos \xi)$ lorsque $\eta \rightarrow -\infty$, ξ fixé : pour $0 \leq \xi \leq \xi_0$, le point $z = \xi - i\gamma$ décrit BC, et $\beta \sin \xi - \alpha \cos \xi$ décrit le segment $[-\alpha, \beta \sin \xi_0 - \alpha \cos \xi_0]$, d'où la conclusion. On raisonne de même pour B'C'.

En particulier, si l'on prend $\xi_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\xi_0 = -\frac{\pi}{2}$, on obtient un prolongement analytique de H_λ^1 dans le plan complexe fendu le long du demi-axe réel négatif.

iv) Pour $\xi_0 = -\frac{\pi}{2}$, on obtient l'expression, valable pour $\text{Im } x > 0$,

$$H_\lambda^1(x) = \frac{e^{-i \frac{\lambda \pi}{2}}}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix \cosh t - \lambda t} dt .$$

Sur l'axe imaginaire positif, il vient,

$$H_\lambda^1(is) = \frac{e^{-i\lambda \frac{\pi}{2}}}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s \cosh t - \lambda t} dt .$$

On peut appliquer à cette dernière intégrale la méthode de Laplace (Corollaire I) et l'on trouve :

$$H_\lambda^1(is) \sim \frac{e^{-i\lambda \frac{\pi}{2}}}{i\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} e^{-s} , \quad s \rightarrow +\infty .$$

De même

$$H_\lambda^2(-is) \sim \frac{-e^{i\lambda \frac{\pi}{2}}}{i\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} e^{-s} , \quad s \rightarrow +\infty .$$

v) On note souvent

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2} \left(H_\lambda^1(x) + H_\lambda^2(x) \right) \quad (\text{fonction de Bessel d'indice } \lambda)$$

et

$$N_\lambda(x) = \frac{1}{2i} \left(H_\lambda^1(x) - H_\lambda^2(x) \right) \quad (\text{fonction de Neumann d'indice } \lambda).$$

III - La méthode du Col

Cette méthode permet l'évaluation asymptotique d'intégrales de la forme $\int_{\Gamma} e^{th(z)} g(z) dz$, où h et g sont holomorphes, et Γ est un chemin du plan complexe

De telles intégrales se présentent naturellement dans l'étude des propriétés asymptotiques de solutions d'équations différentielles, comme l'ont montré les

exemples II.2 - II.4 précédents.

1 - Le principe de la méthode est (grâce au Théorème de Cauchy) de déformer Γ en un chemin $\tilde{\Gamma}$ tel que

i) $\text{Im } h(z) = \text{cte}$ sur $\tilde{\Gamma}$.

ii) Si $\mathbb{R} \ni s \rightarrow \gamma(s)$ est un paramétrage de $\tilde{\Gamma}$, on peut appliquer à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{th(\gamma(s))} g(\gamma(s)) \gamma'(s) ds$ la méthode de Laplace (cf. I) ; ceci requiert en particulier que $\text{Re } h(\gamma(s))$ possède un maximum.

Supposons que ceci ait lieu en $s = s_0$: Alors :

$$\frac{d}{ds} h(\gamma(s)) = \frac{d}{ds} (\text{Re } h) (\gamma(s)) + i \frac{d}{ds} (\text{Im } h) (\gamma(s)) = 0 \text{ en } s = s_0 ,$$

soit $h'(\gamma(s_0)) \gamma'(s_0) = 0$, et $h'(\gamma(s_0)) = 0$. D'où la procédure usuelle :

a) Déterminer les points "critiques" z , où $h'(z) = 0$.

b) Pour chacun d'entre eux, examiner les courbes $\text{Im } h(z) = \text{cte}$ qui le traversent, pour voir si l'une d'elles peut être prise comme nouveau contour $\tilde{\Gamma}$, satisfaisant i) et ii).

Un exemple "pur" d'application de cette procédure a été fourni au paragraphe II.2.b : on a en effet $h(z) = z - \frac{z^3}{3}$, d'où $h'(z) = 0$ pour $z = \pm 1$; les courbes $\text{Im } h(z) = \text{cte} = 0$ passant par ces points sont les branches de l'hyperbole $\alpha^2 - \frac{\beta^2}{3} = 1$ ($z = \alpha + i\beta$) .

Nous esquissons ci-dessous deux exemples plus sophistiqués.

2 - Deux exemples.

Exemple 1 : Soit $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{t((1+i)z-z^3)} dz$ ($t \rightarrow +\infty$)

Nous avons $h(z) = (1+i)z - z^3$, $h'(z) = (1+i) - 3z^2$, et les points critiques sont $\pm z_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} 2^{1/4} e^{i\pi/8}$.

• Nous pouvons remplacer $\Gamma = \mathbb{R}_+$ par $\Gamma' = \mathbb{R}_+ e^{i\frac{\pi}{8}}$, qui passe par z_0 . En effet, si \widehat{AB} est l'arc décrit par $Re^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}$), on a

$$\int_{OA} e^{th(z)} dz + \int_{\widehat{AB}} e^{th(z)} dz = \int_{OB} e^{th(z)} dz ;$$

or $Re h(z) = -R^3 \cos 3\varphi + O(R)$ sur AB , soit $Re h(z) \leq -cte. R^3$, et $|\int_{\widehat{AB}} e^{th(z)} dz| \leq cte. Re^{-cte. R^3}$, qui tend vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$ ($t > 0$ est fixé).

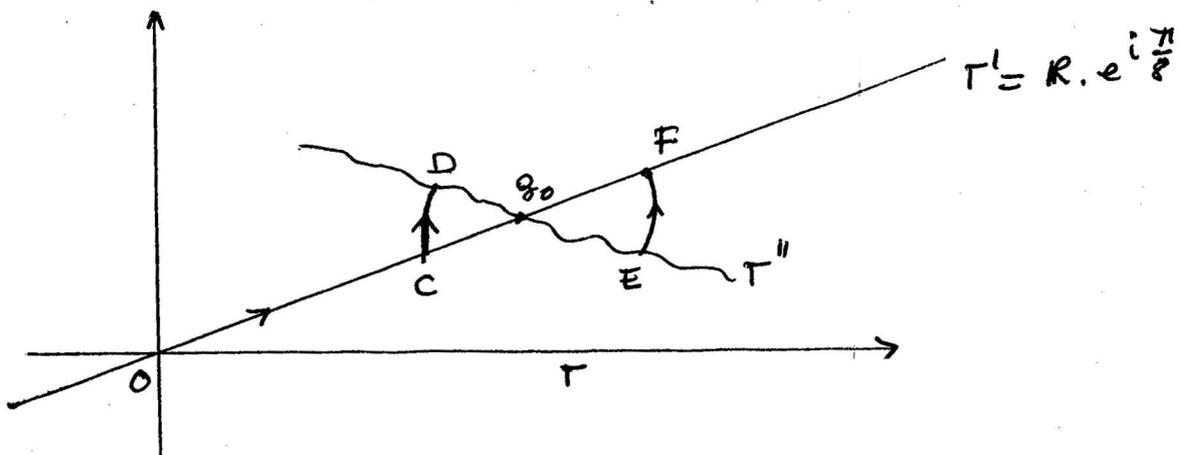
• Posons $z = z_0 + u$: $h(z) = (1+i)(z_0+u) - (z_0+u)^3 = (1+i)z_0 - z_0^3 - 3z_0u^2 - u^3$. Sur une courbe $Im h(z) = cte$ passant par z_0 , on a $Im(3z_0u^2 + u^3) = 0$; en négligeant u^3 par rapport à u^2 près de $u = 0$, on obtient $arg u = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$.

Choisissons $k = 0$, et déterminons la branche correspondante Γ'' de la courbe $Im(3z_0u^2 + u^3) = 0$, en posant $u = e^{-i\frac{\pi}{16}} s(1+w(s))$, où $w(s)$ est une fonction complexe de la variable réelle s (s voisin de 0), $w(0) = 0$: il vient :

$$Im(3z_0 e^{-i\frac{\pi}{8}} (1+w)^2 + e^{-3i\frac{\pi}{16}} s(1+w)^3) = 0 ;$$

Le théorème des fonctions implicites, appliqué au point $w = 0$, $s = 0$, fournit alors la fonction $w(s)$ cherchée.

La situation géométrique est celle de la figure :



Nous remplaçons maintenant Γ' par $\tilde{\Gamma} = OCDEF\infty$. Si DE est décrit par u lorsque $s \in [-r, +r]$, nous avons $\int_{DE} e^{th(z)} dz = \left(\int_{-r}^{+r} e^{t(\operatorname{Re} h)(z_0 + u(s))} u'(s) ds \right) x e^{it(\operatorname{Im} h)(z_0)}$
 $= e^{th(z_0)} \int_{-r}^{+r} e^{-3|z_0|s^2 t(1+\tilde{w}(s))} u'(s) ds$, où \tilde{w} est une fonction réelle, $\tilde{w}(0) = 0$.

A cette intégrale, on peut appliquer le Corollaire de I, et l'on obtient :

$$\int_{DE} e^{th(z)} dz \sim e^{th(z_0)} e^{-i \frac{\pi}{16}} \left(\frac{\pi}{t|z_0|} \right)^{1/2} \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Considérons enfin les valeurs de h sur les contours OC et $EF\infty$:

+ Avec $u = \rho e^{i\varphi}$, on a $\operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Re} h(z_0) - 3\rho^2 (\operatorname{Re} z_0 e^{3i\varphi}) (1 + O(\rho))$, et

$\operatorname{Re} z_0 e^{2i\varphi} > 0$ pour $\varphi \in [-\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}]$; si $\rho_0 > 0$ est choisi assez petit, \widehat{CD} et \widehat{EF} étant des arcs du cercle $|z - z_0| = \rho_0$, on a donc $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(z_0)$ sur ces arcs, et les intégrales $\int_{CD} e^{th(z)} dz$ et $\int_{EF} e^{th(z)} dz$ correspondantes sont à décroissance rapide par rapport à $e^{t \operatorname{Re} h(z_0)}$, lorsque $t \rightarrow +\infty$.

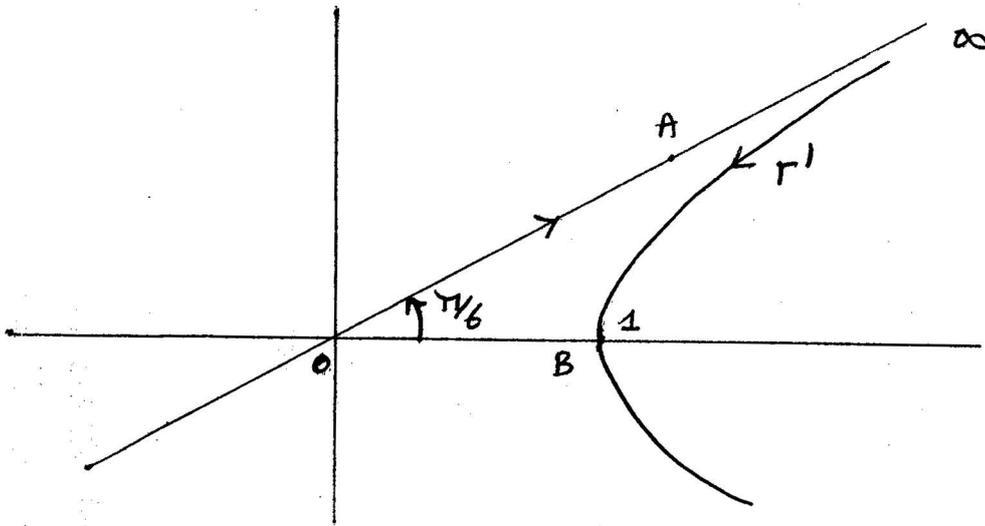
+ Sur les arcs OC et $F\infty$, $u = e^{i \frac{\pi}{8}} \rho$, $\rho \leq -\rho_0$ et $\rho \geq \rho_0$ respectivement. Comme $\operatorname{Re} h(z) = -\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) (3\rho^2 |z_0| + \rho^3)$, les valeurs de $\operatorname{Re} h(z)$ sur ces arcs sont strictement inférieures à $\operatorname{Re} h(z_0)$, et les intégrales correspondantes négligeables.

En résumé, $I(t) \sim e^{th(z_0)} e^{-i \frac{\pi}{16}} \left(\frac{\pi}{t|z_0|} \right)^{1/2}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Exemple 2 : Soit $I(t) = \int_0^1 e^{itz^3} dz$.

L'origine est le seul point critique de $h(z) = iz^3$. Les courbes $\operatorname{Im} h(z) = \text{cte}$, passant par 0, sont les rayons $\mathbb{R}_+ \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{6}}$, $\mathbb{R}_+ \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$, $\mathbb{R}_+ \cdot e^{\pm 5i \frac{\pi}{6}}$. Aucune d'elles ne passe par 1. Cependant les courbes $\operatorname{Im} h(z) = \text{cte}$ passant par 1 sont données par $\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 = 1$, avec $z = \alpha + i\beta$; la branche Γ' de cette cubique passant par (1,0)

est représentée sur la figure :



• Nous sommes conduits à remplacer le chemin de départ par le chemin $OA \rightarrow B$, i.e. le chemin partant de 0 le long du rayon $\mathbb{R}_+ \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ et revenant à 1 le long de Γ' .

Ce remplacement est licite, car e^{itz^3} est à décroissance rapide (pour $t > 0$ fixé) en $|z|$ lorsque z tend vers l'infini, $\arg z$ étant voisin de $\frac{\pi}{6}$. Donc :

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{its^3} e^{i\frac{\pi}{6}} ds + \int_{\Gamma'} e^{itz^3} dz .$$

L'arc de la deuxième intégrale est décrit par $z = (1+is)^{1/3}$, d'où

$$I(t) = \Gamma(4/3) e^{i\frac{\pi}{6}} t^{-1/3} - \frac{i}{3} \int_0^{+\infty} e^{it-ts} (1+is)^{-2/3} ds .$$

La dernière intégrale est évaluée par la méthode de Laplace, ou mieux encore, en développant $(1+is)^{-2/3}$ en série au voisinage de $s = 0$, on obtient ainsi :

$$I(t) \sim \Gamma(4/3) e^{i\frac{\pi}{6}} t^{-1/3} - \frac{1}{\Gamma(-1/3)} e^{it} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+2/3) (it)^{-n-1} .$$

(le signe \sim indique l'équivalence asymptotique).

CHAPITRE II - GENERALITES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Dans ce chapitre, on introduit une mesure de l'irrégularité d'un système différentiel en un point singulier. Cette mesure est fondée sur la comparaison entre l'action de l'opérateur sur les séries formelles et son action sur les séries convergentes. Il se trouve que le clivage points singuliers réguliers / points singuliers irréguliers correspond également à des types de singularités différents des solutions du système (singularités modérées / singularités exponentielles). Cet aspect sera largement développé aux chapitres III, IV et V, où l'on donnera en outre des procédés de calcul effectif de l'allure des solutions.

I - Rappel : Etude au voisinage d'un point régulier

Nous supposons connu le théorème suivant.

Théorème : Soit Ω un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , et $D = \frac{d}{dx} - A(x)$ un opérateur différentiel (où A est une matrice carrée $m \times m$ à coefficients holomorphes dans Ω).

Pour tout $Y_0 \in \mathbb{C}^m$ et $x_0 \in \Omega$, le système $\{DY = 0, Y(x_0) = Y_0\}$ possède une unique solution dans Ω , qui est holomorphe.

Remarque : L'exemple $\Omega = \{x, 0 < |x| < 1\}$ et $D = \frac{d}{dx} - \frac{1}{x}$ ($m=1$) montre qu'il est essentiel, pour obtenir une solution dans tout Ω , de supposer Ω simplement connexe.

En particulier (cf. IV), nous avons :

Soit Ω un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , et $D = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_0(x)$

un opérateur différentiel à coefficients holomorphes dans Ω . Pour tout $x_0 \in \Omega$ et $Y_0 = (y_0, \dots, y_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$, le système

$$\{ Dy = 0, y(x_0) = y_0, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_{m-1} \}$$

possède une unique solution dans Ω , qui est holomorphe.

II - Mesure de l'irrégularité d'une équation différentielle

Soit $D = a_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + \dots + a_0(x)$ un opérateur différentiel (scalaire) à coefficients holomorphes au voisinage de $x = 0$.

Nous notons θ l'espace des germes de fonctions holomorphes en 0, $\hat{\theta}$ l'espace des séries formelles en x .

Nous faisons opérer D dans θ et dans $\hat{\theta}$ (dans ce dernier cas, la multiplication par $a_i(x)$ signifie la multiplication par la série de $a_i(x)$ en $x = 0$).

Enfin, si $b(x) = x^k(b_0 + b_1 x + \dots)$ avec $b_0 \neq 0$, on dit que k est la valuation de b , notée $v(b)$. Le poids d'un terme $a_j(x) \frac{d^j}{dx^j}$ est, par définition, $j - v(a_j)$. (dans cette notion, les puissances de x "équilibrent" l'effet des dérivations).

1 - Action de D dans θ et $\hat{\theta}$. Nous avons les deux propositions suivantes :

Proposition 1 : L'application $D : \hat{\theta} \rightarrow \hat{\theta}$ est à indice, et son indice est égal à $\sup_{0 \leq p \leq m} (p - v(a_p))$.

Proposition 2 : L'application $D : \theta \rightarrow \theta$ est à indice, et son indice est égal à $m - v(a_m)$.

Preuve : Nous ne montrons que la Proposition 1, la Proposition 2 étant un peu délicate, du fait de la convergence.

Rappelons qu'une application linéaire f est dite à indice si $\ker f$ est de dimension finie, et $\text{Im } f$ de codimension finie ; son indice est alors défini comme $\dim \ker f - \text{codim } \text{Im } f$.

Soit $\ell = \sup(p - v(a_p))$ et $J = \{p, p - v(a_p) = \ell\}$. En notant $a_p(x) = \sum_{j \geq v(a_p)} a_p^j x^j$, on a, pour k assez grand :

$$Dx^k = \sum_{p=0}^m a_p(x) k(k-1) \dots (k-p+1) x^{k-p} = x^{k-\ell} \left(\sum_{p \in J} k(k-1) \dots (k-p+1) a_p^{v(a_p)} \right) + \text{termes en } x^{k'}, \quad k' \geq k - \ell + 1.$$

Il est clair que si $k \geq k_0$, le coefficient c_k de $x^{k-\ell}$ dans Dx^k est non nul.

Si $\hat{y} = \sum_{j \geq k_0 - \ell} \hat{y}_j x^j$ est une série formelle, on obtiendra donc une solution

$\hat{x} = \sum_{j \geq k_0} \hat{x}_j x^j$ de $D\hat{x} = \hat{y}$ en déterminant successivement les \hat{x}_j : $c_{k_0} \hat{x}_{k_0} = \hat{y}_{k_0 - \ell}$,

$c_{k_0+1} \hat{x}_{k_0+1} = \hat{y}_{k_0+1-\ell} + \text{termes connus, etc ...}$. Une telle solution est unique. En

d'autres termes, si l'on pose $m^k = \{\hat{y} \in \hat{\theta}, v(\hat{y}) \geq k\}$, $D|_{m^k} : m^k \rightarrow m^{k-\ell}$ est une bijection pour $k \geq k_0$. D'autre part, $\hat{\theta}/m^k$ est un espace vectoriel de dimension k , et on voit aisément que :

$$\begin{aligned} \text{indice}(D : \hat{\theta} \rightarrow \hat{\theta}) &= \text{indice}(D : m^k \rightarrow m^{k-\ell}) + \text{indice}(D : \hat{\theta}/m^k \rightarrow \hat{\theta}/m^{k-\ell}) = \\ &= 0 + \dim(\hat{\theta}/m^k) - \dim(\hat{\theta}/m^{k-\ell}) = \ell. \end{aligned}$$

2 - Définition de l'irrégularité.

La preuve de la Proposition 1 montre en particulier que $D : \hat{\theta}/\theta \rightarrow \hat{\theta}/\theta$ est surjective (puisque toute série formelle est obtenue dans l'image, à un polynôme près). Enfin $D : \hat{\theta}/\theta \rightarrow \hat{\theta}/\theta$ est à indice, et son indice est : $\text{indice}(D : \hat{\theta} \rightarrow \hat{\theta}) - \text{indice}(D : \theta \rightarrow \theta)$. D'où la Définition.

Définition : On appelle irrégularité de D en $x = 0$ le nombre

$$i(D) = \text{indice}(D : \hat{\theta}/\theta \rightarrow \hat{\theta}/\theta) = \dim \ker(D : \hat{\theta}/\theta \rightarrow \hat{\theta}/\theta) = \sup_{0 \leq p \leq m} (p - v(a_p)) - (m - v(a_m)).$$

On voit que $i(D) \geq 0$, et $i(D)$ représente la dimension de l'espace des séries formelles non-convergentes dont l'image par D est convergente.

Définition : Si $i(D) = 0$, et $a_m(0) = 0$, on dit que 0 est un point singulier régulier.

Si $i(D) > 0$ (ce qui implique $a_m(0) = 0$), on dit que 0 est un point singulier irrégulier.

Exemple : $D = x^2 \frac{d}{dx} - 1$. Alors $i(D) = 1$, et la série formelle (non-convergente)

$\hat{x} = \sum_{n \geq 0} n! x^{n+1}$ est une base de $\ker(D : \hat{\theta}/\theta \rightarrow \hat{\theta}/\theta)$, car $D\hat{x} = -x$.

3 - Irrégularité et comportement des solutions

Soit K l'espace des germes de fonctions méromorphes en 0 , et S l'espace des germes de fonctions à singularité essentielle.

De même qu'au §.1 on a comparé l'action de D dans θ et $\hat{\theta}$, nous avons ici :

Proposition 3 : a) L'application $D : K \rightarrow K$ est à indice et son indice est $-i(D)$.

b) L'application $D : S \rightarrow S$ est d'indice nul

c) $D : S/K \rightarrow S/K$ est surjective et $\dim \ker (D : S/K \rightarrow S/K) = i(D)$.

Exemple : $D = x^2 \frac{d}{dx} + 1$, $i(D) = 1$, et $y = e^{1/x}$ est une base du noyau dans S/K .

III - Extension aux systèmes du 1er ordre.

Le cas des systèmes est beaucoup plus délicat comme nous le montrons par quelques remarques simples.

1 - Passage d'une équation à un système.

Soit $D = a_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + \dots + a_0(x)$ un opérateur différentiel.

En posant $y_0 = y$, $y_1 = \frac{dy}{dx}$, \dots , $y_{m-1} = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, et $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$, on peut écrire

l'équation $Dy = f$ sous la forme équivalente d'un système du 1er ordre ($m \times m$)

$$\left\{ \frac{dY}{dx} = A(x)Y + F(x) \right.$$

où

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 \\ -\frac{a_0}{a_m} & \dots & -\frac{a_{m-1}}{a_m} & \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

• Cette méthode standard est cependant fâcheuse si l'on travaille près d'un point singulier.

Soit par exemple $D = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \lambda^2)$ (équation de Bessel d'indice λ) :

La méthode précédente conduit à

$$\{ x^2 Y' = \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ \lambda^2 - x^2 & -x \end{pmatrix} Y .$$

Si par contre on pose $z_0 = y$, $z_1 = x \frac{dy}{dx}$, on est conduit au système

$$\{ xZ' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^2 - x^2 & 0 \end{pmatrix} Z .$$

• Plus généralement, si $D = a_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + \dots + a_0(x)$ a en 0 un point singulier régulier, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x^k D = b_m(x) (x \frac{d}{dx})^m + \dots + b_0(x)$, b_i holomorphes et $b_m \neq 0$. En effet, $a_m(x) = x^{v(a_m)} b_m(x)$: si l'on prend $k = m - v(a_m)$, le 1er terme de $x^k D$ est de poids 0, et les autres de poids négatifs ou nuls ; en écrivant les termes $x^\ell \frac{d^\ell}{dx^\ell}$ comme des combinaisons linéaires des $(x \frac{d}{dx})^{\ell'}$ ($\ell' \leq \ell$), on obtient les b_i ($i < m$).

Si alors nous posons $z_0 = y$, $z_1 = (x \frac{d}{dx})y$, ..., $z_{m-1} = (x \frac{d}{dx})^{m-1} y$, nous obtenons le système $\{ xZ' = BZ$, équivalent à $x^k D$, où

$$\text{où } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ -\frac{b_0}{b_m} & \dots & \dots & -\frac{b_{m-1}}{b_m} & \end{pmatrix} \text{ est holomorphe près de } x = 0 .$$

Dans l'exemple de l'équation de Bessel, le rapport entre la 1ère réduction à un système (inconnues Y) et la seconde (inconnues Z) s'exprime par la formule

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} Y .$$

Le fait que plusieurs systèmes différentiels équivalents puissent présenter des singularités en apparence différentes est à l'origine de la procédure développée au §.2.

2 - Mesure de l'irrégularité d'un système.

Elle se fonde sur la proposition suivante, qui présente une réduction inverse de celle expliquée au §.1 dans le cas d'un point singulier régulier.

Proposition 1 : Soit le système $D = x \frac{d}{dx} - M$, où M est une matrice $m \times m$ à coefficients méromorphes.

Il existe $A \in GL(m, K)$ telle que, si l'on pose $Y = AZ$, on a $A^{-1}DY = \hat{D}Z$, où

$$\hat{D} = x \frac{d}{dx} - N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ \lambda_0 & \dots & & & \lambda_{m-1} \end{pmatrix}, \text{ et les } \lambda_i \text{ sont méromorphes.}$$

Remarque 1 : La notation $A \in GL(m, K)$ signifie que A est une matrice carrée inversible dans K (i.e. $\exists B, AB = BA = \text{id}$) et non pas une matrice inversible en $x = 0$. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in GL(2, K).$$

Remarque 2 : Le système \hat{D} est équivalent à l'opérateur scalaire

$$\Delta = \left(x \frac{d}{dx}\right)^m - \lambda_{m-1} \left(x \frac{d}{dx}\right)^{m-1} - \dots - \lambda_0, \text{ d'après le §.1.}$$

La proposition 1 et la remarque 2 suggèrent la définition suivante, qui sera justifiée par la proposition 2.

Définition : Soit D comme dans la proposition 1. On appelle irrégularité de D (notée $i(D)$) le nombre $i(D) = i(x^{k_\Delta}) = \sup_{0 \leq p \leq m-1} (-v(\lambda_p))$ ($k \in \mathbb{N}$ étant choisi de façon que x^{k_Δ} soit à coefficients holomorphes).

En apparence, $i(D)$ dépend de la matrice A qui opère la réduction de D à \hat{D} . Mais nous avons la :

Proposition 2 : Soit \hat{K} l'espace des séries méromorphes formelles. Le système D opère de $(\hat{K})^m$ dans $(\hat{K})^m$ et de K^m dans K^m . L'application $D : (\hat{K}/K)^m \rightarrow (\hat{K}/K)^m$ est à indice, est surjective, et son noyau est de dimension $i(D)$.

Enfin la proposition suivante donne une réalisation fort commode des systèmes à point singulier régulier.

Proposition 3 : Soit D un système du 1er ordre à coefficients méromorphes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $i(D) = 0$.

ii) Il existe $A \in \text{Gl}(m, K)$, telle que $\hat{D} = A^{-1} DA = x \frac{d}{dx} - N$, ou N est holomorphe.

Preuve : • i) \Rightarrow ii), car si l'on prend A donné par la proposition 1, $i(D) = 0$ implique que les λ_j sont holomorphes.

• Pour l'implication inverse, on prouve directement que $\ker(D : \hat{K}/K \rightarrow \hat{K}/K) = 0$ cela sera fait au chapitre III.

3 - Irrégularité à l'infini.

De façon traditionnelle et commode (voir chapitres IV, V), on aime à dire que l'infini (∞) est un point singulier régulier ou irrégulier. Cela signifie simplement que, pour l'équation transformée par le changement de variable $x = \frac{1}{z}$, le point $z = 0$ est un point singulier régulier ou irrégulier.

Soit par exemple le système $D = x^k \frac{d}{dx} - M(x)$, où M est holomorphe à l'infini (i.e. M est holomorphe de $z = \frac{1}{x}$ près de 0 : $M(x) = \sum_{\ell \geq 0} M_\ell (1/x)^\ell$). Posant $z = 1/x$, on obtient $\hat{D} = -z^{-k+2} \frac{d}{dz} - M(1/z)$. Si $-k+2 \leq 1$, i.e. $k \geq 1$, $i(\hat{D}) = 0$, et l'infini est un point singulier régulier pour D .

Aux chapitres IV, V, nous étudierons, au voisinage de l'infini, les systèmes $D = x^{-q} \frac{d}{dx} - M(x)$ avec $q \geq 0$. Cette classe de systèmes contient ceux pour lesquels l'infini est un point singulier irrégulier, mais aussi certains systèmes d'irrégularité

rité zéro qu'on a simplement "mal écrit". Cette difficulté réapparaîtra donc, à l'occasion de l'étude des "points de transition" (chapitre V).

Remarquons enfin que la théorie développée dans ce paragraphe ne fournit pas un moyen effectif de mesurer l'irrégularité d'un système, ni même de voir si elle est nulle.

CHAPITRE III - SYSTEMES A POINTS SINGULIERS REGULIERS.

Soit $D = x \frac{d}{dx} - A(x)$ un système linéaire, où A est une matrice $m \times m$ à coefficients méromorphes en $x = 0$.

Nous faisons, dans ce chapitre, une étude locale de D près de $x = 0$, dans le cas $i(D) = 0$ (point singulier régulier).

D'après le chapitre II, on peut alors supposer que A est à coefficients holomorphes en $x = 0$ (quitte à faire un changement méromorphe inversible d'inconnues).

Dans la partie I, nous donnons une démonstration élémentaire du fait fondamental : Toute solution formelle Y de $DY = 0$ est convergente, et donc est une vraie solution de $DY = 0$.

Ensuite (partie II), nous utilisons ce résultat pour réduire D (par un changement inversible d'inconnues) à une forme simple, permettant le calcul explicite des solutions.

Les calculs de la partie II sont purement formels, et permettent, dans la partie III, l'étude du cas où x est réel, et $A \in C^\infty$.

I - Solutions formelles et vraies solutions : le fait fondamental.

Théorème 1 : Soit $D = x \frac{d}{dx} - A(x)$, où A est une matrice $m \times m$ à coefficients holomorphes pour $|x| < x_0$, et soit $Y = \sum_{p \geq 0} a_p x^p$ une solution formelle de $DY = 0$. Alors Y est holomorphe pour $|x| < x_0$.

Preuve : Il suffit de montrer que Y est holomorphe dans un voisinage de 0, car en dehors de $x = 0$, le théorème I du chapitre II permet de prolonger Y au disque $|x| < x_0$.

• Il suffit de montrer que, pour un $M > 0$,

$$(I.1) \quad |a_p| \leq M^{p+1}, \quad p \geq 0 \quad (|a_p| \text{ est la norme de } a_p).$$

En effet, la série $\sum_{p \geq 0} a_p x^p$ est normalement convergente dans tout disque $|x| \leq x_1$, $x_1 < 1/M$.

• La matrice A s'écrit comme une série convergente dans $|x| < x_0$, $A(x) = \sum_{\ell \geq 0} A_\ell x^\ell$.
En particulier, il existe $c > 0$ tel que $|A_\ell| \leq c^{\ell+1}$, $\ell \geq 0$ ($|A_\ell|$ est la norme de l'application linéaire définie par A_ℓ).

Dire que $DY = 0$ formellement, c'est dire que si l'on développe DY en série (en x), tous les coefficients trouvés sont nuls. On a donc les relations :

$$(I.2) \quad \begin{cases} A_0 a_0 = 0 \\ (p - A_0) a_p = \sum_{\ell \geq 1}^p A_\ell a_{p-\ell} \quad , \quad p \geq 1 . \end{cases}$$

Pour p assez grand ($p \geq p_0$), $p - A_0 = p(\text{id} - \frac{A_0}{p})$ est inversible, et

$|(p - A_0)^{-1}| \leq \text{cte} = \alpha$. Ceci permet d'obtenir une estimation des a_p par récurrence à partir des formules (I.2).

• Supposons que $M > 0$ soit tel que, pour un $r \geq p_0$ et pour $p \leq r$, $|a_p| \leq M^{p+1}$.
Alors $|a_{r+1}| \leq \alpha \sum_{\ell=1}^{r+1} |A_\ell| |a_{r+1-\ell}| \leq \alpha \sum_{\ell=1}^{r+1} c^{\ell+1} M^{r+2-\ell} = \alpha M^{r+3} \sum_{\ell=1}^{r+1} (\frac{c}{M})^{\ell+1}$.

Si de plus $\frac{c}{M} < 1$, $\sum_{\ell=1}^{r+1} (\frac{c}{M})^{\ell+1} \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} (\frac{c}{M})^{\ell+1} = (\frac{c}{M})^2 \frac{1}{1 - \frac{c}{M}}$, et

$$|a_{r+1}| \leq M^{r+2} \text{ si } \frac{\alpha c^2}{1 - \frac{c}{M}} \frac{1}{M} \leq 1 .$$

On choisit donc $M > 0$ tel que $M > c$, $\frac{\alpha c^2}{1 - \frac{c}{M}} \frac{1}{M} \leq 1$, et $|a_p| \leq M^{p+1}$ pour $p \leq p_0$,
et on obtient (I.1). ■

II - Simplifications du système et solutions explicites.

1 - Le cas standard

Théorème 2 : Soit $D = x \frac{d}{dx} - A(x)$, où A est holomorphe en $x = 0$. Supposons que $A(0)$ ne possède pas de couple de valeurs propres dont la différence est un entier non-nul. Il existe alors une matrice $P(x)$ holomorphe, $P(0) = id$, telle que le changement d'inconnues $Y = PZ$ transforme D en $\tilde{D} = x \frac{d}{dx} - A(0)$.

Remarque : La matrice $A(0)$ peut très bien posséder des valeurs propres multiples.

Preuve :

a) Calcul formel.

Avec $Y = PZ$, on a $DY = xP'Z + xPZ' - APZ$, et $\tilde{D} = x \frac{d}{dx} + xP^{-1}P' - P^{-1}AP = x \frac{d}{dx} - B$, où A , P et B sont liés par la relation

$$(II.1) \quad xP' = AP - PB.$$

Nous posons formellement $P(x) = \sum_{s \geq 0} P_s x^s$, $B(x) = \sum_{k \geq 0} B_k x^k$, et nous notons

$A(x) = \sum_{\ell \geq 0} A_\ell x^\ell$. L'équation (II.1) est satisfaite formellement par P et B si

$$(II.2) \quad \begin{cases} A_0 P_0 - P_0 B_0 = 0 \\ (s-A_0)P_s - P_s B = \sum_{i=1}^s (A_i P_{s-i} - P_{s-i} B_i), \quad s \geq 1. \end{cases}$$

Le problème consiste maintenant à choisir les B_k les plus simples possibles de façon à pouvoir résoudre le système (II.2) avec P_0 inversible. C'est une question purement algébrique, dont la solution repose sur le lemme suivant.

• Lemme : Soient U, V deux matrices de tailles $m \times m, n \times n$ respectivement. Le système $UX - XV = W$ admet une solution unique X (de taille $m \times n$) pour toute $m \times n$ -matrice W si et seulement si U et V n'ont pas de valeurs propres communes. ■

Admettons ce lemme pour l'instant. Par hypothèse, $s - A_0$ et A_0 n'ont pas de valeurs propres communes pour $s \geq 1$; nous prenons $A_0 = B_0$, $P_0 = id$, $B_k = 0$ pour $k \geq 1$, et utilisons le lemme pour déterminer successivement les P_s ($s \geq 1$) par les équations (II.2).

b) Convergence

La solution formelle $\sum_{s \geq 0} P_s x^s$ de (II.1) obtenue au point a) est convergente, d'après le §.I, puisque (II.1) est un système linéaire à point singulier régulier. Cela achève la preuve du théorème.

c) Preuve du lemme

• Soit λ une valeur propre commune à U et V ; λ est aussi valeur propre de tV , et soient a et b des vecteurs propres correspondants : $Ua = \lambda a$, ${}^tVb = \lambda b$. La matrice $X = a {}^t b$ est alors solution de $UX - XV = 0$.

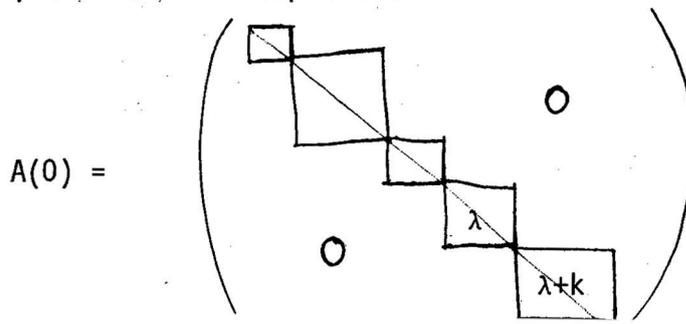
• Inversement, soit λ une valeur propre de V et b un vecteur propre généralisé de V pour la valeur propre λ : $\exists p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $(V-\lambda)^p b = 0$. Si X satisfait $UX - XV = 0$ on a aussi $(U-\lambda)^k X = X(V-\lambda)^k$ ($k \in \mathbb{N}$), et donc $(U-\lambda)^p Xb = X(V-\lambda)^p b = 0$. Comme λ n'est pas valeur propre de U , $Xb = 0$. Les vecteurs propres généralisés de V formant une base de \mathbb{C}^n , on en déduit $X = 0$.

• L'endomorphisme $X \mapsto UX - XV$ est injectif, donc bijectif, ce qui achève la preuve du lemme.

2 - Réduction du cas général au cas standard.

Théorème 3 : Soit $D = x \frac{d}{dx} - A(x)$, où A est holomorphe en $x = 0$. Il existe une matrice holomorphe $S(x)$, inversible dans l'espace des matrices à coefficients méromorphes, telle que le changement d'inconnues $Y = SZ$ réduise D à $\tilde{D} = x \frac{d}{dx} - B(x)$, où B satisfait à l'hypothèse du théorème 2.

Preuve : Elle repose sur l'artifice (formel) suivant, appelé "shearing". Supposons que $A(0)$ possède deux valeurs propres λ et $\lambda+k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$) ; quitte à faire un changement d'inconnues $Y = TZ$ (T constante), on peut supposer que $A(0)$ se présente sous la forme canonique de Jordan, les deux derniers blocs à droite étant relatifs aux valeurs propres λ et $\lambda+k$ respectivement :



Posons alors $Y = \Sigma(x)Z$, où

$$\Sigma(x) = \left(\begin{array}{c|c} \text{id} & 0 \\ \hline 0 & x \text{id} \end{array} \right) \quad , \text{ la multiplicité de } x \text{ comme}$$

valeur propre de $\Sigma(x)$ étant égale à celle de $\lambda+k$ comme valeur propre de $A(0)$. Le nouveau système obtenu est $\bar{D} = x \frac{d}{dx} - C(x)$, où

$$C = \Sigma^{-1}A\Sigma - x\Sigma^{-1}\Sigma' = A(0) + x\Sigma^{-1}A_1\Sigma + 0(x) - x\Sigma^{-1}\Sigma' \quad . \text{ Or}$$

$$x\Sigma^{-1}\Sigma' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & \text{id} \end{array} \right) \quad , \text{ et}$$

$$x\Sigma^{-1}A_1\Sigma = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & \text{id} \end{array} \right) A_1 \left(\begin{array}{c|c} \text{id} & \\ \hline & 0 \end{array} \right) + 0(x) \quad .$$

Donc $C(0)$ a les mêmes valeurs propres que $A(0)$, à ceci près que $\lambda+k$ est remplacée par $\lambda+k-1$ (avec la même multiplicité).

• S'il y a lieu, on peut recommencer avec $C(x)$ ce qu'on vient de faire avec $A(x)$ (noter que $C(0)$ n'est pas sous la forme de Jordan), et ainsi de suite. La matrice S de l'énoncé du théorème est donc un produit de matrices telles que Σ et de matrices inversibles constantes ; elle est inversible au sens des matrices méromorphes. ■

Remarque : Si les valeurs propres de $A(0)$ sont notées $\lambda_1, \lambda_1 + k_1^1, \dots, \lambda_1 + k_1^{\alpha_1-1}, \lambda_2, \lambda_2 + k_2^{\alpha_2-1}, \dots, \lambda_p, \lambda_p + k_p^1, \dots, \lambda_p + k_p^{\alpha_p-1}$, où les k_i^j et les α_i sont des entiers positifs, $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = m$, et $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z} (1 \leq i, j \leq p)$, les valeurs propres de $B(0)$ sont les $\lambda_i (1 \leq i \leq p)$, avec les multiplicités α_i .

3 - Forme des solutions.

a) Cas d'un système.

Les théorèmes 2 et 3 permettent de réduire $D = x \frac{d}{dx} - A(x)$ à $\bar{D} = x \frac{d}{dx} - B(0)$ par un changement $Y = SZ$.

Un système de solutions indépendantes de $DZ = 0$ est fourni par les colonnes de la matrice $x^{B(0)} = e^{B(0)\log x}$. Si l'on suppose $B(0)$ mise sous la forme de Jordan, avec des valeurs propres distinctes λ_i de multiplicités α_i ($1 \leq i \leq p$), on voit que

$e^{B(0)\log x} = N(x) \begin{pmatrix} x^{\lambda_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & x^{\lambda_p} \end{pmatrix}$, où $N(x)$ est formée de blocs triangulaires dont les

coefficients sont des polynômes en $\log x$ de degrés au plus $\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_p - 1$.

b) Cas d'une équation.

Bien que, d'après le chapitre II, ce cas se réduise à celui d'un système, il est bien commode, dans la pratique, de pouvoir calculer directement des solutions, sans passer par la réduction du théorème 2 et le calcul de P .

Nous indiquons rapidement la façon de procéder et traitons des exemples.

i) Soit un opérateur scalaire D que nous supposons déjà écrit sous la forme (cf. chapitre II, III.1) $D = b_m(x) \left(x \frac{d}{dx}\right)^m + b_{m-1}(x) \left(x \frac{d}{dx}\right)^{m-1} + \dots + b_0(x)$, où les $b_j(x)$ sont holomorphes, $b_m \neq 0$.

Une "approximation" de D en 0 est l'opérateur à coefficients figés $\bar{D} = b_m(0) \left(x \frac{d}{dx}\right)^m + \dots + b_0(0)$. Si λ est une racine de l'équation $b_m(0)\lambda^m + \dots + b_0(0) = 0$ (qu'on appelle "équation indicielle" de D), x^λ est solution de $\bar{D}x^\lambda = 0$. Il est raisonnable d'espérer qu'à cette solution correspond une solution dans le noyau de D de la forme $x^\lambda x$ (série entière en x).

Bien entendu, l'équation indicielle de D n'est autre que le polynôme caractéristique de $A(0)$ (le système auquel D se réduit étant noté $x \frac{d}{dx} - A(x)$).

On devra distinguer deux cas :

• Les racines de l'équation indicieuse sont simples : pour chaque racine λ il existe alors effectivement une solution de la forme $y = x^\lambda \times \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ (d'après le théorème 1). On détermine les a_j en écrivant que $Dy = 0$ formellement ; a_0 est arbitraire, et les $\frac{a_j}{a_0}$ ($j \geq 1$) sont alors déterminés successivement.

• Il existe un couple de racines dont la différence est un entier (éventuellement nul). Les solutions de l'équation sont alors susceptibles de contenir des polynomes en $\log x$. On peut alors soit réduire D à un système (pour y voir clair), soit écrire une forme a priori convenable de la solution (avec des coefficients indéterminés), soit encore, si l'équation est d'ordre 2, faire "varier la constante".

ii) L'exemple de l'équation de Bessel.

$$\text{C'est l'équation } Dy = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0, \nu \in \mathbb{C}.$$

En écrivant $D = (x \frac{d}{dx})^2 + (x^2 - \nu^2)$, on obtient l'équation indicieuse $\lambda^2 - \nu^2 = 0$ soit $\lambda = \pm \nu$.

• Si $2\nu \notin \mathbb{Z}$, l'équation possède un système de deux solutions indépendantes de la forme $x^{\pm \nu} (1 + o(x))$.

• Si $\nu = 0$, le théorème 1 montre qu'il existe une solution série entière, et une autre contenant un $\log x$. Cherchons la première : en posant $y = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$, il vient

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = b_1 x + (2^2 b_2 + b_0)x^2 + (3^3 b_3 + b_1)x^3 + \dots$$

$$+ ((2p)^2 b_{2p} + b_{2p-2})x^{2p} + ((2p+1)^2 b_{2p+1} + b_{2p-1})x^{2p+1} + \dots,$$

d'où les relations $b_1 = 0, \dots, (2p)^2 b_{2p} + b_{2p-2} = 0, (2p+1)^2 b_{2p+1} + b_{2p-1} = 0, \text{ etc.}$

On a donc $b_1 = \dots = b_{2p+1} = \dots = 0$, et

$$b_{2p} = (-1)^p \frac{b_0}{2^{2p} (p!)^2}, \text{ d'où}$$

$$y = b_0 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}.$$

• Si $\nu = \frac{p}{2}$, p entier non-nul, les solutions s'expriment à l'aide des fonctions élémentaires, et ne contiennent pas de $\log x$ (ce qui est un peu miraculeux). Voyons le cas $\nu = \frac{1}{2}$:

$$y = x^\lambda \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right), \quad x^{-\lambda} (x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y) = a_0 (\lambda^2 - \frac{1}{4}) + a_1 (2\lambda + 1)x +$$

+ $\sum_{n \geq 2} x^n (a_{n-2} + n(2\lambda + n)a_n) + \dots$; d'où $\lambda^2 = \frac{1}{4}$ (on retrouve de toutes façons l'équation indiciale), $a_1(2\lambda+1) = 0$, $n(2\lambda+n)a_n + a_{n-2} = 0$ ($n \geq 2$).

+ Si l'on prend $\lambda = 1/2$, on trouve $a_1 = \dots = a_{2p+1} = \dots = 0$, et $a_{2p} = (-1)^p \frac{a_0}{(2p+1)!}$ d'où $y = a_0 x^{-1/2} \sin x$.

+ Si l'on prend $\lambda = -1/2$, a_1 est arbitraire (c'est là le fait exceptionnel), et $a_{2p} = (-1)^p \frac{a_0}{(2p)!}$, $a_{2p+1} = (-1)^p \frac{a_1}{(2p+1)!}$, d'où $y = x^{-1/2} (a_0 \cos x + a_1 \sin x)$. On trouve donc en fait la solution générale de l'équation.

• Dans le cas $\nu = 1/2$, utilisons les développements asymptotiques du chapitre I, II.4. pour calculer $H_{1/2}^1$ et $H_{1/2}^2$.

Nous avons, si $y = x^{-1/2} (a_0 \cos x + a_1 \sin x)$, $\epsilon = \pm 1$,

$$y(i\epsilon s) = \frac{(i\epsilon s)^{-1/2}}{2} (a_0 (e^{-\epsilon s} + e^{\epsilon s}) + \frac{a_1}{2} (e^{-\epsilon s} - e^{\epsilon s})).$$

La fonction $y(i\epsilon s)$ ne sera à décroissance rapide lorsque $s \rightarrow +\infty$ que si $ia_0 = \epsilon a_1$. Pour $\epsilon = +1$, on obtient alors

$$y(is) = a_0 e^{-i\frac{\pi}{4}} s^{-1/2} e^{-s} \sim \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} s^{-1/2} e^{-s} \text{ lorsque } s \rightarrow +\infty, \text{ soit } a_0 = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

et $H_{1/2}^1(x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1/2} e^{ix}$. De même, pour $\epsilon = -1$, il vient $H_{1/2}^2(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1/2} e^{-ix}$

III - Cas d'un système à coefficients C^∞ .

Supposons maintenant que $D = x \frac{d}{dx} - A(x)$, où A est une matrice C^∞ de x (x réel)

voisin de 0).

Nous disons qu'une fonction $C^\infty f(x)$, définie au voisinage de 0, est plate en 0 si, $\forall k \geq 0, f^{(k)}(0) = 0$.

L'étude d'un système, dans le cas holomorphe, comprend les deux volets : "solutions formelles" et "convergence" ; dans le cas C^∞ , il n'est pas question de convergence, et le volet "convergence" est remplacé par une étude de l'action de D dans les fonctions plates.

Le lien entre les séries formelles et les fonctions C^∞ est celui de développement asymptotique (lorsque $x \rightarrow 0$).

Définition : Soit $\sum_{p \geq 0} a_p x^p$ une série formelle, et f une fonction C^∞ . On dit que f est asymptotique à $\sum_{p \geq 0} a_p x^p$ lorsque $x \rightarrow 0$ si

$$\forall m \geq 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{-m} [f(x) - \sum_{p \geq 0}^m a_p x^p] = 0.$$

On note ce fait

$$f(x) \sim \sum_{p \geq 0} a_p x^p, \quad x \rightarrow 0.$$

On s'étendra davantage sur cette notion au chapitre IV. Notons seulement pour l'instant que, étant donnée une série formelle, il existe toujours une fonction C^∞ (déterminée à une fonction plate près) qui lui est asymptotique. On peut alors énoncer l'analogie du théorème 1 du §.I.

Théorème 4 : Soit $D = x \frac{d}{dx} A(x)$; où A est une matrice $m \times m$ à coefficients C^∞ pour $-x_0 < x < x_0$ (x réel), et soit F une fonction C^∞ .

S'il existe une solution formelle \hat{Y} de $D\hat{Y} = F$, alors il existe une solution C^∞ Y de $DY = F$, avec $Y \sim \hat{Y}$, et un tel Y est unique.

Preuve : Il suffit de montrer que D est résoluble dans les fonctions plates. En effet,

soit \tilde{Y} une fonction C^∞ , $\tilde{Y} \sim \hat{Y}$; on cherche Z telle que $D(\tilde{Y}+Z) = F$, soit $DZ = F - D\tilde{Y}$. Comme \hat{Y} est solution formelle de $D\hat{Y} = F$, la fonction $F - D\tilde{Y}$ est plate. Si Z , plate, est solution de $DZ = F - D\tilde{Y}$, $\tilde{Y} + Z$ est la solution cherchée.

• Les preuves des théorèmes 1 et 2 montrent qu'il existe une série formelle $\hat{P} = \sum_{s \geq 0} P_s x^s$ telle que le changement (formel) d'inconnues $Y = \hat{P}Z$ transforme D en

$$\hat{D} = x \frac{d}{dx} - N, \text{ où } N \text{ est une matrice constante.}$$

Si P est une matrice C^∞ , avec $P \sim \hat{P}$, le changement $Y = PZ$ transforme donc D en $\tilde{D} = x \frac{d}{dx} - N + Q$, où Q est C^∞ plate. L'équation $DY = F$ devient $\tilde{D}Z = P^{-1}F$.

• On peut alors traiter séparément l'équation pour $x > 0$ et pour $x < 0$. Supposons par exemple $x > 0$: on pose $Z = x^N V$, d'où $\tilde{D}x^N V = Nx^N V + x^N x \frac{dV}{dx} - Nx^N V + Qx^N V = P^{-1}F$, soit

$$x \frac{dV}{dx} - x^{-N} Q x^N V = x^{-N} P^{-1} F.$$

Mais maintenant $x^{-N} Q x^N$ est plate, ainsi que le second membre $x^{-N} P^{-1} F$: la division par x nous ramène au cas d'un point régulier, où l'existence et l'unicité sont classiques.

De même que les simplifications présentées dans les théorèmes 2 et 3 se déduisent d'un calcul formel par l'application du théorème 1, le théorème 5 se déduit des mêmes calculs formels par l'application du théorème 4.

Théorème 5 : Soit $D = x \frac{d}{dx} - A(x)$, $A \in C^\infty$. Il existe une matrice C^∞ P telle que le changement $Y = PZ$ réduise D à $\tilde{D} = x \frac{d}{dx} - N$, où N est une matrice constante.

Preuve : Comme on l'a remarqué dans la preuve du théorème 4,a), il existe un tel changement formel, c'est-à-dire une solution formelle de l'équation $xP' = AP - PN$. D'après le théorème 4, il existe donc aussi une solution C^∞ P de cette équation.

On déduit du théorème 5 la forme des solutions, comme on l'a fait en II.3.

CHAPITRE IV - SYSTEMES A POINTS SINGULIERS IRREGULIERS : SOLUTIONS FORMELLES ET VRAIES SOLUTIONS.

L'étude des systèmes dans le cas $i(D) > 0$ (point singulier irrégulier) suit le même plan qu'au chapitre III : on étudie tout d'abord le lien entre les solutions formelles et les vraies solutions ; on applique ensuite les résultats pour obtenir une simplification du système, permettant l'écriture explicite des solutions.

Mais, alors que dans le cas $i(D) = 0$, toute solution formelle est une vraie solution, il en va tout autrement ici : à toute solution formelle correspond, dans tout secteur d'angle assez petit, une vraie solution qui lui est asymptotique dans ce secteur. Tout le chapitre IV est consacré à la démonstration de ce fait fondamental. Les applications sont reportées au chapitre V.

I - Développements asymptotiques dans des secteurs.

Leur introduction résulte de la constatation suivante : les solutions formelles d'un système à point singulier irrégulier ne sont pas, en général, convergentes (cf. chapitre II).

Nous posons quelques définitions.

Définition : On appelle secteur du plan complexe le domaine conique S défini par $S = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0, \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$, où θ_1 et θ_2 sont des réels donnés, et $\arg z$ est l'argument de z .

Définition : Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série formelle, et soit f une fonction définie dans un secteur S . On dit que f est asymptotique à $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ dans S si

$$\forall m \geq 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} x^{-m} [f(x) - \sum_{n \geq 0}^m a_n x^n] = 0.$$

On note

$$f \sim \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad x \in S, \quad x \rightarrow 0.$$

1 - Propriétés algébriques des développements asymptotiques. Nous rappelons rapidement quelques faits bien connus.

a) Unicité : une fonction f possède au plus un développement asymptotique (pour $x \in S, x \rightarrow 0$) ; en fait

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in S}} x^{-m} [f(x) - \sum_{n \geq 0}^{m-1} a_n x^n] = a_m .$$

b) Linéarité : Si $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ (α, β constantes), et si

$$f \sim \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad g \sim \sum_{n \geq 0} b_n x^n, \quad \text{alors}$$

$$h \sim \sum_{n \geq 0} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n .$$

c) Multiplication : Si $f \sim \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $g \sim \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ (dans S), alors fg est asymptotique dans S à la série obtenue en multipliant formellement les séries de f et g et en ordonnant les termes.

d) Composition : Si $f \sim \sum_{n \geq 1} a_n x^n$ pour $x \in S$ et

$$g \sim \sum_{n \geq 0} b_n u^n \quad \text{pour } u \in S', \text{ et}$$

si $f(x) \in S'$ pour $x \in S$, alors $g(f(x))$ est asymptotique, dans S , à la série obtenue en substituant formellement la série de f à u (dans la série de g), et en ordonnant les termes.

e) Inversion : Si $f \sim \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ dans S et $a_0 \neq 0$, alors $\frac{1}{f}(x)$ existe dans S pour $|x| < x_0$ et $\frac{1}{f}(x) \sim \sum_{n \geq 0} b_n x^n$. Les coefficients b_n peuvent être successivement déterminés en écrivant que le produit formel $(\sum_{n \geq 0} a_n x^n) (\sum_{n \geq 0} b_n x^n)$ est 1.

2 - Propriétés analytiques des développements asymptotiques.

Dorénavant, toutes les fonctions f considérées dans un secteur S seront supposées holomorphes dans S .

Il importe d'abord de comprendre pourquoi l'on considère des secteurs du plan.

a) Proposition 1 : Si f est holomorphe dans une couronne $0 < |x| < x_0$, et si $f \sim \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ lorsque $x \rightarrow 0$ dans cette couronne, alors $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est une série convergente de somme f .

Preuve : Comme $f(x) \rightarrow a_0$ lorsque $x \rightarrow 0$, f est, en fait, holomorphe pour $|x| < x_0$. Elle est, bien entendu, asymptotique à son développement en série, qui ne peut donc être que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, par unicité.

b) Proposition 2 (intégration) : Si $f \sim \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ dans S , alors

$$\int_0^x f(t) dt \sim \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in S, \quad x \rightarrow 0.$$

c) Proposition 3 (dérivation) : Si $f \sim \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ dans S , et si S est d'angle positif (i.e. défini par $\theta_1 < \arg z < \theta_2$, $\theta_1 < \theta_2$), alors $f'(x) \sim \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ dans tout sous-secteur

$$S^* = \{z, \theta_1^* < \arg z < \theta_2^*\}, \quad \theta_1 < \theta_1^*, \quad \theta_2^* < \theta_2.$$

Preuve : Pour tout m , définissons $E_m(x)$ par $f(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n + x^m E_m(x)$ (avec $E_m(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, $x \in S$).

Nous avons alors

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + m x^{m-1} E_m(x) + x^m E_m'(x).$$

Soit maintenant $\alpha > 0$ tel que le disque de centre x et de rayon $|x|\alpha$ soit dans S pour

$x \in S^*$, et soit $M(x)$ le maximum de $|E_m(z)|$ pour z sur le bord de ce disque. Par la formule de Cauchy on a $|E'_m(x)| \leq \frac{M(x)}{|x|^\alpha}$, d'où

$$|f'(x) - \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}| \leq |x|^{m-1} \left[m |E_m(x)| + \frac{M(x)}{\alpha} \right] = o(|x|^{m-1}),$$

ce qui achève la preuve.

d) Proposition 4 (existence) : Soit S un secteur et $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série formelle. Il existe une fonction $f(x)$, holomorphe dans S pour $|x| < x_0$, telle que

$$f \sim \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad x \in S, \quad x \rightarrow 0.$$

Preuve : On peut toujours supposer (quitte à faire tourner x) que

$S = \{z, -\theta < \arg z < \theta\}$. Nous posons $\alpha_r(x) = 1 - \exp(-\frac{b_r}{x^\beta})$, où $b_r > 0$ et $\beta, 0 < \beta < 1$ sont à choisir.

Le nombre β est pris tel que, pour $x \in S$, $\operatorname{Re} x^\beta > 0$ (i.e. $\beta\theta < \frac{\pi}{2}$) : on a alors

$$|\alpha_r(x)| < \frac{b_r}{|x|^\beta}, \quad \text{en vertu de l'inégalité facile } |1 - e^z| < |z| \text{ pour } \operatorname{Re} z < 0.$$

La série $\sum_{n \geq 0} a_n \alpha_n(x) x^n$ a son terme général majoré en module par $|a_n| b_r |x|^{n-\beta}$

(pour $x \in S$) ; nous prenons $b_n = |a_n|^{-1}$ si $a_n \neq 0$, $b_n = 0$ sinon : la série

$\sum_{n \geq 0} a_n \alpha_n(x) x^n$ est alors normalement convergente pour $|x| \leq x_0 < 1$.

Montrons enfin que la fonction $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \alpha_n(x) x^n$ est asymptotique à $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

Pour $m \geq 0$, nous écrivons

$$x^{-m} \left[f(x) - \sum_{n=0}^m a_n x^n \right] = - \sum_{n=0}^m a_n \exp(-\frac{b_n}{x^\beta}) x^{-(m-n)} + \sum_{n \geq m+1} a_n \alpha_n(x) x^{n-m}.$$

Le premier terme tend vers zéro lorsque $x \rightarrow 0$ ($x \in S$). Le second est majoré en module

par $\sum_{n \geq m+1} |x|^{n-m-\beta} = |x|^{1-\beta} \frac{1}{1-|x|}$, qui tend aussi vers 0.

La proposition 4 montre que le fait, pour une série formelle, d'être asymptotique à une fonction holomorphe, dans un secteur si grand soit-il, n'impose à cette série aucune propriété particulière.

II - Solutions formelles et vraies solutions : le fait fondamental.

Dans toute la suite, nous traiterons, au voisinage de $x = \infty$, d'un système de la forme $D = x^{-q} \frac{d}{dx} - A(x)$, où $q \in \mathbb{N}$, et A est holomorphe à l'infini (i.e.

$A(x) = \sum_{n \geq 0} A_n x^{-n}$). Tous les développements asymptotiques auront lieu lorsque $x \rightarrow \infty$

dans un certain secteur S (les propriétés énoncées dans la partie I se transposant immédiatement).

Théorème 1 : Soit $q \in \mathbb{N}$, et S un secteur du plan complexe d'angle au plus $\frac{\pi}{q+1}$.

Soit $f(x, z) \in \mathbb{C}^N$ une fonction de x et de $z \in \mathbb{C}^N$ avec les propriétés suivantes :

i) f est holomorphe en x et z pour

$$|x| \geq x_0, \quad x \in S, \quad \text{et} \quad |z| \leq z_0.$$

ii) f admet un développement asymptotique en x ,

$$f(x, z) \sim \sum_{n \geq 0} f_n(z) x^{-n}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S, \quad \text{uniforme pour } |z| \leq z_0.$$

iii) Le terme principal $f_0(z)$ de $f(x, z)$ (pour $x = \infty$) possède, en $z = 0$, une matrice jacobienne inversible :

$$\det \frac{\partial f_0}{\partial z}(0) \neq 0.$$

Supposons que le système $\{x^{-q} Y^1 = f(x, Y)$ possède une solution formelle

$$\hat{Y} = \sum_{r \geq 1} y_r x^{-r}.$$

Alors il possède, pour $|x| \geq x_1$ dans S , une solution Y holomorphe, telle que $Y \sim \hat{Y}$ dans tout sous-secteur de S , lorsque $x \rightarrow \infty$.

Preuve : 1) Pour exploiter pleinement les hypothèses ii) et iii) sur f , nous avons besoin du lemme suivant, dont nous omettons la preuve :

Lemme : Soit $f(x, z)$ satisfaisant les hypothèses i) et ii) du théorème. Alors les $f_n(z)$ sont holomorphes pour $|z| < z_0$, et

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, z) \sim \sum_{n \geq 0} \frac{\partial f_n}{\partial z}(z) x^{-n}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S,$$

uniformément dans tout disque $|z| \leq z_1 < z_0$.

Soit alors $a(x) = f(x, 0)$, $A(x) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, 0)$, et $g(x, z) = f(x, z) - a(x) - A(x)z$: g est la partie "quadratique" de f en $z = 0$, et

$$A(x) \sim \sum_{n \geq 0} A_n x^{-n}, \quad A_0 = \frac{\partial f_0}{\partial z}(0).$$

Le système $x^{-q}Y' = f(x, Y)$ s'écrit $x^{-q}Y' = a(x) + A(x)Y + g(x, Y)$.

Soit \hat{Y} une fonction holomorphe dans S , telle que $\hat{Y} \sim \hat{Y}$, $x \in S$, $x \rightarrow \infty$ (on prend en fait \hat{Y} dans un secteur un peu plus grand que S de façon à pouvoir différentier dans S) : on cherche Y sous la forme $Y = \hat{Y} + u$, où u vérifie

$$x^{-q}u' = a(x) + A(x)\hat{Y}(x) - x^{-q}\hat{Y}' + A(x)u + g(x, \hat{Y} + u).$$

Comme \hat{Y} est une solution formelle, on a

$$a(x) + A(x)\hat{Y}(x) - x^{-q}\hat{Y}' = -g(x, \hat{Y}) + b(x),$$

où $b \sim 0$, $x \in S$, $x \rightarrow \infty$.

De nouveau, nous décomposons \tilde{g} en partie linéaire et partie quadratique :

$$g(x, \hat{Y} + u) = g(x, \hat{Y}) + A^*(x)u + h(x, u), \quad \text{où}$$

$$A^*(x) = \frac{\partial}{\partial u} g(x, \hat{Y} + u) \Big|_{u=0}.$$

Enfin, nous posons $B = A + A^*$.

Résumons les propriétés des fonctions introduites au cours de cette réduction du problème :

$$i) \quad g(x, z) \sim \sum_{n \geq 0} g_n(z) x^{-n}, \quad \text{où } g_n(0) = \frac{\partial g_n}{\partial z}(0) = 0.$$

$$\text{Le lemme implique } \frac{\partial}{\partial z} g(x, z) \sim \sum_{n \geq 0} \frac{\partial g_n}{\partial z}(z) x^{-n}, \quad \text{donc } A^*(x) - \frac{\partial g_0}{\partial z}(\dot{Y}(x)) = o\left(\frac{1}{x}\right),$$

soit $A^*(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$, $x \in S$, car $\dot{Y}(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in S}} B(x) = A_0.$$

$$ii) \quad \text{Comme } \left. \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \right|_{u=0} = 0, \quad \text{on obtient facilement}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta'(\varepsilon) > 0, |u_1| \leq \eta' |u_2| \leq \eta' \Rightarrow |h(x, u_1) - h(x, u_2)| \leq \varepsilon |u_1 - u_2|.$$

2) Nous devons maintenant trouver une solution u de l'équation $x^{-q} u' = A_0 u + p(x, u)$, avec $u \sim 0$. Ici, $p(x, u) = b(x) + B(x) - A_0 u + h(x, u)$ est essentiellement petit lorsque $|x|$ est grand et $|u|$ est petit, d'après le point i).

Pour trouver u , nous remplaçons l'équation différentielle donnée par l'équation intégrale

$$(IV.1) \quad u(x) = \int_{\Gamma(x)} \exp\left(\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1} A_0\right) t^q p(t, u(t)) dt,$$

où $\Gamma(x)$ désigne un chemin dans S aboutissant à x . Plus précisément, supposons que A_0 soit sous la forme de Jordan, avec des valeurs propres non nulles $\lambda_1, \dots, \lambda_N$: le membre de droite de (IV.1) représente en fait N intégrales scalaires, et nous prenons pour chacune de ces intégrales un chemin $\gamma_j(x)$ ($j = 1, \dots, N$) différent, adapté à λ_j (comme on le verra). L'ensemble de ces chemins est désigné par $\Gamma(x)$.

L'équation intégrale (IV.1) sera résolue par approximations successives, en posant $u_0 = 0$, et

$$u_{n+1}(x) = \int_{\Gamma(x)} \exp\left(\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1} A_0\right) t^q p(t, u_n(t)) dt, \quad n \geq 0.$$

Le point crucial de la preuve sera l'estimation de $u_{n+1} - u_n$. Auparavant, nous allons préciser le choix des chemins $\Gamma(x)$.

3) Choix de $\Gamma(x)$.

Le principe de ce choix est simple : il faut que pour $t \in \gamma_j(x)$, $\operatorname{Re}(x^{q+1} - t^{q+1})\lambda_j \leq 0$ (en sorte que $|\exp(\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1} \lambda_j)| \leq 1$).

Nous décrivons l'image de $\gamma_j(x)$ par l'application $x \rightarrow x^{q+1}$. L'image de S est un secteur Σ d'angle au plus π . Nous posons $\xi = x^{q+1}$, $\tau = t^{q+1}$.

Considérons les $2N$ rayons du plan définis par $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j) = 0$ ($j = 1, \dots, N$). Quitte à retrécir légèrement S s'il le faut, on peut toujours supposer qu'aucun de ces rayons ne forme un bord de Σ . Deux cas se présentent alors :

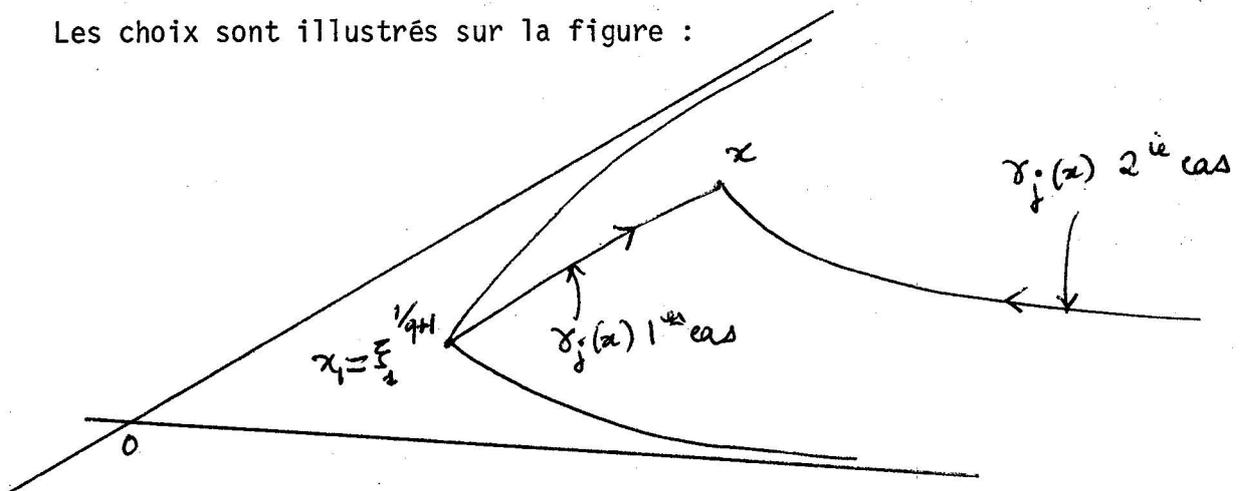
1er cas : λ_j est telle que $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j) < 0$ dans tout Σ .

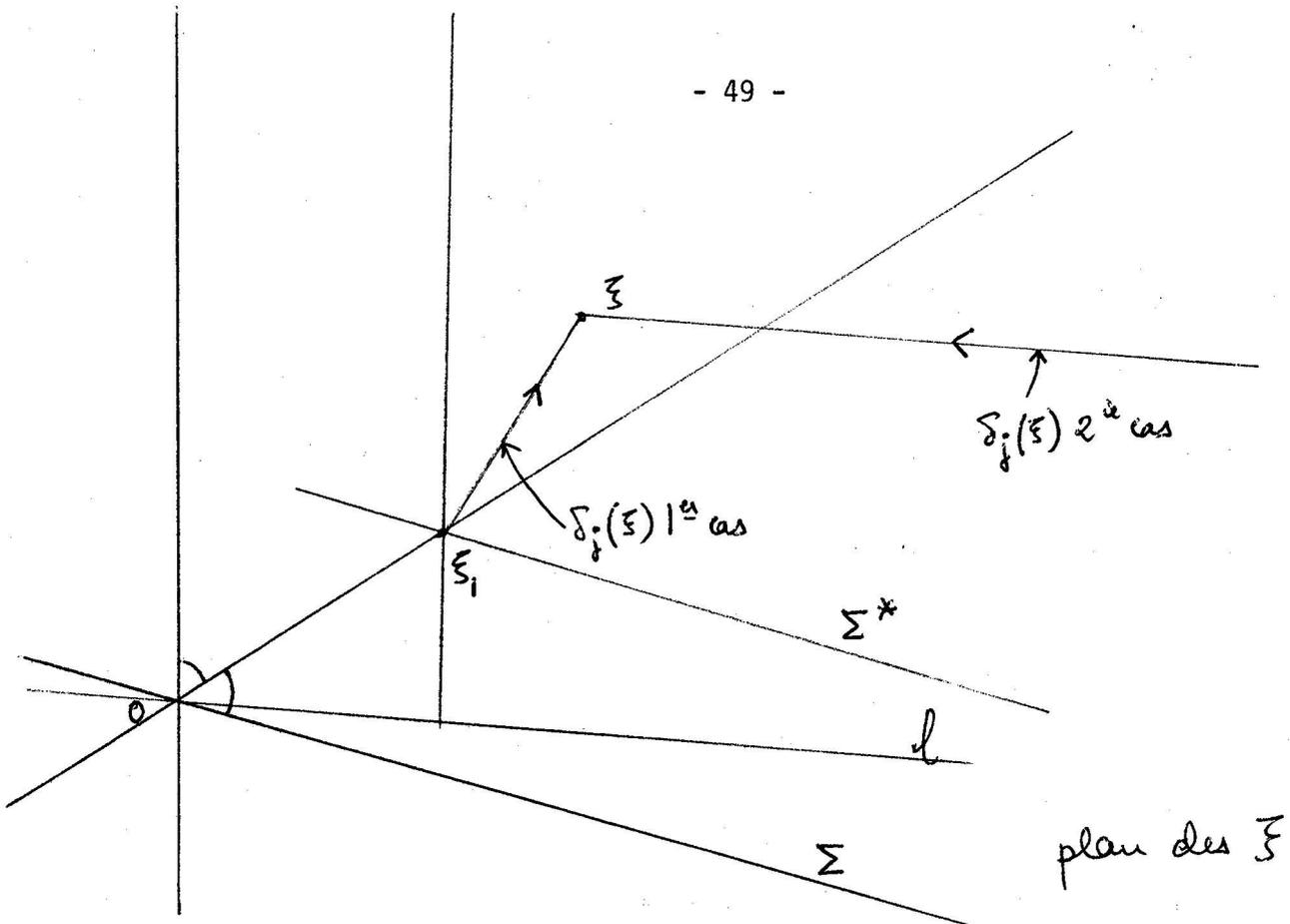
2ème cas : Il existe un rayon ρ de Σ sur lequel $\operatorname{Re}(\tau\lambda_j) > 0$.

Soit ξ_1 sur la bissectrice de Σ ($|\xi_1|$ assez grand), et Σ^* le secteur de sommet ξ_1 , de côtés parallèles à ceux de Σ . L'image réciproque de Σ^* dans S est un domaine S^* délimité par deux courbes se rencontrant en $x_1 = \xi_1^{1/(q+1)}$, et ayant les côtés de S pour asymptotes : S^* contient donc les points de modules assez grands de tout sous-secteur de S .

Soit $x \in S^*$, $\xi = x^{q+1} \in \Sigma^*$. Dans le 1er cas, on note $\delta_j(\xi)$ le segment orienté de ξ_1 vers ξ , et $\gamma_j(x)$ son image réciproque dans S^* . Dans le 2ème cas, on note $\delta_j(\xi)$ le rayon de Σ^* issu de ξ , parallèle à ρ , et γ_j son image réciproque (orientée de l'infini vers x).

Les choix sont illustrés sur la figure :





4) Estimation de l'intégrale.

Lemme : Soit $\chi(x)$ holomorphe dans S^* et telle que $|\chi(x)| \leq c|x|^{-m}$ ($c > 0, m \in \mathbb{N}$).

Alors $\psi(x) = \int_{\Gamma(x)} \exp\left(\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1} A_0\right) t^q \chi(t) dt$ est holomorphe dans S^* , et

$$|\psi(x)| \leq K_m c |x|^{-m} \quad (K_m \text{ constante indépendante de } \chi).$$

Preuve : • On écrit d'abord

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} + H, \text{ où } H \text{ est nilpotente et commute avec } A_0. \text{ Alors}$$

$$\exp\left(\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1} A_0\right) = \text{diag}\left(\exp\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1} \lambda_j\right) \cdot \exp\left(\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1} H\right),$$

$$\text{et } \left| \exp\left(\frac{x^{q+1} - t^{q+1}}{q+1} H\right) \chi(t) \right| \leq \text{cte} \left(1 + |x^{q+1} - t^{q+1}|^k \right) c |t|^{-m}$$

pour un certain k .

En effectuant le changement $\tau = t^{q+1}$ dans l'intégrale, il vient

$$|\psi_j(x)| \leq \text{cte } c \int_{\delta_j(\xi)} \left| \exp \left(\frac{\xi - \tau}{q+1} \lambda_j \right) \right| |\tau|^{-\frac{m}{q+1}} (1 + |\xi - \tau|^k) |d\tau| .$$

Le choix des chemins garantit que, pour un $\beta > 0$ (indépendant de ξ_1),

$$\operatorname{Re}(\xi - \tau)\lambda_j \leq -\beta|\xi - \tau| \quad \text{si } \tau \in \delta_j(\xi) .$$

Donc

$$|\psi_j(x)| \leq c \text{ cte} \int_{\delta_j(\xi)} \exp(-\beta|\xi - \tau|) \cdot (1 + |\xi - \tau|^k) |\tau|^{-\frac{m}{q+1}} |d\tau| .$$

Avec $0 < \gamma < \beta$ et une autre constante, on a

$$|\psi_j(x)| \leq c \text{ cte} \int_{\delta_j(\xi)} e^{-\gamma|\xi - \tau|} |\tau|^{-\frac{m}{q+1}} |d\tau| .$$

• 1er cas : on pose $\tau = \xi - \rho e^{i\alpha}$, et

$$\int_{\delta_j(\xi)} e^{-\gamma|\xi - \tau|} |\tau|^{-\frac{m}{q+1}} |d\tau| = \int_0^{|\xi - \xi_1|} e^{-\gamma\rho} |\tau|^{-\frac{m}{q+1}} d\rho .$$

Nous coupons $\int_0^{|\xi - \xi_1|}$ en $\int_0^{|\xi - \xi_1|/2}$ et $\int_{|\xi - \xi_1|/2}^{|\xi - \xi_1|}$.

Dans la 1ère intégrale, $|\tau| \geq |\xi|/2$ (faire un peu de géométrie !), donc

$$\int_0^{|\xi - \xi_1|/2} \leq (|\xi|/2)^{-m/q+1} \int_0^\infty e^{-\gamma\rho} d\rho = \frac{1}{\gamma} (|\xi|/2)^{-m/q+1} .$$

Dans la 2ème intégrale, $|\tau| \geq |\xi_1|$, et

$$\int_{|\xi - \xi_1|/2}^{|\xi - \xi_1|} \leq |\xi_1|^{-m/q+1} \int_{|\xi - \xi_1|/2}^\infty e^{-\gamma\rho} d\rho = |\xi_1|^{-m/q+1} \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma/2|\xi - \xi_1|} .$$

Le dernier terme écrit est borné par cte . $|\xi|^{-\frac{m}{q+1}}$. Plus précisément :

si $|\xi - \xi_1| \leq \frac{|\xi|}{2}$, alors $|\xi_1| \geq \frac{|\xi|}{2}$, et $|\xi_1|^{-\frac{m}{q+1}} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2} |\xi - \xi_1|} \leq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{|\xi|}{2}\right)^{-\frac{m}{q+1}}$;

si $|\xi - \xi_1| > \frac{|\xi|}{2}$, $|\xi_1|^{-\frac{m}{q+1}} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2} |\xi - \xi_1|} < \frac{1}{\gamma} |\xi_1|^{-\frac{m}{q+1}} (e^{-\frac{\gamma}{4} |\xi|} |\xi|^{\frac{m}{q+1}}) |\xi|^{-\frac{m}{q+1}}$.

• 2ème cas : on a alors, pour $\tau \in \delta_j(\xi)$, $|\tau| \geq d|\xi|$, pour $d > 0$, indépendant de ξ_1 (de nouveau, un peu de géométrie). Avec $|\xi - \tau| = \rho$, on a donc

$$\int_{\delta_j(\xi)} e^{-\gamma |\xi - \tau|} |\tau|^{-\frac{m}{q+1}} |d\tau| \leq d^{-\frac{m}{q+1}} |\xi|^{-\frac{m}{q+1}} \int_0^\infty e^{-\gamma \rho} d\rho = \frac{1}{\gamma} d^{-\frac{m}{q+1}} |\xi|^{-\frac{m}{q+1}} . \blacksquare$$

Enfin, ψ est holomorphe dans S^* car, dans le cas où $\gamma_j(x)$ n'est pas un segment (2ème cas), l'intégrale qui définit ψ converge très bien, uniformément en x .

5) Convergence des approximations successives.

Rappelons que $p(x,u) = b(x) + (B(x) - A_0)u + h(x,u)$. D'après le point 1), pour tout $\varepsilon > 0$, on aura

$$(IV.2) \quad |(B(x) - A_0) (u_1 - u_2) + h(x,u_1) - h(x,u_2)| \leq \varepsilon |u_1 - u_2|$$

pourvu que $|x| \geq x_1(\varepsilon)$ et $|u_1| , |u_2| \leq \eta(\varepsilon)$. Le point délicat est qu'on ne peut utiliser (IV.2) pour estimer $u_{n+1} - u_n$ que si l'on sait déjà que $|u_n|$ et $|u_{n-1}|$ sont assez petits. On va donc estimer (par récurrence) simultanément $|u_n|$ et $|u_{n+1} - u_n|$.

Il faut remarquer que l'on peut augmenter $|x_1|$ (et donc changer S^* et Σ^*) sans que la constante K_m apparaissant dans le lemme ait besoin d'être augmentée.

Fixons $m > 0$, et soit $c_m \geq 0$ telle que $|b(x)| \leq c_m |x|^{-m}$. On procède comme suit : on choisit $\varepsilon < K_m^{-1}$, puis $|x_1|$ assez grand (sans toucher à K_m) pour que, dans S^* ,

$$\frac{c_m K_m}{1 - \varepsilon K_m} |x|^{-m} \leq \eta(\varepsilon) , \text{ et } |x| \geq x_1(\varepsilon) .$$

Supposons alors que $|u_{r+1} - u_r| \leq \varepsilon^r K_m^{r+1} c_m |x|^{-m}$ et $|u_{r+1}| \leq \frac{c_m K_m}{1 - \varepsilon K_m} |x|^{-m}$

pour $r \leq n$, et montrons ces relations pour $r = n + 1$. Comme

$$|p(t, u_{n+1}) - p(t, u_n)| \leq \varepsilon |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon^{n+1} K_m^{n+1} c_m |x|^{-m},$$

le lemme implique que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \varepsilon^{n+1} K_m^{n+2} c_m |x|^{-m}$; mais alors

$$\begin{aligned} |u_{n+2}| &\leq |u_{n+2} - u_{n+1}| + |u_{n+1} - u_n| + \dots + |u_1| \leq c_m K_m |x|^{-m} (1 + \varepsilon K_m + \dots + (\varepsilon K_m)^{n+1}) \\ &\leq \frac{c_m K_m}{1 - \varepsilon K_m} |x|^{-m}. \end{aligned}$$

D'autre part, ces relations sont vraies pour $r = 0$ (d'après le lemme), elles sont donc vraies pour tout r .

La preuve s'achève alors facilement : la série $\sum_{n \geq 0} u_{n+1} - u_n$ converge normalement sur tout S^* vers une fonction holomorphe u , dont on voit facilement qu'elle satisfait l'équation intégrale (IV.1). Comme u ne dépend pas de m , u existe dans une région indépendante de m , et $u \sim 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$, $x \in S^*$.

III - Cas d'un système à coefficients C^∞ .

Soit $f(x, Y)$ une fonction C^∞ de $(x, Y) \in \mathbb{R}^{m+1}$ au voisinage de $(0, Y_0)$, à valeurs dans \mathbb{R}^m .

Théorème 2 : Supposons qu'il existe une solution formelle \hat{Y} , à coefficients réels, de l'équation

$$x^{k+1} \frac{dY}{dx} = f(x, Y), \text{ avec } \hat{Y}(0) = Y_0 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Alors il existe une solution Y de classe C^∞ , avec $Y \sim \hat{Y}$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème assez délicat, mais ferons quelques remarques.

• Si l'on compare le théorème 2 au théorème 4 du chapitre III, on voit que la résolubilité dans les fonctions plates n'est pas liée à l'irrégularité du système : elle a toujours lieu.

En revanche, un système (disons linéaire) à point singulier irrégulier n'a pas, en général, l'unicité dans les fonctions plates, comme on le voit par exemple sur l'équation $x^2y'-y = 0$.

• Il est clair que, dans les applications (cf. chapitre V), le théorème 2 jouera, pour les systèmes à coefficients C^∞ , le même rôle que le théorème 1 pour les systèmes à coefficients holomorphes. La situation géométrique étant plus simple dans le cas C^∞ (absence de secteurs), nous laisserons au lecteur le soin d'énoncer les théorèmes correspondants.

CHAPITRE V - SYSTEMES A POINTS SINGULIERS IRREGULIERS : FORMES SIMPLIFIEES ET SOLUTIONS EXPLICITES.

Dans ce chapitre, on présente une méthode de découplage des systèmes, qui permet de réduire leur étude à celle de plusieurs systèmes de tailles inférieures. Dans le cas le plus favorable, le système $m \times m$ est découplé en m équations scalaires, dont il est facile d'écrire explicitement les solutions. Le cas général est esquissé sur des exemples.

Le théorème 1 du chapitre IV conduit à étudier les modifications du comportement asymptotique d'une solution d'un secteur à l'autre du plan : c'est le phénomène de Stokes, qui fait l'objet de la dernière partie de ce chapitre.

I - Découplage des systèmes linéaires.

1 - Aspect formel du calcul.

Théorème 1 : Soit $D = x^{-q} \frac{d}{dx} - A(x)$ ($q \in \mathbb{N}$, A holomorphe à l'infini $A = \sum_{n \geq 0} A_n x^{-n}$) un système linéaire.

Supposons que A_0 soit de la forme

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right), \text{ où } A_{11} \text{ et } A_{22} \text{ sont deux blocs carrés sans valeurs propres communes.}$$

communes.

Alors il existe une série formelle $P = \sum_{s \geq 0} P_s x^{-s}$, avec $P_0 = id$, telle que le changement $Y = PZ$ transforme D en

$$\mathcal{D} = x^{-q} \frac{d}{dx} - B(x), \quad B(x) = \sum_{l \geq 0} B_l x^{-l} = \left(\begin{array}{c|c} B_{11}(x) & 0 \\ \hline 0 & B_{22}(x) \end{array} \right)$$

étant décomposée en blocs de mêmes tailles que ceux de A_0 .

Preuve : • Les matrices A, P et B sont liées par la relation

$$(V.1) \quad x^{-q} P' = AP - PB .$$

En posant $B(x) = \sum_{\ell \geq 0} B_{\ell} x^{-\ell}$, (V.1) équivaut formellement au système des relations

$$(V.2) \quad \begin{cases} A_0 P_0 - P_0 B_0 = 0 \\ A_0 P_{\ell} - P_{\ell} B_0 = \sum_{s=0}^{\ell-1} (P_s B_{\ell-s} - A_{\ell-s} P_s) - (\ell - q - 1) P_{\ell-q-1} , \ell \geq 1 . \end{cases}$$

Nous prenons $P_0 = \text{id}$, $A_0 = B_0$. La difficulté est alors que l'équation $A_0 X - X A_0 = Y$ n'a pas de solution X pour toute matrice Y, car le noyau de $X \rightarrow A_0 X - X A_0$ contient $A_0 \neq 0$. Pour $\ell \geq 1$, on supposera donc $B_0, \dots, B_{\ell-1}$, $P_0, \dots, P_{\ell-1}$ connues, et l'on choisira B_{ℓ} telle que l'équation $A_0 P_{\ell} - P_{\ell} A_0 = B_{\ell} +$ matrice connue possède une solution.

• Omettant les indices pour l'instant, prenons

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 0 & P_{12} \\ \hline P_{21} & 0 \end{array} \right) : \text{il vient}$$

$$A_0 P - P A_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_{11} P_{12} - P_{12} A_{22} \\ \hline A_{22} P_{21} - P_{21} A_{11} & 0 \end{array} \right) . \text{L'équation}$$

$$A_0 P - P A_0 = H = \left(\begin{array}{c|c} H_{11} & H_{12} \\ \hline H_{21} & H_{22} \end{array} \right) \text{ a une solution de la forme de P pourvu que}$$

$H_{11} = H_{22} = 0$, car les équations

$$A_{11} P_{12} - P_{12} A_{22} = H_{12} \quad \text{et}$$

$$A_{22} P_{21} - P_{21} A_{11} = H_{21} \quad \text{ont toujours une solution, en}$$

vertu du lemme du chapitre II. 1) et de l'hypothèse du théorème. Comme on peut choisir B_{ℓ} (de la forme voulue) pour que $B_{\ell} +$ matrice connue = $\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & 0 \end{array} \right)$, la preuve est

complète. Remarquons que la matrice P trouvée à la forme

$$P = \text{id} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & P_{12} \\ \hline P_{21} & 0 \end{array} \right) . \quad \blacksquare$$

2 - Aspect analytique du calcul.

L'idée fondamentale est la même que celle de la preuve du théorème 2 du chapitre III : elle consiste à remarquer que la matrice de transformation P cherchée doit être solution d'un système différentiel, ayant le même type de singularité que D , et pour lequel le point 1) a déjà fourni une solution formelle. Il suffit alors, pour conclure, d'appliquer les théorèmes reliant l'existence d'une solution formelle à celle d'une vraie solution (c'est-à-dire les théorèmes 1 des chapitres III et IV).

Théorème 2 : Soit $D = x^{-q} \frac{d}{dx} - A(x)$, où

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right) \text{ est décomposée en deux blocs } A_{11} \text{ et } A_{22} \text{ sans valeurs propres}$$

communes, comme au théorème 1.

Pour tout secteur S d'angle au plus $\frac{\pi}{q+1}$, il existe alors des matrices $P(x)$ et $B(x)$, holomorphes dans S (pour $|x|$ assez grand), $P(x) \sim \sum_{s \geq 0} P_s x^{-s}$,

$B(x) \sim \sum_{l \geq 0} B_l x^{-l}$ lorsque $x \rightarrow \infty$ (dans tout sous-secteur de S), telles que le change-

ment $Y = PZ$ transforme D en $\tilde{D} = x^{-q} \frac{d}{dx} - B(x)$. De plus,

$$B(x) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11}(x) & 0 \\ \hline 0 & B_{22}(x) \end{array} \right) \text{ est décomposée de la même façon que } A_0, \text{ et } B_0 = A_0 .$$

Preuve : Nous cherchons $P(x)$ sous la forme

$$P(x) = \text{id} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & P_{12}(x) \\ \hline P_{21}(x) & 0 \end{array} \right), \text{ et } B(x) \text{ sous la forme du théorème.}$$

L'équation $x^{-q} P' = AP - PB$ se scinde alors en quatre équations :

$$(1) A_{11} + A_{12}P_{21} - B_{11} = 0$$

$$(2) A_{22} + A_{21}P_{12} - B_{22} = 0$$

$$(3) x^{-q}p'_{12} = A_{12} + A_{11}P_{12} - P_{12}B_{22}$$

$$(4) x^{-q}p'_{21} = A_{21} + A_{22}P_{21} - P_{21}B_{11}$$

Ici l'on a posé $A(x) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ \hline A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{array} \right)$.

En obtenant de (1) et (2) les valeurs de B_{11} et B_{22} , il vient

$$(5) x^{-q}p'_{12} = A_{12} + A_{11}P_{12} - P_{12}A_{22} - P_{12}A_{21}P_{12}$$

$$(6) x^{-q}p'_{21} = A_{21} + A_{22}P_{21} - P_{21}A_{11} - P_{21}A_{12}P_{21}$$

Le théorème 1 et sa preuve montrent que la série formelle $\sum_{s \geq 0} P_s x^{-s}$ fournit des solutions formelles de (5) et (6), nulles à l'infini.

D'autre part, à chacun des systèmes (5) et (6), on peut appliquer le théorème 1 du chapitre IV : en effet, les hypothèses i) et ii) sont aisément vérifiées ; l'hypothèse iii) résulte du fait que les applications linéaires

$$X \rightarrow A_{11}X - XA_{22} \quad (\text{pour (5)}) \quad \text{et}$$

$$X \rightarrow A_{22}X - XA_{11} \quad (\text{pour (6)}) \quad \text{sont inversibles, car } A_{11} \text{ et}$$

A_{22} n'ont pas de valeurs propres communes.

Ceci complète la preuve. ■

Il est essentiel de bien comprendre que P et B , et donc le système simplifié \tilde{D} lui-même, dépendent du secteur S choisi, alors que les expansions asymptotiques de P et B , calculées formellement au §.1, n'en dépendent pas.

3 - Applications du découplage dans le cas standard : forme des solutions.

Nous appelons cas standard celui où le terme principal de $A(x)$ à l'infini, noté A_0 , a toutes ses valeurs propres distinctes.

Théorème 3 : Soit $D = x^{-q} \frac{d}{dx} - A(x)$, où $A = \sum_{n \geq 0} A_n x^{-n}$ est holomorphe à l'infini,
et les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de A_0 sont distinctes. Il existe alors une matrice
 $Q(x)$ diagonale, dont les éléments $Q_j(x)$ sont des polynômes en x de termes de plus
haut degré $\lambda_j \frac{x^{q+1}}{q+1}$ $(j = 1, \dots, m)$; une matrice diagonale constante Δ , d'éléments δ_j ;
une série formelle $\hat{Y}(x) = \sum_{n \geq 0} Y_n x^{-n}$, det $Y_0 \neq 0$, telles que, pour tout secteur S
d'angle au plus $\frac{\pi}{q+1}$, il existe une matrice fondamentale $Y(x)$ de solutions, holomor-
phe dans S (pour $|x|$ assez grand), de la forme $Y(x) = \hat{Y}(x)x^\Delta e^{Q(x)}$, avec $\hat{Y}(x) \sim \hat{Y}(x)$
lorsque $x \rightarrow \infty$ (dans tout sous-secteur de S).

Preuve : • L'application répétée du théorème 2 montre qu'il existe des matrices $P(x)$ et $B(x)$, holomorphes dans S , B diagonale (d'éléments $b_j(x)$, $i = 1, \dots, m$), P inversible, telles que le changement $Y = PZ$ transforme D en $\hat{D} = x^{-q} \frac{d}{dx} - B(x)$.

• L'équation scalaire $x^{-q}y' = b_j(x)y$ a pour solution (pour $x_0 \in S$, $|x_0|$ assez grand)

$$y = c e^{\int_{x_0}^x t^q b_j(t) dt} = c \exp\left(\int_{x_0}^x t^q \left(\sum_{r=0}^q b_{j,r} t^{-r} + b_{j,q+1} t^{-(q+1)} + r_j(t)\right) dt\right) =$$

$$= \text{Cte} \exp\left(\frac{x^{q+1}}{q+1} b_{j,0} + \dots + x b_{j,q}\right) x^{b_{j,q+1}} \exp\left(\int_{x_0}^x t^q r_j(t) dt\right).$$

Comme $t^{q+1} r_j(t)$ est holomorphe et nulle à l'infini, $\exp\left(\int_{x_0}^x t^q r_j(t) dt\right)$ est holomorphe et non nulle à l'infini.

Enfin les $b_{j,0}$ ne sont autres que les λ_j , ce qui complète la preuve.

Là encore, comme l'indique le théorème 3, il faut noter que Q, Δ et \hat{Y} ne dépendent pas de S , et peuvent être calculés comme dans le théorème 1, ou par une méthode de coefficients indéterminés.

Exemple : Soit l'équation de Bessel $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$. Son irrégularité à l'infini est 2. Avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, on peut l'écrire sous la forme de système

$$Y' = A(x)Y, \text{ où } A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A_0 sont i et $-i$, on est donc dans le cas standard du théorème 3.

Avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, on obtient $T^{-1}A_0T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, et le changement $Y = TZ$ conduit au système

$$Z' = CZ, \text{ où } C(x) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \frac{1}{2x} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{i\lambda^2}{2x^2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La procédure expliquée au théorème 1 conduit à chercher

$P = \begin{pmatrix} 1 & P_{12} \\ P_{21} & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$ telles que le changement $Z = PW$ transforme le système en $W' = BW$. On sait que $P_0 = \text{id}$, $B_0 = C_0$. De plus, $B_1 - C_1 = C_0 P_1 - P_1 C_0$, d'où

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ et } P_1 = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Nous arrêtons là le calcul de } P \text{ et } B.$$

Il existe des séries formelles $\hat{u}_1(x)$ et $\hat{u}_2(x)$ (scalaires) telles que, dans tout secteur d'angle au plus π , il existe deux solutions holomorphes indépendantes y_1 et y_2 de l'équation de Bessel avec

$$y_1(x) \sim e^{ix} x^{-1/2} \hat{u}_1(x),$$

$$y_2(x) \sim e^{-ix} x^{-1/2} \hat{u}_2(x) \text{ lorsque } x \rightarrow \infty, x \in S.$$

4 - Esquisse du cas général.

a) Remarquons d'abord qu'en vertu des théorèmes 1 et 2, on peut réduire ce cas à l'étude d'un ou plusieurs systèmes du type suivant :

$$D = x^{-q} \frac{d}{dx} - A(x), \text{ et } A_0 \text{ n'a qu'une valeur propre } \lambda.$$

Par le changement $Y = Z e^{\lambda \frac{x^{q+1}}{q+1}}$, on peut même supposer A_0 nilpotente (i.e. $\lambda = 0$).

• Comme dans le cas du théorème 3 du chapitre III, on va effectuer un "shearing" pour tenter de réduire ce cas à un cas plus simple. Mais auparavant, il faut préparer le système très soigneusement, grâce au lemme suivant.

Lemme : Supposons A_0 sous la forme de Jordan. Dans le secteur S où l'on travaille, il existe une matrice P , $P \sim \sum_{\ell \geq 0} P_\ell x^{-\ell}$, $P_0 = id$, telle que le changement $Y = PZ$

change D en $\tilde{D} = x^{-q} \frac{d}{dx} - B(x)$, où B a les propriétés suivantes :

i) $B(x) \sim \sum_{\ell \geq 0} B_\ell x^{-\ell}$, $B_0 = A_0$.

ii) Pour $\ell > 0$, B_ℓ n'a d'éléments non nuls que sur les lignes où A_0 n'a pas de "1".

On peut alors montrer qu'il existe un rationnel $g > 0$ tel que la transformation ("shearing")

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & x^{-g} & 0 \\ & 0 & x^{-(m-1)g} \end{pmatrix} \quad T = ST \text{ réduit } \tilde{D}$$

en $\bar{D} = x^{-q} \frac{d}{dx} - C(x)$, où $C(x) = S^{-1} B S - x^{-q} S^{-1} S'$ a la propriété que

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^g C(x) = C_0^*$ est différente de A_0 , en un sens que nous allons préciser plus loin.
 $x \in S$

On écrit alors le système $x^g \bar{D} = x^{-(q-g)} \frac{d}{dx} - x^g C(x)$ en posant $x = \alpha t^p$, où $\alpha = p^{1/g-q-1}$, et p est le plus petit entier (positif) tel que $pg \in \mathbb{N}$; il en résulte un système de la forme

$$t^{-h} \frac{d}{dt} - \tilde{C}(t), \quad \text{où } \tilde{C}(t) \sim \sum_{\ell \geq 0} \tilde{C}_\ell t^{-\ell}$$

$$\tilde{C}_0 = C_0^*, \quad \text{et } h = p(q+1-g) - 1.$$

• Le gain (d'avoir remplacé A_0 par C_0^*) n'est pas immédiatement apparent : en effet,

g a été choisi en sorte que C_0^* a au moins un élément non-nul sur ou en-dessous de la diagonale (et est égale A_0 au-dessus). Dans les bons cas, C_0^* aura au moins deux valeurs propres distinctes, on pourra donc découpler le système $t^h \frac{d}{dt} - \tilde{c}$, et ainsi de suite jusqu'à la réduction à des équations scalaires.

Malheureusement, il arrive que C_0^* ait une seule valeur propre. Néanmoins, on peut montrer que si l'on répète la suite des opérations précédentes - réduction du terme principal à la forme de Jordan - préparation du système - shearing - multiplication par une puissance fractionnaire de x - changement de variable - assez longtemps, on finit par aboutir au "bon cas".

Ceci fournit donc, en principe, la solution du cas général. Néanmoins, il est très difficile de décrire clairement la solution obtenue, ainsi que la taille du secteur où son développement asymptotique est valable.

b) Quelques exemples

i) L'équation d'Airy $y'' - xy = 0$. L'irrégularité à l'infini est 3. Avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, on obtient le système équivalent

$$x^{-1} \frac{dY}{dx} = A(x)Y, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système étant déjà sous la forme "préparée" mentionnée en a), on peut poser

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{-g} \end{pmatrix} Z; \quad \text{on obtient } x^{-1} \frac{dZ}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & x^{-g-1} \\ x^g & gx^{-2} \end{pmatrix} Z, \quad \text{et l'on prend } g = -\frac{1}{2},$$

$t = x^{1/2}$. Le système devient

$$t^{-2} Z' = \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] Z,$$

auquel on peut appliquer le théorème 3 : on trouve que dans tout secteur d'angle au plus $\frac{\pi}{3}$, il existe une matrice fondamentale asymptotique à $\hat{Z}(t)t^\Delta e^{Q(t)}$, où

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 2/3 t^3 & 0 \\ 0 & -2/3 t^3 \end{pmatrix}. \quad \text{En revenant à la variable } x, \text{ on trouve, dans tout secteur}$$

d'angle au plus $\frac{2\pi}{3}$, une matrice fondamentale asymptotique à $\hat{Z}(x^{1/2}) x^{\Delta/2} e^{\hat{Q}(x)}$,

où $Q(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} x^{3/2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} x^{3/2} \end{pmatrix}$. On peut comparer ce résultat à la formule (II.5)

du chapitre I.

ii) Considérons le système

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{x} & 0 & 0 \end{pmatrix} Y.$$

La matrice A_0 est nilpotente et le système dans son ensemble est déjà préparé pour le shearing.

En posant $Y = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & x^{-g} & \\ & & x^{-2g} \end{pmatrix} Z$, on est conduit à choisir $g = \frac{1}{3}$, et le

nouveau système s'écrit

$$x^{1/3} Z' = \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} x^{-2/3} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} x^{-2/3} \end{pmatrix} Z, \text{ soit, avec } x = 3^{-3/2} t^3,$$

$$t^{-1} Z' = \begin{pmatrix} 0 & 3^{2/3} t^{-3} & 0 \\ 0 & t^{-2} & 1 \\ 1 & 0 & 2t^{-2} \end{pmatrix} Z.$$

Le nouveau terme principal est $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est nilpotent. On doit donc recommencer.

A l'aide du changement constant $Z = TV$,

$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on met B_0 sous la forme de Jordan :

$$t^{-1} v' = \begin{pmatrix} t^{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 2t^{-1} & 1 \\ 3^{3/2} t^{-3} & 0 & 0 \end{pmatrix} v .$$

Bien que ce système ne soit pas préparé pour le shearing (au sens du lemme de a)), il se trouve que le changement

$$v = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & t^{-1} & \\ & & t^{-2} \end{pmatrix} w \quad \text{conduit au système}$$

$$w' = \begin{pmatrix} t^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 3t^{-1} & 1 \\ 3^{3/2} & 0 & 2t^{-1} \end{pmatrix} w , \text{ auquel on peut appliquer le}$$

théorème 3. Nous laissons les détails au lecteur.

c) Remarques sur l'irrégularité d'un système.

i) Il apparaît difficile, en général, de lier l'irrégularité d'un système au comportement des solutions au voisinage du point considéré (sauf dans le cas d'un point singulier régulier, caractérisé par le fait que toutes les solutions sont à singularités au plus "polynomiales"). Par exemple, $y' = y$ et $y'' = y$ ont pour irrégularité à l'infini 1 et 2 respectivement, et les solutions sont e^x et $e^{\pm x}$.

Il est clair que l'entier $q \geq 0$ qui apparaît dans l'écriture $D = x^{-q} \frac{d}{dx} - A(x)$ n'a pas en général, de sens indépendant des changements d'inconnues. On n'est même pas sûr qu'un tel système ait à l'infini un point singulier irrégulier. Les théorèmes 2 et 3 fournissent néanmoins une information à ce sujet : si A_0 possède une valeur propre simple λ non-nulle, le point à l'infini n'est certainement pas singulier régulier.

lier (car une solution du système se comporte comme $e^{\lambda \frac{x^{q+1}}{q+1}}$ à l'infini).

ii) En fait, la procédure esquissée en 4) a) montre que si A_0 est nilpotente, les termes principaux des solutions du système seront e^{cx^μ} , où $\mu < q + 1$ (et peut-être $\mu = 0$), car $g > 0$. Donc, si A_0 n'est pas nilpotente, le point à l'infini est singulier irrégulier.

Le sens du "shearing" est le suivant : si A_0 est nilpotente, le système a l'air plus singulier qu'il n'est en réalité, il a donc été mal écrit, et il convient de faire un changement d'inconnues. Expliquons nous sur l'exemple de l'équation de Bessel déjà utilisé au chapitre II, III.1. Avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, l'équation

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \text{ s'écrit } x^2 Y' = \begin{pmatrix} 0 & x^2 \\ \lambda^2 - x^2 & -x \end{pmatrix} Y, \text{ et } 0 \text{ apparaît comme un}$$

point singulier irrégulier. On a

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^2 & 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_0 \text{ nilpotente.}$$

Le shearing $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^g \end{pmatrix} Z$ conduit au nouveau système

$$x^2 Z' = \begin{pmatrix} 0 & x^{2+g} \\ (\lambda^2 - x^2)x^{-g} & -(g+1)x \end{pmatrix} Z; \text{ on prend } g = -1, \text{ d'où}$$

$$xZ' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda^2 - x^2 & 0 \end{pmatrix} Z, \text{ et l'on voit que } 0 \text{ est un point singulier}$$

régulier. Les "bonnes" inconnues sont donc y et xy' , et non pas y et y' .

II - Phénomène de Stokes.

Considérons un système $D = x^{-q} \frac{d}{dx} - A(x)$, où $A = \sum_{\ell \geq 0} A_\ell x^{-\ell}$ est holomorphe à l'infini, et A_0 a ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ distinctes (cas standard du théorème 3).

Une solution $Y(x)$, holomorphe dans un secteur S , se prolonge analytiquement (de façon multivaluée) au voisinage de l'infini ; à supposer que Y soit univoque près de l'infini, et asymptotique dans S à une certaine série, la validité de ce développement

ne peut s'étendre à tout un voisinage de l'infini que si Y est holomorphe et égale à la somme de la série (d'après le chapitre IV, I.2 a)).

Ce cas exceptionnel mis à part, il existe donc des rayons du plan au-delà desquels le développement asymptotique d'une solution Y cesse d'être valable : ce phénomène est appelé phénomène de Stokes, et de tels rayons lignes de Stokes.

Nous nous bornerons ici à quelques propositions simples, déduites du théorème 3, et illustrées par les exemples des équations d'Airy et de Bessel.

1) Rayons séparants.

Définition : On appelle rayon séparant (pour le système D) un rayon ℓ du plan sur lequel $\operatorname{Re}(\lambda_i x^{q+1}) = \operatorname{Re}(\lambda_j x^{q+1})$, pour un couple (i, j) , $i \neq j$.

Exemple : Pour l'équation de Bessel, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$; les rayons séparants sont définis par $\operatorname{Re}(ix) = 0$, ce sont les axes réels positifs et négatifs.

Au vu du théorème 3, il est clair qu'un rayon séparant est le lieu où s'échangent les tailles relatives de deux solutions de D .

Proposition 1 : Soit Σ un secteur (ouvert) du plan ne contenant pas de rayon séparant. Alors toute solution Y de $DY = 0$ possède dans Σ un développement asymptotique

$$Y(x) \sim c_j \hat{Y}_j(x) x^{\delta_j} e^{Q_j(x)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in \Sigma,$$

pour un j , $1 \leq j \leq m$ (notations du théorème 3), et une constante $c_j \in \mathbb{C}$.

Preuve : • Le changement $x \rightarrow e^{i \frac{\pi}{q+1}} x$ transforme un rayon séparant en un autre, donc Σ est d'angle au plus $\frac{\pi}{q+1}$.

• Soit, dans Σ , Y_1, \dots, Y_m un système de solutions holomorphes,

$$Y_j(x) \sim \hat{Y}_j(x) x^{\delta_j} e^{Q_j(x)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in \Sigma.$$

Il est possible de ranger ces solutions de la plus grande à la plus petite, en ce sens que les positions relatives des nombres $\operatorname{Re}(\lambda_j x^{q+1})$ sur l'axe réel ne varient

pas lorsque x décrit Σ . On peut supposer que

$$\operatorname{Re}(\lambda_1 x^{q+1}) > \operatorname{Re}(\lambda_2 x^{q+1}) > \dots > \operatorname{Re}(\lambda_m x^{q+1}) .$$

Une solution Y s'écrit $Y = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$, pour certaines constantes c_j .
Supposons $c_1 = \dots = c_{j-1} = 0$, $c_j \neq 0$ ($1 \leq j \leq m$) : alors $Y = c_j Y_j(1 + e(x))$,
où $e \sim 0$, $x \rightarrow \infty$, $x \in \Sigma$. ■

Cette proposition montre, entre autres, qu'un développement asymptotique, valable dans un certain secteur S , est valable en fait dans le plus petit secteur, bordé de rayons séparants qui contient S .

Exemple : Une solution de l'équation de Bessel, holomorphe et asymptotique à $e^{\pm ix} x^{-1/2} \hat{u}(x)$ (voir I.3)) pour $\operatorname{Re} x > 0$, garde ce développement asymptotique dans tout le plan complexe fendu le long de \mathbb{R}_- .

2) Solutions sous-dominantes.

Définition : Soit Σ un secteur ne contenant pas de rayon séparant, et supposons que $\operatorname{Re}(\lambda_1 x^{q+1}) > \dots > \operatorname{Re}(\lambda_m x^{q+1})$ dans Σ . On appelle solution sous-dominante dans Σ celle des solutions de D (déterminée à une constante près) qui se comporte comme $e^{\lambda_m \frac{x^{q+1}}{q+1}}$ dans Σ , lorsque $x \rightarrow \infty$.

Exemple : La solution H_λ^1 de l'équation de Bessel, définie au chapitre I, II.4), est sous-dominante dans le secteur $\Sigma : 0 < \arg x < \pi$. En effet, soient u_1 et u_2 deux solutions dans Σ , $u_1(x) \sim e^{ix} x^{-1/2} \hat{u}_1(x)$, $u_2(x) \sim e^{-ix} x^{-1/2} \hat{u}_2(x)$. On a $H_\lambda^1(x) = c_1 u_1 + c_2 u_2$, et la formule

$$H_\lambda^1(is) \sim \frac{e^{-i\lambda \frac{\pi}{2}}}{i\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} e^{-s} \quad (\text{lorsque } s \rightarrow +\infty) \text{ montre que } c_2 = 0 . \quad \blacksquare$$

On va voir maintenant que les solutions sous-dominantes jouissent de propriétés asymptotiques particulières.

Proposition 2 : Soit Σ un secteur bordé de rayons séparants, et n'en contenant pas. La validité du développement asymptotique de la solution sous-dominante de D dans Σ s'étend jusqu'aux rayons séparants suivants ceux qui bordent Σ .

Preuve : • Soit S un secteur d'angle au plus $\frac{\pi}{q+1}$, rencontrant Σ et son complémentaire et soit Y_1, \dots, Y_m un système de solutions holomorphes dans S , admettant, dans S , les développements asymptotiques

$$Y_j(x) \sim \hat{Y}_j(x) x^{\delta_j} e^{Q_j(x)}, \quad x \in S, \quad x \rightarrow \infty.$$

Dans $S \cap \Sigma$, la solution considérée Y s'écrit $Y = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m$. Si Y_{i_0} est la plus petite des Y_j dans $S \cap \Sigma$, on a nécessairement $c_j = 0$ ($j \neq i_0$), $c_{i_0} \neq 0$, soit $Y = c_{i_0} Y_{i_0}$. Comme le développement de Y_{i_0} est valable dans tout S , celui de Y aussi.

• En faisant varier S , on obtient la proposition. ■

En d'autres termes, dans la situation de la proposition 2, les bords de Σ ne sont pas des lignes de Stokes pour la solution sous-dominante.

Exemple 1 : La validité du développement de H_λ^1 dans le demi-plan supérieur s'étend à tout $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ (de même que celle du développement de H_λ^2).

Exemple 2 : Au paragraphe 4. b. i) ci-dessus, on a réduit l'équation d'Airy $y'' - xy = 0$ au système

$$t^{-2} Z' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -\frac{1}{t^3} \end{pmatrix} Z.$$

Les rayons séparants de ce système sont $\mathbb{R}_+ e^{i\theta}$, pour $\theta = \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{6}$. Dans le secteur $\Sigma = -\frac{\pi}{6} < \arg t < \frac{\pi}{6}$, il existe deux solutions Z_1 et Z_2 se comportant à l'infini comme $e^{2/3} t^3$ et $e^{-2/3} t^3$. La solution $A_i(x)$ de $y'' - xy = 0$, distinguée au chapitre I, II.2, et satisfaisant

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-2/3} x^{3/2} \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty,$$

fournit une solution Z du système ci-dessus se comportant essentiellement comme $e^{-2/3 t^3}$, donc $Z = \text{cte. } Z_2$. D'après la proposition 2, la validité du développement de Z_2 s'étend au secteur $-\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{\pi}{2}$, donc $Ai(x)$ est la solution sous-dominante de $y'' - xy = 0$ pour $-\frac{\pi}{3} < \arg x < \frac{\pi}{3}$, et la formule

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-2/3 x^{3/2}}$$

reste valable pour $-\pi < \arg x < \pi$.

Quel est le comportement de $Ai(x)$ pour $x \rightarrow -\infty$? on l'obtient grâce aux formules du chapitre I :

$$Ai(x) = -u_2(-x) - u_3(-x) = -j Ai(-jx) - j^2 Ai(-j^2x) ;$$

donc pour $x > 0, x \rightarrow +\infty$,

$$Ai(-x) \sim \text{cte } x^{-1/4} \left(e^{2 \frac{i}{3} x^{3/2}} + i e^{-\frac{2}{3} i x^{3/2}} \right).$$

Exemple 3 : L'équation de Weber $y'' - (\frac{x^2}{4} + a)y = 0$. En posant $y_0 = \frac{x}{2} y, y_1 = y'$, on la réduit au système

$$x^{-1} y_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{2a}{x^2} & 0 \end{pmatrix} y, \text{ pour lequel } A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

a des valeurs propres distinctes $\pm \frac{1}{2}$. Dans tout secteur S d'angle au plus $\frac{\pi}{2}$, il existe donc deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ de l'équation de Weber,

$$y_1(x) \sim e^{x^2/4} x^{\delta_1} \hat{y}_1(x)$$

$$y_2(x) \sim e^{-x^2/4} x^{\delta_2} \hat{y}_2(x) \text{ lorsque } x \rightarrow \infty, x \in S.$$

Si l'on prend pour S le secteur $-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}$, on voit que y_2 est sous-dominante, et la proposition 2 montre que

$$y_2(x) \sim e^{-x^2/4} x^{\delta_2} \hat{y}_2(x) \text{ pour } -\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4}.$$

En particulier, les formules prouvées au chapitre I, II.3, lorsque $x \rightarrow +\infty$, restent valable dans le secteur

$$-\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4} .$$

CHAPITRE VI - SYSTEMES CONTENANT UN GRAND PARAMETRE : THEORIE CLASSIQUE ET POINTS DE TRANSITION.

Dans ce chapitre nous étudions des systèmes de la forme $D = \epsilon^h \frac{d}{dx} - A(x, \epsilon)$, (où $A(x, \epsilon) \sim \sum_{n \geq 0} A_n(x) \epsilon^n$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $\epsilon \in \Sigma$, et $h \in \mathbb{N}$) au voisinage de $x = 0$.

La théorie classique concerne le cas (dit "standard") où $A_0(x)$ a ses valeurs propres distinctes ; elle se développe d'une façon tout à fait analogue à celle du comportement des solutions d'un système au voisinage d'un point singulier irrégulier, présentée aux chapitres IV et V : on établit d'abord un théorème qui lie l'existence d'une solution formelle (comme série en ϵ) du système à celle d'une vraie solution ; ensuite, on présente une méthode de découplage des systèmes, dans ses aspects formels et analytiques ; enfin, l'application du découplage conduit à des systèmes simplifiés dont on peut écrire les solutions explicitement. Ces trois étapes font l'objet des parties I, II, III.

En gros, on dit que $x = 0$ est un point de transition si $A_0(0)$ possède des valeurs propres multiples. Seul le cas des "points de transition d'Airy" semble complètement élucidé (partie IV). Les cas les plus généraux ne bénéficient, à la connaissance de l'auteur, que d'une réduction formelle, esquissée dans la partie V.

Enfin, dans la partie VI, on donne les grandes lignes de l'étude d'une équation du second ordre, pour x dans certains domaines non-bornés, dont la géométrie est intéressante.

I - Solutions formelles et vraies solutions.

Avant de commencer l'étude, nous rappelons le théorème suivant, classique.

1 - Le cas d'un "petit" paramètre

Théorème : Soit D un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et E un ouvert de \mathbb{C} . Soient $A(x, \epsilon)$ une matrice $m \times m$ holomorphe dans $D \times E$, et $Y_0(\epsilon)$ un vecteur holomorphe dans E . Alors la solution $Y(x, \epsilon)$ du problème ($x_0 \in D$)

$$\begin{cases} Y' = A(x, \epsilon)Y \\ Y(x_0) = Y_0(\epsilon) \end{cases} \text{ est holomorphe dans } D \times E .$$

Dans toute la suite de ce chapitre, nous étudions des systèmes de la forme

$$\{\varepsilon^h Y' = A(x, \varepsilon) Y,$$

où $h \in \mathbb{N}$ et $A(x, \varepsilon) \sim \sum_{n \geq 0} A_n(x) \varepsilon^n$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \in \Sigma$, uniformément pour $|x| < x_0$,

(A est, bien sûr, supposée holomorphe en x et ε , $|x| < x_0$, $\varepsilon \in \Sigma$).

Le cas $h = 0$ fait l'objet du théorème ci-dessus. Nous disons que le système contient un "grand paramètre" si $h > 0$, car alors $\varepsilon^{-h} A(x, \varepsilon)$ est non borné lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

2 - Lien "solutions formelles - vraies solutions".

Le théorème suivant est l'analogue du théorème 1 du chapitre IV.

Théorème 1 : Soit $f(x, z, \varepsilon) \in \mathcal{C}^N$ une fonction de $x, z \in \mathcal{C}^N$ et ε , ayant les propriétés suivantes :

i) f est holomorphe de x, z, ε pour $|x| < x_0$, $|z| < z_0$, $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \Sigma$ (Σ est un secteur du plan).

ii) f admet, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ dans, un développement asymptotique

$$f(x, z, \varepsilon) \sim \sum_{n \geq 0} f_n(x, z) \varepsilon^n, \text{ uniforme pour } |x| < x_0, |z| < z_0.$$

iii) Le terme principal de f (en $\varepsilon = 0$) possède, en $x = z = 0$, une différentielle partielle inversible :

$$\det \frac{\partial f_0}{\partial z}(0, 0) \neq 0.$$

Supposons que le système $\{\varepsilon^h Y' = f(x, Y, \varepsilon)$, h entier > 0 , possède une solution formelle $\hat{Y} = \sum_{r \geq 1} y_r(x) \varepsilon^r$ à coefficients holomorphes pour $|x| < x_0$.

Alors, pour tout rayon $\ell \in \Sigma$, il existe un secteur Σ^* voisin de ℓ , et une solution $Y(x, \varepsilon)$ du système, holomorphe pour $|x| < x_1$, $\varepsilon \in \Sigma^*$, $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_1$, telle que $Y(x, \varepsilon) \sim \hat{Y}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \in \Sigma^*$.

Preuve : Elle est si semblable à celle du théorème 1 du chapitre IV que nous n'insistons que sur certaines différences.

1) Posons $a(x, \varepsilon) = f(x, 0, \varepsilon)$, $A(x, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, 0, \varepsilon)$, $g(x, z, \varepsilon) = f(x, z, \varepsilon) - a(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)z$ (g est la partie "quadratique en z " de f). Le système s'écrit

$$\varepsilon^h Y' = a(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon)Y + g(x, Y, \varepsilon) .$$

Soit $\hat{Y}(x, \varepsilon)$, holomorphe en x et ε , $|x| < x_0$, $\varepsilon \in \Sigma$, telle que $\hat{Y}(x, \varepsilon) \sim \hat{Y}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \in \Sigma$. On cherche Y sous la forme $Y = \hat{Y} + u$, où u vérifie

$$\varepsilon^h u' = b(x, \varepsilon) + B(x, \varepsilon)u + h(x, u, \varepsilon) , \text{ avec}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} B(x, \varepsilon) = A(0, 0), \quad b(x, \varepsilon) \sim 0 \quad (\varepsilon \in \Sigma), \text{ et}$$

h "quadratique" en u .

2) En posant $p(x, u, \varepsilon) = b(x, \varepsilon) + [B(x, \varepsilon) - A(0, 0)]u + h(x, u, \varepsilon)$, on est amené à chercher une solution u de $\varepsilon^h u' = A(0, 0)u + p(x, u, \varepsilon)$, avec $u \sim 0$. On remplace cette équation par une équation intégrale

$$u(x, \varepsilon) = \int_{\Gamma(x)} \exp(\varepsilon^{-h}(x-t)J) \varepsilon^{-h} p(t, u(t), \varepsilon) dt ,$$

où $J = A(0, 0)$, $\Gamma(x)$ désignant un ensemble de chemins aboutissants à x . Plus précisément, nous supposons que $A(0, 0)$ se présente sous la forme de Jordan

$$J = A(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} + H, \text{ ou } H \text{ est nilpotente et commute avec } J, \text{ et les } \lambda_i$$

sont non-nuls d'après l'hypothèse iii).

3) Choix des chemins $\gamma_j(x)$.

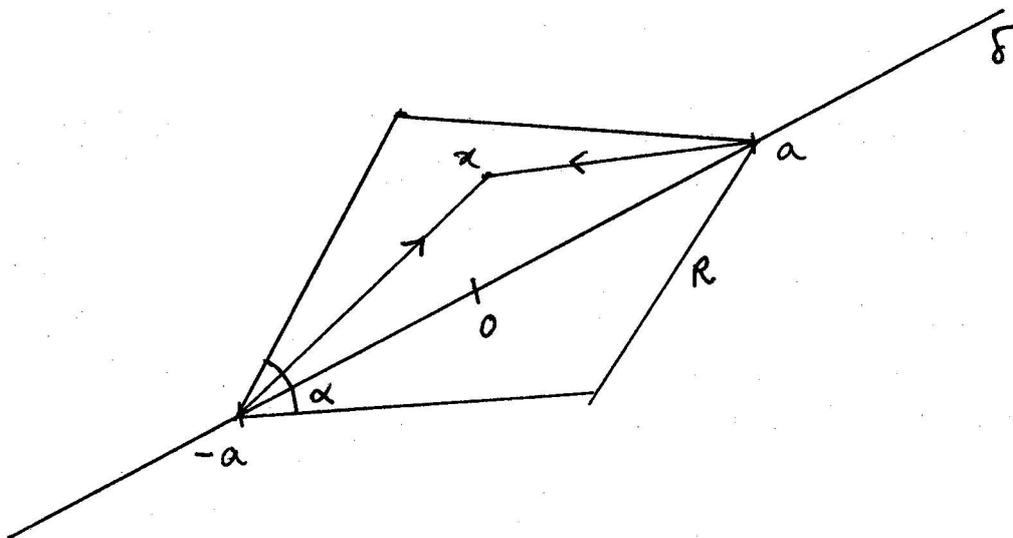
C'est là la différence essentielle avec le théorème 1, chapitre IV. Ce choix est fondé sur le fait que $\exp(\varepsilon^{-h}(x-t)\lambda_j)$ doit être bornée lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $t \in \gamma_j(x)$.

• Soit ρ un rayon de Σ , et soit δ une droite passant par l'origine telle que pour $x \in \delta$, $x \neq 0$, $\varepsilon \in \rho$, $\varepsilon \neq 0$, $\operatorname{Re}(\varepsilon^{-h} x \lambda_j) \neq 0$, $1 \leq j \leq N$. Il existe alors une constante $\beta > 0$ telle que

$$\operatorname{Re}(\varepsilon^{-h} x \lambda_j) < -\beta |x \varepsilon^{-h}|$$

pour ε dans un secteur $\Sigma^* \subset \Sigma$ voisin de ρ , et x dans un secteur voisin de l'une des deux demi-droites qui composent δ (selon λ_j).

• Nous procédons alors comme suit : soient a et $-a$ deux points opposés de δ , et R le losange d'angle au sommet α représenté sur la figure ; pour x dans R



et $\alpha > 0$ assez petit, les segments joignant $-a$ à x et a à x ont des directions assez proches de celle de δ pour que

$$\operatorname{Re}(\varepsilon^{-h} (x-t) \lambda_j) < -\beta |\varepsilon|^{-h} |x-t|$$

lorsque $\varepsilon \in \Sigma^*$ et t appartient à l'un des deux segments, selon λ_j .

Nous prenons pour $\gamma_j(x)$ ($x \in R$) précisément celui des deux segments, orienté vers x , qui convient (au total, $\Gamma(x)$ n'est donc constitué que de deux chemins).

Bien entendu, β ne dépend que de α , et non de a : on prendra $|a|$ assez petit pour

que R soit contenu dans $\{x, |x| < x_0\}$, et on le diminuera encore par la suite, sans changer β .

4) Estimation de l'intégrale.

Lemme : Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour $\chi(x)$ holomorphe au voisinage de \bar{R} , et $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \Sigma^*$,

$$\left| \int_{\Gamma(x)} \exp(\varepsilon^{-h}(x-t)J) \varepsilon^{-h} \chi(t) dt \right| \leq K \sup_{x \in R} |\chi(x)| .$$

Preuve : On a, pour t sur le chemin convenable,

$$|\exp(\varepsilon^{-h}(x-t)J) \varepsilon^{-h} \chi(t)| \leq |\varepsilon|^{-h} e^{-\beta|\varepsilon|^{-h}|x-t|} |\exp(\varepsilon^{-h}(x-t)H)| |\chi(t)| ,$$

et comme H est nilpotente, on obtient, avec $0 < \gamma < \beta$, une majoration en

$$cte |\varepsilon|^{-h} e^{-\gamma|\varepsilon|^{-h}|x-t|} |\chi(t)| .$$

D'où, avec $\rho = |x-t|$,

$$\left| \int_{\Gamma(x)} \exp(\varepsilon^{-h}(x-t)J) \varepsilon^{-h} \chi(t) dt \right| \leq cte \cdot \sup_{x \in \bar{R}} |\chi(x)| .$$

$$\cdot |\varepsilon|^{-h} \int_0^\infty e^{-\gamma|\varepsilon|^{-h}\rho} d\rho \leq K \sup_{x \in \bar{R}} |\chi(x)| .$$

5) La preuve est ensuite très voisine de celle du théorème 1, chapitre IV, et nous omettons les détails.

II - Découplage des systèmes.

La différence fondamentale entre la théorie du chapitre V et celle qui va être développée est la suivante : au chapitre V, on manipule des séries formelles en x , en sorte que l'existence de transformations simplificatrices convenables se réduit à des manipulations d'algèbre linéaire entre matrices constantes ; ici au contraire, les coefficients des séries formelles en ε sont des matrices holomorphes en x : le fait

que les invariants de ces matrices (multiplicité des valeurs propres, formes de Jordan, etc ...) puissent varier avec x , crée des difficultés considérables (dont les "points de transition").

1 - Aspect formel du calcul.

Théorème 2 : Soit $D = \epsilon^h \frac{d}{dx} - A(x, \epsilon)$ (h entier > 0 , $A \sim \sum_{n \geq 0} A_n(x) \epsilon^n$). Supposons que $A_0(0)$ soit de la forme

$$A_0(0) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{\circ} & 0 \\ \hline 0 & A_{22}^{\circ} \end{array} \right), \text{ où } A_{11}^{\circ} \text{ et } A_{22}^{\circ} \text{ sont deux blocs}$$

carrés sans valeurs propres communes.

Alors il existe une série formelle $P = \sum_{s \geq 0} P_s(x) \epsilon^s$ (à coefficients holomorphes dans un voisinage fixe de $x = 0$), avec $P_0(0) = id$, telle que le changement $Y = PZ$ transforme D en $\tilde{D} = \epsilon^h \frac{d}{dx} - B(x, \epsilon)$, où $B = \sum_{l \geq 0} B_l(x) \epsilon^l$ est une série formelle à coefficients holomorphes, dont chaque terme $B_l(x)$ est décomposé en blocs de mêmes tailles que ceux de $A_0(0)$. De plus, $B_0(x)$ a les mêmes valeurs propres que $A_0(x)$.

Preuve :

a) On a d'abord le lemme suivant.

Lemme : Soit $A(x)$ une matrice holomorphe près de $x = 0$, telle que $A(0)$ soit décomposée en deux blocs A_{11}° et A_{22}° sans valeurs propres communes :

$$A(0) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{\circ} & 0 \\ \hline 0 & A_{22}^{\circ} \end{array} \right).$$

Alors il existe une transformation holomorphe $T(x)$, $T(0) = id$, telle que $T^{-1}AT$ soit décomposée en blocs comme $A(0)$:

$$T^{-1}(x) A(x) T(x) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11}(x) & 0 \\ \hline 0 & B_{22}(x) \end{array} \right).$$

Preuve : Elle repose sur le théorème des fonctions implicites. On a

$$A(x) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ \hline A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{array} \right), \text{ où } A_{11}(0) = A_{11}^{\circ}, A_{22}(0) = A_{22}^{\circ},$$

$A_{12}(0) = A_{21}(0) = 0$. Nous cherchons $T(x)$ sous la forme

$$T(x) = \left(\begin{array}{c|c} \text{id} & T_{12}(x) \\ \hline T_{21}(x) & \text{id} \end{array} \right) : \text{ l'assertion du lemme équivaut}$$

aux relations

$$A_{11} + A_{12} T_{21} = B_{11}$$

$$A_{11} T_{12} + A_{12} = T_{12} B_{22}$$

$$A_{21} + A_{22} T_{21} = T_{21} B_{11}$$

$$A_{21} T_{12} + A_{22} = B_{22} .$$

En éliminant B_{11} et B_{22} , il vient

$$(1) A_{12} + A_{11} T_{12} - T_{12} A_{22} - T_{12} A_{21} T_{12} = 0$$

$$(2) A_{21} + A_{22} T_{21} - T_{21} A_{11} - T_{21} A_{12} T_{21} = 0 .$$

Le membre de gauche de (1) est une fonction de T_{12} et de x , nulle pour $T_{12} = 0$ et $x = 0$; sa différentielle partielle par rapport à T_{12} au point $T_{12} = 0, x = 0$, est l'application linéaire $T_{12} \rightarrow A_{11}^{\circ} T_{12} - T_{12} A_{22}^{\circ}$, qui est bijective car A_{11}° et A_{22}° n'ont pas de valeurs propres communes. Donc le théorème des fonctions implicites, appliqué à cette fonction au point $T_{12} = 0, x = 0$, fournit une matrice holomorphe $T_{12}(x)$ solution de (1), avec $T_{12}(x) = 0$. De même pour (2). ■

b) • En appliquant le lemme a) à la matrice $A_0(x)$, on obtient $T(x)$, et le changement $Y = T(x)Z$ mène au système $\epsilon^h \frac{d}{dx} - A^*(x, \epsilon)$, où

$$A^*(x, \epsilon) = T^{-1}AT - \epsilon^h T^{-1}T', \text{ et } A^*(x, 0) = T^{-1}A_0(x)T .$$

On peut donc supposer dès le départ que $A_0(x)$ est décomposée en blocs

$$A_0(x) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}(x) & 0 \\ \hline 0 & A_{22}(x) \end{array} \right).$$

Le calcul est alors pratiquement le même que celui de la preuve du théorème 1, chapitre V. Les relations entre les coefficients sont cette fois

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(x) P_0(x) - P_0(x) B_0(x) = 0 \\ A_0(x) P_\ell(x) - P_\ell(x) B_0(x) = \sum_{s=0}^{\ell-1} P_s(x) B_{\ell-s}(x) - A_{\ell-s}(x) P_s(x) + P'_{\ell-h}(x), \ell \geq 1. \end{array} \right.$$

Nous prenons $P_0(x) = \text{id}$, $B_0(x) = A_0(x)$, et les P_ℓ et B_ℓ se déterminent successivement dans un voisinage fixe de $x = 0$, où $A_{11}(x)$ et $A_{22}(x)$ n'ont pas de valeurs propres communes. ■

2 - Aspect analytique du calcul.

De la même façon que nous avons déduit, au chapitre V, le théorème 2 du théorème 1 à l'aide du théorème 1 du chapitre IV, nous déduisons ici le théorème 3 du théorème 2 à l'aide du théorème 1.

Théorème 3 : Soit $D = \epsilon^h \frac{d}{dx} - A(x, \epsilon)$ comme au théorème 2 ($\epsilon \in \Sigma$), avec

$$A_0(0) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^0 & 0 \\ \hline 0 & A_{22}^0 \end{array} \right)$$

où A_{11}^0 et A_{22}^0 n'ont pas de valeurs propres communes.

Pour tout rayon ρ de Σ , il existe un secteur Σ^* , contenant ρ , et une matrice $P(x, \epsilon)$ holomorphe pour $|x| < x_0$,

$$0 < |\epsilon| < \epsilon_0, \epsilon \in \Sigma^*, P(x, \epsilon) \sim \sum_{s \geq 0} P_s(x) \epsilon^s \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0,$$

$\epsilon \in \Sigma^*$, telle que le changement $Y = P(x, \epsilon)Z$ transforme D en $\tilde{D} = \epsilon^h \frac{d}{dx} - B(x, \epsilon)$.

La matrice B est holomorphe pour $|x| < x_0$, $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \Sigma^*$, et

$$B(x, \varepsilon) \sim \sum_{l \geq 0} B_l(x) \varepsilon^l, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \in \Sigma^* ;$$

de plus $B(x, \varepsilon) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11}(x, \varepsilon) & 0 \\ \hline 0 & B_{22}(x, \varepsilon) \end{array} \right)$ est décomposée en blocs de la même façon

que $A_0(0)$.

Preuve : Elle est si semblable à celle du théorème 2, chapitre V, que nous l'omettons. ■

III - Applications du découplage dans le cas standard : forme des solutions.

1 - Nous appelons cas standard celui où $A_0(x)$ a toutes ses valeurs propres distinctes.

Théorème 4 : Soit $D = \varepsilon^h \frac{d}{dx} - A(x, \varepsilon)$ comme précédemment.

Supposons que les valeurs propres $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ de $A_0(x)$ sont distinctes (x voisin de 0). Il existe alors une matrice diagonale $Q(x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^m Q_k(x) \varepsilon^{-k}$, à coefficients

holomorphes, $Q_h(x)$ ayant pour éléments $\int_0^x \lambda_j(t) dt$ ($j = 1, \dots, m$) ; une série formelle

$\hat{Y}(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} Y_n(x) \varepsilon^n$, à coefficients holomorphes, avec $\det Y_0 \neq 0$; telles que, pour

tout sous-secteur assez petit Σ^* de Σ , il existe une matrice fondamentale $Y(x, \varepsilon)$ de solutions, holomorphe pour $|x| < x_1$, $\varepsilon \in \Sigma^*$, de la forme $Y(x, \varepsilon) = \hat{Y}(x, \varepsilon) e^{Q(x, \varepsilon)}$, avec

$$\hat{Y}(x, \varepsilon) \sim \hat{Y}(x, \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon \in \Sigma^* .$$

Preuve : • L'application répétée du théorème 3 montre qu'il existe des matrices $P(x, \varepsilon)$ et $B(x, \varepsilon)$, holomorphes pour $|x| < x_1$, $\varepsilon \in \Sigma^*$, P inversible et B diagonale (d'éléments $b_j(x, \varepsilon)$), telles le changement $Y = PZ$ transforme D en $\hat{D} = \varepsilon^h \frac{d}{dx} - B(x, \varepsilon)$.

• La solution générale de l'équation scalaire $\varepsilon^h y' = b_j(x, \varepsilon)y$ est

$$y = \text{cte} \exp\left(\int_0^x \varepsilon^{-h} b_j(t, \varepsilon) dt\right) = \text{cte} \exp\left(\sum_{r=0}^{h-1} \varepsilon^{r-h} \left(\int_0^x b_j^r(t) dt\right)\right) y_j(x, \varepsilon),$$

où y_j a un développement asymptotique en ε , commençant par un terme non-nul.

Comme $b_j(x, 0) = \lambda_j(x)$ (d'après le théorème 2), la preuve est complète. ■

2 - Exemple : l'équation de Bessel.

Dans l'équation $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$, nous voulons examiner ce qui advient pour $|\lambda|$ grand. A cet effet, on pose $u(x) = x^{1/2} y(\lambda x)$, et u est solution de

$$u'' + \left(\lambda^2 - \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{x^2}\right) u = 0.$$

a). Posons $y_1 = u$, $y_2 = \frac{1}{\lambda} u'$, $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. On obtient le système équivalent

$$\varepsilon Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -R & 0 \end{pmatrix} Y, \quad R(x, \varepsilon) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\varepsilon^2}{4x^2}.$$

Ici $h = 1$, $A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & 0 \end{pmatrix}$. Supposons que l'on se place au voisinage de $x_0 \neq \pm 1$:

$A_0(x)$ a alors des valeurs propres distinctes $\pm \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$, et on peut appliquer le théorème 4.

• Dans la pratique, il est souvent plus commode d'utiliser la forme a priori donnée par le théorème 4, et d'en déterminer les coefficients directement. Par exemple, ici, nous savons qu'il existe des solutions $u_{\pm}(x, \lambda)$ asymptotiques à

$$\hat{u}_{\pm}(x, \lambda) = e^{\pm \lambda \varphi(x)} \sum_{j \geq 0} u_j^{\pm}(x) \lambda^{-j}.$$

La "phase" φ satisfait l'équation $\varphi'^2 = \frac{1}{x^2} - 1$, et les u_j^{\pm} satisfont à un système de relations obtenu en égalant à 0 tous les coefficients des puissances de $\frac{1}{\lambda}$ dans l'expression de $u'' + \left(\lambda^2 - \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{x^2}\right) u$; ce système est de la forme

$$2\varphi' u_0' + \varphi'' u_0 = 0$$

$$2\varphi' u_j' + \varphi'' u_j = \text{une fonction des } u_\ell, \ell < j, j \geq 1.$$

• Calculons φ et u_0 pour x réel, voisin de $x_0 > 1$:

$$\varphi(x) = i \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{1/2} dt = i(x^2-1)^{1/2} - i \arccos \frac{1}{x}.$$

$$u_0(x) = x^{1/2}(x^2-1)^{-1/4}.$$

Pour x voisin de $x_0 < 1$, on trouve

$$\varphi(x) = (1-x^2)^{1/2} + \log \frac{x}{1+(1-x^2)^{1/2}}, \quad u_0(x) = x^{1/2}(1-x^2)^{-1/4}.$$

b) Si l'on désire connaître des expressions asymptotiques de $x^{1/2} H_\lambda^1(\lambda x)$ (ou $x^{1/2} H_\lambda^2(\lambda x)$) lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, x voisin de x_0 , on écrit

$$x^{1/2} H_\lambda^1(\lambda x) = c_+(\lambda) u_+(x, \lambda) + c_-(\lambda) u_-(x, \lambda),$$

où c_\pm sont des constantes à déterminer.

En principe, on peut calculer c_\pm en comparant les valeurs des fonctions et de leurs dérivées au point x_0 .

Malheureusement, les fonctions H_λ^1 ou $H_\lambda^2(\lambda x)$ ne sont pas aisément identifiées par leurs valeurs en un point $x = x_0$, mais bien plutôt par leurs comportements lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ ou $|x| \rightarrow 0$ (pour λ fixé). On ne pourra donc déterminer c_\pm que si l'on connaît les comportements de u_\pm lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ ou $|x| \rightarrow 0$, pour λ fixé.

La théorie faite dans le cas standard (théorème 4), étant locale au voisinage d'un point, est insuffisante. Nous présentons ici un calcul dans l'esprit de cette théorie, mais plus fin. Dans toute la suite, nous supposons x réel.

L'idée consiste à "faire varier la constante" en utilisant une solution approchée de $u'' + (\lambda^2 - (\lambda^2 - \frac{1}{4}) \frac{1}{x^2})u = 0$, puis à résoudre la nouvelle équation obtenue par la

par la méthode des approximations successives.

i) Supposons d'abord $0 < x \leq b < 1$.

• On pose $u = z u_0(x) e^{\lambda \varphi(x)}$, où u_0 et φ ont été calculés en a). L'équation correspondante pour z peut s'écrire sous forme intégrale

$$z(x) = 1 - \int_0^x K(x,t) F(t,\lambda) z(t) dt, \text{ où}$$

$$F(x,\lambda) = \frac{4 + x^2}{4(1-x^2)^2}, \quad K(x,t) = \frac{u_0(t)^2}{2\lambda} \left[1 - \exp(2\lambda(\varphi(t) - \varphi(x))) \right].$$

Comme φ est croissante, $\varphi(t) - \varphi(x) \leq 0$ pour $0 < t \leq x \leq b < 1$, et l'exponentielle apparaissant dans $K(x,t)$ est bornée pour $\text{Re } \lambda \geq 0$. Comme F et u_0 sont aussi bornés, on obtient $|F(t,\lambda) K(x,t)| \leq \frac{\text{cte}}{|\lambda|}$, pour $\text{Re } \lambda > 0$, $0 < t \leq x \leq b < 1$ (c'est-à-dire dans les conditions de l'intégrale).

Nous posons maintenant $z_0(x) = 0$,

$$z_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x K(x,t) F(t,\lambda) z_n(t) dt \quad (n \geq 0).$$

On obtient aisément, par récurrence, que

$$|z_{n+1}(x) - z_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{\text{cte} \cdot x}{|\lambda|} \right)^n.$$

Donc la suite z_n converge, uniformément pour $\text{Re } \lambda \geq 0$, $|\lambda| \geq 1$, $0 < x \leq b < 1$, vers une fonction $z(x)$, de classe C^2 , satisfaisant l'équation voulue, et telle que $z(x) = 1 + O\left(\frac{x}{|\lambda|}\right)$.

Il existe donc une solution u telle que

$$u(x,\lambda) = u_0(x) e^{\lambda \varphi(x)} \left(1 + O\left(\frac{x}{|\lambda|}\right) \right), \quad 0 < x \leq b < 1, \quad \text{Re } \lambda \geq 0, \quad |\lambda| \geq 1.$$

• Admettons maintenant les formules

$$J_\lambda(\lambda x) \sim \frac{(\lambda x/2)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \quad x \rightarrow 0_+$$

$$N_\lambda(\lambda x) \sim (\cotg \lambda \pi) \frac{(\lambda x/2)^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} - \frac{1}{\sin \lambda \pi} \frac{(\lambda x/2)^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}, \quad x \rightarrow 0_+.$$

En écrivant $x^{-1/2} u(x, \lambda) = c_1 J_\lambda(\lambda x) + c_2 N_\lambda(\lambda x)$ et en faisant tendre x vers 0_+ , on trouve, compte tenu des expressions de u_0 et $\varphi(x)$, $x^{-1/2} u(x, \lambda) \sim (x/2)^\lambda e^\lambda$, et donc $c_1 = e^\lambda \lambda^{-\lambda} \Gamma(\lambda+1)$, $c_2 = 0$. On en déduit, en utilisant la formule de Stirling qui donne

$$c_1 = (2 \pi \lambda)^{1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right), \text{ que}$$

$$J_\lambda(\lambda x) = \frac{\lambda^\lambda e^{-\lambda} x^{-1/2}}{\Gamma(\lambda+1)} u_0(x) e^{\lambda \varphi(x)} \left(1 + O\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) = (2 \pi \lambda x)^{-1/2} u_0(x) e^{\lambda \varphi(x)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right),$$

pour $0 < x \leq b < 1$, $\text{Re } \lambda \geq 0$.

ii) Supposons maintenant $1 < b \leq x$.

• La même méthode qu'au i) (où u_0 et φ ont d'autres valeurs, indiquées en a)) conduit à l'équation intégrale

$$z(x) = 1 + \int_x^{+\infty} K(x, t) F(t, \lambda) z(t) dt.$$

On a toujours $F(x, \lambda) = \frac{4+x^2}{4(1-x^2)^2}$, d'où ici $F(x, \lambda) = O(x^{-2})$. D'autre part

$$K(x, t) = -\frac{u_0^2(t)}{2\lambda} \left[1 - \exp(2\lambda(\varphi(t) - \varphi(x))) \right].$$

Comme $-\text{i}\varphi$ est croissante, l'exponentielle apparaissant dans K sera bornée pour $t \geq x$ $\text{Im } \lambda \geq 0$. Donc

$$|F(t, \lambda) K(x, t)| \leq \frac{\text{cte}}{|\lambda| t^2} \text{ pour } \text{Im } \lambda \geq 0, 1 < b \leq x \leq t.$$

Nous posons maintenant $z_0(x) = 0$,

$$z_{n+1}(x) = 1 + \int_x^{+\infty} K(x, t) F(t, \lambda) z_n(t) dt \quad (n \geq 0).$$

On obtient aisément, par récurrence,

$$|z_{n+1}(x) - z_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{\text{cte}}{|\lambda|x}\right)^n.$$

Comme précédemment, on en déduit l'existence d'une solution $z(x, \lambda)$ vérifiant

$$z(x, \lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right),$$

c'est-à-dire l'existence d'une solution $u(x, \lambda)$ telle que

$$u(x, \lambda) = u_0(x) e^{\lambda \varphi(x)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right), \quad \begin{array}{l} \operatorname{Im} \lambda \geq 0 \\ |\lambda| \geq 1 \\ 1 < b \leq x \end{array}.$$

• D'après le chapitre V, II.2 exemple 1, nous avons

$$H_{\lambda}^{1,2}(\lambda x) \sim \left(\frac{2}{\pi \lambda x}\right)^{1/2} \exp\left[\pm i\left(\lambda x - \frac{\lambda \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

(\pm pour 1,2) lorsque $x \rightarrow +\infty$, λ fixé, $0 \leq \arg \lambda < \pi$.

En écrivant $x^{-1/2} u(x, \lambda) = c_1 H_{\lambda}^1(\lambda x) + c_2 H_{\lambda}^2(\lambda x)$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, il vient $u \sim \exp(i\lambda x - i\lambda \frac{\pi}{2})$, donc $c_2 = 0$, $c_1 = \left(\frac{1}{2\pi \lambda}\right)^{1/2} e^{i\pi/4}$. Nous obtenons ainsi

$$H_{\lambda}^1(\lambda x) = \left(\frac{1}{2\pi \lambda x}\right)^{-1/2} e^{-i\pi/4} u_0(x) e^{\lambda \varphi(x)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right)$$

pour $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $1 < b \leq x$.

De la même façon, on peut ainsi obtenir

$$H_{\lambda}^2(\lambda x) = \left(\frac{1}{2\pi \lambda x}\right)^{-1/2} e^{i\pi/4} u_0(x) e^{-\lambda \varphi(x)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right)$$

pour $1 < b \leq x$, $\operatorname{Im} \lambda < 0$.

Les formules asymptotiques obtenues aux points i) et ii) sont dûes à Debye.

En particulier, on observe que lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ (par exemple), $e^{\lambda \varphi(x)}$ est oscillante pour $x > 1$, monotone pour $x < 1$. Au point $x = 1$ de transition entre ces deux régimes, la matrice $A_0(1)$ est nilpotente, et il faut faire une étude spéciale.

IV - Points de transition d'Airy.

1 - Points de transition et shearing.

Considérons un système $D = \varepsilon^h \frac{d}{dx} - A(x, \varepsilon)$, $A(x, \varepsilon) \sim \sum_{n \geq 0} A_n(x) \varepsilon^n$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \in \Sigma$,
comme précédemment.

Si la matrice $A_0(0)$ n'a qu'une valeur propre, il n'est pas possible d'utiliser une procédure de découplage de D (théorèmes 2 et 3) pour simplifier l'étude. On peut alors tenter d'imiter la procédure employée au chapitre V, I.4, pour produire un nouveau système pour lequel $A_0(0)$ a au moins deux valeurs propres distinctes. En contraste avec la situation d'alors, cette procédure ne mène ici qu'exceptionnellement au succès. Voyons pourquoi.

- Soient $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ les valeurs propres de $A_0(x)$: par hypothèse, $\lambda_1(0) = \dots = \lambda_m(0) = \lambda$, mais les $\lambda_i(x)$ sont en général distincts hors de $x = 0$. Nous avons un cas de "multiplicité (des valeurs propres) variable (avec x)", très délicat.

- Si, par miracle, $\lambda_1(x) = \dots = \lambda_m(x) = \lambda(x)$ pour x voisin de 0, on est dans un cas de "multiplicité constante".

Le changement $Y = \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^x \lambda(t) dt) Z$ nous ramène au cas $\lambda(x) \equiv 0$. La matrice $A_0(x)$ est alors nilpotente pour tout x , mais cela ne veut pas encore dire qu'elle soit holomorphiquement semblable à une matrice constante, sous forme de Jordan : il existe $T(x)$, telle que $T^{-1}(x) A_0(x) T(x)$ a la forme de Jordan, mais $T(x)$ n'est peut-être pas holomorphe. Par exemple, $A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $x \neq 0$, et nulle pour $x = 0$.

- Supposons maintenant qu'il existe $T(x)$ holomorphe telle que $T^{-1}(x) A_0(x) T(x) = J$, matrice constante sous forme de Jordan (en particulier, tous les invariants de $A_0(x)$ sont fixes avec x). On tente alors le "shearing", c'est-à-dire une transformation $Y = SZ$, où

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \varepsilon g & & & \\ 0 & \ddots & & \\ & & \varepsilon^{(m-1)g} & \end{pmatrix} .$$

Le nombre g est choisi en sorte que le terme principal du nouveau système obtenu présente, en plus des termes de $A_0(x)$, un terme non-nul sur ou en dessous de la diagonale.

La difficulté consiste en ceci : dans les nouveaux systèmes apparaissant à l'issue de cette procédure on n'est pas sûr de bénéficier à nouveau des miracles qui ont permis de mettre en place le "shearing".

Dans les cas très favorables, on parvient, en répétant la suite des opérations - réduction holomorphe du terme principal - shearing - découplage, à une solution complète.

Dans les autres cas, on dit que $x = 0$ est un "point de transition" (également "turning point").

Exemple : Soit le système $\epsilon Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \epsilon(1+x) & \epsilon \end{pmatrix} Y$. On a $h = 1$, $A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En posant $Y = \begin{pmatrix} 1 & \\ \epsilon & g \end{pmatrix} Z$, il vient $\epsilon Z' = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^g \\ \epsilon^{1-g}(1+x) & \epsilon \end{pmatrix} Z$; on prend $g = \frac{1}{2}$, d'où

le nouveau système $\eta Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+x & \eta \end{pmatrix} Z$, $\eta = \epsilon^{1/2}$: on est ramené au cas standard.

2 - Points de transition d'Airy : définition.

Nous considérons un système $D = \epsilon \frac{d}{dx} - A(x, \epsilon)$, où A est une matrice 2×2 , holomorphe pour $|x| < x_0$, $|\epsilon| < \epsilon_0$. On suppose $A(0,0)$ nilpotente, c'est-à-dire $A(0,0)=0$ ou $A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition : Le système D possède un point de transition d'Airy en $x = 0$ si

i) $A(0,0)$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) $\left. \frac{d}{dx} (\det A(x,0)) \right|_{x=0} \neq 0$.

On a immédiatement une première simplification.

Proposition : Soit D un système ayant en $x = 0$ un point de transition d'Airy. Alors il existe une fonction $\varphi(x)$, holomorphe, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$, et une matrice $P(x)$, holomorphe ainsi que son inverse, telles que les changements d'inconnues et de variable

$$\begin{cases} Y = P \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x [\text{trace } A(s,0)] ds\right) Z, \\ t = \varphi(x) \end{cases}$$

transforme D en $\tilde{D} = \varepsilon \frac{d}{dt} - B(t, \varepsilon)$, où $B(t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$

Preuve : • Le changement $Y = \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x [\text{trace } A(s,0)] ds\right) U$ conduit au système

$\varepsilon \frac{dU}{dx} = [A(x, \varepsilon) - \frac{1}{2} (\text{trace } A(x,0)) \text{id}] U = c(x, \varepsilon) U$, où $\text{trace } C(x, 0) \equiv 0$. De plus

$C(0, 0) = A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $\det C(x, 0) = \det A(x, 0) + 0(x^2)$.

• Posons $a(x) = -\det(C(x, 0))$: Il existe $T(x)$, holomorphe ainsi que son inverse, telle que $T^{-1} C T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(x) & 0 \end{pmatrix}$. En effet $C(x, 0) = \begin{pmatrix} xb(x) & 1+xd(x) \\ e(x) & -xb(x) \end{pmatrix}$, où b, d, e sont holomorphe, et $e(1+xd) = a - b^2 x^2$; considérons le système :

$$\begin{cases} xb(x)\alpha + \beta(1+xd) = 1 \\ e\alpha - xb\beta = 0 \end{cases}$$

comme $e = x\tilde{e}(x)$, $\tilde{e}(0) \neq 0$ par hypothèse, on a $\alpha = \frac{b\beta}{\tilde{e}}$, d'où $\beta(1+xd + \frac{b^2 x^2}{\tilde{e}}) = 1$. La

matrice $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha(x) \\ 0 & \beta(x) \end{pmatrix}$ vaut $\begin{pmatrix} 1 & \alpha(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $x = 0$, et réduit C à la forme

voulue. Le changement $U = TV$ conduit au système $\varepsilon V' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(x) & 0 \end{pmatrix} V - \varepsilon T^{-1} T' V$.

• Finalement, posons $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega(x) \end{pmatrix} Z$, $t = \varphi(x)$. On obtient $\varepsilon Z' = B(t, \varepsilon) Z$, où

$$B(t, 0) = \frac{dx}{dt} \begin{bmatrix} 0 & \omega(x) \\ a/\omega & 0 \end{bmatrix}.$$

On veut donc $\frac{dx}{dt} \omega = 1$, $\frac{a}{\omega} \frac{dx}{dt} = t$, soit $a(x) = \varphi(x) (\varphi'(x))^2$: Cette équation a pour solution $\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x a(s)^{1/2} ds \right)^{2/3}$; comme a s'annule exactement à l'ordre 1 en $x = 0$, $a(x) = x \sum_{r \geq 0} a_r x^r$, $a_0 \neq 0$, on a $\int_0^x a^{1/2} ds = x^{3/2} \sum_{r \geq 0} c_r x^r$, $c_0 \neq 0$, et l'on prend pour φ l'une des trois déterminations possibles, qui toutes s'annulent exactement à l'ordre 1 en $x = 0$. ■

3 - Réduction formelle.

• Supposons que dans le système $D = \varepsilon \frac{d}{dx} - A(x, \varepsilon)$, on ait $A(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, et non pas simplement $A(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, comme il résulte de la proposition du §2. Alors $\varepsilon y_1' = y_2$, $\varepsilon y_2' = x y_1$, soit $\varepsilon^2 y_1'' = x y_1$: en posant $z = x \varepsilon^{-2/3}$, on trouve $\frac{d^2 y_1}{dz^2} = z y_1$, qui est l'équation d'Airy, déjà largement étudiée aux chapitre I et V. Le problème est alors considéré comme résolu.

• Notre but est donc d'éliminer de $A(x, \varepsilon)$ la perturbation $A(x, \varepsilon) - A(x, 0)$; comme d'habitude, ceci se fait en deux temps : réduction formelle, aspect analytique.

Le théorème suivant indique la réduction formelle.

Théorème 5 : Soit $D = \varepsilon \frac{d}{dx} - A(x, \varepsilon)$, où $A(x, 0) = A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Il existe une série formelle $P = \sum_{s \geq 0} P_s(x) \varepsilon^s$, à coefficients holomorphes, P_0 inversible, telle que le changement d'inconnues $Y = PZ$ transforme D en $\tilde{D} = \varepsilon \frac{d}{dx} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$.

Preuve : Comme d'habitude (cf. chapitres III et V), il s'agit de résoudre $\varepsilon P' = AP - PA_0$.

Les relations à satisfaire sont

$$\begin{cases} A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0 \\ A_0 P_\ell - P_\ell A_0 = P'_{\ell-1} - \sum_{s=1}^{\ell} A_s P_{\ell-s} = F_\ell, \ell \geq 1. \end{cases}$$

D'une part on ne peut pas résoudre $A_0 P_\ell - P_\ell A_0 = F_\ell$ pour n'importe quelle F_ℓ ; d'autre part on n'a pas, comme au chapitre V, théorème 1, le moyen de modifier F_ℓ pour permettre cette résolution.

On va tourner à notre avantage le fait que $\chi \rightarrow A_0 X - X A_0$ n'est pas surjectif : son noyau contient A_0 et id , nous prendrons donc non pas $P_0 = \text{id}$, mais $P_0 = q_1(x) \text{id} + q_2(x) A_0$, où q_1 et q_2 sont des fonctions à choisir (c'est donc la présence du terme $P'_{\ell-1}$ dans F qui va nous sauver).

• Compte tenu de la forme très spéciale de $A_0(x)$, nous avons le

Lemme : L'équation $A_0 X - X A_0 = F$ a une solution si et seulement si $\text{trace } F = 0$, $\text{trace } A_0 F = 0$. Dans ce cas, si $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}$, on peut prendre $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}$.

Preuve : Avec $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on trouve $A_0 X - X A_0 = \begin{pmatrix} \gamma - \beta x & \delta - \alpha \\ -x(\delta - \alpha) & -(\gamma - \beta x) \end{pmatrix}$. La condition $\text{trace } A_0 F = 0$ signifie $x f_2 + f_3 = 0$, d'où le lemme. ■

• La première relation à satisfaire est

$$A_0 P_1 - P_1 A_0 = P'_0 - A_1 P_0 = F_1 = q'_1 + A_0 q'_2 - A_1 q_1 + (A'_0 - A_1 A_0) q_2 .$$

D'après le lemme, nous pourrions trouver P_1 holomorphe solution de cette équation si et seulement si $\text{trace } F_1 \equiv 0$ et $\text{trace}(A_0 F_1) \equiv 0$, soit

$$\begin{cases} q'_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(A_1) q_1 + \frac{1}{2} \text{tr}(A_1 A_0) q_2 \\ x q'_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(A_1 A_0) q_1 - \frac{1}{2} (1 - x \text{tr}(A_1)) q_2 . \end{cases}$$

• Plus généralement, on prendra $P_\ell = \hat{P}_\ell + q_1(x) \text{id} + q_2(x) A_0$, où \hat{P}_ℓ est une solution particulière de la relation d'indice ℓ , et q_1 et q_2 sont des fonctions à choisir telles que $\text{tr}(F_{\ell+1})$ et $\text{tr}(A_0 F_{\ell+1})$ sont nulles. Ceci équivaut à un système sur q_1 et q_2 de la forme

$$\begin{cases} q'_1 = \frac{1}{2} \text{tr}(A_1) q_1 + \frac{1}{2} \text{tr}(A_1 A_0) q_2 + \text{quantité connue} \\ x q'_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(A_1 A_0) q_1 - \frac{1}{2} (1 - x \text{tr}(A_1)) q_2 + \text{quantité connue.} \end{cases}$$

La preuve est donc complète en vertu du lemme suivant.

Lemme : Soit le système $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} Y' = H(x)Y + \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ où les g_i et H sont holomorphes, et $H_{22}(0) \notin \mathbb{Z}$. Alors ce système possède une solution $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ holomorphe, avec $y_1(0) = 1$.

Preuve : C'est une simple application de la théorie générale du chapitre III. Le système s'écrit

$$x \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H Y + \begin{pmatrix} xg_1 \\ g_2 \end{pmatrix}. \text{ En } x = 0, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix},$$

et l'hypothèse assure que l'on peut réduire le système à

$$x \frac{dZ}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_{21}(0) & H_{22}(0) \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} x\tilde{g}_1(x) \\ \tilde{g}_2(x) \end{pmatrix}, \text{ avec } \tilde{g}_i \text{ holomorphe.}$$

On peut diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_{21}(0) & H_{22}(0) \end{pmatrix}$ à l'aide d'une matrice de passage

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, et le changement $Z = TU$ conduit au système

$$x \frac{dU}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{22}(0) \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} x\tilde{g}_1(x) \\ \tilde{g}_3(x) \end{pmatrix}, \text{ avec } \tilde{g}_3 \text{ holomorphe.}$$

On a maintenant deux équations scalaires

$$u_1' = \tilde{g}_1, \quad xu_2' = H_{22}(0)u_2 + \tilde{g}_3(x).$$

On résout la première avec $u_1(0) = 1$. Quant à la seconde, une solution particulière en est $u_2(x) = x^\mu \left[\int_a^x \tilde{g}_3(t) t^{-\mu-1} dt + c \right]$, où $|a|$ est petit et non nul, c une constante à

choisir, $\mu = H_{22}(0)$. Comme $\tilde{g}_3(t) = \sum_{r \geq 0} \beta_r t^r$, $\int_a^x \tilde{g}_3(t) t^{-\mu-1} dt = \sum_{r \geq 0} \frac{\beta_r}{r-\mu} [x^{r-\mu} - a^{r-\mu}]$,

et $u_2(x) = \sum_{r \geq 0} \frac{\beta_r}{r-\mu} x^r + \left(c - \sum_{r \geq 0} \frac{\beta_r}{r-\mu} a^{r-\mu} \right) x^\mu$. On choisit $c = \sum_{r \geq 0} \frac{\beta_r}{r-\mu} a^{r-\mu}$, et $u_2(x)$

est holomorphe, ce qui complète la preuve. ■

4 - Aspect analytique du calcul.

Cette partie est assez délicate, puisqu'elle consiste à résoudre l'équation $\epsilon P' = AP - PA_0$ par la méthode des approximations successives, après l'avoir écrite sous la forme d'une intégrale sur un chemin convenable (cf. preuve du théorème 1). Nous omettons la preuve et mentionnons le résultat.

Théorème 6 : Pour $\delta > 0$, β_1 et β_2 arbitraires, désignons par R_j ($j = 1, 2, 3$) les régions de l'espace des (x, ϵ) définies par

$$\beta_1 \leq \arg \epsilon \leq \beta_2, \quad |\epsilon| < \epsilon_0,$$

$$\frac{2j-5}{3} \pi + \delta \leq \arg(x\epsilon^{-2/3}) \leq \frac{2j-1}{3} \pi - \delta \quad (j = 1, 2, 3), \quad |x| < x_0.$$

Dans chaque R_j , il existe une matrice holomorphe $P^{(j)}(x, \epsilon)$, $P^{(j)}(x, \epsilon) \sim \sum_{s \geq 0} P_s^{(j)}(x) \epsilon^s$

uniformément dans R_j lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, telle que le changement $Y = P^{(j)} Z$ transforme

$$D = \epsilon \frac{d}{dx} - A(x, \epsilon) \text{ en } \tilde{D} = \epsilon \frac{d}{dx} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour les mêmes raisons qu'au chapitre V, un phénomène de Stokes apparaît dans le cas d'équations contenant un grand paramètre. Il est très difficile de le discuter en général (même dans le cas standard de III), car on ne connaît même pas la taille de Σ^* . Dans le cas d'un point de transition d'Airy, cette étude peut être faite, mais nous l'omettons.

5 - Exemple : l'équation de Bessel.

a) Dans la partie III, nous avons introduit le système $\epsilon Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -R & 0 \end{pmatrix} Y$,

$R(x, \epsilon) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\epsilon^2}{4x^2}$, pour étudier $y(\lambda x)$ lorsque λ est grand, y étant une solution

de l'équation de Bessel $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$ ($\lambda = 1/\epsilon$). Nous avons

$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & 0 \end{pmatrix}$, et donc $x = 1$ est un point de transition d'Airy pour ce système

(et aussi $x = -1$).

La suite des réductions indiquées dans la proposition du §.2 se réduit ici à poser $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega(x) \end{pmatrix} Z$, $t = \varphi(x)$, où $\omega(x) = 2^{1/3} + \dots$, $\varphi(x) = 2^{1/3}(x-1) (1 - \frac{3}{10}(x-1) + \dots)$.

On obtient un système $\varepsilon Z' = B(t, \varepsilon)Z$, où $B(t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}$, tandis que $B_1(t)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Avec les notations du théorème 5, on a donc

$P_0(0) = \begin{pmatrix} q_1(0) & q_2(0) \\ 0 & q_1(0) \end{pmatrix}$; comme $B_1 B_0 \Big|_{t=0} = 0$, la matrice H du système

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}' = H(t) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ vérifiée par $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ satisfait $H_{21}(0) = 0$, et donc

$$q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 0.$$

Donc, dans tout domaine du type défini au théorème 6 (avec x remplacé par $t = \varphi(x)$, x proche de 1), il existe des fonctions holomorphes $a(x, \varepsilon)$, $b(x, \varepsilon)$ (asymptotiques aux séries formelles déduites du théorème 5), telles que pour toute solution y de l'équation de Bessel, il existe une solution w de l'équation d'Airy, avec ($\lambda = 1/\varepsilon$)

$$x^{1/2} y(\lambda x) = a(x, \varepsilon) w(\varphi(x)\lambda^{2/3}) + \lambda^{-1/3} b(x, \varepsilon) w'(\varphi(x)\lambda^{2/3}). \text{ De plus, } \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 1}} a(x, \varepsilon) = 1,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 1}} b(x, \varepsilon) = 0.$$

b) Pour obtenir des expressions de $J_\lambda(\lambda x)$ et $N_\lambda(\lambda x)$ en termes de $Ai(\varphi\lambda^{2/3})$, par exemple pour x réel voisin de 1, et $\text{Re } \lambda > 0$, il faudrait utiliser les formules de Debye pour des valeurs $x = x_0$, $x_0 \neq 1$, x_0 voisin de 1. Nous ne poursuivrons pas ces calculs.

V - Points de transition (cas général) : Réduction formelle.

Considérons une équation scalaire

$$(E) \quad y'' + \lambda^2 R(x, \lambda) y = 0,$$

où $x \in D$ (domaine simplement connexe du plan complexe ou intervalle réel), $\lambda \in S$ (secteur du plan), et R possède une expansion

$$R(x, \lambda) \sim \sum_{p \geq 0} R_p(x) \lambda^{-p}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in S$$

à coefficients R_p holomorphes dans D (ou C^∞ si D est un intervalle réel).

Nous allons montrer qu'il est possible, formellement, de réduire l'étude de (E) à celle d'une équation (F) à coefficients polynomiaux. Plus précisément, soient x_0, \dots, x_N les zéros de $R_0(x)$ dans D , de multiplicités m_0, \dots, m_N : ces zéros sont les points de transition de (E). Si $\mu = \sum_{j=0}^N m_j$ est le nombre total de ces points, l'équation (F) sera de la forme

$$(F) \quad u'' + \left(\sum_{k=0}^{\mu} \gamma_k \xi^k \right) u = 0, \text{ où les } \gamma_k \text{ dépendent de } \lambda.$$

La méthode utilisée est voisine de celle du §. IV : introduction d'une nouvelle variable $\varphi(x)$, puis réduction formelle conduisant à résoudre un système à point singulier régulier. Pour toute solution u de (F),

$$y = B u(\lambda^{2/\mu+2} \varphi) + c \lambda^{-\mu/\mu+2} u'(\lambda^{2/\mu+2} \varphi)$$

sera solution de (E).

1 - Mise en place du calcul .

Nous cherchons y sous la forme $y(x) = B(x, \lambda) v(\varphi(x)) + \frac{C(x, \lambda)}{\lambda} v'(\varphi(x))$, où v satisfait l'équation

$$(G) \quad v'' + \lambda^2 P(x, \lambda) v = 0.$$

Ici φ , $B(x, \lambda) \sim \sum_{p \geq 0} B_p(x) \lambda^{-p}$, $C(x, \lambda) \sim \sum_{l \geq 0} C_l \lambda^{-l}$, et $P(x, \lambda) \sim \sum_{j \geq 0} \Pi_j(x) \lambda^{-j}$ sont à déterminer en fonction de R , les Π_j étant des polynômes de degré μ .

$$\text{Nous avons } y' = B' v(\varphi) + b \varphi' v'(\varphi) + \frac{C'}{\lambda} v'(\varphi) + \frac{C}{\lambda} \varphi' v''(\varphi)$$

$$y'' = B'' v(\varphi) + 2B' \varphi' v'(\varphi) + B \varphi'' v'(\varphi) + B \varphi'^2 v''(\varphi) + \frac{C''}{\lambda} v'(\varphi) + 2 \frac{C' \varphi'}{\lambda} v''(\varphi) +$$

$$+ \frac{C}{\lambda} \varphi'' v''(\varphi) + \frac{C}{\lambda} \varphi'^2 v'''(\varphi),$$

et $v'' = -\lambda^2 P v$, $v''' = -\lambda^2 P' v - \lambda^2 P v'$. Donc $y'' + \lambda^2 R y = H v(\varphi) + K v'(\varphi)$, où

$$H = B'' - \lambda^2 P(\varphi) B \varphi'^2 - 2\lambda c' \varphi' P(\varphi) - c \lambda \varphi'' P(\varphi) - c \lambda \varphi'^2 P'(\varphi) + \lambda^2 R B .$$

$$K = 2B' \varphi' + B \varphi'' + \frac{c''}{\lambda} - c \lambda \varphi'^2 P(\varphi) + \lambda R C .$$

• Nous écrivons que H et K sont formellement nulles comme séries en $\frac{1}{\lambda}$.

+ Les termes dominant sont respectivement

$$\lambda^2 [R_0 - \Pi_0(\varphi) \varphi'^2] B_0 \quad \text{et} \quad \lambda [R_0 - \Pi_0(\varphi) \varphi'^2] C_0 ,$$

et comme nous voulons $B_0 \neq 0$, $C_0 \neq 0$, nous prenons φ et Π_0 satisfaisant l'"équation de phase"

$$R_0(x) = \varphi'^2 \Pi_0(\varphi).$$

+ Les termes suivants sont d'ordre 1 et 0 respectivement, avec pour coefficients

$$H_1 = -2\varphi' C_0' \Pi_0(\varphi) - C_0(\varphi'' \Pi_0(\varphi) + \varphi'^2 \Pi_0'(\varphi)) + B_0(R_1 - \Pi_1(\varphi) \varphi'^2) ,$$

$$K_0 = 2\varphi' B_0' + B_0 \varphi'' + C_0(R_1 - \Pi_1(\varphi) \varphi'^2).$$

Le système $H_1 = 0$, $K_0 = 0$ déterminera B_0 et C_0 et Π_1 .

+ Plus généralement, B_p et C_p seront déterminés par le système obtenu en écrivant que les coefficients de λ^{1-p} et λ^{-p} dans H et K sont nuls ($p \geq 1$). Ce système est de la forme

$$(V.I) \quad \begin{cases} 2\varphi' \Pi_0(\varphi) C_p' + (\varphi'' \Pi_0(\varphi) + \varphi'^2 \Pi_0'(\varphi)) C_p - B_p(R_1 - \Pi_1(\varphi) \varphi'^2) = \alpha_p . \\ 2\varphi' B_p' + B_p \varphi'' + C_p(R_1 - \Pi_1(\varphi) \varphi'^2) = \beta_p , \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \alpha_p = B_{p-1}'' + \sum_{j=1}^p [R_{j+1} - (\varphi')^2 \Pi_{j+1}(\varphi)] B_{p-j} \\ - \sum_{j=1}^p C_{p-j} (\varphi'' \Pi_j(\varphi) + \varphi'^2 \Pi_j'(\varphi)) - 2\varphi' \sum_{j=1}^p \Pi_j(\varphi) C_{p-j}'$$

$$\beta_p = -C_{p-1}'' - \sum_{j=1}^p [R_{j+1} - (\varphi')^2 \Pi_{j+1}(\varphi)] C_{p-j}.$$

Il permettra de déterminer B_p , C_p et Π_{p+1} .

2 - Résolution de l'équation de phase.

C'est l'équation $R_0(x) = \varphi'^2 \Pi_0(\varphi)$.

i) On veut $\varphi' \neq 0$, donc $\Pi_0(\varphi)$ doit être de la forme $\Pi_0(\varphi) = C \prod_{j=0}^N (\varphi - \varphi_j)^{m_j}$, où

$\varphi_j = \varphi(x_j)$, C : cte. En intégrant il vient

$$(V.2) \quad \int_{x_0}^x \left(\frac{R_0}{C}\right)^{1/2} ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi(x)} \prod_{j=0}^N (s - \varphi_j)^{m_j/2} ds.$$

Pour $x = x_j$ ($j \geq 1$), on trouve

$$\int_{x_0}^{x_j} \left(\frac{R_0}{C}\right)^{1/2} ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi_j} \prod_{j=0}^N (s - \varphi_j)^{m_j/2} ds, \quad j = 1, \dots, N.$$

En prenant φ_0 arbitraire, on peut considérer le système ci-dessus comme un système de N équations en les N inconnues $\varphi_1, \dots, \varphi_N$. Nous admettrons qu'on peut toujours trouver $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ satisfaisant ce système, et qu'alors l'équation (V.2) détermine φ avec les propriétés suivantes :

i) φ est holomorphe dans D (ou C^∞ si D est un interval).

ii) $\varphi(x_j) = \varphi_j$, $j \geq 0$.

iii) $\varphi'(x) \neq 0$ dans D .

ii) Exemples.

Exemple 1 : D contient un seul point de transition x_0 . Alors $N = 0$, $m_0 = \mu$, $\Pi_0(x) = Cx^\mu$

et
$$\varphi(z) = \left[\frac{\mu+2}{2} \int_{x_0}^x \left(\frac{R_0}{C}\right)^{1/2} ds \right]^{2/\mu+2} \quad \text{si } \varphi_0 = 0$$

Exemple 2 : D contient 2 points de transition simples : $m_0 = m_1 = 1$, $\mu = 2$, $N = 1$.

En prenant $C = -\frac{1}{4}$, et $\varphi_1 = -\varphi_0$, (V.2) devient

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi(x)} (s^2 - \varphi_0^2)^{1/2} ds = -\frac{i}{2} \varphi_0^2 \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} + 1 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2 \right] = 2 \int_{x_0}^x (-R_0)^{1/2} ds,$$

$$\text{et } \varphi_0 = 2 \left(\frac{i}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} (-R_0)^{1/2} ds \right)^{1/2}.$$

3 - Résolution des équations de transport.

Ce sont les équations (V.1).

i) La seconde équation n'est pas singulière, car $\varphi' \neq 0$. La première est singulière en chaque point x_j , où $\Pi_0(\varphi) \sim \text{cte}(x-x_j)^{m_j}$. Notons qu'alors $\Pi_0'(\varphi) \sim \text{cte}(x-x_j)^{m_j-1}$, en sorte que si $R_1 - \Pi_1(\varphi)\varphi'^2$ s'annule en x_j d'ordre m_j-1 , l'équation de (V.I) qui détermine B_0 aura en x_j un point singulier régulier. Plus précisément, (V.I) sera un système de la forme étudiée au paragraphe IV, 3) (preuve du théorème V), avec $H_{22}(x_j) = \frac{m_j}{2}$. Dans le cas où m_j est pair, on devra faire une étude plus fine.

ii) En fait, on peut écrire explicitement les solutions du système (V.I). Posons

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x R_0^{-1/2} \left(R_1 - (\varphi')^2 \Pi_1(\varphi) \right) ds.$$

On obtient, avec des constantes arbitraires A et A' ,

$$\begin{cases} B_0 = (\varphi')^{-1/2} (A \cos \theta + A' \sin \theta) \\ C_0 = \left(\frac{\varphi'}{R_0}\right)^{+1/2} (A \sin \theta - A' \cos \theta). \end{cases}$$

Les solutions B_p et C_p du système avec second membre sont obtenues en faisant "varier la constante".

Comme on désire que B_0 et C_0 soient régulières, on prend $A' = 0$, $A = 1$, et on deman-

de que θ s'annule en x_j , et que θ' s'annule en x_j à l'ordre $\frac{m_j}{2} - 1$. Les $\mu + 1$ coefficients du polynome $\Pi_1(x)$ devront donc satisfaire au système des $\sum_j (m_j - 1) + N = \mu - 1$ conditions linéaires correspondant :

$$(V.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, N) \\ \frac{d^k}{dx^k} \left[R_1 - (\varphi'^2) \Pi_1(\varphi) \right] \Big|_{x=x_j} = 0, \quad j = 0, \dots, N, \\ 0 \leq k \leq m_j - 2. \end{array} \right.$$

• Plus généralement, en supposant déjà connus les B_j , C_j , Π_{j+1} ($j \leq p - 1$), on déterminera Π_{p+1} par un système de conditions analogues, déduites de l'expression de B_p et C_p . Ces conditions portent en fait sur α_p , et peuvent être traduites en conditions sur Π_{p+1} grâce à la forme de α_p . Il se trouve qu'on obtient un système linéaire (inhomogène) sur les coefficients de Π_{p+1} , dont la matrice $\mu - 1 \times \mu + 1$ est la même que celle de (V.3). Nous ferons donc l'hypothèse :

(H) La matrice $\mu - 1 \times \mu + 1$ du système (V.3) a pour rang $\mu - 1$.

Sous l'hypothèse (H), on peut résoudre (V.3), pour chaque $p \geq 0$, après détermination convenable de Π_{p+1} .

Exemple : Revenons à la situation de l'exemple 1 de 2), où D a un seul point de transition x_0 .

• Si $\mu = 1$, il n'y a pas de conditions à satisfaire sur θ autres que $\theta(x_0) = 0$ qui est vérifiée par construction ; on peut donc prendre Π_p arbitraire ($p \geq 1$), par exemple $\Pi_p = 0$. L'équation (G) est alors, en prenant la constante $C = -1$, $v'' - \lambda^2 xv = 0$: on s'est ramené à l'équation d'Airy, comme en IV.

• Si $\mu \geq 2$, on peut prendre les Π_p ($p \geq 1$) de degré $\mu - 2$. Le système (V.3) est alors un système carré $\mu - 1 \times \mu - 1$ en les coefficients de Π_1 , dont la matrice est triangu-

laire inversible, puisque les conditions s'écrivent

$$\pi_1(0) = * \quad , \quad \pi_1'(0) = * \quad , \dots , \quad \pi_1^{(\mu-2)}(0) = * \quad .$$

(les étoiles * désignant des quantités connues en fonction de R_1 et φ) ; l'hypothèse (H) est vérifiée.

4 - Réduction à l'équation (F).

Aux paragraphes 1), 2), 3), on a obtenu une réduction de (E) à (G) :
 $v'' + \lambda^2 P(x, \lambda) v = 0$.

Pour obtenir (F), on fait un simple changement de variable, destiné à normaliser le terme de plus haut degré de $\Pi_0(x)$. On pose $v(\xi) = u(\lambda^{2/\mu+2} \xi)$, d'où

$$v' = \lambda^{2/\mu+2} u'(\lambda^{2/\mu+2} \xi) \quad , \quad v'' = \lambda^{4/\mu+2} u''(\lambda^{2/\mu+2} \xi) \quad .$$

En notant $\Pi_j(x) = \sum_{k=0}^{\mu} \gamma_{kj} x^k$, on obtient les coefficients $\gamma_k \sim \lambda^{2(\mu-k)/\mu+2} \sum_{j \geq 0} \gamma_{kj} \lambda^{-j}$

de (F), et l'expression de y en fonction de u .

Exemples : Dans le cas d'un point de transition simple, (F) est l'équation d'Airy
 $u'' - \xi u = 0$

• Dans le cas d'un point double, en prenant la constante $C = -\frac{1}{4}$, on trouve pour (F) l'équation de Weber

$$u'' - \left(\frac{\xi^2}{4} + \gamma_0 \right) u = 0 \quad ,$$

où $\gamma_0 \sim -\lambda \sum_{j \geq 1} \lambda^{-j} \gamma_{0j}$ (sur l'équation de Weber, voir chapitre I, II.3).

Dans le cas de deux points de transition simples (exemple 2 du §.2)), on obtient de nouveau l'équation de Weber

$$u'' - \left(\frac{\xi^2}{4} + \gamma_0 \right) u = 0 \quad , \quad \text{où cette fois}$$

$$\gamma_0 \sim -\frac{1}{4} \varphi_0^2 \lambda - \lambda \sum_{j \geq 1} \lambda^{-j} \gamma_{0j} \quad .$$

VI - Etude asymptotique dans un domaine non-borné en x.

Considérons une équation scalaire du second ordre de la forme $y'' - \lambda^2 P(x) y = 0$, où P est un polynôme de degré m , et λ ($\lambda \in \mathbb{C}$) un grand paramètre.

Nous esquissons ici une description des objets géométriques qui apparaissent dans l'étude de cette équation lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

1 - Equation de Riccati associée et solutions formelles.

A cause du caractère exponentiel probable des solutions, on pose $u = \frac{y'}{y}$; cette fonction est solution de l'équation de Riccati

$$u' + u^2 - \lambda^2 P(x) = 0 \quad (\text{VI.1})$$

Proposition 1 : L'équation $u' + u^2 - \lambda^2 P(x) = 0$ possède deux solutions formelles

$$u = \lambda P(x)^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{P'(x)}{P(x)} + \Pi(x, \lambda) \quad \text{et}$$

$$u = -\lambda P(x)^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{P'(x)}{P(x)} + \Pi(x, -\lambda), \quad \text{où}$$

$$\Pi(x, \lambda) = \sum_{n \geq 1} \left[\lambda P(x)^{1/2} \right]^{-n} P_n(x), \quad P_n(x) = \frac{Q_n(x)}{P(x)^{n+1}}.$$

Les $Q_n(x)$ sont des polynômes de degré au plus $(m-1)(n+1)$. ■

On voit que ces solutions sont des séries formelles, à coefficients dépendants de x , du "bloc" $\lambda P(x)^{1/2}$.

Preuve : La substitution de l'expression formelle de u dans l'équation conduit, après un calcul un peu laborieux, à choisir les $P_n(x)$ satisfaisant aux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \frac{P''(x)}{P(x)} - \frac{5}{16} \left(\frac{P'(x)}{P(x)} \right)^2 \right] \\ P_2(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{P'(x)}{P(x)} P_1(x) - P_1'(x) \right] \\ P_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{n+1}{2} \frac{P'(x)}{P(x)} P_n(x) - P_n'(x) - \sum_{j+k=n} P_j(x) P_k(x) \right], \quad n \geq 2. \end{array} \right.$$

On vérifie alors les propriétés des $Q_n(x)$ par récurrence. ■

Pour construire une vraie solution u de l'équation de Riccati, asymptotique (en un sens à préciser) à la solution formelle trouvée, on procède en deux étapes, comme d'habitude : d'abord, on choisit une solution \tilde{u} asymptotique à u ; puis l'on pose $u = \tilde{u} + z$, et l'on cherche une solution plate de l'équation en z par la méthode des approximations successives.

• Précisons d'abord les domaines en x et λ .

On note D un domaine simplement connexe du plan complexe tel que

i) Pour un $\beta > 0$, $|P(x)| \geq \beta$ lorsque $x \in D$.

ii) Grâce à i), on peut définir $P(x)^{1/2}$ dans D tout entier. On suppose que $|\arg P(x)^{1/2}| \leq M$, $x \in D$.

On prendra dans toute la suite $x \in D$, et $\lambda > 0$ assez grand (ou, un peu plus généralement, $|\operatorname{Im} \lambda| \leq \delta$ fixé, $\operatorname{Re} \lambda > 0$ assez grand).

• Soit $g(x, w)$, holomorphe pour $x \in D$, $|\arg w| \leq 2M$ et $|w| > w_0 > 0$, asymptotique à $\sum_{n \geq 1} w^{-n} P_n(x)$ au sens suivant : Pour tout entier positif N , il existe une constante C_N telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} |g(x, w) - \sum_{n=1}^N w^{-n} P_n(x)| \leq C_N |w|^{-N-1} \\ \left| \frac{\partial g}{\partial w}(x, w) - \sum_{n=1}^N (-n) w^{-n-1} P_n(x) \right| \leq C_N |w|^{-N-2} \\ \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, w) - \sum_{n=1}^N w^{-n} P'_n(x) \right| \leq C_N |w|^{-N-1} \end{array} \right.$$

Nous prenons $h(x, \lambda) = g(x, \lambda P(x)^{1/2})$, et $\tilde{u}(x, \lambda) = \lambda P(x)^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{P'(x)}{P(x)} + h(x, \lambda)$. La fonction \tilde{u} est asymptotique à la solution formelle correspondante u de la proposition 1 au sens déduit des inégalités sur g . En gros, $\tilde{u} \sim u$ lorsque $|\lambda P(x)^{1/2}| \rightarrow +\infty$.

• Posons $u = \tilde{u} + z$. La fonction z est solution de l'équation

$$z' + 2 \left[\lambda P(x)^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{P'(x)}{P(x)} + h(x, \lambda) \right] z + z^2 + H(x, \lambda) = 0 ,$$

où H est plate en ce sens que

$$\forall N , \quad |H(x, \lambda)| \leq C_N |\lambda P(x)^{1/2}|^{-N} .$$

En posant $z = \lambda P(x)^{1/2} v$, on obtient une légère simplification

$$(VI.2) \quad v' + 2 \left[\lambda P(x)^{1/2} + h(x, \lambda) \right] v + \left[\lambda P(x)^{1/2} \right] v^2 + L(x, \lambda) = 0 ,$$

où L est plate.

• Enfin, on a l'artifice suivant :

Si w_1 et w_2 sont des solutions du système

$$(VI.3) \quad \begin{cases} w_1' = - 2 \left[\lambda P(x)^{1/2} + h(x, \lambda) \right] w_1 + \frac{1}{2} L(x, \lambda) \left[w_1 + w_2 \right] + \frac{1}{2} L(x, \lambda) . \\ w_2' = 2h(x, \lambda)w_1 - \frac{1}{2} L(x, \lambda) \left[w_1 + w_2 \right] - \frac{1}{2} L(x, \lambda) . \end{cases}$$

alors :

i) $v = \frac{- 2w_1}{1+w_1+w_2}$ est solution de (VI.2)

ii) $u(x, \lambda) = \lambda P(x)^{1/2} - \frac{1}{4} \frac{P'(x)}{P(x)} + h(x, \lambda) + \frac{w_1' + w_2'}{1+w_1+w_2}$ est solution de (VI.1)

iii) Enfin,

$$y(x, \lambda) = p(x)^{-1/4} \left[1+w_1+w_2 \right] \exp \left[\lambda \int^x p(t)^{1/2} dt + \int^x h(t, \lambda) dt \right]$$

est solution de $y'' - \lambda^2 P(x)y = 0$.

Ceci se vérifie directement sans difficulté.

La tâche restante consiste donc à déterminer des domaines D dans lesquels le système (VI.3) possède des solutions w_1 et w_2 "aussi plates que possible".

C'est la géométrie de ces domaines qui nous intéresse et que nous allons maintenant expliquer.

2 - Domaines canoniques et lignes de Stokes.

Si x est voisin de x_0 , $P(x_0) \neq 0$, la théorie classique montre qu'il existe des solutions qui se comportent essentiellement comme $e^{\pm \lambda \int_{x_0}^x P(t)^{1/2} dt}$ (lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$).

Les courbes, ensembles des points x tels que $\operatorname{Re} \int_{x_0}^x P(t)^{1/2} dt = 0$, sont donc celles

sur lesquelles le comportement des solutions change : à décroissance rapide en λ d'un côté, elles deviennent grandes exponentiellement de l'autre.

Définition 1 : Soit x_0 un point de transition d'ordre k (c'est-à-dire un zéro d'ordre k de $P(x)$). On appelle ligne de Stokes une courbe $x(s)$ ($s \geq 0$), continue, $x(0) = x_0$, telle que $\operatorname{Re} \int_{x_0}^{x(s)} P(t)^{1/2} dt = 0$ (on suppose que pour $s > 0$, $x(s)$ n'est pas un point de transition).

Définition 2 : Un domaine simplement connexe Ω est dit canonique (pour l'équation différentielle $y'' - \lambda^2 P(x) y = 0$) s'il vérifie les conditions suivantes :

i) La frontière $\partial\Omega$ de Ω est constituée de lignes de Stokes.

ii) $P(x) \neq 0$ à l'intérieur de Ω .

iii) Si $x_0 \in \partial\Omega$, l'application $x \rightarrow z = I(x) = \int_{x_0}^x P(t)^{1/2} dt$ envoie Ω sur le plan des z fendu le long d'un nombre fini de demi-droites verticales (ne formant pas de droites).

Pour justifier la propriété iii), quelque peu mystérieuse, nous allons étudier les lignes de Stokes sur des exemples.

a) Disposition locale au voisinage de x_0 .

Soit x_0 un point de transition d'ordre k :

$$P(x) = (x-x_0)^k Q(x) \quad , \quad Q(x_0) \neq 0 .$$

Comme $P(t)^{1/2} = (t-x_0)^{k/2} Q(t)^{1/2}$,

$$I(x) = \int_{x_0}^x P(t)^{1/2} dt = (x-x_0)^{\frac{k+2}{2}} \tilde{Q}(x) \quad , \quad \text{où } \tilde{Q}(x) = \frac{2}{k+2} Q(x_0)^{1/2} + \dots$$

La condition $\operatorname{Re} I(x) = 0$ signifie $\arg I(x) = \frac{\pi}{2} + \ell\pi \quad (\ell \in \mathbb{Z})$.

Soit $\frac{k+2}{2} \arg(x-x_0) + \arg \tilde{Q}(x) = \frac{\pi}{2} + \ell\pi$,

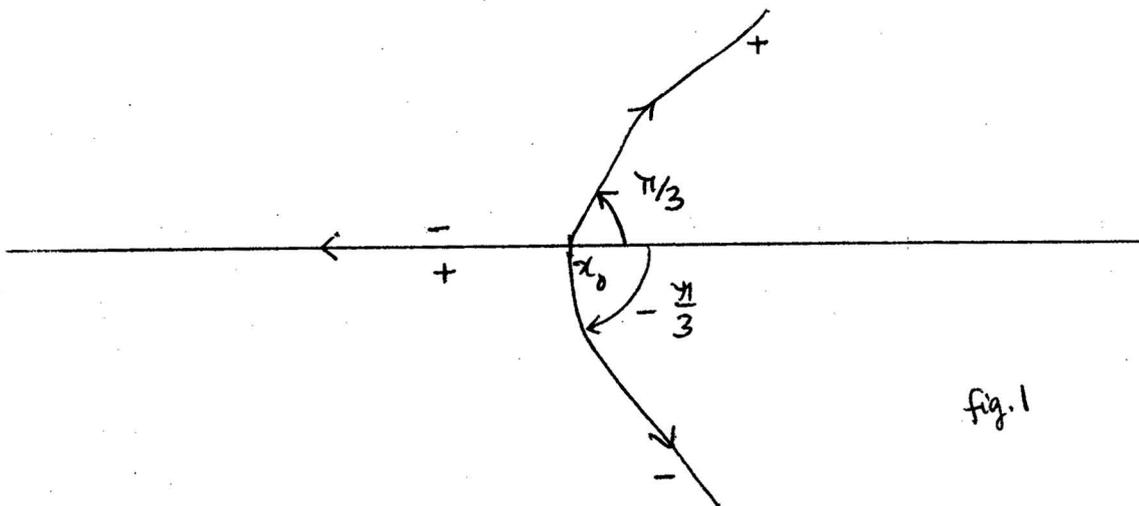
$$\arg(x-x_0) = -\frac{2}{k+2} \arg \tilde{Q}(x_0) + \frac{\pi}{k+2} + \frac{2\ell}{k+2} \pi + o(x-x_0)$$

$$= -\frac{1}{k+2} \arg Q(x_0) + \frac{\pi}{k+2} + \frac{2\ell}{k+2} \pi + o(x-x_0) .$$

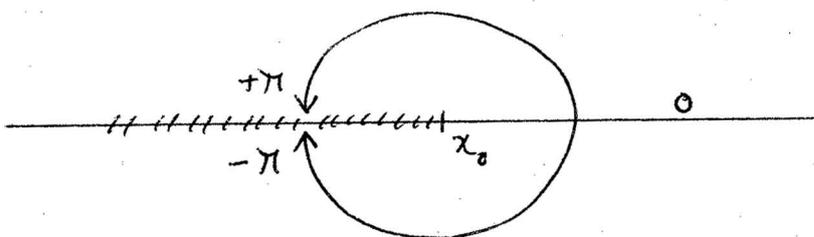
Les lignes de Stokes forment donc près de x_0 une étoile à $k+2$ branches (régulièrement espacées), centrée en x_0 .

• On a $\operatorname{Im} I(x) > 0$ sur la branche $\ell = 0$, avec alternance des signes d'une branche à la suivante.

Exemple 1 : $P(x) = (x-x_0)$. On a $k = 1$, et $\arg(x-x_0) = \frac{\pi}{3} + \frac{2\ell}{3} \pi + o(x-x_0)$. La disposition des branches et les signes de $\operatorname{Im} I(x)$ sont indiqués sur la fig. 1 :



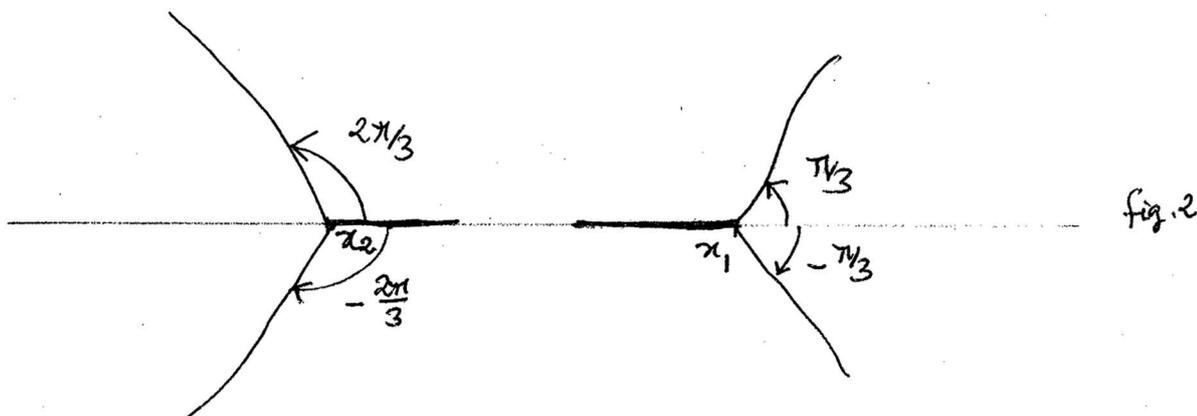
L'existence des signes \pm au-dessus et en dessous de la ligne horizontale résulte de la détermination de $\arg(x-x_0)$ dans le domaine simplement connexe où l'on travaille ; ce domaine est ici \mathbb{C} fendu le long de la demi-droite $x_0 + \mathbb{R}_-$, et le choix de $\arg(x-x_0)$ est le choix habituel :



Exemple 2 : $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)$, x_i réels, $x_2 < x_1$. Le domaine simplement connexe où l'on a choisi une branche de $P(x)^{1/2}$ sera ici $\mathbb{C} \setminus \{x_1 + \mathbb{R}_-\}$, et on prendra $P(x)^{1/2} > 0$ pour x réel, $x > x_1$.

Ceci étant précisé, la disposition des lignes de Stokes autour de x_1 est la même qu'à l'exemple 1.

Autour de x_2 , $Q(x_2) = x_2 - x_1 < 0$, donc $\arg(x-x_2) = \frac{2\pi}{3} + 0(x-x_2)$. La figure est la suivante :



b) Disposition à l'infini.

Lorsque $|x|$ est grand, $P(x)^{1/2} \sim x^{m/2}$, et les lignes de Stokes s'en vont à l'in-

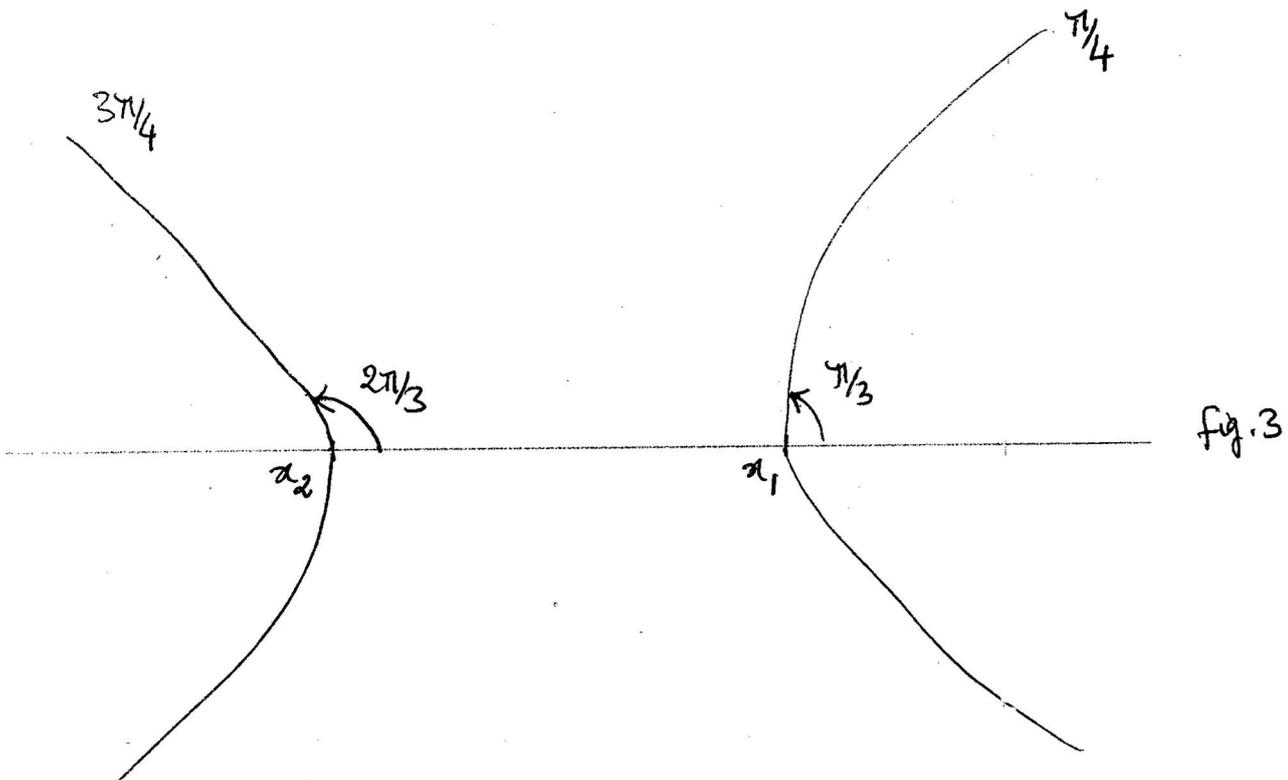
fini dans les m directions $\arg x = \frac{2\ell+1}{m+2} \pi \quad (\ell \in \mathbb{Z})$.

Ces directions sont, bien entendu, celles des rayons séparants de l'équation $y'' - \lambda^2 P(x)y = 0$, considérée, pour $\lambda > 0$ fixé, au voisinage de l'infini en x (cf. chapitre V, II.1).

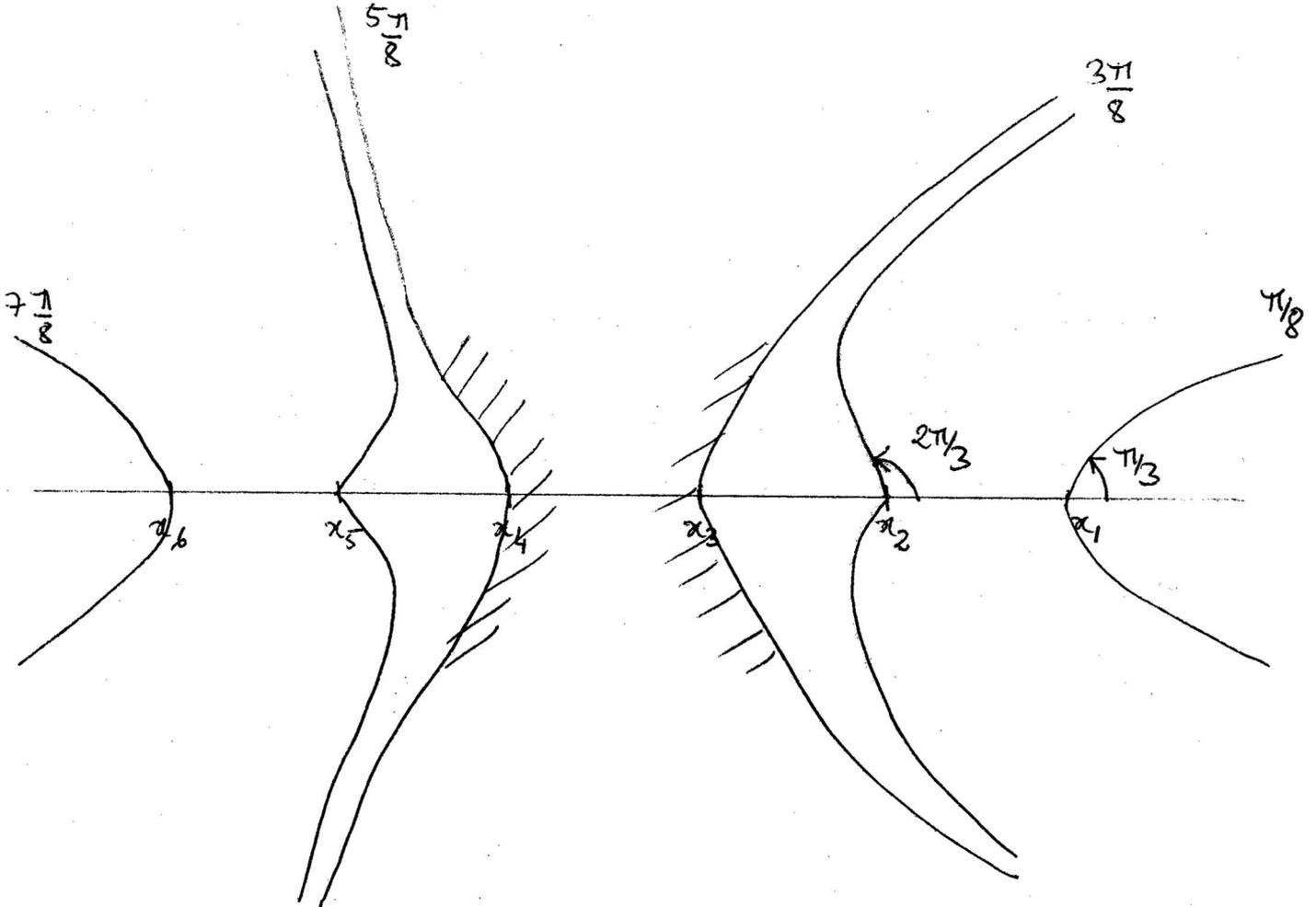
Si P n'a qu'une racine x_0 , $k = m$, et les $k+2$ -branches des lignes de Stokes en x_0 sont les rayons séparants $\arg(x-x_0) = \frac{2\ell+1}{k+2} \pi \quad (\ell \in \mathbb{Z})$.

Si P a plusieurs racines x_1, \dots, x_ℓ , de multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ ($\alpha_1 + \dots + \alpha_\ell = m$) on a $\alpha_i + 2$ lignes de Stokes au voisinage de chaque x_i , qui se raccordent à l'infini aux $m+2$ directions des rayons séparants. Comme $\alpha_1 + 2 + \dots + \alpha_\ell + 2 = m + 2 + 2(\ell-1)$, $2(\ell-1)$ lignes de Stokes doivent se raccorder entre elles, ou s'en aller à l'infini dans la même direction.

Exemple 1 : $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)$, $x_1 > x_2$. Les directions à l'infini sont $\pm \frac{\pi}{4}$, $\pm \frac{3\pi}{4}$. Deux des lignes de Stokes se raccordent pour former le segment x_1x_2 .



Exemple 2 : $P(x) = (x-x_1) \dots (x-x_6)$, $x_1 > x_2 > \dots > x_6$. On a la figure suivante :



c) Domaines canoniques.

Pour connaître l'image d'un domaine Ω par $I(x)$, il est, en gros, suffisant d'étudier I sur le bord du domaine.

Ceci résulte du lemme suivant (par exemple).

Lemme : Soit $P(x)$ un polynôme, et Ω un domaine simplement connexe, délimité par des courbes de Stokes de $y'' - \lambda^2 P(x)y = 0$, ne contenant pas de courbes de Stokes en son intérieur.

Alors, si $x_0 \in \partial\Omega$, l'application $I(x) = \int_{x_0}^x P(t)^{1/2} dt$ envoie Ω sur un demi-plan ou sur une bande verticale. ■

Par exemple, dans l'exemple 1 de a) ($P(x) = x - x_0$) , le domaine

$$-\frac{\pi}{3} < \arg(x-x_0) < \frac{\pi}{3}$$

est envoyé sur le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$: il n'est donc pas canonique. En revanche, le domaine

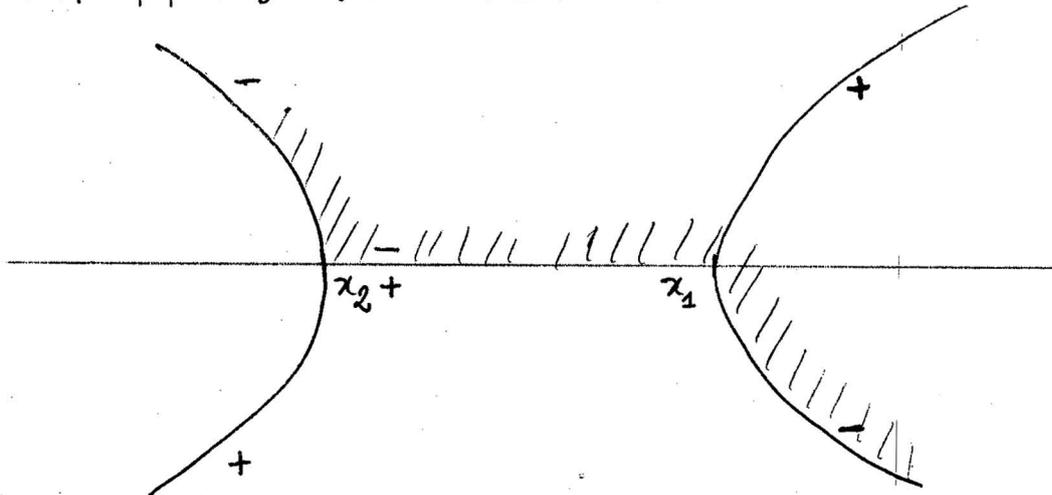
$$-\frac{\pi}{3} < \arg(x-x_0) < \pi$$

est envoyé sur le plan fendu le long de l'axe imaginaire négatif : il est canonique.

Dans le cas de l'exemple 2 ($P(x) = (x-x_1)(x-x_2)$) , on prend

$$I(x) = \int_{x_1}^x P(t)^{1/2} dt . \text{ Les signes de } \operatorname{Im} I(x) \text{ sur les lignes de Stokes issues de } x_2 ,$$

lorsque $|x|$ est grand, sont les suivants :



Le domaine hachuré sur la figure est donc canonique : son image est le plan fendu le long de l'axe imaginaire négatif.

d) Domaines canoniques consistants et inconsistants.

Nous aurons besoin du raffinement suivant.

Définition 3 : Un domaine canonique Ω est consistant si les demi-droites verticales mentionnées dans la définition 2 sont toutes dirigées dans le même sens.

Exemple : Les domaines canoniques mentionnés en c) sont consistants. Le domaine hachuré sur la figure 4 n'est pas canonique, car son image est le plan moins l'axe imaginaire.

3 - Solutions dans des domaines canoniques.

Le premier résultat indique l'existence, dans un domaine canonique D , de solutions w_1 et w_2 du système (VI.1) (§.1), plates en $\frac{1}{\lambda}$.

Théorème : Soit D un domaine canonique. Pour $\lambda > 0$ grand, l'équation $y'' - \lambda^2 P(x)y = 0$ admet dans D des solutions de la forme

$$(VI.4) \quad y_{\pm}(x, \lambda) = P(x)^{-1/4} (1 + F_{\pm}(x, \lambda)) \exp\left[\pm\lambda \int^{\infty} p(t)^{1/2} dt + \int^{\infty} h(t, \pm\lambda) dt\right]$$

où F_{\pm} sont holomorphes dans D , et $F_{\pm}(x, \lambda) \sim 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, uniformément pour $x \in D$.

La fonction h est celle définie au point 1).

Si l'on suppose maintenant D canonique consistant, on a le résultat remarquable suivant.

Théorème : Soit D un domaine canonique consistant. L'équation $y'' - \lambda^2 P(x)y = 0$ admet dans D deux solutions de la forme (VI.4), et F_{\pm} sont à décroissance rapide en $\lambda I(x)$, uniformément pour $x \in D$:

$$\forall N, \exists C_N, \quad |F_{\pm}(x, \lambda)| \leq C_N |\lambda I(x)|^{-N}.$$

CHAPITRE VII - SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES.

Le but de ce chapitre est double : d'une part on montre comment les résultats du chapitre VI peuvent être utilisés pour étudier des équations aux dérivées partielles ou des systèmes ; d'autre part, on développe des méthodes qui permettent d'écrire directement des solutions approchées, d'équations aux dérivées partielles contenant un grand paramètre (et qui sont, à ce titre, plus générales que celles du chapitre VI)

Dans la partie I, on présente la méthode de l'optique géométrique et les objets géométriques qui lui sont liés : variété lagrangienne, flot hamiltonien, etc ...

Dans la partie II, on discute le lien entre les résultats du chapitre VI et certains problèmes de la théorie asymptotique des équations aux dérivées partielles linéaires.

Enfin, dans la partie III, on esquisse la théorie de Maslov.

I - La Méthode de l'optique géométrique.

1 - Schéma de la méthode.

a) Dans toute la suite, nous emploierons les notations et définitions suivantes :

$$\cdot \partial_i = \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} , \quad D_j = D_{x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j} ,$$

• Un multi-indice α est un n-uple d'entiers $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ($\alpha_i \in \mathbb{N}$) : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ est le module de α .

$$\cdot \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n! , \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} , \quad \partial_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} , \text{ etc ...}$$

• Un opérateur différentiel d'ordre m ($m \in \mathbb{N}$) sera de la forme

$$P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha ,$$

où les $a_\alpha(x)$ sont des fonctions, dites "coefficients" de P (supposées ici assez régu-

lières).

• L'opérateur $P_m(x, D_x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ est la "partie principale" de P , tandis que les termes de $P - P_m$ sont les "termes d'ordre inférieur" de P .

• Le symbole $p(x, \xi)$ de P est le polynôme (en ξ)

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \quad (\xi \in \mathbb{C}^n),$$

• Le symbole de P_m est le "symbole principal" de P : il est homogène (en ξ) de degré m .

• La transformée de Fourier de $u(x)$ est la fonction $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) dx$.

• On a $\widehat{D_j u}(\xi) = \xi_j \hat{u}(\xi)$, donc $\widehat{D_x^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$ (c'est la raison de l'usage de D_j au lieu de ∂_j).

La formule d'inversion de Fourier s'écrit $u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi$.

b) Nous considérons des opérateurs différentiels contenant un "grand paramètre" τ , de la forme :

$$P(x, D_x, \tau) = \sum_{|\alpha|+k \leq m} a_{k\alpha}(x) D_x^\alpha \tau^k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

Il est souvent commode d'introduire le symbole $D_\tau = \frac{1}{\tau} D_x$, en sorte que l'opérateur $\tau^{-m} P$ s'écrit

$$\tau^{-m} P = \sum_{|\alpha| \leq m} b_\alpha(x, \tau) D_\tau^\alpha,$$

où $b_\alpha(x, \tau) = \frac{a_{k\alpha}(x)}{\tau^{m-(k+|\alpha|)}}$ est un polynôme en $\frac{1}{\tau}$.

• Nous appelons symbole principal de P le polynôme $P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|+k=m} a_{k\alpha}(x) \xi^\alpha$.

Attention ! p_m n'est pas homogène ! on peut l'obtenir en ne gardant des b_α que les termes principaux non nuls pour $\tau = \infty$, et en remplaçant D_τ par la lettre ξ . Ou encore, on accorde au paramètre τ la même importance qu'à une dérivation ou collecte les termes "homogènes" de degré m , et on prend $\tau = 1$.

Exemple 1 : Une équation différentielle $y'' - \tau^2 q(x) y = 0$ s'écrit $(-D_x^2 - \tau^2 q(x))y = 0$; le symbole principal de $-D_x^2 - \tau^2 q(x)$ est $p_2(x, \xi) = -\xi^2 - q(x)$.

Exemple 2 : Soit $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ (opérateur appelé "Laplacien" dans \mathbb{R}^n). L'équation $\Delta u + \tau^2 u = 0$ est dite "équation des ondes réduite", son symbole est $p_2(x, \xi) = -|\xi|^2 + 1$.

Exemple 3 : Si P ne contient pas de paramètre, son symbole principal est celui défini en a).

c) Optique géométrique.

C'est une méthode permettant de construire, dans certains cas, des solutions formelles (comme séries en $\frac{1}{\tau}$) de $Pu = 0$, où P est comme en b).

Ces solutions sont de la forme

$$u = e^{i\tau\varphi(x)} \left(u_0(x) + \frac{u_1(x)}{\tau} + \dots \right), \text{ où } \varphi \text{ (la "phase")} \text{ et les } u_j$$

(coefficients de l'amplitude) sont à déterminer.

i) En ordonnant les puissances de τ dans l'expression $e^{-i\tau\varphi} P(e^{i\tau\varphi} a)$ (a fonction arbitraire), on définit des opérateurs $q_j(x, D_x)$ tels que

$$(1) \quad e^{i\tau\varphi} P(e^{i\tau\varphi} a) = \tau^m q_0(x, D_x) a + \tau^{m-1} q_1(x, D_x) a + \dots + q_m(x, D_x) a.$$

On voit facilement que $q_j(x, D_x)$ est un opérateur différentiel d'ordre j (car une dérivée d'ordre j de a , provenant d'un certain terme $D_x^\alpha \tau^k$ de P , ne peut être accompagnée d'une puissance de τ supérieure à $k + |\alpha| - j \leq m - j$).

ii) Les coefficients des termes principaux $\tau^m q_0(x, D_x) a$ et $\tau^{m-1} q_1(x, D_x) a$ sont d'une

importance particulière.

• En faisant porter sur $e^{i\tau\varphi}$ toutes les dérivations d'un terme $D_x^\alpha \tau^k$ de P , on obtient $\tau^{k+|\alpha|} (\nabla\varphi)^\alpha$ ($\nabla\varphi = (\partial_1\varphi, \dots, \partial_n\varphi)$ est le gradient de φ). Donc

$$(2) \quad q_0(x, D_x) = p_m(x, \nabla\varphi) .$$

• Les termes d'ordre un de $q_1(x, D_x)$ ne peuvent être obtenus qu'à partir d'un terme $D_x^\alpha \tau^k$ de P , $|\alpha| + k = m$, en faisant porter sur a une dérivée détachée de D_x^α , tandis que les autres portent sur $e^{i\tau\varphi}$; ce sont donc $\sum_j \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j} (x, \nabla\varphi) D_j$.

A l'aide de la formule de Leibniz, on calcule également les termes d'ordre 0 de q_1 :

$$(3) \quad q_1(x, D_x) = \sum_j \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j} (x, \nabla\varphi) D_j + \frac{1}{2i} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_j \partial \xi_k} (x, \nabla\varphi) \partial_{j,k} \varphi + p_{m-1}(x, \nabla\varphi) ,$$

$$\text{où } p_{m-1}(x, \xi) = \sum_{|\alpha|+k=m-1} a_{k\alpha}(x) \xi^\alpha .$$

iii) On procède alors comme suit :

1ère étape : On cherche φ telle que $p_m(x, \nabla\varphi) = 0$. (4)

Cette équation est l'équation eikonale (ou équation de phase), et une solution φ de (4) est appelée une fonction caractéristique de P .

Tout le paragraphe 2) de ce chapitre est consacré à sa résolution.

2ème étape : Supposons que, pour la fonction φ trouvée à la 1ère étape, l'opérateur q_1 (que nous appellerons "équation de transport") ait les deux propriétés suivantes :

α) Il existe une fonction non identiquement nulle u_0 , $q_1(x, D_x)u_0 = 0$.

β) Pour toute fonction v , il existe une solution u de $q_1(x, D_x)u = v$.

Nous prenons alors $a(x) = a(x, \tau) = u_0(x) + \frac{u_1(x)}{\tau} + \dots$, où les fonctions $u_j(x)$ satis-

font aux relations :

$$(5) \quad \begin{cases} q_1(x, D_x)u_0 = 0 \\ q_1(x, D_x)u_1 + q_2(x, D_x)u_0 = 0 \\ \dots \\ q_1(x, D_x)u_\ell + \dots + q_m(x, D_x)u_{\ell+1-m} = 0 \end{cases}$$

(si $k < 0$, $u_k \equiv 0$).

L'hypothèse β) assure qu'il est possible de trouver successivement des u_j ($j \geq 1$) vérifiant (5).

L'expression formelle $u = e^{i\tau\varphi(x)} (u_0 + \frac{u_1}{\tau} + \dots)$ est alors une solution (formelle) de $Pu = 0$, en ce sens que $Pu = 0$ comme série formelle en $\frac{1}{\tau}$.

d) Remarques.

i) Si P ne contient pas le paramètre τ , son introduction peut sembler quelque peu arbitraire. En fait, dans ce cas, on peut présenter la construction de c) de la façon suivante :

Soit E_j ($j \geq 0$) une famille de fonctions d'une variable telles que $E'_j = E_{j-1}$ ($j \geq 1$; E_0 est arbitraire) ; Si φ satisfait l'équation eikonale (3) et les u_j les relations (5), alors $u = \sum_{j \geq 0} E_j(i\varphi)u_j(x)$ est une solution formelle de $Pu = 0$ en ce sens que les coefficients de $E_0^{(m)}(i\varphi), \dots, E_0(i\varphi), E_1(i\varphi), \dots, E_j(i\varphi)$, etc ... dans l'expression de Pu sont tous nuls. La construction de c) correspond aux choix $E_0(t) = e^{\tau t}$, $E_j(t) = \frac{e^{\tau t}}{\tau^j}$ ($j \geq 1$). Ce qui est remarquable, c'est que les mêmes φ et u_j servent, quelque soit E_0 , pour obtenir des solutions formelles.

ii) La méthode de l'optique géométrique réduit, en fait, l'étude de P à celle d'équations du premier ordre (à savoir l'équation eikonale et l'équation de transport). Si P est lui-même d'ordre 1 ($m = 1$), elle n'apporte rien.

2 - Résolution de l'équation de phase $p_m(x, \nabla\varphi) = 0$.

a) Remarques introductives.

• Si $m = 1$, l'équation $p_m(x, \nabla\varphi) = 0$ s'écrit $\sum_j a_j(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + b(x) = 0$. Une telle équation n'a pas, en général, de solutions, si les coefficients a_j sont complexes.

Si $b \equiv 0$, il peut arriver que les seules solutions de l'équation soient $\varphi = \text{cte}$, auquel cas q_1 est d'ordre 0 et ne peut satisfaire à la fois α) et β) (cf. 1), c), iii)).

Il n'y a que deux cas favorables : les a_j sont réels, ou bien les a_j et b sont analytiques en x .

• Si les a_j sont réels, l'équation est résolue en intégrant le long des courbes intégrales du champ $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, supposé non-nul. En effet, localement, on peut choisir des coordonnées pour lesquelles $X = \frac{\partial}{\partial y_1}$: on a alors

$$\varphi(y) = - \int_{\alpha}^{y_1} b(t, y_2, \dots, y_n) dt + \psi(y_2, \dots, y_n) ,$$

où ψ est une fonction arbitraire égale à φ sur le plan $y_1 = \alpha$.

• Si les a_j et b sont analytiques, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Kovalevski, que nous rappelons :

Théorème : Soit $P(x, D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques au voisinage de $x = 0$, et tel que la surface $x_n = 0$ est non-caractéristique pour P (c'est-à-dire $p_m(0, (0, \dots, 0, 1)) \neq 0$). Alors pour toute $f(x)$ analytique près de $x = 0$, et toutes $u_j(x_1, \dots, x_{n-1})$, analytiques près de 0 ($j = 0, \dots, m-1$), il existe une unique fonction analytique u (au voisinage de $x = 0$) telle que

$$Pu = f , \quad D_n^j u = u_j \quad \text{pour } x_n = 0 , \quad 0 \leq j \leq m-1 .$$

Dans toute la suite, nous supposerons que le symbole principal p_m de P est réel (i.e. les coefficients de la partie principale de P sont réels).

b) Un peu de géométrie symplectique.

• Soit X une variété (réelle) de dimension n : son fibré cotangent $T^*(X)$ est l'ensemble des 1-formes différentielles sur X , la fibre au-dessus d'un point $x \in X$ étant l'espace des formes linéaires sur l'espace tangent à X en x (noté $T_x X$).

Si (x_1, \dots, x_n) sont des coordonnées locales près de x_0 , toute forme linéaire sur $T_{x_0} X$ s'écrit, de façon unique, $\xi = \sum_i \xi_i dx_i$. Les (x, ξ) sont des coordonnées locales privilégiées sur $T^*(X)$.

• Le symbole $p_m(x, \xi)$ introduit en 1) est une fonction sur une partie de $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_x^n + \mathbb{R}_\xi^n$.

Si l'on avait développé une théorie des opérateurs sur une variété X (au lieu de \mathbb{R}_x^n), on aurait introduit le symbole p_m comme une fonction sur $T^*(X)$. Ou, si l'on préfère : un changement de coordonnées $y = y(x)$ induit un changement de coordonnées $(y, \eta) = (y(x), \eta(x, \xi))$ sur $T^*(\mathbb{R}^n)$ (à savoir : une forme α s'écrit $\sum \xi_j dx_j$ ou $\sum \eta_j dy_j$) et si $q_m(y, \eta)$ est le symbole principal de l'opérateur $Q(y, D_y)$ transformé de $P(x, D_x)$, on a $q_m(y(x), \eta(x, \xi)) = p_m(x, \xi)$.

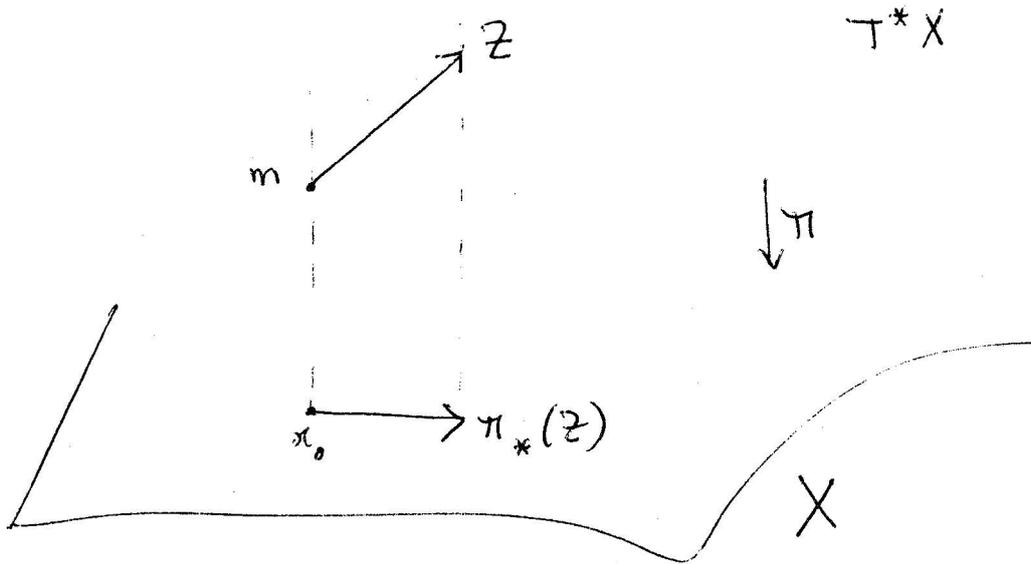
C'est la raison pour laquelle nous considérons p_m sur $T^*(\mathbb{R}^n)$.

• On appelle 1-forme fondamentale sur $T^*(X)$ la forme ω définie par :

$$\omega_m(Z) = \phi(m) (\Pi_* Z) .$$

Expliquons cette formule rébarbative : m est un point de $T^*(X)$, c'est-à-dire le couple formé d'un point x_0 de X et d'une forme linéaire sur $T_{x_0} X$. Ce point x_0 est noté $\Pi(m)$

(Π est dite projection de $T^*(X)$ sur sa "base" X), et cette forme $\phi(m)$; quant à Z , c'est un vecteur tangent à $T^*(X)$, auquel s'applique ω_m (la forme ω prise au point m), et $\Pi_* Z$ n'est autre que le vecteur tangent à X en $x_0 = \Pi(m)$, image de Z par l'application linéaire tangente Π_* de Π . La figure est la suivante :



En coordonnées locales \$(x, \xi)\$, \$\Pi(x, \xi) = x\$,

$$\Pi \left(\sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \beta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

et

$$\omega_{(x, \xi)} \left(\sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \beta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) = \sum \alpha_i \xi_i,$$

ce qu'on écrit en abrégé

$$\omega_{(x, \xi)} = \sum_j \xi_j dx_j.$$

• La 2-forme fondamentale sur \$T^*(X)\$ est la forme \$\sigma = -d\omega\$. En coordonnées locales \$(x, \xi)\$, elle s'écrit \$\sigma = \sum_j dx_j \wedge d\xi_j\$, ce qui signifie ceci :

Si \$Z = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \beta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\$ et \$Z' = \sum \alpha'_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \beta'_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\$ sont deux vecteurs tangents à \$T^*(X)\$ en un point \$m\$,

$$\sigma_m(Z, Z') = \sum \alpha_i \beta'_i - \sum \alpha'_i \beta_i = \alpha \cdot \beta' - \beta \cdot \alpha'.$$

Dans les coordonnées utilisées, \$\sigma_m\$ est donc la forme bilinéaire alternée (non-dégénérée) standard sur \$T_m(T^*X) = \mathbb{R}^{2n}\$.

On dit que \$\sigma\$ est la 2-forme symplectique sur \$T^*(X)\$. Cette riche structure de \$T^*(X)\$ nous permet d'introduire encore quelques concepts importants.

• Si p est une fonction réelle sur $T^*(X)$, on note H_p le champ hamiltonien de p , qui est un champ sur $T^*(X)$ défini comme le dual de dp pour σ :

$$\forall Z \in T_m(T^*X), \quad q_m(H_p, Z) = (dp)_m(Z).$$

En coordonnées locales, avec $dp = \sum \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial p}{\partial \xi_i} d\xi_i$,

$$Z = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \beta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad H_p = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum v_i \frac{\partial}{\partial \xi_i},$$

la formule s'écrit

$$u \cdot \beta - \alpha \cdot v = p_x \cdot \alpha + p_\xi \cdot \beta \quad (\forall \alpha, \forall \beta),$$

d'où
$$u = p_\xi, \quad v = -p_x,$$

c'est-à-dire

$$H_p(x, \xi) = \sum \frac{\partial p}{\partial \xi_i}(x, \xi) \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum \frac{\partial p}{\partial x_i}(x, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Il faut noter que le gradient de p , qui est le dual de dp pour le produit scalaire usuel sur $T_m(T^*X)$, n'a pas d'existence géométrique : il dépend des coordonnées.

• Une sous-variété Λ de T^*X est dite lagrangienne si $\sigma|_\Lambda = 0$, et $\dim \Lambda = \dim X = n$. La formule $\sigma|_\Lambda = 0$ signifie que si Z et Z' sont tangents à Λ en $m \in \Lambda$, $q_m(Z, Z') = 0$.

On peut entrevoir le contenu de ce concept grâce au calcul suivant. Supposons qu'il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\Lambda = \{(x, \psi(x)), x \in \mathbb{R}^n\}$: alors Λ est lagrangienne si et seulement si, localement, il existe $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\psi = \nabla \varphi$.

En effet, l'espace tangent à Λ en $m = (x_0, \psi(x_0))$ est l'image de \mathbb{R}^n par la différentielle de l'application $x \rightarrow (x, \psi(x))$, dont la matrice $(2n \times n)$ est

$$A = \begin{pmatrix} \text{id} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0) \end{pmatrix}. \text{ Donc } Z \in T_m \Lambda \text{ signifie}$$

$Z = (U, \frac{\partial \psi}{\partial X} U)$ ($U \in \mathbb{R}^n$, arbitraire). Comme

$$\sigma_m(Z, Z') = U \cdot \frac{\partial \psi}{\partial X} U' - U' \cdot \frac{\partial \psi}{\partial X} U = {}^t U \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^t \right) U' ,$$

Λ est lagrangienne si et seulement si $\frac{\partial \psi}{\partial X}$ est symétrique, c'est-à-dire $\psi = \nabla \varphi$ localement (si l'on veut, un champ irrotationnel est localement un gradient ; ou encore : une 1-forme fermée est localement exacte, etc ...).

c) Phase et variété lagrangienne.

Soit p une fonction réelle sur $T^*(X)$: nous cherchons une phase $\varphi(x)$ telle que $p(x, \nabla \varphi(x)) = 0$ (équation de phase).

L'idée fondamentale consiste en ceci :

- i) Dans un premier temps, on va chercher une variété lagrangienne Λ sur laquelle $p = 0$.
- ii) Là où cette variété est étalée au-dessus de X (c'est-à-dire que Π_* , restreinte à Λ , est injective), c'est le graphe d'une certaine $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $\psi = \nabla \varphi$ localement, autrement dit $p(x, \nabla \varphi(x)) = 0$.

i) La première étape repose sur le lemme suivant :

Lemme : Soit Q une sous-variété de $T^*(X)$ de dimension k , telle que $p|_Q = 0$ et $\sigma|_Q = 0$. Supposons qu'en un point $m \in Q$, H_p ne soit pas tangent à Q .

Alors l'ensemble des courbes intégrales de H_p , issues de $m' \in Q$, voisin de m , forme (localement près de m) une sous-variété \tilde{Q} de dimension $k+1$, telle que $p|_{\tilde{Q}} = 0$ et $\sigma|_{\tilde{Q}} = 0$.

Preuve : Notons $\phi(m, t)$ le flot de H_p , c'est-à-dire l'application ϕ définie par $\frac{d}{dt} \phi(m, t) = H_p(\phi(m, t))$, $\phi(m, 0) = m$. (à m fixé, $\phi(m, t)$ décrit la courbe intégrale de H_p issue de m , lorsque t varie).

- Comme H_p est transverse à Q , \tilde{Q} est, près de m , une sous-variété de dimension $k+1$,

dont les coordonnées locales sont (m, t) (par le théorème des fonctions implicites).

• Comme $H_p p = 0$, p est constante le long des courbes intégrales H_p , donc $p|_{\tilde{Q}} = 0$.

• Nous admettrons que le flot ϕ de H_p conserve σ , c'est-à-dire que, pour $t = t_0$ petit, l'application $\phi_{t_0} : m \rightarrow \phi(m, t_0)$ est telle que $\phi_{t_0}^* \sigma = \sigma$. (les champs dont le flot a cette propriété sont, du reste, localement, des champs hamiltoniens d'une certaine fonction).

Soit alors $Q_{t_0} = \phi_{t_0}(Q)$: l'espace tangent en $\tilde{m} = \phi(m, t_0)$ à \tilde{Q} est la somme directe de $T_{\tilde{m}} Q_{t_0}$ et de $H_p(\tilde{m})$.

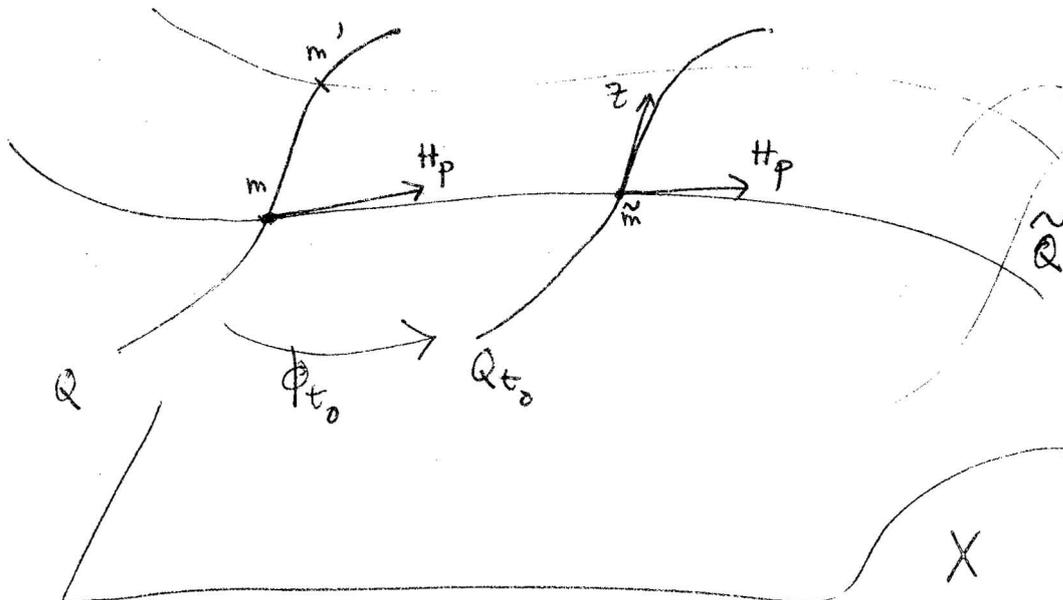
Par bilinéarité, il suffit, pour montrer que $\sigma|_{\tilde{Q}} = 0$, de montrer que $\sigma(Z, Z') = 0$ dans les trois cas suivants :

+ Z et Z' sont colinéaires à H_p en \tilde{m} : $\sigma(Z, Z') = 0$ car σ est alternée.

+ Z et Z' sont tangents à Q_{t_0} : en transportant Z, Z' et σ par ϕ_{t_0} , on est ramené à la situation où Z et Z' sont tangents à Q en m . L'hypothèse donne alors $\sigma(Z, Z') = 0$.

+ $Z \in T_{\tilde{m}} Q_{t_0}$, Z' colinéaire à H_p : $\sigma(Z, Z') = \text{cte } \sigma(H_p, Z) = \text{cte } Z(p) = 0$ car $p = 0$ sur \tilde{Q} .

La figure est la suivante :



Remarquons du reste que si $\sigma|_Q = 0$, l'orthogonal (pour σ) de $T_m Q$ dans $T_m(T^*(X))$ contient $T_m Q$, donc $k \leq n$. Une variété lagrangienne est donc de dimension maximale parmi celles sur lesquelles σ est nulle (appelées isotropes). Dans les hypothèses du lemme, on a donc $k \leq n - 1$.

ii) Supposons maintenant Q de dimension $n - 1$, étalée au-dessus de X , et H_p transverse à Q en m , $\Pi_* H_p \neq 0$ (c'est-à-dire H_p non vertical) : alors $\tilde{Q} = \Lambda$ est le graphe de $\nabla\varphi(x)$ pour une certaine φ réelle, x voisin de $\Pi(m)$.

Cet énoncé fournit le moyen le plus général de construire des solutions φ de l'équation de phase.

Nous verrons plus tard que, dans une certaine mesure, l'étape ii) est inutile, la phase disparaissant pour céder la place à la lagrangienne Λ , étalée ou non au-dessus de X .

Pour l'instant, nous donnons un exemple d'application dans lequel on voit bien que la donnée de la "variété initiale" Q correspond à une "donnée initiale" pour φ .

Proposition : Soit $p(x, \xi)$ une fonction C^∞ réelle de x et ξ (x voisin de 0 dans \mathbb{R}^n , $\xi \in \mathbb{R}^n$), et soit $\psi(x_1, \dots, x_{n-1})$ une fonction C^∞ réelle définie près de l'origine.

Supposons que l'équation $p(0, \nabla\psi(0), \xi_n) = 0$ possède un zéro réel simple ξ_n^0 . Alors il existe, au voisinage de $x = 0$, une unique fonction C^∞ réelle φ , telle que

$$\{ p(x, \nabla\varphi(x)) = 0 \quad , \quad \varphi|_{x_n=0} = \psi \quad , \quad \nabla\varphi(0) = (\nabla\psi(0), \xi_n^0) \} .$$

Preuve : • Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction C^∞ réelle $\xi_n(x')$ telle que $\xi_n(0) = \xi_n^0$ et $p(x', 0, \nabla\psi(x'), \xi_n(x')) = 0$, x' voisin de 0, $x = (x', x_n)$.

• Soit Q la variété de dimension $n-1$

$$Q = \{ (x', 0, \nabla\psi(x'), \xi_n(x')) \quad , \quad x' \text{ voisin de } 0 \}$$

(si φ est solution du problème, nécessairement Λ , graphe de $\nabla\varphi$, doit coïncider avec Q)

au-dessus de $x_n = 0$).

On a $p|_Q = 0$. L'espace tangent à Q est l'ensemble des vecteurs

$$Z = (U, 0, \frac{\partial \psi}{\partial X'} U, U \cdot \nabla \xi_n) , \text{ pour } U \in \mathbb{R}^{n-1} .$$

Donc $\alpha(Z, Z') = U \cdot \frac{\partial \psi}{\partial X'} U' - U' \cdot \frac{\partial \psi}{\partial X'} U = 0$ pour tous $U, U' \in \mathbb{R}^{n-1}$, soit $\alpha|_Q = 0$.

• Comme $H_p = p'_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial X} - p'_x \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}$ et $p'_{\xi_n}(0, \nabla \psi(0), \xi_n^0) \neq 0$, H_p a une composante non-nulle sur $\frac{\partial}{\partial X_n}$, il est donc à la fois non-vertical et transverse à Q .

Les hypothèses de l'étape ii) ci-dessus sont satisfaites : il existe \wedge et $\tilde{\varphi}$, $\wedge = \{(x, \nabla \tilde{\varphi}(x))\}$.

En posant $\tilde{\psi}(x') = \tilde{\varphi}(x', 0)$, on voit que $\nabla \tilde{\psi}(x') = \nabla \psi(x')$, donc $\psi = \tilde{\psi} + C$: la fonction $\varphi = \tilde{\varphi} + C$ est solution du problème. ■

d) Remarque sur l'équation de transport.

Si P est un opérateur différentiel, de symbole principal p_m réel, les courbes intégrales H_{p_m} sont appelées bandes bicaractéristiques de P . Leurs projections sur \mathbb{R}^n sont appelées courbes caractéristiques de P .

Une phase φ pour P a été construite en c) en "intégrant le long des bicaractéristiques de P ".

L'équation de transport de P , dont la partie principale est $\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x, \nabla \varphi(x)) \cdot D_x$, est donc (au facteur $-i$ près) la projection sur \mathbb{R}^n de H_{p_m} pris au point $(x, \nabla \varphi(x))$ de \wedge . On la résoud donc en "intégrant le long des caractéristiques de P ".

Supposons qu'en un point $m = (x, \nabla \varphi(x))$, H_p soit non-nul, mais vertical : la bicaractéristique passant par m ne présente aucune singularité, tandis que l'équation de transport dégénère en x en une équation d'ordre 0. Dans ce cas, la méthode de l'optique géométrique, telle qu'elle est expliquée en 1) c), ne peut s'appliquer. Cette situation se présente "dans la nature" (caustiques), et fera l'objet de la partie III.

Exemple : L'équation d'Airy $y'' - \tau^2 xy = 0$. Le symbole est $p_2(x, \xi) = -\frac{\xi^2}{x} - x$. La variété Λ est déterminée par le fait que $p = 0$: c'est la parabole $x = -\frac{\xi^2}{3}$ dans le plan (x, ξ) . Au dessus de chaque point $x < 0$, il y a deux branches de Λ , chacune d'entre elles correspond à une phase $\varphi(x)$, solution de $\varphi'^2 + x = 0$, i.e. $\varphi = \pm \frac{2}{3} (-x)^{3/2}$. On a $H_p = -2\xi \partial_x + \partial_\xi$, et l'équation de transport correspondant à φ est $\varphi' \partial_x + \varphi''$. Le premier terme $u_0(x)$ de l'amplitude vaut $u_0(x) = (-x)^{-1/4}$ pour $x < 0$.

Au point $\xi = 0$ de Λ , H_p est non-nul et vertical, et l'équation de transport est singulière.

II - Equations différentielles et équations aux dérivées partielles.

1 - Quelques remarques générales.

a) Opérateurs pseudo-différentiels.

Il n'est pas dans notre propos de développer ici la théorie de ces opérateurs, mais nous sommes obligés, par la nature des choses, de donner quelques définitions simples.

Définition : On dit que $p(x, \xi)$, C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, est un symbole classique d'ordre m ($m \in \mathbb{R}$) si

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} p_{m-j}(x, \xi) \quad \text{lorsque } |\xi| \rightarrow +\infty$$

(uniformément en x sur les compacts de \mathbb{R}^n), où les p_k sont des fonctions positivement homogènes en ξ de degré k (i.e. $p_k(x, \lambda\xi) = \lambda^k p_k(x, \xi)$, $\lambda > 0$).

Définition : On appelle opérateur pseudo-différentiel de symbole $p(x, \xi)$ (où p est un symbole classique) l'opérateur (noté $p(x, D_x)$) défini par

$$(Pu)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi, \quad \text{pour } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(comme $\hat{u}(\xi)$ est à décroissance rapide en ξ , l'intégrale a un sens).

Si $p(x, \xi) = p(\xi)$, on dit que P est à coefficients constants ; P est alors simplement

la multiplication par $p(\xi)$ "côté Fourier" : $\hat{P}u(\xi) = p(\xi) \hat{u}(\xi)$.

Bien entendu, si $P(x, D_x)$ est un opérateur différentiel de symbole $p(x, \xi)$, alors P est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $p(x, \xi) = \sum_{j \geq 0}^m P_{m-j}(x, \xi)$ (somme finie).

Remarquons que si $p(x, \xi)$ est à décroissance rapide en ξ ($|\xi| \rightarrow +\infty$), on peut étendre l'action de P aux distributions à support compact $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, et $Pu \in C^\infty$: on dit que P est régularisant. En particulier, si deux symboles p et \hat{p} ont le même développement asymptotique lorsque $|\xi| \rightarrow +\infty$, les opérateurs correspondants diffèrent d'un opérateur régularisant.

b) Transformation de Fourier partielle.

Dans beaucoup de problèmes d'équations aux dérivées partielles, une des variables (que nous noterons t) joue un rôle privilégié par rapport aux autres (notées $x \in \mathbb{R}^n$).

Considérons par exemple un opérateur différentiel $P(t, x, D_t, D_x)$ dont les coefficients ne dépendent que de t : $P = \sum_{k+|\alpha| \leq m} a_{k\alpha}(t) D_t^k D_x^\alpha$. En effectuant une transformation de Fourier par rapport à la variable x uniquement, on transforme l'équation $Pu = f$ en

$$\hat{P} \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi), \quad \text{où } \hat{P} = \sum_{k+|\alpha| \leq m} a_{k\alpha}(t) D_t^k \xi^\alpha.$$

Posons $\xi = r\omega$, où $r = |\xi|$, et $\omega \in S^{n-1}$: on peut considérer

$$\hat{P}(t, D_t) = \sum_{k+|\alpha| \leq m} a_{k\alpha}(t) \omega^\alpha r^{|\alpha|} D_t^k$$

comme une équation différentielle ordinaire contenant le grand paramètre positif r , et en plus le paramètre "neutre" ω . Pour pouvoir appliquer facilement les résultats du chapitre VI, écrivons \hat{P} sous la forme plus familière d'un système du 1er ordre : en posant $y_0 = r^{m-1} v$, $y_1 = r^{m-2} D_t v$, ..., $y_{m-1} = D_t^{m-1} v$, on obtient

$$D_t Y = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ -\frac{A_0}{a_{m,0}} & & & & \\ & & -\frac{A_{m-1}^r}{a_{m,0}} & & \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{f} \end{pmatrix}, \quad \text{, système équivalent}$$

à $\hat{P}v = \hat{f}$. On a supposé ici $a_{m,0} \neq 0$ (i.e. la surface $t = 0$ est non-caractéristique pour P ; cf I. 2 a)), et on note

$$A_k = r \sum_{\alpha} a_{k\alpha} \omega^{\alpha} / r^{m-k-|\alpha|} .$$

En posant $\varepsilon = \frac{1}{r}$, le système homogène s'écrit donc

$$(6) \quad \varepsilon \frac{dY}{dt} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \\ -\frac{A_0}{ra_{m,0}} & & & -\frac{A_{m-1}}{ra_{m,0}} \end{pmatrix} Y = AY, \text{ où les coefficients}$$

$\frac{A_k}{ra_{m,0}}$ sont des polynômes en ε (à coefficients dépendants de t et ω).

c) Application de la théorie dans le cas standard.

Nous nous référons au théorème 4 du chapitre VI (cas $h = 1$).

• Le "cas standard" est celui où la matrice $A_0(t, \omega)$ a ses valeurs propres $i\lambda_j$ simples, c'est-à-dire celui où le polynôme

$$a_{m,0} \tau^m + \sum_{\substack{k+|\alpha|=m \\ k < m}} a_{k\alpha}(t) \omega^{\alpha} \tau^k$$

a ses racines simples en τ , pour tout t voisin de 0 (par exemple) et $\omega \in S^{n-1}$.

Dans la théorie des équations aux dérivées partielles, on dit simplement que "les caractéristiques de P sont simples" (sous-entendu : "en τ ").

On sait alors qu'il existe, localement en ω , m solutions indépendantes de $\hat{P}v = 0$, de la forme

$$v_j(t, \omega, r) = \tilde{v}_j(t, \omega, r) e^{ir \int_0^t \lambda_j(s, \omega) ds} ,$$

où $\tilde{v}_j(t, \omega, r) \sim \hat{v}_j(t, \omega, r) = \sum_{\ell \geq 0} v_{j\ell}(t, \omega) r^{-\ell}, \quad r \rightarrow +\infty.$

• De façon plus générale, si $A_0(t, \omega)$ peut être décomposée en blocs (cf. théorème 2, chapitre VI) (de façon uniforme en (t, ω)), tout le système peut être découplé formellement, à l'aide d'une transformation

$$P = P(t, \omega, r) = \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(t, \omega) r^{-\ell}.$$

d) Il faut bien comprendre le caractère pseudo-différentiel de ces transformations et des systèmes qui en résultent. En effet, on est parti de l'équation $Pu = 0$. Après transformation de Fourier en x , on avait $\hat{P}u = 0$, que l'on écrit sous la forme du système (6) (§b) en posant $y_0 = r^{m-1} \hat{u}, \dots, y_{m-1} = D_t^{m-1} \hat{u}$.

En revenant à la variable x par une transformation de Fourier inverse, on est amené à poser $z_0 = |D_x|^{m-1} u, \dots, z_{m-1} = D_t^{m-1} u$, en sorte que $\hat{Z} = Y$, et le système (6) s'écrit

$$(7) \quad D_t Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \\ B_0 & & & B_{m-1}^{-1} \end{pmatrix} |D_x| Z$$

où B_k est l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, à coefficients constants, dépendant du paramètre t , de symbole $-\frac{A_k}{ra_{m,0}}$.

Si $P = \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(t, \omega) r^{-\ell}$ est telle que le changement $V = PY$ découple (6), le changement $W = RZ$ découple (7), où R est l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 dont le symbole est P :

$$R(t, D_x) = \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(t, \frac{D_x}{|D_x|}) |D_x|^{-\ell}.$$

Dans cette analyse, deux points ont été escamotés :

i) $|\xi|$ n'est pas un symbole, il faut lire en fait $\chi(|\xi|^2) |\xi|$, où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(s) = 0$ pour $s \leq 1$, $\chi(s) = 1$ pour $s \geq 2$. Cet abus de notation est toléré du fait que d'un changement de fonction de troncature χ résulte seulement une modification de l'opérateur par un opérateur régularisant : $|D_x|$ n'est donc défini (dans notre théorie) qu'à un opérateur régularisant près.

ii) Les sommes $\sum P_\ell r^{-\ell}$, $\sum C_\ell \varepsilon^\ell$ etc ... sont formelles. Un aspect fondamental des applications du chapitre VI aux équations aux dérivées partielles est justement que, pour beaucoup d'usages, l'aspect formel des constructions est suffisant. En effet, par un argument similaire à celui du chapitre IV, I.2d, on voit que pour toute suite de symboles homogènes $p_{m-j}(x, \xi)$ ($j \geq 0$), il existe un symbole $p(x, \xi)$ d'ordre m tel que

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} p_{m-j}(x, \xi), \quad |\xi| \rightarrow +\infty.$$

Considérons par exemple le système

$$(7) \quad D_t Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & & 1 \\ B_0 & & & B_{m-1} \end{pmatrix} |D_x| Z \quad \text{de tout à l'heure,}$$

et supposons que les caractéristiques soient simples. Choisissons un symbole d'ordre 0 (matriciel) $P(t, \xi)$ tel que $P(t, \xi) \sim \sum_{\ell \geq 0} P_\ell(t, \omega) r^{-\ell}$, $r \rightarrow +\infty$. La transformation

$W = P(t, D_x) Z$ découple alors le système, en ce sens que le nouveau système est diagonal, à un opérateur de symbole asymptotique à zéro près, c'est-à-dire à un opérateur régularisant près.

Si par exemple on s'intéresse aux singularités C^∞ des solutions de $Pu = f$, on aura ainsi réduit le problème à celui de l'étude des singularités des solutions d'une équation pseudo-différentielle scalaire du 1er ordre de la forme $(D_t - \Pi_1(t, D_x))v = g$ où g sera déduite de f à une fonction C^∞ près, ce qui importe peu.

Ce qui est remarquable, c'est que si l'opérateur P de départ a des coefficients dépendant de x , le même choix d'inconnues $z_j = |D_x|^{m-1-j} D_t^j u$ conduit à un système (où les B_j sont des pseudo-différentiels "généraux"), qui peut être découplé, si P

est à caractéristiques simples. Ce découplage s'effectue à l'aide d'opérateurs pseudo-différentiels comme précédemment, à ceci près que ces opérateurs ne sont plus à coefficients constants, et qu'il n'est pas possible d'utiliser la transformation de Fourier en x : on doit utiliser le calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels, que nous ne discuterons pas ici.

e) Au point d), on a montré que, souvent, les constructions formelles du chapitre VI étaient suffisantes pour l'analyse pseudo-différentielle (C^∞) des problèmes.

Il est bien sûr des cas où l'on doit connaître les solutions pour ξ complexe, et où l'on a besoin de vraies solutions. Considérons par exemple le problème de Cauchy pour l'équation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t^2 - c^2 D_x^2) u = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad , \quad c > 0 \text{ donnée.} \\ u(0, x) = v \\ u_t'(0, x) = w \quad , \quad \text{où } v, w \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) . \end{array} \right.$$

La fonction $\hat{u}(t, \xi)$ est solution de

$$\{ (D_t^2 - c^2 \xi^2) \hat{u} = 0 \quad , \quad \hat{u}(0, \xi) = \hat{v}(\xi) \quad , \quad \hat{u}_t'(0, \xi) = \hat{w}(\xi) \quad ,$$

c'est donc
$$\hat{u}(t, \xi) = e^{ict\xi} \frac{\hat{v} + \hat{w}/ic\xi}{2} + e^{-ict\xi} \frac{\hat{v} - \hat{w}/ic\xi}{2} .$$

Supposons que v et w soient à support dans l'intervalle $|x| \leq M$: on a

$$|\hat{v}(\xi)| \leq cte(1+|\xi|)^\alpha e^{M|\operatorname{Im} \xi|} \quad ,$$

$$|\hat{w}(\xi)| \leq cte(1+|\xi|)^\beta e^{M|\operatorname{Im} \xi|} \quad , \quad \xi \in \mathbb{C} .$$

On a donc pour $\hat{u}(t, \xi)$ une majoration de la forme

$$|\hat{u}(t, \xi)| \leq cte(1+|\xi|)^\gamma e^{(c|t|+M)|\operatorname{Im} \xi|} \quad ,$$

et le théorème de Paley-Wiener implique que $u(t, \cdot)$ est à support dans l'intervalle

$$|x| \leq M + c|t|.$$

Autrement dit, le support des données initiales se propage avec la vitesse c .

2 - Optique géométrique et phases "par morceaux".

a) Opérateurs hyperboliques stricts

i) Considérons à nouveau un opérateur à coefficients indépendant de x de la forme

$$P = \sum_{k+|\alpha| \leq m} a_{k\alpha}(t) D_t^k D_x^\alpha.$$

Si $v(t)$ est une solution de l'équation $\hat{P} v = 0$ (où $\hat{P} = \sum a_{k\alpha} D_t^k \xi^\alpha$), alors $u = e^{ix\xi} v(t, \xi)$ est une solution de $P u = 0$.

Si P est à caractéristiques simples, on obtient ainsi, localement en ω , m solutions de la forme

$$u_j = e^{ix\xi + ir \int_0^t \lambda_j(s, \omega) ds} \tilde{v}_j(t, \omega, r),$$

où
$$\tilde{v}_j \sim \sum_{k \geq 0} v_{jk}(t, \omega) r^{-k}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

• Définition : On dit que P est strictement hyperbolique par rapport à la surface $\{t = 0\}$ si les racines $\lambda_j(t, \omega)$ de l'équation $\sum_{k+|\alpha|=m} a_{k\alpha}(t) \tau^k \omega^\alpha = 0$ sont réelles et simples (pour t voisin de 0 et $\omega \in S^{n-1}$).

Les m solutions de P s'écrivent alors $u_j = e^{ir \varphi_j(t, x, \omega)} \tilde{v}_j(t, \omega, r)$, avec la phase $\varphi_j(t, x, \omega) = x\omega + \int_0^t \lambda_j(s, \omega) ds$ réelle.

ii) Comparons ce résultat avec celui que donne l'application de la méthode de l'optique géométrique (partie I).

• Pour résoudre l'équation de phase $p_m(t, \nabla\varphi) = 0$, on choisit une racine

$\lambda_j(t, \xi) = \lambda_j(t, \omega) |\xi|$ et l'on résoud

$$\begin{cases} \varphi'_t = \lambda_j(t, \varphi'_x) \\ \varphi(0, x) = x\omega, \quad \omega \in S^{n-1}, \end{cases}$$

conformément à la méthode générale (I,2) c). La solution n'est autre que

$$\varphi_j(t, x, \omega) = x\omega + \int_0^t \lambda_j(s, \omega) ds, \text{ trouvée précédemment.}$$

• L'équation de transport a pour partie principale $\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(t, \nabla \varphi) D_x$, qui est proportionnelle à un champ réel non nul, car $\frac{\partial p_m}{\partial \tau} \neq 0$ (racines simples).

On peut donc trouver des fonctions $v_{j0}(t, \omega)$, $v_{j1}(t, \omega), \dots$ telles que

$$u_j = e^{ir \varphi_j} \left(v_{j0} + \frac{v_{j1}}{r} + \dots \right)$$

soit une solution formelle de $P u = 0$ (ici on appelle r le grand paramètre).

• Les différences sont les suivantes :

+ La méthode de l'optique géométrique ne donne que des solutions formelles, et non des vraies solutions.

+ En revanche, la méthode de l'optique géométrique s'applique de la même façon si les coefficients de P dépendent de x : la phase sera solution de

$$\begin{cases} \varphi'_t = \lambda_j(t, x, \varphi'_x) \\ \varphi(0, x) = x \cdot \omega \end{cases},$$

et les v_{jk} dépendront aussi de x . Dans l'approche par les équations différentielles à paramètre, on obtient la phase φ_j en "recollant" les morceaux $x\xi$ et $\int_0^t \lambda_j(s, \omega) ds$. On n'a pas la vue géométrique que donne la construction de la variété lagrangienne.

b) Opérateurs à caractéristiques de multiplicité constante.

Définition : On dit que la caractéristique $\tau = \lambda_j(t, x, \omega)$ de P est de multiplicité constante si la multiplicité de λ_j comme racine de $\sum_{|\alpha|+k=m} a_{k\alpha}(t, x) \tau^k \omega^\alpha = 0$ est constante (pour (t, x) voisins de 0, $\omega \in S^{n-1}$).

Considérons pour simplifier un opérateur P de la forme

$$P = D_t^m + \sum_{k+|\alpha| < m} a_{k\alpha}(t) D_t^k D_x^\alpha ;$$

P n'a qu'une caractéristique $\tau = 0$, de multiplicité constante m .

i) Si $a_{k\alpha} = \text{cte}$, on trouve des solutions de $Pu = 0$ sous la forme $u = e^{ix\xi + it\mu(\xi)}$, où μ est racine du polynôme $\mu^m + \sum_{k+|\alpha| < m} a_{k\alpha} \xi^\alpha \mu^k$. L'expression de μ en série de

Puiseux est de la forme

$$\mu(\xi) = \sum_{j=0}^p c^j(\omega) r^{\sigma_j} + \sum_{k \geq 0} d^k(\omega) r^{-k/q},$$

où q est un dénominateur commun aux rationnels $\sigma_j > 0$, et $p \in \mathbb{N}$. La solution u est donc de la forme

$$u = e^{ix\xi + it \sum_j c^j(\omega) r^{\sigma_j}} v$$

où

$$v = e^{\sum_{k \geq 0} d^k(\omega) r^{-k/q}} = \sum_{k \geq 0} v_k(\omega) r^{-k/q}, \quad v_0 \neq 0.$$

La "phase" $\varphi = x\xi + t \sum_j c^j(\omega) r^{\sigma_j}$ n'est plus homogène (de degré 1) en ξ , comme elle l'était en a).

• Considérons par exemple $P = D_t^2 + a D_x + b D_t + c$ (a, b, c constantes, $x \in \mathbb{R}$).
On a $\mu(\xi) = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, avec $\Delta = b^2 - 4c - 4a\omega$.

Si $a \neq 0$, $p = 0$ et $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, $c_0(\omega) = \pm (a\omega)^{1/2}$.

Si $a = 0$ (on dit alors que la "condition de Levi" est satisfaite), $p = 0$, $c_0 \equiv 0$.

• Si l'on pose $y_0 = D_x u$, $y_1 = D_t u$, on obtient le système

$$D_t Y = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ -a - c D_x^{-1} & -b \end{pmatrix} Y .$$

En copiant la procédure de shearing du chapitre VI, IV.1), on essaye un changement pseudo-différentiel d'inconnues

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |D_x|^g \end{pmatrix} Z .$$

Un calcul rapide montre qu'en prenant $g = -\frac{1}{2}$, on obtient le système

$$D_t Z = \begin{pmatrix} 0 & |D_x|^{-1/2} D_x \\ -a |D_x|^{1/2} & 0 \end{pmatrix} + \text{termes d'ordre } 0 ,$$

qui est à caractéristiques simples si $a \neq 0$. Les "bonnes" inconnues à prendre si $a \neq 0$ sont donc $z_0 = D_x u$, $z_1 = |D_x|^{1/2} D_t u$.

ii) D'après i), on sait que la méthode de l'optique géométrique ne s'applique pas à des opérateurs tels que P , sauf dans des cas très spéciaux (comme celui de l'exemple avec condition de Levi), où les termes $\sum c^j(\omega) r^j$ n'existent pas.

En revanche, il est possible de construire, dans le cas général où les coefficients de P dépendent aussi de x , des solutions formelles de $Pu = 0$ de la forme

$$u = e^{i \sum_{j=0}^p \ell^j(t,x,\omega) r^{\sigma_j}} \sum_{k \geq 0} u_k(t,x,\omega) r^{-k/q} .$$

En prenant $\sigma_0 > \sigma_1 > \dots > \sigma_p > 0$, on aura $\sigma_0 = 1$, $\ell^0(t,x,\omega) = \ell^0(x,\omega)$ arbitraire. Les autres ℓ^j et σ_j sont déterminés de telle sorte que les u_k puissent être obtenus

successivement en résolvant les "équations de transport". Voyons un exemple de cette procédure.

Exemple : $P = D_t^2 + a(t,x)D_x + b(t,x)D_t + c(t,x)$, ($x \in \mathbb{R}$). En posant $u = e^{ir\ell^0(x)}v$, l'équation $Pu = 0$ s'écrit

$$D_t^2 v + b D_t v + cv + a D_x v + r \ell_x^{0'} v = 0 .$$

Le terme $r \ell_x^{0'} v$ étant dominant et n'étant équilibré par aucun autre, on ne peut trouver à l'équation en v de solutions $v = \sum_{k \geq 0} v_k r^{-k}$. On pose donc $v = e^{i\ell^1 r^{\sigma_1}} w$;

l'équation en w est

$$D_t^2 w + 2\ell_t^1 r^{\sigma_1} D_t w - i\ell_{tt}^1 r^{\sigma_1} w + (\ell_t^1)^2 r^{2\sigma_1} w + a D_x w + a\ell_x^1 r^{\sigma_1} w + b D_t w + b\ell_t^1 r^{\sigma_1} w + c w + r\ell_x^0 w = 0 .$$

En prenant $2\sigma_1 = 1$, on équilibre les termes $(\ell_t^1)^2 r^{2\sigma_1} w$ et $r\ell_x^0 w$: on choisit ℓ^1 telle que $(\ell_t^1)^2 = -\ell_x^0$, et on cherche w sous la forme $w = \sum_{k \geq 0} w_k r^{-k/2}$. "L'équation de transport" est $2\ell_t^1 D_t w_0 + w_0(a\ell_x^1 + b\ell_t^1 - i\ell_{tt}^1) = 0$. On aboutit à une solution de la forme cherchée pourvu que $\ell_x^0 \neq 0$, i.e. $\ell_t^1 \neq 0$, ce qui assure que l'équation de transport n'est pas singulière.

3 - Points de transition.

Nous nous plaçons à nouveau dans le cadre de 1) b).

a) Essentiellement, $t = 0$ est un point de transition pour le système

$$(6) \quad \varepsilon \frac{dY}{dt} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ -\frac{A_0}{ra_{m0}} & \dots & \dots & \dots & -\frac{A_{m-1}}{ra_{m0}} \end{pmatrix} Y = AY$$

lorsque deux valeurs propres de $A_0(t, \omega)$ sont égales pour $t = 0$ (on dit qu'on a une "caractéristique double").

C'est le cas par exemple pour $P = D_t^2 \pm t^2 D_x^2$ ($x \in \mathbb{R}$). Le traitement de $\hat{P} = D_t^2 + \varepsilon t^2 \xi^2$, ($\varepsilon = \pm 1$), consiste alors à poser $s = \lambda t |\xi|^{1/2}$, $\lambda^2 = 2\varepsilon^{1/2}$, pour se ramener à l'étude (cette fois globale en s) de l'équation de Weber $\partial_s^2 - \frac{s^2}{4}$.

D'après le chapitre I, on obtient (pour $\varepsilon = -1$ par exemple) des solutions v de $\hat{P}v = 0$ de la forme

$$v_{\pm} = e^{\pm \frac{s^2}{4}} q_{\pm}(s) = e^{\pm i \frac{t^2}{2} |\xi|} q_{\pm}(i\sqrt{2} t |\xi|^{1/2}),$$

où $q_{\pm}(s)$ se comportent lorsque $|s| \rightarrow +\infty$ comme des symboles classiques.

Les solutions correspondantes u_{\pm} de $Pu = 0$ sont

$$u_{\pm} = e^{ix\xi \pm i \frac{t^2}{2} |\xi|} q_{\pm}(i\sqrt{2} t |\xi|^{1/2}).$$

On y distingue la phase $\varphi = x\omega \pm \frac{t^2}{2}$, reconstituée par morceaux à partir de l'équation différentielle (c.f. 2)) ; l'amplitude $q_{\pm}(i\sqrt{2} t |\xi|^{1/2})$ n'est un symbole classique que pour $t \neq 0$: on n'aurait donc pas pu obtenir ces solutions en appliquant la méthode de l'optique géométrique telle qu'elle est présentée en 1). On notera que l'obstruction porte ici sur l'amplitude, alors qu'en 2) b. ii), elle portait sur la phase.

b) Dans l'étude des équations aux dérivées partielles générales, il se présente d'autres sortes de points de transition : ceux qui surviennent pour $\omega = \omega_0$, ou $x = x_0$.

Ceux là sont ignorés de la théorie des équations différentielles. Par exemple, si $P = D_t^2 + D_{x_1}^2 - D_{x_2}^2$ ($n = 2$), le polynôme $\tau^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2$ a deux racines distinctes pour $|\xi_1| \neq |\xi_2|$, qui viennent se confondre en $\tau = 0$ pour $|\xi_1| = |\xi_2|$; si $P = D_t^2 + x^2 D_x^2$, les racines $\tau = \pm i|x| |\xi|$ viennent se confondre pour $x = 0$.

Pour classer les différents cas possibles, on considère l'ensemble $\Sigma = \{(t, \tau, x, \xi), \tau \text{ racine double de } p_m(t, x, \tau, \xi) = 0\}$ de $T^* \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$, et on étudie ses propriétés géométriques : est-ce une variété ? quel est le rang de la 2-forme fondamentale σ sur Σ ? etc ...

III - Esquisse de la théorie de Maslov.

1 - Caustiques.

a) On se place dans la situation suivante : on suppose que dans une certaine expérience d'optique, tous les rayons lumineux se trouvent envelopper une surface convexe (C). Pour rendre compte de cette expérience mathématiquement, on cherche une solution u de l'équation des ondes réduite $(\Delta + \tau^2)u = 0$, de la forme $u = e^{i\tau\varphi} \hat{u}$: τ est la fréquence, et $\nabla\varphi(x)$ représente la direction du rayon lumineux passant par x . Du côté de la caustique (C) où il y a de la lumière, φ devra être réelle, et de l'autre côté, u devra être à décroissance rapide en τ (zone d'ombre).

• Limitons nous à une étude dans le plan : (C) est une courbe convexe, d'équation $\rho_1(x) = 0$ ($\nabla\rho_1 \neq 0$, $\rho_1 > 0$ à "l'extérieur" de (C)). La méthode de l'optique géométrique conduit à chercher la phase φ solution de $|\nabla\varphi| = 1$, le premier terme $u_0(x)$ de l'amplitude \hat{u} satisfaisant l'équation de transport $2\nabla\varphi \cdot \nabla u_0 + (\Delta\varphi)u_0 = 0$. La difficulté est que l'amplitude u_0 ainsi calculée devient infinie sur (C) (un peu comme dans l'exemple I, 2 d)), c'est-à-dire que l'optique géométrique ne permet pas de représenter la solution u "physique" au voisinage de (C).

b) Dans l'esprit du chapitre VI, parties IV et V, nous cherchons la solution u sous

$$\text{la forme } u = e^{i\tau\theta(x)} \left\{ g_0(x) V(\tau^{2/3} \rho(x)) + \frac{g_1(x)}{i\tau^{1/3}} V'(\tau^{2/3} \rho(x)) \right\},$$

où V est une solution de $V''(t) + tV(t) = 0$ (c'est-à-dire une fonction d'Airy de $-t$), g_0 et g_1 sont des amplitudes, et τ et θ des phases à déterminer.

On obtient

$$e^{-i\tau\theta(x)} (\Delta + \tau^2)u = -\tau^2 g_0 V \left[|\nabla\theta|^2 + \rho |\nabla\rho|^2 - 1 \right] - \frac{\tau^{5/3}}{i} g_1 V' \left[|\nabla\theta|^2 + \rho |\nabla\rho|^2 - 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + i\tau^{5/3} g_0 V' \left[2 \nabla \theta \cdot \nabla \rho \right] + k^{4/3} g_1 V'' \left[2 \nabla \theta \cdot \nabla \rho \right] \\
 & + i\tau V \left[2 \nabla \theta \cdot \nabla g_0 + (\Delta \theta) g_0 + 2\rho \nabla \rho \cdot \nabla g_1 + \rho (\Delta \rho) g_1 + |\nabla \rho|^2 g_1 \right] \\
 & + \tau^{2/3} V' \left[2 \nabla \rho \cdot \nabla g_0 + (\Delta \rho) g_0 + 2 \nabla \theta \cdot \nabla g_1 + (\Delta \theta) g_1 \right] + V \Delta g_0 + \frac{V'}{i\tau^{1/3}} \Delta g_1 = H V + K V'.
 \end{aligned}$$

En ordonnant H et K par rapport aux puissances de τ , et en écrivant que les coefficients des séries obtenues sont tous nuls (exactement comme au chapitre VI, partie V, 1)), on obtient

$$(8) \quad \begin{cases} |\nabla \theta|^2 + \rho |\nabla \rho|^2 - 1 = 0 \\ 2 \nabla \theta \cdot \nabla \rho = 0 \end{cases}$$

puis

$$(9) \quad \begin{cases} 2 \nabla \theta \cdot \nabla g_0 + (\Delta \theta) g_0 + 2\rho (\nabla \rho) \nabla g_1 + \rho (\Delta \rho) g_1 + |\nabla \rho|^2 g_1 = 0 \\ 2 \nabla \rho \cdot \nabla g_0 + (\Delta \rho) g_0 + 2 \nabla \theta \cdot \nabla g_1 + (\Delta \theta) g_1 = 0 \end{cases}$$

• Analysons les "équations de phase" (8) : en les combinant, on obtient les équations équivalentes

$$(10) \quad (\nabla \theta \pm \rho \nabla \rho)^2 = 1, \text{ c'est-à-dire } |\nabla \varphi_{\pm}|^2 = 1, \text{ si l'on pose } \varphi_{\pm} = \theta \pm 2/3 \rho^{3/2}.$$

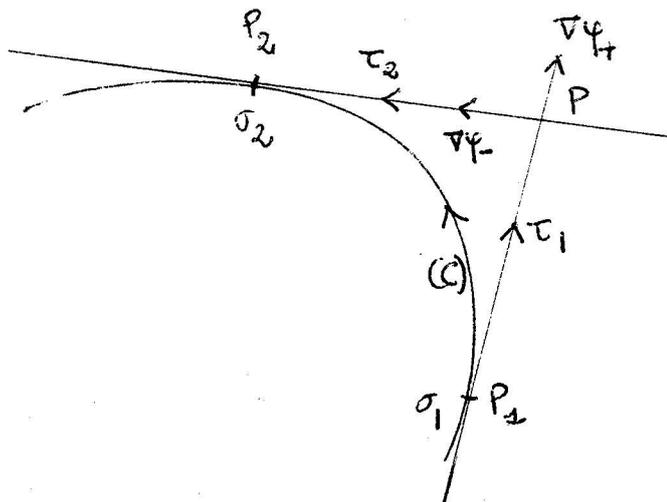
• De même, en combinant les "équations de transport" (9), on obtient

$$(11) \quad 2 \nabla \varphi_{\pm} \cdot \nabla G_{\pm} + (\Delta \varphi_{\pm} \mp \frac{1}{2} \rho^{-1/2} |\nabla \rho|^2) G_{\pm} = 0, \text{ où } G_{\pm} = g_0 \pm \sqrt{\rho} g_1.$$

On observe que ces nouvelles équations de transport sont modifiées par rapport à l'équation $2 \nabla \varphi \cdot \nabla u_0 + (\Delta \varphi) u_0 = 0$ que donne l'optique géométrique usuelle.

c) Géométrie des rayons et calcul de θ, ρ .

La figure est la suivante :



les droites PP_1 et PP_2 sont les deux rayons qui passent par un point P extérieur à la caustique (C) . On oriente (C) , et σ est l'abscisse curviligne mesurée sur (C) à partir d'une certaine origine. Le rayon PP_2 va vers la caustique ($\tau_2 = PP_2$), tandis que le rayon PP_1 la quitte ($\tau_1 = PP_1$).

On vérifie facilement que si l'on définit $\varphi_+ = \sigma_1 + \tau_1$, $\varphi_- = \sigma_2 - \tau_2$, on obtient des solutions de $|\nabla\varphi_{\pm}|^2 = 1$, dont les gradients $\nabla\varphi_{\pm}$ pointent dans les directions des flèches.

Une étude analytique plus serrée montre que

$$\theta = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} \quad \text{et} \quad \rho = \left[\frac{3}{4} (\varphi_+ - \varphi_-) \right]^{2/3}$$

sont régulières jusqu'à (C) , et que $\rho = 0$, $\frac{\partial\rho}{\partial n} \neq 0$ sur (C) ($\frac{\partial\rho}{\partial n}$ est la dérivée normale de ρ). On peut donc considérer $\rho = 0$ comme l'équation de (C) .

d) Equations de transport.

Si l'on choisit, au voisinage d'un point de (C) , σ et ρ comme coordonnées, on voit que (11) implique que G_{\pm} sont des fonctions régulières de $\sqrt{\rho}$ et σ , avec $G_+(-\sqrt{\rho}, \sigma) = G_-(\sqrt{\rho}, \sigma)$. Donc g_0 et g_1 sont régulières en ρ et σ (par le jeu des parités).

Si la caustique (C) est analytique, on peut trouver θ , ρ , g_0 et g_1 analytiques, et les prolonger à l'intérieur de (C) par leurs expressions en séries.

e) Conclusion.

Si l'on prend $V(t) = \text{Ai}(-t)$, on peut évaluer u en un point extérieur à (C) ($\rho > 0$) en utilisant le développement asymptotique de $\text{Ai}(s)$ lorsque $s \rightarrow -\infty$ (voir chapitre V, II.2 exemple 2) : on trouve

$$u(x) \sim \frac{\tau^{-1/6}}{2\sqrt{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left\{ e^{i\tau\varphi_+} z_+ + e^{i\tau\varphi_- + i\frac{\pi}{2}} z_- \right\},$$

où $z_{\pm} = \rho^{-1/4} G_{\pm}$ (on a ainsi une mesure exacte de la singularité de l'amplitude donnée par l'optique géométrique classique).

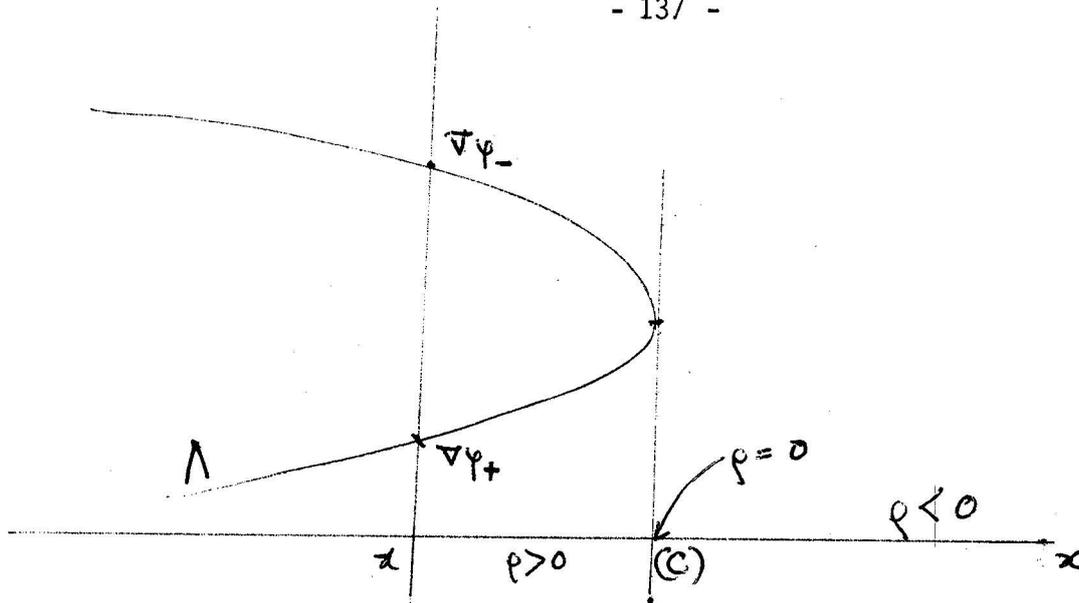
On interprète ce résultat de la façon suivante : la solution "physique" u est obtenue, à l'extérieur de (C) , comme une superposition convenable des deux solutions données par l'optique géométrique usuelle ; le facteur $e^{i\pi/2}$ (qu'on appelle le "shift" de phase) précise cette superposition ; la connaissance de ce facteur résulte de l'écriture de la vraie solution du §b, au voisinage de (C) .

Dans les paragraphes suivants, nous allons étudier une situation plus générale, avec les mêmes buts : obtenir une compréhension "géométrique" des singularités de l'amplitude classique, et du "shift" de phase.

2 - Relèvement de l'équation de transport sur la variété lagrangienne.

a) • Dans toute la suite, nous considérons un opérateur $P(x, D_x, \tau)$ comme en I, 1) b, de symbole principal $p_m(x, \xi) = p(x, \xi)$ réel, pour lequel on suppose construite une variété lagrangienne Λ ($p/\Lambda = 0$). Le problème consiste en l'analyse des solutions u de $Pu = 0$ au voisinage d'un point x , projection d'un point m de Λ où $T_m\Lambda$ contient des vecteurs verticaux. L'exemple typique de cette situation est celui de l'équation d'Airy $y'' - \tau^2 xy = 0$, discuté à la fin de la partie I.

• L'exemple précédemment traité se rattache à ce cadre général de la façon suivante : on peut construire, au-dessus du domaine $\rho > 0$, une lagrangienne Λ , dont les deux nappes $\{(x, \nabla\varphi_+(x))\}$ et $\{(x, \nabla\varphi_-(x))\}$ se rejoignent au-dessus de (C) , selon la figure suivante :



on dit que Λ forme un "pli" au-dessus de (C) (nous n'indiquons pas la définition précise de ce concept).

b) Densité ; dérivée de Lie.

Donnons quelques définitions utiles pour la suite. Soit M une variété différentiable de dimension n .

Définition : Une densité d'ordre s ($s \in \mathbb{R}$) sur un espace vectoriel E de dimension n est une fonction $\rho : E^n \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout isomorphisme A de E , et tous vecteurs x_1, \dots, x_n de E , on ait $\rho(Ax_1, \dots, Ax_n) = |\det A|^s \rho(x_1, \dots, x_n)$.

Exemple : Si $\phi : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme n -linéaire alternée sur E , $\rho = |\phi|^s$ est une densité d'ordre s sur E .

Définition : Une densité d'ordre s sur M est une application (C^∞) qui à tout point m de M fait correspondre une densité $\rho(m)$ d'ordre s sur $T_m M$.

Exemple : Si ω est une n -forme sur M , $\rho = |\omega|^s$ est une s -densité sur M .

En gros, on peut faire avec les densités sur M les mêmes opérations qu'avec les n -formes :

+ Si $f : M \rightarrow M$, on définit le "pull-back" $f^* \rho$ par

$$(f^* \rho)(m)(x_1, \dots, x_n) = \rho(f(m))(f_* x_1, \dots, f_* x_n),$$

où f_* est la différentielle de f .

+ Si Z est un champ réel sur M , de flot $\varphi(t, m)$, on définit la dérivée de Lie de ρ par Z (notée $\mathcal{L}_Z \rho$) par

$$\mathcal{L}_Z \rho(m) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[\varphi^*(t, \cdot) \rho](m) - \rho(m)}{t} .$$

La raison de l'introduction des densités est qu'on peut définir l'intégrale $\int_M \rho$ d'une 1-densité ; les 1/2-densités forment alors un espace pré-Hilbertien pour le produit scalaire $(\rho, \rho') = \int_M \rho \bar{\rho}'$.

c) Relèvement de l'équation de transport.

Proposition : Soit, au voisinage d'un point x_0 , une fonction réelle φ solution de $p_m(x, \nabla\varphi) = 0$, et soit $\Lambda = \{(x, \nabla\varphi(x))\}$ la nappe de lagrangienne correspondante.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) La fonction $u_0(x)$ est solution de l'équation de transport de P :

$$\frac{\partial p_m}{\partial \xi} (x, \nabla\varphi(x)) \cdot \partial_x u_0 + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 p_m}{\partial \xi_j \partial \xi_k} (x, \nabla\varphi(x)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + i p_{m-1}(x, \nabla\varphi(x)) \right\} u_0 = 0 .$$

ii) La densité (d'ordre $\frac{1}{2}$) $\rho = \Pi^* u_0 |dx|^{1/2}$ sur Λ satisfait, sur Λ , à l'équation

$$\frac{1}{i} \mathcal{L}_{H_p} \rho + (p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}) \rho = 0 . \quad \blacksquare$$

Nous omettons la vérification (pas très difficile) de ce fait, et faisons quelques remarques :

- dx désigne la n -forme volume sur \mathbb{R}^n : $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.
- Le symbole $p^s = p_{m-1} - \frac{1}{2i} \sum_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}$ est appelé "symbole sous-principal de P ".
- L'équation de transport sur Λ n'est singulière que si $H_p = 0$, et se résoud en

intégrant le long des bicaractéristiques de P , tandis que l'équation de transport usuelle est singulière lorsque H_p est vertical.

Exemple : Reprenons l'exemple $y'' - \tau^2 xy = 0$.

Pour $x < 0$, et $\varphi = \pm \frac{2}{3} (-x)^{3/2}$, on a $u_0(x) = (-x)^{-1/4}$. Comme l'équation de Λ est $p = 0$, i.e. $x + \xi^2 = 0$, on a, sur Λ , $dx + 2\xi d\xi = 0$. La 1/2-densité $\rho = \Pi^* u_0 |dx|^{1/2}$ vaut donc aussi $\rho = (-x)^{-1/4} |dx|^{1/2} = \sqrt{2} (-x)^{-1/4} |\xi|^{1/2} |d\xi|^{1/2} = \sqrt{2} |d\xi|^{1/2}$: on voit que u_0 est singulière en $x = 0$, tandis que ρ est une 1/2-densité parfaitement paisible sur Λ .

La situation en ce qui concerne les amplitudes est donc maintenant la suivante : on détermine une 1/2-densité ρ sur Λ satisfaisant l'équation de transport ; pour tout point régulier m de Λ (i.e. où $T_m\Lambda$ ne contient pas de vecteurs verticaux), on déduit de ρ , au voisinage de $\Pi(m)$, une solution u_0 de l'équation de transport (usuelle) associée à une phase représentant (localement) Λ près de m . Si, au-dessus d'un point x , il y a plusieurs points réguliers m_j de Λ , les amplitudes u_0^j provenant d'une même 1/2-densité ρ sont "cohérentes".

3 - Méthode de la phase stationnaire.

Pour conclure notre étude, au §4, nous aurons besoin de la proposition suivante, connue sous le nom de "méthode de la phase stationnaire".

Proposition : Soit $I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau\phi(y)} a(y) dy$, où τ est un réel positif, ϕ est réelle, $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On suppose que, si $y \in \text{supp } a$ et $d\phi(y) = 0$, alors $\text{Hess } \phi(y) = \phi''_{yy}$ est inversible (on dit que les points critiques de ϕ sont non-dégénérés).

$$\text{Alors } I(k) \sim \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{n/2} \sum_p a(p) e^{i\tau\phi(p)} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn } \phi''(p)} \frac{1}{|\det \phi''(p)|^{1/2}}$$

lorsque $\tau \rightarrow +\infty$. La somme, finie, est étendue à tous les points critiques de ϕ , et $\text{sgn } \phi''(p)$ est la signature de la forme quadratique associée à ϕ'' , c'est-à-dire le

nombre de signes "+" moins le nombre de signes "-" dans une décomposition en carrés.

Preuve : • Si $d\phi$ ne s'annule pas sur $\text{supp } a$, I est à décroissance rapide lorsque $\tau \rightarrow +\infty$: en effet, si

$$L = \frac{1}{|\nabla\phi|^2} \sum_j \frac{\partial\phi}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad L e^{i\tau\phi} = i\tau e^{i\tau\phi},$$

et en intégrant par parties on trouve

$$I(k) = \frac{1}{i\tau} \int e^{i\tau\phi} (t_L a) dy, \quad t_L = - \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\phi'_j}{|\nabla\phi|^2} \cdot \right).$$

En recommençant, on obtient $I(\tau) = O(\tau^{-N})$, pour tout N .

• Si p est un point critique non-dégénéré de ϕ , le lemme de Morse indique qu'il existe des coordonnées locales z_1, \dots, z_n , dans un voisinage V_p de p , telles que $z(p) = 0$, et $\phi(y(z)) = \phi(p) + \frac{1}{2} (-z_1^2 - \dots - z_\ell^2 + z_{\ell+1}^2 + \dots + z_n^2)$.

Sur le support de a , ces points critiques, isolés, sont en nombre fini ; on peut écrire $a = \sum_p a_p + b$, avec $\text{supp } a_p \subset V_p$, et $d\phi \neq 0$ sur $\text{supp } b$.

Dans $I_p(\tau) = \int_{V_p} e^{i\tau\phi(y)} a_p(y) dy$, faisons le changement de variables $y = y(z)$:

$$I_p(\tau) = \int e^{i\tau\phi(p)} e^{i\frac{\tau}{2} Q(z)} a_p(y(z)) \left| \det \frac{\partial y}{\partial z} \right| dz,$$

où $Q(z) = -z_1^2 - \dots - z_\ell^2 + z_{\ell+1}^2 + \dots + z_n^2$.

• Pour évaluer $I_p(\tau)$, nous avons besoin du lemme suivant, qui précise le sens d'une intégrale telle que $I(\tau)$ lorsque le support de a n'est pas compact.

Lemme : Soit $h(t)$ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} , bornée ainsi que ses deux premières dérivées. Alors $\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t^2/2} h(t) dt$ est uniformément convergente pour $\text{Re } \lambda \geq 0$,

$|\lambda| \geq 1$.

Preuve : La vérification est immédiate en intégrant deux fois par parties. ■

• Pour évaluer $\int e^{i \frac{\tau}{2} Q(z)} f(z) dz$, où $f \in C_0^\infty$, on écrit $f(z) = f(0) + \sum z_j f_j(z)$; grâce au lemme, on peut écrire

$$\int e^{i \frac{\tau}{2} Q} f(z) dz = f(0) \int e^{i \frac{\tau}{2} Q(z)} dz + \sum_j \int e^{i \frac{\tau}{2} Q(z)} z_j f_j(z) dz .$$

En intégrant par parties par rapport à z_j , on obtient

$$\int e^{i \frac{\tau}{2} Q(z)} z_j f_j(z) dz = \pm \frac{1}{i\tau} \int e^{i \frac{\tau}{2} Q(z)} \frac{\partial f_j}{\partial z_j}(z) dz .$$

• On a $\int e^{i \frac{\tau}{2} Q(z)} dz = \prod_j \int e^{i \frac{\tau}{2} z_j^2} dz .$

Or $\int e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$, donc $\int e^{-\lambda \frac{u^2}{2}} du = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2}$ ($\lambda > 0$), et, par prolongement

analytique, $\int e^{\pm i\tau \frac{u^2}{2}} du = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{1/2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$. Par conséquent,

$$\int e^{i \frac{\tau}{2} Q(z)} dz = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{n/2} e^{i \frac{\pi}{4} \text{sgn } Q}$$

• Enfin, on calcule facilement que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial z_j \partial z_k}(0) = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_p \partial y_q}(0) \frac{\partial y_p}{\partial z_j}(0) \frac{\partial y_q}{\partial z_k}(0) , \text{ d'où}$$

$$|\det \phi''(p)| \left| \det \frac{\partial y}{\partial z}(0) \right|^2 = 1 .$$

4 - Solution uniforme et recollement des phases.

Nous allons chercher des solutions de $Pu = 0$ sous la forme

$$u(x) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{k/2} \int_{\mathbb{R}^k} e^{i\tau\phi(x,\theta)} a(x,\theta) d\theta ,$$

c'est-à-dire comme une superposition (convenablement normalisée) en $\theta \in \mathbb{R}^k$ (k à

déterminer) de solutions de la forme habituelle. On supposera a à support compact en θ , en sorte que u sera évaluée, pour x fixé, par la méthode de la phase stationnaire (cf. 3)). Pour que u vérifie $Pu = 0$, il faut que a et φ soient choisis convenablement.

a) Paramétrisation de Λ .

Proposition : Soit m un point de Λ . Si les coordonnées locales x_1, \dots, x_n au voisinage de $\Pi(m)$ sont convenablement choisies, on peut trouver une fonction $\varphi(x, \xi)$ (où (x, ξ) sont les coordonnées locales sur $T^*\mathbb{R}^n$ déduites de x) avec la propriété suivante : soit C_φ l'ensemble des points critiques de φ

$$C_\varphi = \{(x, \xi) \mid \varphi'(x, \xi) = 0\}, \text{ et } \mu : C_\varphi \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$$

l'application $\mu(x, \xi) = (x, \varphi'_x(x, \xi))$. Alors C_φ est une sous-variété de dimension n , et μ est un difféomorphisme local de C_φ sur Λ .

Preuve : A titre indicatif, donnons la dans le cas où l'on suppose que Λ peut être paramétrée par ξ , près de m :

$$\Lambda = \{(x, \xi) \mid x = H(\xi)\}.$$

Alors, comme en I. 2b), on sait qu'il existe une fonction scalaire $h(\xi)$, telle que $H(\xi) = \nabla h(\xi)$. Si l'on prend $\varphi = x\xi - h(\xi)$, on a $\varphi'_x = \xi$, et $\varphi'_\xi = 0$ pour $x = H(\xi)$; dans ce cas, $C_\varphi = \Lambda$, $\mu = \text{id}$. ■

Exemple : Dans le cas de l'équation d'Airy $y'' - \tau^2 xy = 0$, $\Lambda = \{(x, \xi) \mid x + \xi^2 = 0\}$. Donc $H(\xi) = -\xi^2$, $h(\xi) = -\xi^3/3$, et $\varphi(x, \xi) = x\xi + \xi^3/3$.

b) Détermination de l'amplitude a).

• La donnée de $\varphi(x, \xi)$ détermine sur C_φ une 1-densité σ , définie par la formule :

$$|\det(v_i, d(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}))| \sigma(u_1, \dots, u_n) = |dx d\xi| (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n).$$

Dans cette formule, les u_j sont tangents à C_φ , tandis que les v_j engendrent un sup-

plémentaire à l'espace tangent à C_φ ; $\det(v_i, d(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}))$ désigne le déterminant de la matrice $n \times n$ dont l'élément (i, j) est $(v_i, d(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}))$.

• L'espace tangent à C_φ est défini par les équations $\{d(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}) = 0, j = 1, \dots, n\}$.
Un vecteur vertical $\eta = \sum \eta_j \frac{\partial}{\partial\xi_j}$ est donc tangent à C_φ si et seulement si $\varphi''_{\xi\xi} \eta = 0$.

En un point régulier p de C_φ , $\varphi''_{\xi\xi}$ est inversible, et le choix $v_i = \frac{\partial}{\partial\xi_i}$ montre qu'alors $\sigma = \Pi^* \frac{|dx|}{|\det \varphi''_{\xi\xi}|}$, car $(v_i, d(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j})) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}$.

• Dans la formule $u(x) = (\frac{\tau}{2\Pi})^{k/2} \int e^{i\tau\varphi(x,\theta)} a(x,\theta) d\theta$, nous prenons $k = n$, et $\varphi = \varphi(x, \xi)$ construite en a); la fonction $a(x, \xi)$ est définie sur C_φ par la formule $\mu_* \rho = a \sigma^{1/2}$, où ρ est une 1/2-densité sur Λ satisfaisant l'équation de transport. On étend ensuite a arbitrairement (mais à support compact en ξ) hors de C_φ .

c) Conclusion

Soit $u(x) = (\frac{\tau}{2\Pi})^{n/2} \int e^{i\tau\varphi(x,\xi)} a(x,\xi) d\xi$, où φ et a ont été précisés en a) et b). D'après 3), on a les faits suivants :

• Si, au-dessus de x , il n'y a pas de points de Λ , u est à décroissance rapide en τ , $\tau \rightarrow +\infty$: c'est la "zone d'ombre" (cf. 1)).

• Si, au-dessus de x^0 , tous les points m_j de Λ sont réguliers, on peut appliquer la méthode de la phase stationnaire à $u(x^0)$: en effet, $m_j = (x^0, \varphi'_x(x^0, \xi_j))$, avec $\varphi'_\xi(x^0, \xi_j) = 0$; comme μ_* conserve les vecteurs verticaux, dire que m_j est régulier, c'est dire que $\varphi''_{\xi\xi}(x^0, \xi_j)$ est inversible (cf. b)). On obtient

$$u(x^0) \sim \sum_j a(x^0, \xi_j) e^{i\tau\varphi(x^0, \xi_j)} \frac{e^{i\frac{\Pi}{4} \operatorname{sgn} \varphi''_{\xi\xi}(x^0, \xi_j)}}{|\det \varphi''_{\xi\xi}(x^0, \xi_j)|^{1/2}}$$

On observe alors ceci :

• la phase $\varphi(x, \xi_j(x))$ définit la nappe de Λ passant par m_j (pour x voisin de x^0) :

en effet, $\frac{\partial}{\partial x} [\varphi(x, \xi_j(x))] = \varphi'_x(x, \xi_j(x))$, car $\varphi'_\xi(x, \xi_j(x)) = 0$ par définition. Nous noterons $\varphi_j(x) = \varphi(x, \xi_j(x))$.

• Les coefficients $a_j(x) = a(x, \xi_j(x)) \frac{1}{|\det \varphi''_{\xi\xi}(x, \xi_j(x))|^{1/2}}$ sont des amplitudes cohérentes (cf. 2), c). En effet, d'après les formules sur a et σ (§b),

$$\Pi^* a_j |dx|^{1/2} = \rho .$$

• Les facteurs $e^{i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \varphi''_{\xi\xi}(x, \xi_j(x))}$ indiquent quelle est la superposition de solutions "classiques" qui approxime (aux termes en $\frac{1}{\tau}$ près) la solution "physiquement admissible" u (cf. le "shift" de phase, 1) e)).

Pour nous débarrasser tout à fait du paramétrage $\varphi(x, \xi)$ de Λ , remarquons que $d(\varphi \circ \mu^{-1}) = \omega$, la 1-forme fondamentale du fibré cotangent (si le vecteur Z a pour composantes (U, V) , $d(\varphi \circ \mu^{-1})(Z) = d\varphi(\mu_*^{-1} Z) = \varphi'_x dx(U) = \omega(Z)$ au point (x, φ'_x) de Λ). Les différentes phases $\varphi_j(x)$ proviennent donc d'une fonction sur Λ ($\varphi \circ \mu^{-1}$) définie à une seule constante près.

Enfin, il est clair que $\operatorname{sgn} \varphi''_{\xi\xi}$ ne change que lorsque l'on "traverse" un point non-régulier de Λ , puisqu'un signe " \pm " ne peut s'échanger contre un signe " \mp " que lorsque le coefficient correspondant s'annule. Plus précisément, on peut montrer que l'ensemble Z des points de Λ où il y a exactement un vecteur vertical tangent est (génériquement) de codimension 1. Si m parcourt une courbe γ de Λ transverse à Z , $\operatorname{sgn} \varphi''_{\xi\xi}(m)$ augmente de ± 2 en traversant Z , selon le sens de parcours : Z est appelé le cycle de Maslov.

Exemple : Revenons une dernière fois à l'équation d'Airy. Des amplitudes cohérentes sont $u_0(x) = (-x)^{-1/4}$ pour chaque nappe de Λ . Des phases provenant de $\varphi(x, \xi) = x\xi + \frac{\xi^3}{3}$ sont $\varphi_\pm(x) = \varphi(x, \xi_\pm(x)) = \mp \frac{2}{3} (-x)^{3/2}$ ($\xi_\pm(x) = \pm (-x)^{1/2}$). On a $\varphi''_{\xi\xi} = 2\xi$, donc $\operatorname{sgn} \varphi''_{\xi\xi} = +1$ pour $\xi > 0$, -1 pour $\xi < 0$ (le cycle de Maslov Z est réduit à l'origine). La "bonne" superposition est donc

$$(-x)^{-1/4} \left(e^{-i \frac{2}{3} \tau (-x)^{3/2}} e^{i \frac{\pi}{4}} + e^{+ \frac{2i}{3} \tau (-x)^{3/2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \right) ,$$

ce qui correspond à la formule du chapitre V, II.2) sur la fonction d'Airy.

Observons du reste que, au §1, on a utilisé la fonction d'Airy pour écrire une solution uniforme u au voisinage de la caustique (C) ; au §4, la solution utilisée est de la forme $\int e^{i\tau\varphi(x,\xi)} a(x,\xi)d\xi$: il suffit de rappeler l'écriture

$$\text{Ai}(x^{2/3}) = \frac{x^{1/3}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(t + \frac{t^3}{3})} dt$$

pour voir que le point de vue des "intégrales oscillantes" du §4 est plus général que celui du §1. En particulier, il permet d'écrire des solutions u en-dessous de points assez singuliers de Λ , alors qu'au §1 on s'était implicitement limité à une singularité de type "pli".

N° D'IMPRESSION 450
2ème Semestre 79-80

