# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



ÉMILE MATHIEU


**Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 13 (1868), p. 137-203.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13__137_0>

# MÉMOIRE

SUR

# LE MOUVEMENT VIBRATOIRE

## D'UNE MEMBRANE DE FORME ELLIPTIQUE;

PAR M. ÉMILE MATHIEU [*].

---

Imaginons une membrane tendue également dans tous les sens, et dont le contour, fixé invariablement, est une ellipse. Notre but, dans ce Mémoire, est de déterminer par l'analyse toutes les circonstances de son mouvement vibratoire; nous y calculons la forme et la position des lignes nodales et le son correspondant. Mais ces mouvements sont assujettis à certaines lois générales qui peuvent être définies sans le secours de l'analyse.

Lorsqu'on met la membrane elliptique en vibration, il se produit deux systèmes de lignes nodales qui sont, les unes des ellipses, les autres des hyperboles, et toutes ces courbes du second ordre ont les mêmes foyers que l'ellipse du contour.

Tous ces mouvements vibratoires peuvent être partagés en deux genres. Dans l'un de ces genres, le grand axe reste fixe et forme une ligne nodale, et si l'on considère deux points symétriques par rapport au grand axe, leurs mouvements sont égaux et de sens contraire. Dans l'autre genre, au contraire, les extrémités du grand axe situées entre les foyers et les sommets forment des ventres de vibration, tandis que la partie située entre les deux foyers offre un minimum de vibration,

---

[*] Ce Mémoire a été exposé au mois de janvier 1868 dans un cours à la Sorbonne.

de sorte que si l'on prend un point M sur la droite des foyers, et un point très-voisin sur une perpendiculaire en M, l'amplitude de la vibration est moindre pour le premier que pour le second point; si l'on considère deux points quelconques de la membrane, symétriques par rapport au grand axe, leurs mouvements sont égaux et de même sens.

Définissons *ligne hyperbolique* les deux branches d'une hyperbole terminées au grand axe qui possèdent la même asymptote, de manière qu'une hyperbole est comptée pour deux lignes hyperboliques; mais si l'un des axes de la membrane est immobile, il sera compté pour une seule ligne nodale hyperbolique. Alors les mouvements des deux genres peuvent être groupés deux à deux d'un manière fort remarquable. En effet, à un nombre $a$ de lignes nodales elliptiques et à un nombre $b$ de lignes nodales hyperboliques correspond un état vibratoire de chaque genre. Or, quoique ces états vibratoires diffèrent à la fois par les deux systèmes de lignes nodales et par le son résultant, ils se confondent cependant dans la membrane circulaire pour donner, comme lignes de nœuds, $a$ cercles concentriques et $b$ diamètres, qui les divisent en parties égales. On comprend, d'après cela, que si l'excentricité est très-petite, les sons de ces deux états vibratoires différeront très-peu.

Il faut mettre à part le cas où il ne se produit pas de lignes nodales hyperboliques; car le mouvement ne peut alors être que du second genre, et il n'y a qu'un état vibratoire qui produise $a$ ellipses nodales.

Le mouvement vibratoire d'une membrane renfermée entre deux ellipses homofocales, dont tous les points sont parfaitement fixés, est aussi soumis à des lois fort simples.

Les lignes nodales de cette membrane sont encore des ellipses et des portions de branches d'hyperbole qui ont les mêmes foyers que les deux ellipses des contours. Et il y a encore deux genres de mouvements vibratoires : dans l'un, les portions du grand axe renfermées entre les deux contours sont des nœuds; dans l'autre, des ventres de vibration. Mais lorsqu'on étudie les états vibratoires des deux genres qui donnent pour nœuds $a$ ellipses et $b$ lignes hyperboliques, on trouve, si le nombre $b$ est assez grand et si l'excentricité n'est pas très-grande, que le son est à très-peu près le même, ainsi que la disposition des ellipses nodales. Or, les deux sons différant excessivement peu, on sait que dans l'expérience on produira ensemble les deux états vibratoires, et, dans le mouvement résultant, la disposition des $b$ lignes nodales hyperboliques peut varier d'une infinité de manières.

M. Bourget a donné la théorie de la membrane circulaire (*Annales de l'École Normale,* t. III) et a fait les expériences propres à la vérifier; il a trouvé des sons un peu plus élevés que ne l'indique le calcul.

---

1. Considérons une membrane plane, homogène, également tendue dans tous les sens, et dont le contour est fixé invariablement. Traçons dans le plan de cette membrane deux axes de coordonnées rectangulaires quelconques, $Ox$ et $Oy$, et menons un axe des $z$ perpendiculaire à ce plan. Si nous communiquons un mouvement vibratoire à cette membrane, un point de sa surface dont les coordonnées sont $x$, $y$ et $z = 0$ éprouvera un déplacement normal $w$ régi par l'équation

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = m^2 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right), \tag{a}$$

où $m^2$ désigne le rapport de la tension à la densité de la membrane [*]. Et l'on a à intégrer cette équation, en s'imposant la condition que $w$ soit nul sur le contour.

Nous devons supposer dans ce Mémoire que ce contour est une ellipse. Mais nous allons d'abord le prendre circulaire et présenter très-succinctement la solution de ce cas particulier, qui nous sera ensuite quelquefois utile comme moyen de comparaison.

### *Membrane circulaire.*

2. Plaçons l'origine des coordonnées au centre du cercle et passons des coordonnées rectilignes $x$ et $y$ aux coordonnées polaires $r$ et $\alpha$ par

[*] *Théorie de l'Élasticité* de M. Lamé, IX$^e$ Leçon

les formules

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha,$$

en prenant arbitrairement la direction de l'axe polaire.

L'équation ($a$) devient

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = m^2\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d\alpha^2}\right),$$

et si l'on pose $w = u\sin 2\lambda m t$, on a

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = -4\lambda^2 u.$$

Posons $u = \mathrm{PQ}$, en désignant par P une fonction de $\alpha$ et par Q une fonction de $r$, et nous aurons une équation qui peut s'écrire

$$\frac{r^2}{\mathrm{Q}}\frac{d^2\mathrm{Q}}{dr^2} + \frac{r}{\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{Q}}{dr} + 4\lambda^2 r^2 = -\frac{1}{\mathrm{P}}\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2};$$

comme le premier membre ne dépend que de $r$ et le second que de $\alpha$, ils sont égaux à une même constante $n^2$, et l'on a

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} + n^2\mathrm{P} = 0, \tag{1}$$

$$r^2\frac{d^2\mathrm{Q}}{dr^2} + r\frac{d\mathrm{Q}}{dr} - (n^2 - 4\lambda^2 r^2)\mathrm{Q} = 0. \tag{2}$$

Nous avons pris pour la constante une quantité positive, afin d'obtenir pour P la fonction périodique

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}\cos n\alpha + \mathrm{B}\sin n\alpha,$$

et, afin que P ne change pas quand on y remplacera $\alpha$ par $\alpha + 2\pi$, il faut que $n$ soit un nombre entier.

Si l'on intègre l'équation (2) par séries, on obtient les deux solutions particulières :

$$(3)\quad \begin{cases} Q = Cr^n \left[1 - \dfrac{(\lambda r)^2}{1(n+1)} + \dfrac{(\lambda r)^4}{1.2(n+1)(n+2)} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{(\lambda r)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots \right], \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} Q' = C'r^{-n} \left[1 + \dfrac{(\lambda r)^2}{1(n-1)} + \dfrac{(\lambda r)^4}{1.2(n-1)(n-2)} \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{(\lambda r)^6}{1.2.3(n-1)(n-2)(n-3)} + \ldots \right], \end{cases}$$

dont la seconde se déduit de la première par le changement de $n$ en $-n$. Si on fait leur somme, on obtient la solution générale; mais comme évidemment le mouvement vibratoire doit rester fini au centre du cercle, et que $Q'$ devient infini pour $r = 0$, on doit se borner à prendre pour Q la première solution particulière, que l'on portera dans

$$(5)\qquad u = PQ, \quad w = u \sin 2\lambda m t.$$

Enfin, pour que $w$ soit une solution possible, il faut que Q soit nul le long du cercle de contour $r = h$, et $\lambda$ est déterminé par l'équation

$$1 - \frac{(\lambda h)^2}{1(n+1)} + \frac{(\lambda h)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \ldots = 0.$$

Posons cette équation

$$(6)\quad 1 - \frac{\tau^2}{1(n+1)} + \frac{\tau^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{\tau^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots = 0;$$

elle a une infinité de racines $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$, que nous supposerons rangées par ordre de grandeur croissante, et $\lambda$ peut obtenir l'une quelconque des valeurs

$$\lambda_1 = \frac{\tau_1}{h}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau_2}{h}, \quad \lambda_3 = \frac{\tau_3}{h}, \ldots.$$

Ainsi la formule (5) représente une infinité de mouvements vibratoires possibles qui dépendent de $n$ et de $\lambda$; $n$ est susceptible de toutes les valeurs entières, et à chaque valeur de $n$ correspondent une infinité de valeurs de $\lambda$.

5. Considérons l'un de ces états vibratoires et voyons quelles sont les lignes nodales. Le mouvement vibratoire satisfait à l'équation

$$(b)\qquad w = (\mathrm{A}\cos n\alpha + \mathrm{B}\sin n\alpha)\,\mathrm{Q}\sin 2\lambda m t;$$

$n$ et $\lambda$ sont connus, et la hauteur du son, ou le nombre des vibrations qui s'effectuent dans l'unité de temps, est $\mathrm{N} = \frac{\lambda m}{\pi}$. Pour obtenir les lignes de nœuds, on fera $w = 0$, à quoi on peut satisfaire, quel que soit $t$, en posant

$$(7)\qquad \mathrm{A}\cos n\alpha + \mathrm{B}\sin n\alpha = 0,$$

ou en posant

$$(8)\qquad \mathrm{Q} = 0.$$

De l'équation (7) on tire $\tan g\, n\alpha = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$; donc si l'on désigne par $n\alpha_1$ le plus petit des arcs dont la tangente est $-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, et par $k$ un nombre entier quelconque, $w$ est nul pour

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{k\pi}{n},$$

et par conséquent on a pour lignes nodales $n$ diamètres qui divisent la circonférence du cercle en parties égales.

Passant à l'équation (8), nous remarquons d'abord que Q est nul au centre de la membrane, à moins que $n$ ne soit nul à cause du facteur $r^n$, et ensuite il est nul pour différentes valeurs de $r$ qui sont

$$r = \frac{\tau_1}{\lambda},\quad \frac{\tau_2}{\lambda},\quad \frac{\tau_3}{\lambda},\ldots;$$

ce sont les rayons des cercles nodaux qui ont même centre que la membrane.

Le nombre de ces valeurs de $r$ pour lesquelles Q s'annule est infini; mais on doit rejeter toutes celles qui sont plus grandes que le rayon de la membrane. Quand dans la formule ($b$) on s'est donné la valeur de $n$, $\lambda$ est susceptible d'une infinité de valeurs $\frac{\tau_1}{h}, \frac{\tau_2}{h}, \ldots$; supposons que celle que nous avons adoptée soit la $s^{\text{ième}}$,

$$\lambda_s = \frac{\tau_s}{h};$$

alors les cercles nodaux au nombre de $s - 1$ auront pour rayons

$$\frac{\tau_1}{\lambda_s}, \quad \frac{\tau_2}{\lambda_s}, \ldots, \quad \frac{\tau_{s-1}}{\lambda_s}.$$

On voit, par ce qui précède, que, dans l'examen de ces mouvements vibratoires, il n'y a d'autres difficultés de calcul que la recherche des racines de l'équation $(b)$, dans laquelle varie le nombre entier $n$. M. Bourget a donné, dans son Mémoire, une méthode pour calculer aisément les racines de cette équation, et il a donné les valeurs numériques de ces premières racines pour $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

Les mouvements vibratoires représentés par la formule $(b)$ sont appelés mouvements *simples*, et ce sont ceux que l'on constate par l'expérience. Enfin tout mouvement vibratoire que l'on peut imaginer est la superposition d'un nombre fini ou infini de ces mouvements simples.

*Passage des coordonnées rectilignes à des coordonnées de l'ellipse.*

4. Désignons par A le demi-grand axe de la membrane elliptique, et par $c$ la demi-distance des foyers; prenons pour axes des $x$ et des $y$ les axes de symétrie de l'ellipse; puis adoptons un second système de coordonnées déterminé par les ellipses et les hyperboles qui ont les mêmes foyers que le contour de la membrane.

L'une quelconque de ces ellipses est donnée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

dans laquelle $\rho$ est $> c$, et si l'on pose

$$\rho = c\,\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}, \quad \rho' = \sqrt{\rho^2 - c^2} = c\,\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2},$$

$\rho$ et $\rho'$ sont le demi-grand axe et le demi-petit axe de cette ellipse, et $\beta$ ce que M. Lamé appelle le *paramètre thermométrique* (*Sur les Fonctions inverses des transcendantes*, Ire Leçon).

L'une quelconque des hyperboles homofocales a pour équation

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \tag{2}$$

où $\nu$ est $< c$, et si l'on pose

$$\nu = c\cos\alpha, \quad \nu' = \sqrt{c^2 - \nu^2} = c\sin\alpha:$$

$\nu$ et $\nu'$ sont les demi-axes de cette hyperbole, et $\alpha$ son paramètre thermométrique.

On passe des coordonnées $x$ et $y$ aux coordonnées $\nu$ et $\rho$ ou $\alpha$ et $\beta$ au moyen des formules

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\rho\nu}{c} = c\,\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\cos\alpha, \\ y &= \frac{\rho'\nu'}{c} = c\,\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\sin\alpha, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

que l'on déduit des équations (1) et (2). Si l'on voulait avoir des formules qui pussent s'appliquer immédiatement au cercle, on adopterait

$$x = \rho\cos\alpha, \quad y = \rho'\sin\alpha. \tag{4}$$

Soit M un point qui provient de l'intersection de l'ellipse $\beta = \beta_1$ et de l'hyperbole $\nu = \nu_1$. Prolongeons l'ordonnée du point M jusqu'à sa rencontre en N avec le cercle décrit sur le grand axe. On voit d'après les équations (4) que l'angle $\alpha$ est égal à l'angle que fait le rayon mené du centre au point N avec l'axe des $x$, et comme cet angle a pour cosinus $\frac{\nu}{c}$, il est aussi celui que fait avec l'axe des $x$ l'asymptote à la branche d'hyperbole qui contient le point M, et le rayon mené du centre au point N est cette asymptote.

Il résulte encore des formules (4), que l'on obtiendra tous les points du plan en supposant $\rho$ et $\rho'$ positifs, et faisant varier $\rho'$ de 0 à $\infty$, et $\alpha$ de 0 à $2\pi$.

Quand on fait varier ainsi les coordonnées, l'équation $\beta = \text{const.}$ représente une ellipse entière, mais $\alpha = \text{const.}$ ne représente plus que l'une des quatre branches de l'hyperbole terminée à l'axe transverse, et l'hyperbole entière est donnée par les quatre équations

$$\alpha = \alpha_1, \quad \alpha = \pi - \alpha_1, \quad \alpha = \pi + \alpha_1, \quad \alpha = 2\pi - \alpha_1,$$

qui sont celles des quatre branches. Nous supposons dans ce qui va suivre que $\beta$ est positif; cependant non-seulement cette hypothèse n'est pas indispensable, mais nous aurons occasion de reconnaître dans la suite qu'il peut être utile de faire varier le signe de cette coordonnée.

Il est bon aussi de considérer les positions limites de ces ellipses et de ces hyperboles; pour $\beta = 0$, l'ellipse se réduit à la droite qui joint les foyers F et F'; l'équation $\alpha = 0$ représente la ligne $Fx$ bornée en F et indéfinie dans le sens des $x$ positifs, $\alpha = \pi$ représente la ligne $F'x'$ indéfinie dans le sens des $x$ négatifs; enfin $\alpha = \frac{\pi}{2}$ détermine l'axe entier des $y$ positifs, et $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ la partie négative de l'axe des $y$.

5. Reprenons l'équation

$$(5) \qquad m^2\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right) = \frac{d^2 w}{dt^2},$$

qui par la substitution de

$$w = u \sin 2\lambda m t$$

devient

$$(6) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = -4\lambda^2 u,$$

et substituons à $x$ et $y$ les coordonnées $\alpha$ et $\beta$.

Pour simplifier, posons

$$\mathrm{E}(\beta) = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}, \quad \mathcal{E}(\beta) = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}$$

et

$$\mathrm{H}^2 = \mathrm{E}^2(\beta)\sin^2\alpha + \mathcal{E}^2(\beta)\cos^2\alpha = \mathrm{E}^2(\beta) - \cos^2\alpha.$$

on a (II^e Leçon des *Coordonnées curvilignes* de M. Lamé)

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=\left[\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2\right]\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}+\frac{d^2u}{d\beta^2}\right),$$

et en différentiant les équations (3), on trouve

$$\frac{d\beta}{dx}=-\frac{d\alpha}{dy}=\frac{\mathcal{E}(\beta)\cos\alpha}{cH^2},\quad \frac{d\alpha}{dx}=\frac{d\beta}{dy}=\frac{-E(\beta)\sin\alpha}{cH^2},$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2=\frac{1}{c^2H^2},$$

et on a, au lieu de l'équation (6),

$$\frac{1}{c^2H^2}\left(\frac{d^2u}{d\alpha^2}+\frac{d^2u}{d\beta^2}\right)=-4\lambda^2u.$$

Posons

$$u=PQ,$$

et regardons P comme fonction de la seule $\alpha$ et Q comme fonction de la seule $\beta$, et nous aurons, au lieu de l'équation précédente,

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2}Q+P\frac{d^2Q}{d\beta^2}=-4\lambda^2c^2[E^2(\beta)-\cos^2\alpha]$$

ou

$$-\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\alpha^2}+4\lambda^2c^2\cos^2\alpha=+\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\beta^2}+4\lambda^2c^2E^2(\beta).$$

Comme le premier membre ne peut renfermer que $\alpha$, et le second que $\beta$, ils sont égaux à une même constante N; de sorte qu'on a, au lieu d'une équation aux différences partielles, deux équations différentielles du second ordre

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2}+(N-4\lambda^2c^2\cos^2\alpha)P=0,$$

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2}-[N-4\lambda^2c^2E^2(\beta)]Q=0.$$

La première de ces équations convient à la membrane circulaire, si l'on y fait $c=0$, et nous savons que l'on doit alors prendre pour la constante N le carré d'un nombre entier; il ne s'ensuit pas que la même chose ait lieu ici ; car on ne voit pas qu'elle ne dépende pas de $\lambda c$; mais on est assuré que si la constante dépend de cette quantité, elle se réduit du moins au carré d'un nombre entier pour $c = 0$.

Supposons que nous connaissions une des valeurs de N, et que nous ayons trouvé des valeurs de P et Q, qui satisfassent à ces deux équations ; alors la formule

$$w = \mathrm{PQ} \sin 2\lambda m t$$

représentera un mouvement vibratoire possible de la membrane, si on détermine $\lambda$ par la condition que Q soit nul pour la valeur de $\beta$ relative au contour.

*Sur la détermination de la constante* N.

**6.** Le premier objet que nous devions nous proposer est donc de déterminer la constante N. Or, pour que l'expression de $w$ puisse être admise, il faut que lorsqu'on y changera $\alpha$ en $\alpha + 2\pi$, $w$ reste le même, puisque $w$ continuera à donner le déplacement du même point de la membrane; ainsi P est nécessairement une fonction périodique et dont la période est $2\pi$, et cette condition doit déterminer la constante N.

Rappelons des résultats obtenus par Sturm sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Toute équation de ce genre peut être mise sous la forme

$$(1) \qquad \frac{d\left(\mathrm{L}\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + \mathrm{G}y = 0,$$

L et G étant deux fonctions de $x$. Concevons que G renferme aussi un paramètre $h$, et donnons-lui un accroissement $\delta h$; alors G prendra la valeur $\mathrm{G} + \delta\mathrm{G}$, et $y$ se changera en la fonction $y_1$ qui satisfait à l'équation

$$(2) \qquad \frac{d\left(\mathrm{L}\frac{dy_1}{dx}\right)}{dx} + (\mathrm{G} + \delta\mathrm{G})y_1 = 0.$$

Multiplions les équations (1) et (2) par $y_1$ et $y$, et retranchons, nous obtenons

$$y_1 \frac{d}{dx}\left(\mathrm{L}\frac{dy}{dx}\right) - y\frac{d}{dx}\left(\mathrm{L}\frac{dy_1}{dx}\right) - \delta \mathrm{G} y y_1 = 0.$$

Multiplions par $dx$, et intégrons entre les limites $x_0$ et X, nous aurons

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} y_1 \frac{d}{dx}\left(\mathrm{L}\frac{dy}{dx}\right) dx - \int_{x_0}^{\mathrm{X}} y\frac{d}{dx}\left(\mathrm{L}\frac{dy_1}{dx}\right) dx - \int_{x_0}^{\mathrm{X}} y y_1 \delta \mathrm{G}\, dx = 0;$$

appliquons l'intégration par parties aux deux premiers termes, et supposons $\delta h$ infiniment petit, l'accroissement de $y$ le sera aussi, et nous aurons, en remplaçant $y_1$ par $y + \delta y$,

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\mathrm{L}\left(\frac{dy}{dx}\delta y - y\delta\frac{dy}{dx}\right)\right]_{\mathrm{X}} - \left[\mathrm{L}\left(\frac{dy}{dx}\delta y - y\delta\frac{dy}{dx}\right)\right]_{x_0} \\ &\qquad\qquad - \int_{x_0}^{\mathrm{X}} y^2 \delta \mathrm{G}\, dx = 0. \end{aligned} \right.$$

Sturm suppose alors que la quantité $\mathrm{L}\frac{dx}{dy} : y$ subisse pour $x = x_0$, par l'accroissement de $h$, une variation d'un signe donné; pour la recherche que nous nous proposons, imaginons en la place que $y$ soit nul ou maximum ou minimum pour $x = x_0$, et quelle que soit la valeur du paramètre $h$. Donc pour $x = x_0$, il faut faire ou $y = 0$, $\delta y = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = 0$, et $\delta\frac{dy}{dx} = 0$; dans les deux cas, le second crochet est nul, et il reste

$$(3) \qquad \left[\mathrm{L}\left(\frac{dy}{dx}\delta y - y\delta\frac{dy}{dx}\right)\right]_{\mathrm{X}} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} y^2 \delta \mathrm{G}\, dx;$$

le premier membre est donc de même signe que l'accroissement que prend G par la variation du paramètre.

On peut maintenant reconnaître si les racines en $x$ de l'équation $y_1 = 0$ sont plus petites ou plus grandes que celles de l'équation $y = 0$. $y$ est une fonction de $x$ et de $h$, et si pour $x = \mathrm{X}$ on a

$$y = 0,$$

dès qu'on donnera à $h$ un accroissement $\delta h$, $y$ ne sera plus nul, à moins que l'on ne donne aussi à $x$ un accroissement $\delta x$ tel, que l'on ait

$$\frac{dy}{dx}\delta x + \frac{dy}{dh}\delta h = 0,$$

ou

$$\frac{dy}{dx}\delta x + \delta y = 0,$$

et par conséquent la racine subit un accroissement égal à

$$(4) \qquad \delta x = -\frac{\delta y}{\frac{dy}{dx}}.$$

Supposons L positif; $y$ étant nul pour $x = \mathrm{X}$, il résulte de la formule (3) que si $\delta\mathrm{G}$ est positif, $\frac{dy}{dx}\delta y$ est aussi positif, et, par suite de la formule (4), que $\delta x$ est négatif; donc les racines de $y_1 = 0$ sont plus petites que celles de $y = 0$, et de même on voit que si $\delta\mathrm{G}$ est négatif, les racines de $y_1 = 0$ sont plus grandes que celles de $y = 0$.

Si nous imaginons ensuite que l'on donne au paramètre $h$, non plus un accroissement infiniment petit, mais un accroissement fini, et que $h$ croisse de $h$ à $h_1$, si en même temps G va en croissant tout du long de cet intervalle, ou va tout du long en décroissant, les conclusions précédentes, relatives aux racines de $y = 0$ et de $y_1 = 0$, sont applicables, comme on le reconnaît en divisant l'intervalle de $h$ à $h_1$ en parties infiniment petites.

Ces considérations sont dues à Sturm (*Journal de M. Liouville*, 1[re] série, t. I, p. 106); mais nous allons montrer comment elles peuvent servir à reconnaître si une fonction est périodique, et nous obtiendrons des résultats nouveaux.

**7.** Essayons d'abord de supposer que N est le carré d'un nombre entier $g^2$, et, substituant la lettre $h$ à $\lambda c$, P est donné par l'équation

$$(5) \qquad \frac{d^2\mathrm{P}}{d\alpha^2} + (g^2 - 4h^2\cos^2\alpha)\,\mathrm{P} = 0.$$

Il est très-aisé de reconnaître que la solution générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre, telle que les précédentes, peut ordinairement être partagée en deux solutions particulières, dont l'une soit nulle, et l'autre soit maximum ou minimum pour la valeur zéro donnée à la variable. Posons donc

$$P = P_1 + P_2,$$

$P_1$ étant une solution qui s'annule pour $\alpha = 0$ et $P_2$ une solution qui est maximum ou minimum pour cette valeur.

Ce sont les deux fonctions $P_1$ et $P_2$ que nous allons examiner. Dans le cas où $h$ s'annule, elles satisfont à l'équation

$$\frac{d^2 P'}{d\alpha^2} + g^2 P' = 0, \tag{6}$$

et $P_1$ se réduit à $A \sin g\alpha$, $P_2$ à $B \cos g\alpha$.

$P_1$ s'annule pour $\alpha = 0$, comme $P' = A \sin g\alpha$; or le coefficient de $P'$, dans l'équation (6), est toujours plus grand que celui de $P$ dans l'équation (5); il résulte donc de ce que nous avons vu ci-dessus que les racines de $P' = 0$ sont plus petites que celles de $P = 0$; or les racines de $P' = 0$ sont de $0$ à $2\pi$,

$$0, \quad \frac{\pi}{g}, \quad \frac{2\pi}{g}, \ldots, \quad \frac{(2g-1)\pi}{g}.$$

Donnons à $h$ une valeur excessivement petite, et divisons, à partir de l'axe des $x$, une circonférence qui a son centre à l'origine en $2g$ parties égales, puis menons aux points de division les rayons $Oa$, $Ob$, $Oc$,...; les racines de $P' = 0$ sont égales aux angles $aOb$, $aOc$,..., et les racines de $P_1 = 0$ sont plus grandes et représentées par les angles $aOb'$, $aOc'$,.... Mais lorsque après un tour sur la circonférence on revient au point $a$, $P'$ s'annule de nouveau par la valeur $\alpha = 2\pi$, tandis que $P_1$, qui est nul pour $\alpha = 0$, ne l'est pas pour $\alpha = 2\pi$, mais pour une valeur un peu plus grande. $P_1$ ne reprend donc pas la même valeur quand on augmente l'arc $\alpha$ d'une circonférence.

Pour démontrer que $P_2$, tirée de l'équation (5), n'a pas $2\pi$ pour période, appliquons la formule (3), en remplaçant $x$ par $\alpha$, L et G par 1 et $g^2 - 4h^2\cos^2\alpha$, $y$ par $P_2$, $x_0$ et X par o et $2\pi$, et nous aurons

$$\left(\frac{dP_2}{d\alpha}\delta P_2 - P_2\delta\frac{dP_2}{d\alpha}\right)_{2\pi} + 4\left(2h\,\delta h + \delta h^2\right)\int_0^{2\pi} P_2^2\cos^2\alpha\,d\alpha = 0,$$

formule où l'on ne doit tenir compte de $\delta h^2$ que lorsque $h$ est nul.

Supposons que nous fassions varier $h$ de la valeur zéro à la valeur infiniment petite $\delta h$; $P_2$, pour $h = 0$, se réduit à $B\cos g\alpha$, et il est alors maximum pour $\alpha = 2\pi$ comme pour $\alpha = 0$; ainsi, en faisant $h = 0$ dans cette formule, $\frac{dP_2}{d\alpha}$ s'annule, et l'on a

$$\left(P_2\delta\frac{dP_2}{d\alpha}\right)_{2\pi} = 4(\delta h)^2\int_0^{2\pi} P_2^2\cos^2\alpha\,d\alpha;$$

le second membre est essentiellement positif, donc $\delta\frac{dP_2}{d\alpha}$ n'est pas nul pour $\alpha = 2\pi$, ou $\frac{dP_2}{d\alpha}$ n'est pas nul pour $\alpha = 2\pi$ quand on fait $h = \delta h$; donc enfin $P_2$, qui est maximum pour $\alpha = 0$, ne l'est pas pour $\alpha = 2\pi$, et la fonction n'est pas périodique.

Si l'on prenait pour la constante

$$N = g^2 + 4h^2,$$

en désignant encore par $g$ un nombre entier, l'équation qui donne P deviendrait

$$\frac{d^2P}{dx^2} + (g^2 + 4h^2\sin^2\alpha)P = 0.$$

En définissant les solutions particulières $P_1$ et $P_2$ comme ci-dessus, on reconnaîtra que les racines de $P_1 = 0$ et de $P_2 = 0$ sont plus petites que celles de $A\sin g\alpha = 0$ et de $B\cos g\alpha = 0$, et l'on démontrera aussi, comme tout à l'heure, que $P_1$ et $P_2$ ne sont pas des fonctions périodiques.

**8**. Enfin, prenons pour N l'expression

$$N = g^2 + 2h^2,$$

nous aurons l'équation

$$\frac{d^2 P}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2 \cos 2\alpha) P = 0,$$

et nous allons démontrer que P est alors une fonction périodique si $h$ est excessivement petit, c'est-à-dire si on peut négliger les puissances de $h^2$ supérieures à la première [*].

Si nous ne considérons que les solutions qui sont nulles, ou maxima ou minima pour $\alpha = 0$, et que nous avons désignées par $P_1$ et $P_2$, nous avons, d'après (3), l'équation

$$(7) \qquad \frac{dP}{d\alpha} \delta P - P \delta \frac{dP}{d\alpha} = -2(2h\,\delta h + \delta h^2) \int_0^\alpha P^2 \cos 2\alpha \, d\alpha.$$

Au lieu de laisser $h$ quelconque, prenons-le égal à zéro, et donnons-lui l'accroissement $\delta h$; puis appliquons la formule (7) en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Si c'est $P_1$ que nous considérons, nous aurons

$$P_1^2 \cos 2\alpha = \sin^2 g\alpha \cos 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos 2(g+1)\alpha + \cos 2(g-1)\alpha}{4},$$

et si $g$ n'est pas égal à 1, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_1^2 \cos 2\alpha \, d\alpha = 0.$$

Si nous considérons $P_2$, nous avons

$$P_2^2 \cos 2\alpha = \cos^2 g\alpha \cos 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{2} + \frac{\cos 2(g+1)\alpha + \cos 2(g-1)\alpha}{4},$$

et si $g$ n'est pas égal à 1, on a encore

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_2^2 \cos 2\alpha \, d\alpha = 0;$$

[*] Toutefois, si $g = 1$, il faut prendre $N = 1 + h^2$ ou $= 1 + 3h^2$, selon qu'il s'agit de $P_1$ ou de $P_2$.

donc l'équation (7) se réduit dans les deux cas à

$$\left(\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha}\right)_{\frac{\pi}{2}} = 0; \tag{8}$$

mais pour $h = 0$, $P_1$ et $P_2$ deviennent $\sin g\alpha$ et $\cos g\alpha$, et l'une des deux fonctions est nulle et l'autre maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; or de cette formule on conclut que si P est nul pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\delta P$ l'est aussi, et que si $\frac{dP}{d\alpha}$ est nul pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\delta\frac{dP}{d\alpha}$ l'est en même temps. Donc, pour une valeur très-petite de $h$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $P_1$ est nul ou maximum comme $\sin g\alpha$, et $P_2$ est nul ou maximum comme $\cos g\alpha$.

Supposons maintenant que $h$ ne soit plus excessivement petit, mais qu'il ait une valeur quelconque; et, posant $N = R + 2h^2$, considérons l'équation

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2\cos 2\alpha)P = 0, \tag{9}$$

dans laquelle R dépend de $h$, et se réduit au carré $g^2$ d'un nombre entier pour $h = 0$; par l'application de l'équation (3), on a

$$\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha} = \int_0^\alpha P^2(\delta R - 4h\,\delta h\cos 2\alpha)\,d\alpha;$$

alors imaginons que l'on sache déterminer la constante R de manière que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P^2(\delta R - 4h\,\delta h\cos 2\alpha)\,d\alpha$$

soit nulle, quel que soit $h$ : la propriété que nous venons d'obtenir quand $h$ est très-petit a lieu pour une valeur quelconque de $h$, car on aura encore l'équation (8), et P sera nul ou maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, selon que $\sin g\alpha$ et $\cos g\alpha$, auquel il se réduit pour $h = 0$, est nul ou maximum.

Remarquons dès à présent que rien n'indique que, pour une même valeur de $g$, la constante R soit la même dans les fonctions $P_1$ et $P_2$; elle est en effet différente, et la solution générale de l'équation (9) ne peut être périodique. Pour fixer les idées, choisissons la constante de manière que l'on ait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_1^2(\delta R - 4h\,\delta h \cos 2\alpha)\,d\alpha = 0,$$

et je dis que la fonction $P_1$ reprendra les mêmes valeurs ou des valeurs égales et de signe contraire dans chaque quadrant, en sorte que $\alpha$ étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, les quatre quantités

$$P_1(\alpha),\quad P_1(\pi-\alpha),\quad P_1(\pi+\alpha),\quad P_1(2\pi-\alpha)$$

sont égales, au signe près, et que $P_1$ est périodique.

Comme nous aurons occasion de le voir plus tard, si on pose $\nu = \cos\alpha$, la solution générale de l'équation différentielle qui donne P est la somme de deux solutions particulières qui se développent ainsi

$$P' = A_0 + A_1\nu^2 + A_2\nu^4 + A_3\nu^6 + \ldots,$$
$$P'' = B\nu + B_1\nu^3 + B_2\nu^5 + B_3\nu^7 + \ldots.$$

La première est maximum et la seconde nulle pour $\nu = 0$, ou pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Il résulte de là que $P_1$ est égal à $P'$ ou à $P''$, selon qu'il est nul ou maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; or, si l'on change $\nu$ en $-\nu$ ou $\alpha$ en $\pi - \alpha$, $P'$ reste invariable et $P''$ change de signe seulement; donc $P_1$ reste le même, au signe près, quand on remplace $\alpha$ par $\pi - \alpha$.

Pour passer au troisième quadrant, on remarque que la solution générale de P peut être partagée en deux solutions dont l'une est paire, et dont l'autre est impaire, suivant les puissances de $\nu' = \sin\alpha$; $P_1$, qui est nul pour $\alpha = \pi$, est égal à la solution impaire en $\nu'$, et on en conclut

$$P_1(\pi+\alpha) = -P_1(\pi-\alpha),\quad P_1(\pi+\alpha) = \pm P_1(\alpha).$$

Enfin, on peut obtenir de la même manière les valeurs de $P_1$ dans le quatrième quadrant. Donc la fonction $P_1$ reprend les mêmes valeurs au signe près dans chaque quadrant, et se comporte dans les changements de signe comme $\sin g\alpha$, et elle a $2\pi$ pour période.

Si l'on détermine la constante R de manière que l'on ait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_2^2 \left(\frac{dR}{dh} - 4h\cos 2\alpha\right) d\alpha = 0,$$

on arrive à des conclusions semblables pour $P_2$, qui se comporte dans le passage d'un quadrant au suivant comme $\cos g\alpha$. Il n'est donc nécessaire d'étudier les fonctions $P_1$ et $P_2$ qu'entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

**9.** Si nous regardons d'abord $h$ comme très-petit, la constante R se réduit à très-peu près à $g^2$, et l'équation différentielle à

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha)P = 0.$$

Si l'on donne à $h$ l'accroissement $\delta h$, toute racine de

$$P_1 = 0 \quad \text{ou de} \quad P_2 = 0$$

subit une variation dont la valeur est

$$\delta\alpha = -\delta P : \frac{dP}{d\alpha}.$$

On a la formule générale

$$(10)\left\{\begin{aligned} &\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha} \\ &\quad = \left(\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha}\right)_a - 2(2h\delta h + \delta h^2)\int_a^\alpha P^2\cos 2\alpha\, d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Faisons $a = 0$; supposons que P représente $P_1$ ou $P_2$, et que $\alpha$ soit une racine de $P = 0$, renfermée entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, l'équation précédente devient

$$\frac{dP}{d\alpha}\delta P = -2(2h\delta h + \delta h^2)\int_0^\alpha P^2 \cos 2\alpha d\alpha.$$

Tous les éléments de l'intégrale sont positifs; donc $\frac{dP}{d\alpha}\delta P$ est négatif et la variation des racines positives, quand on donne à $h$ l'accroissement $\delta h$.

Faisons $a = \frac{\pi}{2}$, et supposons que $\alpha$ soit maintenant une racine de $P = 0$, renfermée entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, on déduit de la même formule

$$\frac{dP}{d\alpha}\delta P = 2(2h\delta h + \delta h^2)\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} P^2 \cos 2\alpha d\alpha;$$

le second membre est négatif; donc l'accroissement de la racine est encore positif.

Supposons par exemple qu'il s'agisse de $P_2$, et que $g$ soit pair; alors la fonction P est maximum comme $\cos g\alpha$ pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Si $Ob$, $Oc$, $Od$,... font avec $Ox$ des angles égaux aux racines de l'équation $\cos g\alpha = 0$, ces droites pourront représenter des lignes nodales de la membrane circulaire, et les arcs $bc$, $cd$,... sont égaux entre eux et doubles des arcs extrêmes $ab$ et $ef$ du quadrant $af$.

Considérons une ellipse dont l'excentricité est très-petite, et menons les asymptotes des lignes nodales hyperboliques $Ob'$, $Oc'$, $Od'$,...; il résulte de ce que nous avons démontré que les angles $aOb'$, $aOc'$, $aOd'$,... sont respectivement plus grands que $aOb$, $aOc$,.... Mais il y a plus : les angles $b'Oc'$, $c'Od'$,... sont $> bOc$, $cOd$,... dans la première moitié du quadrant et sont moindres dans la seconde moitié.

Pour le prouver, désignons par $\alpha_1$ et $\alpha_2$ deux racines consécutives de l'équation $P_2 = 0$, et considérons la fonction

$$\Pi = A \sin g(\alpha - \alpha_1),$$

qui s'annule pour $\alpha = \alpha_1$; $P_2$ ne se réduit pas à $\Pi$ pour $h = 0$; mais on peut imaginer une fonction P qui satisfasse à l'équation différentielle du second ordre, et qui par la variation de $h$ passe de $\Pi$ à $P_1$ en restant constamment nulle pour $\alpha = \alpha_1$. Alors pour $\alpha = \alpha_1$, on aura

$$P = 0, \quad \delta P = 0,$$

et en faisant $\alpha = \alpha_2$ et $a = \alpha_1$ dans l'équation (10), on obtient

$$\left(\frac{dP}{d\alpha}\,\delta P\right)_{\alpha=\alpha_2} = -2(2h\delta h + \delta h^2)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P^2 \cos 2\alpha\, d\alpha;$$

si $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont moindres que $\frac{\pi}{4}$, l'intégrale du second membre est positive, et le premier membre est négatif; donc la variation de la racine $\alpha$,

$$\delta\alpha_2 = -\delta P : \frac{dP}{d\alpha},$$

mais cette fois comptée à partir de $\alpha_1$, est positive; donc l'intervalle des deux racines $\alpha_1$ et $\alpha_2$ a augmenté; il est donc plus grand que $\frac{2\pi}{g}$. On verrait qu'au contraire si $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale est négative, et que l'intervalle entre deux racines diminue quand $h$ croît, tout en gardant de très-petites valeurs.

**10.** Mais quelle que soit la grandeur de $h$ et quel que soit le sens dans lequel varie la constante R, quand on donne un accroissement infiniment petit à $h$, les racines subissent des modifications infiniment petites, et celles qui étaient comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$ y resteront constamment; car $Oa$ et $Of$ sont des lignes où $P_2$ est maximum et ne peut s'annuler, et que par conséquent ces racines en changeant de grandeur ne peuvent franchir. Ensuite cette propriété appartient dans tous les cas aux fonctions $P_1$ et $P_2$, dont la première est nulle, et la seconde maximum pour $\alpha = 0$, tandis que l'une s'annule et l'autre est maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, suivant la parité de $g$. Ainsi, par exemple, si $P_2$ s'annule pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il est impossible que par l'accroissement de $h$ une racine comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$ franchisse la limite $\frac{\pi}{2}$; car si pour une valeur de $h$ une racine comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$ devenait égale à $\frac{\pi}{2}$, l'équation $P_2 = 0$ aurait une racine double pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; donc P et $\frac{dP}{d\alpha}$, et par suite les dérivées de tous les ordres, s'annuleraient ensemble pour une même valeur de $\alpha$; ce qui est impossible.

Or pour $h = 0$ les fonctions $P_1$ et $P_2$ se réduisent à $\sin g\alpha$ et $\cos g\alpha$, et s'annulent $g$ fois de o à $\pi$; donc quel que soit $h$, les équations $P_1 = 0$ et $P_2 = 0$ ont aussi $g$ racines de o à $\pi$ (en admettant parmi ces racines celle qui serait zéro, mais non celle qui serait égale à $\pi$).

*Développements des fonctions* $P_1$ *et* $P_2$ *suivant les puissances de* $h$.

**11.** Pour developper suivant les puissances de $h$ les solutions $P_1$ et $P_2$ de l'équation

$$\frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2\cos 2\alpha)P = 0,$$

qui ont $2\pi$ pour période, et dont la première est nulle, la seconde maximum pour $\alpha = 0$, nous poserons

$$R = g^2 + \beta h^4 + \gamma h^6 + \delta h^8 + \ldots,$$

en désignant par $g$ un nombre entier quelconque, et nous chercherons à déterminer les coefficients d'après la condition que $P_1$ et $P_2$ soient périodiques.

Considérons d'abord $P_2$; posons dans l'équation différentielle

$$P = P_2 = \cos g\alpha + h^2 \mathrm{p}, \quad R = g^2 + Bh^4,$$

et nous aurons

$$\frac{d^2\mathrm{p}}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + Bh^4)\mathrm{p} - (2\cos 2\alpha\cos g\alpha - Bh^2\cos g\alpha) = 0.$$

Posons ensuite

$$\mathrm{p} = p + h^2 \mathrm{p}_1,$$

et nous aurons

$$\text{(I)} \qquad 0 = \frac{d^2p}{d\alpha^2} + g^2 p - 2\cos 2\alpha \cos g\alpha,$$

$$(b) \qquad \begin{cases} 0 = \frac{d^2\mathrm{p}_1}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + \mathrm{B}h^4)\,\mathrm{p}_1 \\ \quad + (-2\cos 2\alpha + \mathrm{B}h^2)\,p + \mathrm{B}\cos g\alpha. \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (I), nous remplacerons $2\cos 2\alpha \cos g\alpha$ par $\cos(g+2)\alpha + \cos(g-2)\alpha$, et nous poserons

$$p = a\cos(g+2)\alpha + b\cos g\alpha + c\cos(g-2)\alpha;$$

on trouve immédiatement

$$a = \frac{-1}{4(g+1)}, \quad c = \frac{1}{4(g-1)};$$

pour $b$, il n'est pas déterminé, et en effet $\mathrm{P}_2$ se réduit à $\cos g\alpha$ pour $h = 0$; mais si l'on suppose que l'on ait obtenu son expression, et qu'on la multiplie par $1 + \mathrm{B}h^2$, cette nouvelle expression peut encore représenter $\mathrm{P}_2$, et le coefficient $b$ change par là d'une manière arbitraire.

Puisque nous pouvons donner à $b$ la valeur que nous voulons, nous ferons

$$b = 0.$$

Dans l'équation $(b)$, posons

$$\mathrm{p}_1 = p_1 + h^2\mathrm{p}_2, \quad \mathrm{B} = \beta + \mathrm{C}h^2,$$

et nous aurons les deux équations

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2p_1}{d\alpha^2} + g_2 p_1 - 2\cos 2\alpha p + \beta\cos g\alpha = 0,$$

$$(c) \qquad \begin{cases} 0 = \frac{d^2\mathrm{p}_2}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + \beta h^4 + \mathrm{C}h^6)\,\mathrm{p}_2 \\ \quad + (-2\cos 2\alpha + \beta h^2 + \mathrm{C}h^4)\,p_1 \\ \quad + (\beta + \mathrm{C}h^2)\,p + \mathrm{C}\cos g\alpha. \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (II), on doit remplacer $2\cos 2\alpha p$ par sa valeur

$$\begin{aligned}&a\cos(g+4)\alpha + b\cos(g+2)\alpha\\ &\quad + (a+c)\cos g\alpha + b\cos(g-2)\alpha + c\cos(g-4)\alpha,\end{aligned}$$

puis substituer pour $p_1$

$$\begin{aligned}p_1 &= d\cos(g+4)\alpha + e\cos(g+2)\alpha\\ &\quad + f\cos g\alpha + h\cos(g-2)\alpha + k\cos(g-4)\alpha,\end{aligned}$$

et on trouve, en égalant à zéro les coefficients des cosinus des arcs différents,

$$d = -\frac{a}{8(g+2)},\quad e = -\frac{b}{4(g+1)},\quad h = \frac{b}{4(g-1)},\quad k = \frac{c}{8(g-2)},$$
$$\beta = a + c.$$

$b$ est laissé arbitraire dans ces formules; si l'on y suppose $b = 0$, on a

$$d = \frac{1}{32(g+1)(g+2)},\quad e = 0,\quad h = 0,\quad k = \frac{1}{32(g-1)(g-2)},$$
$$\beta = \frac{1}{2(g^2-1)}.$$

Le coefficient $f$ reste encore indéterminé, et en effet, si l'on imagine obtenue l'expression de $P_2$ et qu'on la multiplie par $1 + Bh^2 + Ch^4$, on changera non-seulement le coefficient $b$ d'une manière arbitraire, mais aussi le coefficient $f$; ce qu'il y a de plus simple est donc de faire $f = 0$.

Dans l'équation $(c)$, posons

$$\mathrm{p}_2 = p_2 + h^2\mathrm{p}_3,\quad C = \gamma + Dh^2,$$

et nous aurons

$$\text{(III)}\qquad \frac{d^2p_2}{d\alpha^2} + g^2p_2 - 2\cos 2\alpha p_1 + \beta p + \gamma\cos g\alpha = 0,$$

$$(d)\qquad \left\{\begin{aligned}0 &= \frac{d^2\mathrm{p}_3}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + \beta h^4 + Ch^6)\mathrm{p}_3\\ &\quad + (-2\cos 2\alpha + \beta h^2 + Ch^4)p_2\\ &\quad + (\beta + Ch^2)p_1 + Cp + D\cos g\alpha.\end{aligned}\right.$$

Remplaçons dans l'équation (III) $2\cos 2\alpha p_1$ par

$$d\cos(g+6)\alpha + e\cos(g+4)\alpha + (d+f)\cos(g+2)\alpha + (e+h)\cos g\alpha \\ + (k+f)\cos(g-2)\alpha + h\cos(g-4)\alpha + k\cos(g-6)\alpha,$$

et posons

$$p_2 = l\cos(g+6)\alpha + m\cos(g+4)\alpha + n\cos(g+2)\alpha \\ + \varpi\cos g\alpha + q\cos(g-2)\alpha + r\cos(g-4)\alpha + s\cos(g-6)\alpha;$$

nous aurons

$$l = \frac{-d}{12(g+3)},\quad m = \frac{-e}{8(g+2)},\quad r = \frac{h}{8(g-2)},\quad s = \frac{k}{12(g-3)},$$
$$n = \frac{-d-f+\beta a}{4(g+1)},\quad q = \frac{k+f-\beta c}{4(g-1)},\quad \gamma = e+h-\beta b = 0.$$

Telles sont les expressions de $l, m, n,\ldots$, quelles que soient les valeurs données à $b$ et $f$; et si on les suppose nulles, on obtient

$$l = \frac{-1}{2^7.3(g+1)(g+2)(g+3)},\quad m=0,\quad r=0,\quad s = \frac{1}{2^7.3(g-1)(g-2)(g-3)},$$
$$n = \frac{-(g^2+4g+7)}{2^7(g+1)^3(g-1)(g+2)},\quad q = \frac{g^2-4g+7}{2^7(g-1)^3(g+1)(g-2)},\quad \gamma = 0.$$

$\varpi$ est indéterminé, comme $b$ et $f$, et nous le ferons nul aussi.

Maintenant que l'on voit quel genre de simplification amène l'hypothèse de la nullité des constantes arbitraires, et que l'on reconnaît qu'elle amène l'évanouissement des termes de rang pair dans $p$, $p_1$, $p_2$, etc., faisons immédiatement ces réductions dans les calculs suivants. Posons dans l'équation $(d)$

$$\mathrm{p}_3 = p_3 + h^2\,\mathrm{p}_4,\quad \mathrm{D} = \delta + \mathrm{E}h^2,$$

nous obtiendrons les deux équations

$$\text{(IV)}\qquad \frac{d^2p_3}{d\alpha^2} + g^2p_3 - 2\cos 2\alpha p_2 + \beta p_1 + \delta\cos g\alpha = 0,$$

$$(e)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2\mathrm{p}_4}{d\alpha^2} + (g^2 - 2h^2\cos 2\alpha + \beta h^4 + \mathrm{C}h^6)\,\mathrm{p}_4 \\ & + (-2\cos 2\alpha + \beta h^2 + \mathrm{C}h^4)\,p_3 + (\beta + \mathrm{C}h^2)\,p_2 \\ & + \mathrm{C}h^2p_1 + (\delta + \mathrm{E}h^2)\,p + \mathrm{E}\cos g\alpha \end{aligned}\right.$$

Remplaçons dans l'équation (IV) $2\cos\alpha p_2$ par

$$l\cos(g+8)\alpha + (l+n)\cos(g+4)\alpha + (q+n)\cos g\alpha + (q+s)\cos(g-4)\alpha + s\cos(g-8)\alpha,$$

et posons

$$p_3 = R_1\cos(g+8)\alpha + R_2\cos(g+4)\alpha + R_3\cos g\alpha + R_4\cos(g-4)\alpha + R_5\cos(g-8)\alpha;$$

nous aurons

$$R_1 = \frac{-l}{16(g+4)},\quad R_2 = \frac{-(l+n)+\beta d}{8(g+2)},\quad R_4 = \frac{q+s-\beta k}{8(g-2)},\quad R_5 = \frac{s}{16(g-4)},$$
$$\delta = q+n,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$R_1 = \frac{1}{2^{11}.3(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)},\quad R_5 = \frac{1}{2^{11}.3(g-1)(g-2)(g-3)(g-4)},$$
$$R_2 = \frac{g^3+7g^2+20g+20}{2^8.3(g+1)^3(g-1)(g+2)^2(g+3)},\quad R_4 = \frac{g^3-7g^2+20g-20}{2^8.3(g-1)^3(g+1)(g-2)^2(g-3)},$$
$$\delta = \frac{5g^2+7}{32(g^2-1)^3(g^2-2^2)};$$

ajoutons à ces valeurs $R_3 = 0$.

Si nous posons encore

$$\mathrm{p}_4 = p_4 + h^2\mathrm{p}_5,\quad E = \varepsilon + Hh^2,$$

$p_4$ nous sera donné par l'équation

$$\frac{d^2p_4}{d\alpha^2} + g^2p_4 - 2\cos 2\alpha p_3 + \beta p_2 + \delta p + \varepsilon\cos g\alpha = 0,$$

et nous aurons

$$p_4 = S_1\cos(g+10)\alpha + S_2\cos(g+6)\alpha + S_3\cos(g+2)\alpha + S_4\cos(g-2)\alpha + S_5\cos(g-6)\alpha + S_6\cos(g-2)\alpha,$$

en prenant

$$S_1 = \frac{-R_1}{4.5(g+5)},\quad S_2 = \frac{-R_1 - R_2 + \beta l}{4.3(g+3)},\quad S_3 = \frac{-R_2 + \beta n + \delta a}{4(g+1)},$$

$$S_4 = \frac{R_4 - \beta q - \delta c}{4(g-1)},\quad S_5 = \frac{R_4 + R_5 - \beta s}{4.3(g-3)},\quad S_6 = \frac{R_5}{4.5(g-5)},$$

$$\varepsilon = 0,$$

ou

$$S_1 = \frac{-1}{2^{11}.3.4.5(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)(g+5)},\quad S_6 = \frac{1}{2^{11}.3.4.5(g-1)(g-2)(g-3)(g-4)(g-5)},$$

$$S_2 = \frac{-(g^4 + 11g^3 + 49g^2 + 101g + 78)}{2^{13}(g+1)^3(g+2)^2(g+3)^2(g+4)(g-1)},\quad S_5 = \frac{g^4 - 11g^3 + 49g^2 - 101g + 78}{2^{13}(g-1)^3(g-2)^2(g-3)^2(g-4)(g+1)},$$

$$S_3 = \frac{-(g^7 + 7g^6 + 18g^5 + 24g^4 + 63g^3 + 81g^2 + 206g + 464)}{2^{10}.3(g+1)^5(g+2)^2(g+3)(g-1)^3(g-2)},$$

$$S_4 = \frac{g^7 - 7g^6 + 18g^5 - 24g^4 + 63g^3 - 81g^2 + 206g - 464}{2^{10}.3(g-1)^5(g-2)^2(g-3)(g+1)^3(g+2)}.$$

Pour terminer ce calcul, remarquons que le coefficient $\eta$ de $h^{12}$ dans la constante a pour valeur

$$\eta = S_3 + S_4,$$

et, en remplaçant $S_3$ et $S_4$ par leurs expressions,

$$\eta = \frac{9g^6 + 22g^4 - 203g^2 - 116}{2^6(g^2-1)^5(g^2-2^2)^2(g^2-3^2)}.$$

Ainsi, en mettant dans R les valeurs des premiers termes, on obtient

$$(l)\qquad \left\{\begin{aligned} R = g^2 &+ \frac{1}{2(g^2-1)}h^4 + \frac{5g^2+7}{32(g^2-1)^3(g^2-4)}h^8 \\ &+ \frac{9g^6 + 22g^4 - 203g^2 - 116}{64(g^2-1)^5(g^2-4)^2(g^2-9)}h^{12} + \ldots \end{aligned}\right.$$

**12.** Il est temps de remarquer que l'on ne peut continuer ainsi le développement de $P_2$ et de la constante R sans se préoccuper de la valeur du nombre entier $g$; car le coefficient de $h^4$ contient en dénominateur le facteur $g-1$, le coefficient de $h^8$ le facteur $g-2$, le coefficient de $h^{12}$ le facteur $g-3$, et ainsi de suite; de sorte que, quel que soit le nombre entier pris pour $g$, on finira par trouver un terme infini. On doit même arrêter le développement de R avant la rencontre d'un terme infini; car, pour qu'un terme de la constante puisse être accepté, il faut que le terme de même ordre de $P_2$ puisse lui-même l'être.

Pour plus de clarté, considérons un cas particulier, celui de $g=4$ par exemple. Les coefficients de $h^8$ et de $h^{12}$ dans R conservent une valeur finie et doivent cependant être rejetés. Pour le reconnaître, reprenons le calcul de $p_3$, qui demande à être modifié, car la valeur de $R_5$ qui y figure devient infinie.

L'expression de $2\cos 2\alpha p_2$ devient

$$l\cos 12\alpha + (l+n)\cos 8\alpha + (q+n+s)\cos 4\alpha + q + s,$$

et les termes en $\cos g\alpha$ et $\cos(g-8)\alpha$ se réunissent en un seul, en $\cos 4\alpha$.

Nous substituerons dans l'équation (IV)

$$p_3 = R_1 \cos 12\alpha + R_2 \cos 8\alpha + R_3 \cos 4\alpha + R_4,$$

pour déterminer les coefficients; mais dans le résultat de la substitution, le coefficient de $\cos 4\alpha$ devant être nul, on obtient

$$\delta = q + n + s;$$

la valeur de $\delta$ doit donc être augmentée de la quantité $s$; on a

$$q + n = \frac{87}{2^7.3^4.5^3}, \quad s = \frac{1}{2^8.3^2},$$

et par suite

$$\delta = \frac{433}{2^8.3^3.5^3}.$$

On voit clairement comment on continuerait ce développement.

Si $g$ est $>4$, les trois premiers termes de R sont ceux que l'on trouve dans l'expression ($l$); si $g$ est $>6$, on doit encore prendre dans le développement ($l$) le terme en $h^{12}$, et ainsi de suite.

Nous allons considérer le développement de $P_2$ et les premiers termes de R quand $g$ est inférieur à 4.

Si $g$ est égal à zéro, le développement que nous avons trouvé pour $P_2$ est applicable, et c'est même le seul cas où l'on puisse l'appliquer aussi loin que l'on veut.

Si $g = 2$, on obtient, par un calcul spécial,

$$\begin{aligned}
P_2 = \cos 2\alpha &+ h^2\left(-\frac{1}{12}\cos 4\alpha + \frac{1}{4}\right) + \frac{h^4}{384}\cos 6\alpha \\
&- h^6\left(\frac{1}{23040}\cos 8\alpha + \frac{43}{13824}\cos 4\alpha + \frac{5}{192}\right) \\
&+ h^8\left(\frac{1}{2211840}\cos 10\alpha + \frac{287}{2211840}\cos 6\alpha\right) \\
&+ h^{10}\left(\frac{-1}{309657600}\cos 12\alpha - \frac{41}{16588800}\cos 8\alpha\right. \\
&\qquad\left. + \frac{21059}{79626240}\cos 4\alpha + \frac{1363}{221184}\right) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$\text{(A)} \qquad R = 4 + \frac{5}{12}h^4 - \frac{763}{13824}h^8 + \frac{1002419}{79626240}h^{12} + \ldots.$$

Si $g = 4$, on a

$$\begin{aligned}
P_2 = \cos 4\alpha &+ h^2\left(-\frac{1}{20}\cos 6\alpha + \frac{1}{12}\cos 2\alpha\right) + h^4\left(\frac{1}{960}\cos 8\alpha + \frac{1}{192}\right) \\
&+ h^6\left(\frac{-1}{80640}\cos 10\alpha - \frac{13}{96000}\cos 6\alpha + \frac{11}{17280}\cos 2\alpha\right) \\
&+ h^8\left(\frac{1}{10321920}\cos 12\alpha + \frac{23}{6048000}\cos 8\alpha - \frac{1}{92160}\right) \\
&- h^{10}\left(\frac{1}{1857945600}\cos 14\alpha + \frac{53}{1032192000}\cos 10\alpha\right. \\
&\qquad\left. + \frac{4037}{2419200000}\cos 6\alpha + \frac{439}{62208000}\cos 2\alpha\right) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$\text{(B)} \qquad R = 16 + \frac{1}{30}h^4 + \frac{433}{864000}h^8 - \frac{189983}{21772800000}h^{12} + \ldots.$$

Les développements (A) et (B) ne contiennent que des puissances paires de $h^4$, et nous démontrerons plus loin que R jouit de cette propriété toutes les fois que $g$ est pair.

Pour $g=1$, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
P_2 = \cos\alpha - \frac{h^2}{8}\cos 3\alpha + h^4\left(\frac{1}{192}\cos 5\alpha - \frac{1}{64}\cos 3\alpha\right) \\
- h^6\left(\frac{1}{9216}\cos 7\alpha - \frac{1}{1152}\cos 5\alpha + \frac{1}{1536}\cos 3\alpha\right) \\
+ h^8\left(\frac{1}{737280}\cos 9\alpha - \frac{1}{49152}\cos 7\alpha \right.\\
\left. + \frac{1}{24576}\cos 5\alpha + \frac{11}{36864}\cos 3\alpha\right) + \ldots ;
\end{aligned}$$

$$R = 1 + h^2 - \frac{1}{8}h^4 - \frac{1}{64}h^6 - \frac{1}{1536}h^8 + \frac{11}{36864}h^{10} + \ldots .$$

Pour $g=3$, on a

$$\begin{aligned}
P_2 = \cos 3\alpha + h^2\left(-\frac{1}{16}\cos 5\alpha + \frac{1}{12}\cos\alpha\right) \\
+ h^4\left(\frac{1}{640}\cos 7\alpha + \frac{1}{64}\cos\alpha\right) \\
+ h^6\left(\frac{-1}{46080}\cos 9\alpha - \frac{7}{20480}\cos 5\alpha + \frac{1}{768}\cos\alpha\right) \\
+ h^8\left(\frac{1}{2^{11}.3^2.5.7}\cos 11\alpha + \frac{17}{2^{15}.3^2.5}\cos 7\alpha \right.\\
\left. - \frac{1}{2^{14}}\cos 5\alpha - \frac{1}{2^{13}}\cos\alpha\right) + \ldots ;
\end{aligned}$$

$$R = 9 + \frac{1}{16}h^4 + \frac{1}{64}h^6 + \frac{59}{61440}h^8 - \frac{3}{16384}h^{10} + \ldots .$$

**13.** Proposons-nous maintenant de développer $P_1$, et comme pour une même valeur de $g$ la constante R a une valeur différente dans $P_1$ et $P_2$, représentons-la maintenant par R′. Ainsi nous avons l'équation différentielle

$$(m) \qquad \frac{d^2P_1}{d\alpha^2} + (R' - 2h^2\cos 2\alpha)P_1 = 0,$$

et il faut trouver la solution qui s'annule pour $\alpha = 0$ et choisir

$$R' = g^2 + \beta h^4 + \gamma h^6 + \delta h^8 + \varepsilon h^{10} + \eta h^{12} + \ldots$$

de manière qu'elle soit périodique. Posons

$$P_1 = \sin g\alpha + h^2 p + h^4 p_1 + h^6 p_2 + h^8 p_3 + \ldots,$$

et nous aurons exactement les mêmes calculs que pour $P_2$, avec le seul changement des cosinus en sinus; ainsi nous aurons

$$\begin{aligned}
p &= a \sin(g+2)\alpha + c\sin(g-2)\alpha,\\
p_1 &= d\sin(g+4)\alpha + k\sin(g-4)\alpha,\\
p_2 &= l\sin(g+6)\alpha + n\sin(g+2)\alpha + q\sin(g-2)\alpha\\
&\quad + s\sin(g-6)\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et $a$, $c$, $d$, $k$ ont les mêmes valeurs que dans l'expression de $P_2$; on a donc encore pour la constante

$$\begin{aligned}
R' = g^2 &+ \frac{1}{2(g^2-1)}h^4 + \frac{5g^2+7}{32(g^2-1)^3(g^2-4)}h^8\\
&+ \frac{9g^6+22g^4-203g^2-116}{64(g^2-1)^5(g^2-4)^2(g^2-9)}h^{12} + \ldots,
\end{aligned}$$

et ce développement doit être arrêté au même terme que dans R; ensuite, quoique les premiers termes de R et de R′ soient les mêmes, ces deux constantes ne sont pas égales, et les deux séries se séparent dès le terme à partir duquel on est obligé de remplacer $g$ par sa valeur particulière.

**14.** Quand on a obtenu la valeur de $P_2$ pour une valeur impaire de $g$, il est aisé d'en déduire celle de $P_1$ pour la même valeur de $g$. En effet, si $P_2$ est donné par l'équation

$$(n) \qquad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + [R(g^2, h^2) - 2h^2\cos 2\alpha]\,P = 0,$$

en changeant $h^2$ en $-h^2$ et $\alpha$ en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, on aura une fonction périodique qui satisfera à l'équation

$$(p) \qquad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + [R(g^2, -h^2) - 2h^2\cos 2\alpha]\,P = 0,$$

de même forme que $(m)$, et si $g$ est impair, les cosinus de $P_2$ se changent en sinus; on a donc l'expression de $P_1$, et de plus on voit qu'on obtient la constante R', qui convient à $P_1$, en changeant dans R $h^2$ en $-h^2$.

D'après cela, pour $g=1$ on a

$$\begin{aligned}
P_1 = \sin\alpha - \frac{h^2}{8}\sin 3\alpha + h^4\left(\frac{1}{192}\sin 5\alpha + \frac{1}{64}\sin 3\alpha\right) \\
- h^6\left(\frac{1}{9216}\sin 7\alpha + \frac{1}{1152}\sin 5\alpha + \frac{1}{1536}\sin 3\alpha\right) \\
+ h^8\Big(\frac{1}{737280}\sin 9\alpha + \frac{1}{49152}\sin 7\alpha \\
+ \frac{1}{24576}\sin 5\alpha - \frac{11}{36864}\sin 3\alpha\Big) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$R' = 1 - h^2 - \frac{1}{8}h^4 + \frac{1}{64}h^6 - \frac{1}{1536}h^8 - \frac{11}{36864}h^{10} + \ldots.$$

Et pour $g=3$ on a

$$\begin{aligned}
P_1 = \sin 3\alpha + h^2\left(-\frac{1}{16}\sin 5\alpha + \frac{1}{12}\sin\alpha\right) \\
+ h^4\left(\frac{1}{640}\sin 7\alpha + \frac{1}{64}\sin\alpha\right) \\
+ h^6\left(\frac{-1}{46080}\sin 9\alpha - \frac{7}{20480}\sin 5\alpha + \frac{1}{768}\sin\alpha\right) \\
+ h^8\Big(\frac{1}{2^{14}.3^2.5.7}\sin 11\alpha + \frac{17}{2^5.3^4.5}\sin 7\alpha \\
+ \frac{1}{2^{14}}\sin 5\alpha + \frac{1}{2^{13}}\sin\alpha\Big) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$R' = 9 + \frac{1}{16}h^4 - \frac{1}{64}h^6 + \frac{59}{61440}h^8 + \frac{3}{16384}h^{10} + \ldots.$$

Si $g$ est pair et que $P_2$ soit donné par l'équation $(n)$, en changeant $h^2$ en $-h^2$ et $\alpha$ en $\frac{\pi}{2}-\alpha$ dans $P_2$, on aura une fonction P qui satisfera à l'équation $(p)$; mais les cosinus restent des cosinus dans ce changement; donc la nouvelle expression appartient encore à $P_2$, et on en conclut

$$R(g^2, -h^2) = R(g^2, h^2).$$

Le même raisonnement est applicable à $P_1$; par conséquent, si $g$ est pair, $P_1$ ne change pas quand on remplace $\alpha$ par $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et $h^2$ par $-h^2$, et R' ne renferme que des puissances quatrièmes de $h$.

Par un calcul spécial, on trouve, pour $g = 2$,

$$\begin{aligned}
P_1 = {} & \sin 2\alpha - \frac{h^2}{12}\sin 4\alpha + \frac{h^4}{384}\sin 6\alpha \\
& + h^6\left(\frac{-1}{23040}\sin 8\alpha + \frac{5}{13824}\sin 4\alpha\right) \\
& + h^8\left(\frac{1}{2211840}\sin 10\alpha - \frac{37}{2209140}\sin 6\alpha\right) \\
& + h^{10}\left(\frac{-1}{309657600}\sin 12\alpha + \frac{11}{33177600}\sin 8\alpha \right.\\
& \qquad \left. - \frac{289}{79626240}\sin 4\alpha\right) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$R' = 4 - \frac{1}{12}h^4 + \frac{5}{13824}h^8 - \frac{289}{79626240}h^{12} + \ldots.$$

Pour $g = 4$, on a

$$\begin{aligned}
P_1 = {} & \sin 4\alpha + h^2\left(-\frac{1}{20}\sin 6\alpha + \frac{1}{12}\sin 2\alpha\right) + \frac{h^4}{960}\sin 8\alpha \\
& - h^6\left(\frac{1}{80640}\sin 10\alpha + \frac{13}{96000}\sin 6\alpha - \frac{1}{4320}\sin 2\alpha\right) \\
& + h^8\left(\frac{1}{10321920}\sin 12\alpha + \frac{23}{6048000}\sin 8\alpha\right) \\
& + h^{10}\left(\frac{-1}{1857945600}\sin 14\alpha - \frac{53}{1032192000}\sin 10\alpha \right.\\
& \qquad \left. + \frac{293}{2419200000}\sin 6\alpha + \frac{397}{124416000}\sin 2\alpha\right) + \ldots;
\end{aligned}$$

$$R' = 16 + \frac{1}{30}h^4 - \frac{317}{864000}h^8 + \frac{4507}{1360800000}h^{12} + \ldots.$$

*Sur les fonctions* Q *qui doivent être associées à* $P_1$ *et* $P_2$.

**15.** On passe de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2\cos 2\alpha)P = 0$$

à celle qui donne Q

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} - [R - 2h^2 E(2\beta)] Q = 0, \tag{2}$$

en changeant $\alpha$ en $\beta i$ et P en Q, et R a la même valeur dans l'une et l'autre; donc si dans les valeurs de $P_1$ et $P_2$ on change $\alpha$ en $\beta i$, on aura des solutions de l'équation (2). Or il est aisé de comprendre que si la membrane se plie dans un mouvement vibratoire le long des droites FA et F′A′, comprises entre les foyers et les sommets du grand axe, et qui ont pour équations $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, elle doit aussi se plier tout le long de la droite FF′ menée entre les foyers et qui est donnée par $\beta = 0$. Donc

$$P_1 = \sin g\alpha + h^2 [a \sin(g+2)\alpha + b \sin(g-2)\alpha] + \ldots,$$

qui s'annule pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, doit effectivement s'associer à la fonction

$$Q_1 = A\left\{\frac{e^{\beta g} - e^{-\beta g}}{2} + h^2\left[a\frac{e^{\beta(g+2)} - e^{-\beta(g+2)}}{2} + b\frac{e^{\beta(g+2)} - e^{-\beta(g-2)}}{2}\right] + \ldots\right\},$$

qui se déduit de $P_1$ en changeant $\alpha$ en $\beta i$, et qui s'annule pour $\beta = 0$. De même

$$P_2 = \cos g\alpha + h^2 [a \cos(g+2)\alpha + b \cos(g-2)\alpha] + \ldots,$$

qui est maximum ou minimum pour $\alpha = 0$, doit s'associer avec

$$Q_2 = A\left\{E(\beta g) + h^2 \left[a E(\overline{g+2}\,\beta) + b E(\overline{g-2}\,\beta)\right]\right\} + \ldots,$$

qui est maximum ou minimum pour $\beta = 0$.

Toutefois les expressions de $P_1$ et $P_2$ pourront être convergentes, sans que celles de $Q_1$ et $Q_2$ le soient, pour toutes les valeurs que peut prendre $\beta$ dans l'intérieur de la membrane; mais, pour le moment, nous voulons plutôt faire remarquer les caractères des fonctions $Q_1$ et $Q_2$ que de donner un moyen de les calculer.

*Sur les lignes nodales.*

**16.** Nous pouvons déjà faire quelques réflexions sur la nature des lignes nodales d'une membrane elliptique. Nous avons vu que dans un mouvement vibratoire simple le déplacement d'un point de la membrane est donné par la formule

$$w = PQ \sin 2\lambda mt,$$

où P et Q satisfont aux deux équations (1) et (2) du numéro précédent, et où $\lambda$ est déterminé par la fixité du contour. Et P étant une fonction de $\alpha$ à période $2\pi$, on ne peut prendre pour elle que $P_1$ et $P_2$, de sorte que $Q_1$ et $Q_2$ étant les valeurs correspondantes de Q, on a deux genres de solutions donnés par les formules

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda_1 mt,$$
$$w = P_2 Q_2 \sin 2\lambda_2 mt,$$

et les lignes nodales ont pour équations, dans le premier genre,

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = 0,$$

et, dans le second genre,

$$P_2 = 0, \quad Q_2 = 0,$$

Dans le premier genre, le grand axe est une ligne nodale; dans le second genre, il est en maximum ou en minimum de vibration.

Les équations $Q_1 = 0$ et $Q_2 = 0$ donnent des ellipses qui ont les mêmes foyers que le contour de la membrane. Les équations $P_1 = 0$ et $P_2 = 0$ déterminent les asymptotes des lignes nodales hyperboliques qui ont encore les mêmes foyers; et le nombre entier $g$ qui entre dans $P_1$ et $P_2$ indique combien de fois ces fonctions s'annulent de $0$ à $\pi$, c'est-à-dire le nombre des lignes nodales hyperboliques, en désignant par *ligne nodale hyperbolique* les deux branches d'une hyperbole terminées au grand axe qui ont la même asymptote. Dans cette manière de voir, une hyperbole est comptée pour deux de ces lignes; mais si le grand axe ou le petit axe sont sans mouvement, ils ne sont comptés que pour une seule ligne hyperbolique.

Si $g$ est nul, le mouvement ne peut être que du second genre, et il n'existe aucune ligne hyperbolique.

Si $g = 1$, on n'a de ligne nodale hyperbolique que le grand axe dans le premier genre et que le petit axe dans le second genre.

Si $g = 2$, dans le premier genre on a pour ces lignes le petit et le grand axe, et dans le second genre une hyperbole.

Si $g = 3$, on a pour ces lignes nodales une hyperbole et soit le grand axe, soit le petit axe, suivant que le mouvement est du premier ou du second genre. Et ainsi de suite.

Quand les séries trouvées pour $P_1$ et $P_2$ seront très-convergentes, comme on connaît exactement le nombre des racines comprises de $0$ à $\frac{\pi}{2}$, nos formules seront très-commodes, et il sera aisé de séparer ces racines par des substitutions et de les calculer avec l'approximation voulue par l'expérience.

Mais si $h$, qui est proportionnel à l'excentricité de la membrane et à la hauteur du son, est assez grand, ces séries ne sont plus convergentes ou le sont trop peu pour être d'un usage commode; on ne peut même plus se servir des développements de R et R' suivant les puissances de $h$ et l'on est obligé de recourir à d'autres méthodes.

*Développements des fonctions* $P_1$ *et* $P_2$ *suivant les puissances de* $\sin\alpha$ *et de* $\cos\alpha$.

**17.** Si nous posons

$$\nu = \cos\alpha$$

et que nous prenions $\nu$ pour variable, l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2P}{d\alpha^2} + [R(g^2, h^2) - 2h^2\cos 2\alpha]P = 0$$

se transforme en la suivante :

$$(a) \qquad \frac{d^2P}{d\nu^2}(1-\nu^2) - \frac{dP}{d\nu}\nu + [R(g^2, h^2) + 2h^2 - 4h^2\nu^2]P = 0;$$

et si nous prenons

$$v' = \sin\alpha$$

pour variable, elle se change en cette autre :

$$(b) \qquad \frac{d^2P}{dv'^2}(1 - v'^2) - \frac{dP}{dv'}v' + [R(g^2, h^2) - 2h^2 + 4h^2v'^2]P = 0.$$

Supposons d'abord $g$ pair : la constante $R(g^2, h^2)$, comme nous avons vu, ne dépend que des puissances paires de $h^2$; donc on passe de l'équation $(a)$ à l'équation $(b)$ en changeant $v$ en $v'$ et $h^2$ en $-h^2$, et l'on en conclut cette propriété remarquable que, lorsque $g$ est pair, $P_1$ et $P_2$ sont des fonctions de $v$ qui restent invariables lorsqu'on y change $v$ en $v'$ et $h$ en $-h^2$.

Supposons $g$ impair : si $P_1$ est solution de l'équation (1), nous savons que la valeur de $P_2$ correspondant à la même valeur de $g$ est solution de la même équation dans laquelle on remplace $R(g^2, h^2)$ par $R(g^2, -h^2)$; alors $P_1$ satisfait aussi aux deux équations $(a)$ et $(b)$, et $P_2$ aux deux suivantes :

$$(c) \qquad \frac{d^2P}{dv^2}(1 - v^2) - \frac{dP}{dv}v + [R(g^2, -h^2) + 2h^2 - 4h^2v^2]P = 0,$$

$$(d) \qquad \frac{d^2P}{dv'^2}(1 - v'^2) - \frac{dP}{dv'}v' + [R(g^2, -h^2) - 2h^2 + 4h^2v'^2]P = 0.$$

On passe de $(a)$ à $(d)$ ou de $(c)$ à $(b)$ en changeant $v$ en $v'$ et $h^2$ en $-h^2$; donc, par les mêmes changements, on passe de l'expression de $P_1$ à celle de $P_2$, ou inversement de celle de $P_2$ à celle de $P_1$.

Considérons l'équation $(a)$ et posons, pour simplifier l'écriture,

$$R(g^2, h^2) + 2h^2 = m.$$

La solution générale de cette équation est la somme de deux solutions particulières, l'une $\Pi_2$ paire en $v$ et l'autre $\Pi_1$ impaire. Pour la fonction $\Pi_2$, posons

$$(e) \qquad \Pi_2 = k_0 + k_1v^2 + k_2v^4 + k_3v^6 + \ldots + k_{s-1}v^{2s-2} + k_sv^{2s} + k_{s+1}v^{2s+2} + \ldots$$

et nous déterminerons, en substituant dans $(a)$, les coefficients

$$k_1 = -\frac{m k_0}{2}, \quad k_2 = \frac{m(m-4)+8h^2}{2.3.4} k_0,$$
$$k_3 = \frac{-m(m-4)(m-16)-56h^2 m+128h^2}{2.3.4.5.6} k_0, \ldots$$

En égalant à zéro le coefficient de $\nu^{2s}$ dans le résultat de la substitution, on obtient la formule

$$(2) \qquad k_{s+1} = \frac{(4s^2-m)k_s + 4h^2 k_{s-1}}{(2s+1)(2s+2)},$$

qui montre comment chaque terme se déduit des deux précédents.

Pour la fonction $\Pi_1$, posons

$$(f) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Pi_1 &= a_1 \nu + a_2 \nu^3 + a_3 \nu^5 + a_4 \nu^7 + \ldots \\ &\quad + a_{s-1} \nu^{2s-3} + a_s \nu^{2s-1} + a_{s+1} \nu^{2s+1} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

et nous aurons pour les coefficients des premiers termes

$$a_2 = -\frac{m-1}{2.3} a_1, \quad a_3 = \frac{(m-1)(m-9)+24h^2}{2.3.4.5} a_1,$$
$$a_4 = \frac{-(m-1)(m-9)(m-25)+(170-26m)4h^2}{2.3.4.5.6.7}, \ldots,$$

et chaque terme se déduit des deux précédents par la relation

$$(3) \qquad a_{s+1} = \frac{[(2s-1)^2-m]a_s + 4h^2 a_{s-1}}{2s(2s+1)}.$$

Supposons la constante R choisie de manière que $P_1$ satisfasse à l'équation $(a)$; $P_1$ est nul ou maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et se comporte en cette propriété comme $\sin g\alpha$, auquel il se réduit, à un facteur constant près, pour $h = 0$; par conséquent il est nul si $g$ est pair, et il est maximum si $g$ est impair. Or, pour $\nu = 0$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\Pi_1$ est nul et $\Pi_2$ est maximum; donc si $g$ est pair $P_1$ est égal à $\Pi_1$, et si $g$ est impair $P_1$ est égal à $\Pi_2$, à un facteur constant près. Imaginons, au contraire, R choisi de manière que $P_2$ satisfasse à l'équation $(a)$, et nous voyons de même que $P_2$ est nul ou maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, selon que $g$ est impair ou pair; et on en conclut que $P_2$ est égal, à un facteur près, à $\Pi_1$ si $g$ est impair, et à $\Pi_2$ si $g$ est pair.

**18.** Venons à l'équation $(b)$, et posons

$$R - 2h^2 = m';$$

la solution générale de cette équation est encore la somme de deux solutions particulières, dont l'une est paire et l'autre impaire en $v'$. Si R est choisi de manière que $P_2$ soit solution de cette équation, alors $P_2$, qui est maximum pour $v' = 0$, se confond avec la solution particulière qui jouit de cette propriété, et on a

$$(e')\quad P_2 = k'_0 + k'_1 v'^2 + k'_2 v'^4 + \ldots + k'_{s-1} v'^{2s-2} + k'_s v'^{2s} + k'_{s+1} v'^{2s+2} + \ldots,$$

expression où $k'_0, k'_1, k'_2, \ldots$ se déduisent de $k_0, k_1, k_2, \ldots$, par le changement de $h^2$ en $-h^2$. Ainsi on a

$$k'_1 = -\frac{m' k'_0}{1.2}, \quad k'_1 = \frac{m'(m'-4) - 8h^2}{1.2\ 3.4} k'_0, \ldots,$$

et la loi qui lie entre eux les coefficients de trois termes consécutifs est

$$(4)\qquad k'_{s+1} = \frac{(4s^2 - m') k'_s - 4h^2 k'_{s-1}}{(2s+1)(2s+2)}.$$

Si, au contraire, R est choisi de manière que $P_1$ soit solution de l'équation (1), $P_1$, devant s'annuler pour $v' = 0$, se confond avec la solution impaire en $v'$ de $(b)$, et on a

$$(f')\quad P_1 = a'_1 v' + a'_2 v'^3 + a'_3 v'^5 + \ldots + a'_{s-1} v'^{2s-3} + a'_s v'^{2s-1} + a'_{s+1} v'^{2s+1} + \ldots,$$

$a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ étant des quantités qui se déduisent de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ par le changement de $h^2$ en $-h^2$; ainsi on a d'abord

$$a'_2 = -\frac{m'-1}{2.3} a'_1, \quad a'_3 = \frac{(m'-1)(m'-9) - 24h^2}{2.3.4.5} a'_1, \ldots,$$

et ensuite la formule générale

$$(5) \qquad a'_{s+1} = \frac{[(2s-1)^2 - m'] a'_s - 4h^2 a'_{s-1}}{2s(2s+1)}.$$

Ici il est bien important de remarquer que si l'on remplace R par un nombre quelconque, la fonction $(e')$ ou la fonction $(f')$ n'est égale à aucune des deux fonctions $(e)$ et $(f)$; car la fonction $(f')$, par exemple, qui est nulle pour $\nu' = 0$ ou $\alpha = 0$, n'est ni nulle ni maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et ne saurait, par conséquent, se confondre avec l'une ni l'autre des deux fonctions $(e)$ et $(f)$. C'est seulement si R est déterminé de manière que l'équation (1) ait une solution de période $2\pi$, que, cette solution devant être nulle ou maximum pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'une des deux expressions $(e')$ et $(f')$, qui lui est égale, est identique, à un facteur près, à l'une des deux expressions $(e)$ et $(f)$.

Par exemple, supposons $g$ pair, et, par suite, $P_2$ égal au produit de $\Pi_2$ par une constante A, si R a été pris convenablement. Par la considération des valeurs de ces fonctions pour $\alpha = 45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$, on obtient les formules

$$A\left(k_0 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{4} + \frac{k_3}{16} + \ldots\right) = k'_0 + \frac{k'_1}{2} + \frac{k'_2}{4} + \ldots,$$

$$A\left(k_0 + k_1\frac{3}{4} + k_2\frac{9}{16} + \ldots\right) = k'_0 + \frac{k'_1}{4} + \frac{k'_2}{16} + \ldots,$$

$$\frac{1}{A}\left(k'_0 + k'_1\frac{3}{4} + k'_2\frac{9}{16} + \ldots\right) = k_0 + \frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{16} + \ldots,$$

dont chacune peut déterminer le facteur A.

Nous avons admis jusqu'à présent que R était connu; mais s'il ne l'est pas, en éliminant A entre deux de ces formules, on obtiendra une équation dont les deux membres seront les produits de deux séries, qui ne renfermera d'inconnue que R et pourra servir à la déterminer.

Il est extrêmement aisé de reconnaître que les séries $(e)$, $(f)$, $(e')$, $(f')$ sont convergentes, tant que $\nu$ ou $\nu'$ est $< 1$. Soit plus généralement la série

$$k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_n x^n + k_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

dans laquelle $x$ est $< 1$, et dont trois coefficients consécutifs sont liés par la relation

$$(7) \qquad k_{s+1} = A_s k_s + a_s k_{s-1};$$

en outre la limite de $A_s$, quand $s$ grandit indéfiniment, est moindre que l'unité ou lui est au plus égale, et la limite de $a_s$ est zéro; alors la série est convergente.

En effet, la limite du rapport $\frac{k_{s+1}}{k_s}$ est égale à la limite $\tau$ de $A_s$ quand $s$ grandit indéfiniment; donc la limite du rapport d'un terme au précédent dans la série est $\tau x$, nombre $< 1$, et elle est convergente. Or les relations (2), (3), (4), (5), satisfaisant aux mêmes conditions que la relation (7), les séries sont convergentes tant que $\nu$ et $\nu'$ sont $< 1$, c'est-à-dire quel que soit $\alpha$.

Au contraire, si $\nu$ et $\nu'$ étaient $> 1$, ces séries seraient divergentes.

Cependant pour avoir des séries bien convergentes, on préférera les formules ($e'$) et ($f'$) quand $\alpha$ sera compris entre o et 45 degrés, et les formules ($e$) et ($f$) quand $\alpha$ sera compris entre 45 et 90 degrés.

**19.** On voit facilement que, à partir d'un terme suffisamment éloigné, tous les termes suivants ont le même signe dans les quatre séries ($e$), ($f$), ($e'$), ($f'$); mais nous allons de plus étudier le nombre des variations de ces deux dernières. Si nous supposons d'abord $h = 0$, R et $m'$ se réduisent à $g^2$, et les deux séries ($e'$) et ($f'$) à

$$P_2 = k'_0 \left[ 1 - \frac{g^2}{2}\nu'^2 + \frac{g^2(g^2-4)}{2.3.4}\nu'^4 - \frac{g^2(g^2-4)(g^2-16)}{2.3.4.5.6}\nu'^6 + \ldots \right],$$

$$P_1 = \frac{a'_1}{g}\left[ g\nu' - \frac{g(g-1)}{2.3}\nu'^3 + \frac{g(g^2-1)(g^2-9)}{2.3.4.5}\nu'^5 - \ldots \right];$$

ce sont à des facteurs près les valeurs de $\cos g\alpha$ et de $\sin g\alpha$.

Si nous faisons successivement

$$g = 1, 2, 3, \ldots,$$

le facteur entre crochets de $P_2$ devient

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{1.2}\nu'^2 - \frac{3}{1.2.3.4}\nu'^4 - \frac{3.15}{1.2.3.4.5.6}\nu'^6 - \ldots,$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\nu'^2,$$

$$\cos 3\alpha = 1 - \frac{3^2}{1.3}\nu'^2 + \frac{3^2(3^2-2^2)}{1.2.3.4}\nu'^4 + \frac{3^2(3^2-2^2)(4^2-3^2)}{1.2.3.4.5.6}\nu'^6 + \ldots,$$

$$\cos 4\alpha = 1 - \frac{4^2}{1.2}\nu'^2 + \frac{4^2(4^2-2^2)}{1.2.3.4},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . .

La série qui donne $\cos\alpha$ possède une seule variation et une seule racine positive en $\nu'$, $\nu' = \sin\frac{\pi}{2}$; $\cos 2\alpha$ ne possède aussi qu'une variation et qu'une racine positive $\nu' = \sin\frac{\pi}{4}$; $\cos 3\alpha$ a deux variations et deux racines positives, $\nu' = \sin\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$; $\cos 4\alpha$ a deux variations et deux racines positives $\nu' = \sin\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$. Et en général la série qui donne $\cos g\alpha$ au moyen de $\nu'$ possède autant de variations que l'équation $\cos g\alpha = 0$ a de racines positives en $\nu'$.

On reconnaît pareillement que la série qui exprime $\sin g\alpha$ a un nombre de variations égal au nombre de ses racines en $\nu'$.

Ainsi quand $h$ est nul, $P_1$ et $P_2$ exprimés par $\nu'$ possèdent le même nombre de variations que de racines positives, et nous allons démontrer que cette propriété subsiste pour une valeur quelconque de $h$.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de $P_2$; nous avons entre les coefficients de trois termes consécutifs de

$$P_2 = k'_0 + k'_1\nu'^2 + k'_2\nu'^4 + \ldots$$

la relation

$$k'_{s+1} = \frac{(4s^2 - m')k'_s - 4h^2k'_{s-1}}{(2s+1)(2s+2)},$$

et imaginons que l'on fasse croître la quantité $h$. Il résulte de cette formule que pour aucune valeur de $h$ (zéro excepté), deux coefficients consécutifs ne peuvent s'annuler. En effet, si $k'_s$ et $k'_{s+1}$ étaient nuls, $k'_{s-1}$

le serait aussi, puis pour la même raison $k'_{s-2}$, et ainsi de suite, de sorte que tous les termes de la série s'annuleraient.

En second lieu, si le coefficient d'un des termes s'annule pour une certaine valeur de $h$, les coefficients des deux termes qui l'entourent sont de signe contraire, comme on le voit par la même formule.

Il résulte de là que, tandis que $h$ grandit, $P_2$ ne peut acquérir ni perdre aucune variation, et qu'il en possède par conséquent le même nombre que pour $h = 0$. Mais, comme nous l'avons démontré (n° **10**), $P_2$ s'annule toujours le même nombre de fois de $\alpha = 0$ à $\alpha = \frac{\pi}{2}$, quel que soit $h$; donc enfin l'équation

$$P_2(\nu') = 0$$

a précisément autant de racines réelles, positives et $< 1$, qu'elle a de variations.

**20.** Cette propriété permet de séparer les racines de cette équation. Considérons d'abord une équation algébrique

$$f(x) = 0,$$

qui a autant de racines positives que de variations; formons la suite des dérivées de $f(x)$

$$\text{(A)} \qquad f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots,$$

qui pour $x = 0$ présente les mêmes signes que la suite des coefficients de $f(x)$; il est aisé de prouver que, tandis que l'on fait croître $x$, il est impossible que cette série gagne jamais de variations; mais que lorsque $f(x)$ s'annule, il se perd une variation du premier au deuxième terme. Donc si l'équation $f(x) = 0$ a autant de variations que de racines positives, comme la série (A) pour $x = 0$ a ce nombre de variations, que lorsque $x$ grandit, elle en perd une à chaque fois que $f(x)$ s'annule, et qu'elle n'en peut gagner, elle ne peut en perdre que lorsque $x$ passe par une racine de l'équation $f(x) = 0$, et en comptant le nombre des variations de la suite (A) pour $x = a$ et $x = b$, et faisant la différence, on a précisément le nombre des racines comprises entre $a$ et $b$.

Tous ces raisonnements sont applicables à l'équation $P_2(v') = 0$, formée d'une série d'un nombre infini de termes, et on aura à examiner la suite infinie

$$(\mathrm{B}) \qquad P_2(v'), \quad \frac{dP_2}{dv'}, \quad \frac{d^2P_2}{dv'^2}, \quad \frac{d^3P_2}{dv'^3}, \quad \ldots;$$

les deux premiers s'obtiendront par les séries

$$P_2 = k'_0 + k'_1 v'^2 + k'_2 v'^4 + \ldots,$$
$$\frac{dP_2}{dv'} = k'_1 2v' + k'_2 4v'^3 + \ldots;$$

puis on calculera les dérivées suivantes au moyen de l'équation

$$\frac{d^2P}{dv'^2}(1 - v'^2) - \frac{dP}{dv'}v' + (R - 2h^2 + 4h^2 v'^2)P = 0$$

et de celles que l'on en déduit par la différentiation.

Le nombre infini des termes de la suite (B) n'offre pas d'embarras; car on sait combien l'équation $P_2(v') = 0$ a de racines entre 0 et 1; elle en a autant que $\cos g\alpha = 0$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ : c'est $\frac{g}{2}$ ou $\frac{g+1}{2}$, suivant que $g$ est pair ou impair; $P_2(v')$ possédera autant de variations; on calculera donc seulement un nombre $n$ de termes de la série qui donne $P_2$, suffisant pour y compter toutes ces variations, et il résulte des premiers principes de l'algèbre que la série (B) n'aura pas de variations au delà de ses $n$ premiers termes quand on donnera à $v'$ une valeur positive.

**21.** Tout ce que nous venons de dire de $P_2$ peut être répété pour $P_1$. Nous pouvons maintenant nous faire une idée plus précise de la constante R. Cette quantité, pour $h = 0$, se réduit au carré d'un nombre entier : elle est par conséquent positive quand $h$ est très petit; mais nous allons démontrer que la constante R relative à $P_2$ est non-seulement positive, mais aussi plus grande que $2h^2$, quel que soit $h$.

Nous venons d'examiner les changements dans le nombre des variations de la suite (B) quand on fait varier $v'$ de 0 à 1; mais comme

$P_1$ et $P_2$ sont l'une une fonction impaire en $v'$ et l'autre une fonction paire, il en résulte que la série (B) jouit de la même propriété entre $-1$ et $0$ qu'entre $0$ et $1$, et par conséquent si l'on fait croître $v'$ de $-1$ à $+1$, il se perd une variation seulement à chaque fois que $v'$ passe par une racine de $P_2(v') = 0$. Pareille chose a lieu pour $P_1(v')$.

$P_2$ est donné par l'équation

$$(n) \qquad \frac{d^2P_2}{dv'^2}(1 - v'^2) = \frac{dP_2}{dv'}v' + (2h^2 - 4h^2v'^2 - R)P_2;$$

faisons-y $v' = 0$, nous avons alors $\frac{dP_2}{dv'} = 0$, et par conséquent $P_2$ et $\frac{d^2P_2}{dv'^2}$ sont de signe contraire; car s'ils étaient de même signe, faisons croître $v'$ depuis une quantité très-petite négative jusqu'à une quantité très-petite positive, $\frac{dP_2}{dv'}$, en s'annulant, passera d'un signe contraire à celui de $P_2$ à un signe pareil, et la série perdrait deux variations, tandis qu'elle n'en doit point perdre. Donc le coefficient de $P_2$ est négatif, et l'on a

$$2h^2 - R < 0,$$

ou $R > 2h^2$.

Désignons, comme nous l'avons déjà fait, par $R'$ la constante $R$ quand elle appartient à la fonction $P_1$, et nous allons démontrer qu'elle est $> -2h^2$ toutes les fois que le nombre entier $g$ est $> 1$. En effet, $\frac{dP_1}{dv'}$ s'annule nécessairement pour une valeur de $v'$ comprise de $0$ à $1$, et, pour cette valeur, $P_1$ et $\frac{d^2P_1}{dv'^2}$ sont de signe contraire, et puisque $P_1$ satisfait à l'équation $(n)$, lorsqu'on y remplace $R$ par $R'$, on a

$$2h^2 - 4h^2v'^2 - R' < 0$$

ou

$$R' > 2h^2(1 - 2v'^2),$$

et à plus forte raison $R'$ est $> -2h^2$.

Il est bon de remarquer que l'équation $(n)$ cesse d'être applicable à la limite $v' = 1$, par cette raison que $v'$, étant le sinus d'un angle déterminé, ne peut prendre des valeurs plus grandes que l'unité. Et en effet, pour $v'=1$, P ou $\frac{dP}{d\alpha}$ est nul. Supposons que ce soit P, il résulte de cette équation que $\frac{dP}{dv'}$ serait nul, et par suite aussi $\frac{dP}{d\alpha}$, d'après l'égalité

$$\frac{dP}{d\alpha}=\frac{dP}{dv'}\cos\alpha;$$

ce qui est impossible.

*Des équations différentielles qui déterminent la fonction* Q.

**22** Nous savons que Q est donné par l'équation

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2}-[R-2h^2\,E(2\beta)]=0,$$

et si l'on pose

$$\rho=c\,\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2},\quad \rho'=c\,\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2},$$

et qu'on prenne $\rho$ et $\rho'$ pour variables, on obtient les deux équations

$$(1)\qquad \frac{d^2Q}{d\rho^2}(\rho^2-c^2)+\frac{dQ}{d\rho}\rho+(4\lambda^2\rho^2-R-2h^2)Q=0,$$

$$(2)\qquad \frac{d^2Q}{d\rho'^2}(\rho'^2+c^2)+\frac{dQ}{d\rho'}\rho'+(4\lambda^2\rho'^2-R+2h^2)Q=0.$$

Lorsqu'on fait $c=0$ dans ces équations, elles se réduisent à une seule, relative à la membrane circulaire; les deux demi-axes $\rho$ et $\rho'$ d'une quelconque des ellipses homofocales à la membrane se changeant en le rayon $r$ d'un cercle, on a

$$(3)\qquad \frac{d^2Q}{dr^2}r^2+\frac{dQ}{dr}r+(4\lambda^2r^2-g^2)Q=0,$$

équation trouvée au nº **2**. Nous avons vu que sa solution générale est la somme de deux solutions particulières, dont l'une devient infinie pour $r=0$. Il faut s'expliquer comment la solution du cercle peut se déduire de celle de l'ellipse.

Pour cela, supposons d'abord $\lambda$ nul dans les équations (1), (2) et (3);

elles deviennent, en remarquant que R se réduit à $g^2$ pour l'hypothèse $\lambda = 0$, qui donne $h = 0$,

$$(1') \qquad \frac{d^2Q}{d\rho^2}(\rho^2 - c^2) + \frac{dQ}{d\rho}\rho - g^2 Q = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{d^2Q}{d\rho'^2}(\rho'^2 + c^2) + \frac{dQ}{d\rho'}\rho' - g^2 Q = 0,$$

$$(3') \qquad \frac{d^2Q}{dr^2}r^2 + \frac{dQ}{dr}r - g^2 Q = 0.$$

L'intégrale générale de (3') est

$$Q = A r^g + B r^{-g},$$

et devient infinie pour $r = 0$, c'est-à-dire au centre du cercle. Mais les intégrales des deux équations (1') et (2') sont

$$Q = A\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}\right)^g + \frac{B}{\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}\right)^g},$$

$$Q = A\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g + \frac{B}{\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g},$$

et l'on voit que la seconde partie de leur expression n'est pas infinie pour $\rho = c$ ou $\rho' = 0$, excepté dans le cas où $c$ est nul.

Ainsi la solution générale des équations (1) et (2), quand on y fait $\lambda = 0$, renferme deux constantes arbitraires et ne devient pas infinie pour $\rho' = 0$.

Nous avons vu que le déplacement d'un point de la membrane est représenté par

$$w = Au \sin 2\lambda mt, \quad u = PQ,$$

et pour une même valeur de $g$, P peut s'annuler ou être maximum pour $\alpha = 0$, et a deux expressions, $P_1$ et $P_2$, qui correspondent à deux valeurs différentes de la constante R, qui deviennent seulement identiques pour $h = 0$; de là, pour $u$, deux expressions,

$$u = P_1 Q_1, \quad u = P_2 Q_2,$$

dans lesquelles $Q_1$ est une valeur de Q qui s'annule pour $\beta = 0$, et $Q_2$ une valeur qui devient maximum pour cette valeur de $\beta$. Voyons à quoi se reduisent $Q_1$ et $Q_2$ quand on y fait $\lambda = 0$.

Exprimons que

$$Q = A\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g + B\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^{-g}$$

est nul pour $\rho' = 0$, et nous aurons $\frac{B}{A} = -c^{2g}$; donc

$$Q_1 = A\left[\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g - \frac{c^{2g}}{\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g}\right];$$

et si nous exprimons que $\frac{dQ}{d\rho'}$ est nul pour $\rho' = 0$, nous avons $\frac{B}{A} = c^{2g}$; donc

$$Q_2 = A\left[\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g + \frac{c^{2g}}{\left(\rho' + \sqrt{\rho'^2 + c^2}\right)^g}\right].$$

Enfin, si l'on fait $c = 0$, les deux valeurs de $Q_1$ et $Q_2$ pour une même valeur de l'entier $g$ sont identiques.

Ces explications étaient utiles pour faire comprendre comment la théorie de la membrane circulaire est renfermée en celle de la membrane elliptique; car il est évident que ce que nous venons de trouver lorsque $\lambda$ est nul, est vrai pour une valeur quelconque de $\lambda$.

**25**. Revenons aux équations (1) et (2). Si nous posons

$$\frac{\rho}{c} = u,$$

nous aurons, au lieu de l'équation (1),

$$\frac{d^2Q}{du^2}(u^2 - 1) + \frac{dQ}{du} + (4h^2u^2 - R - 2h^2)Q = 0,$$

et cette équation se déduit de celle qui donne P au moyen de $v$ par le seul changement de P en Q et de $v$ en $u$. Or nous avons vu que $P_2$ est donné par la série

$$P_2 = k_0 + k_1 v^2 + k_2 v^4 + \ldots,$$

et $P_1$ par cette autre

$$P_1 = a_1 v + a_2 v^3 + a_3 v^5 + \ldots,$$

$k_0, k_1, k_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots$ ayant les valeurs calculées au n° **17**; donc les valeurs correspondantes de Q sont

$$Q_2 = k_0 + k_1 \frac{\rho^2}{c^2} + k_2 \frac{\rho^4}{c^4} + \ldots,$$

$$Q = a_1 \frac{\rho}{c} + a_2 \frac{\rho^3}{c^3} + a_3 \frac{\rho^5}{c^5} + \ldots.$$

Toutefois ces séries ne peuvent être employées; car elles ne sont jamais convergentes si $\rho$ est $> c$; ce qui a toujours lieu dans notre problème.

Mais posons

$$\frac{\rho'}{c'} = u',$$

nous aurons au lieu de l'équation (2)

$$\frac{d^2Q}{du'^2}(u'^2 + 1) + \frac{dQ}{du'} u' + (4h^2 u'^2 - R + 2h^2) Q = 0,$$

qui se déduit de l'équation qui donne P au moyen de $v'$ (n° **17**), en changeant $v'$ en $u'\sqrt{-1}$. Donc $Q_2$ et $Q_1$ seront donnés par les formules

$$Q_2 = k'_0 - k'_1 \frac{\rho'^2}{c^2} + k'_2 \frac{\rho'^4}{c^4} - k'_3 \frac{\rho'^6}{c^6} + \ldots,$$

$$Q_1 = a'_1 \frac{\rho'}{c} - a'_2 \frac{\rho'^3}{c^3} + a'_3 \frac{\rho'^5}{c^5} - ,\ldots.$$

Nous savons que les séries qui donnent $P_1$ et $P_2$ au moyen de $v'$ sont convergentes tant que $v'$ est $< 1$; les précédentes s'en déduisent par le changement de $v'$ en $\frac{\rho'}{c}\sqrt{-1}$; il résulte donc du théorème du cercle de convergence que ces séries sont convergentes, tant que $\rho'$ est $< c$. Ces séries seront très-commodes, si l'on considère une membrane très-excentrique en sorte que $\rho'$ soit beaucoup plus petit que $c$.

Lorsque $\rho'$ sera $> c$, on pourra ordinairement obtenir Q avec assez d'approximation de la manière suivante. Posons

$$z = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}}{2} = \frac{ce^\beta}{2},$$

et en prenant $z$ pour variable, nous aurons

$$z^2 \frac{d^2Q}{dz^2} + z\frac{dQ}{dz} + \left[4\lambda^2 z^2\left(1 + \frac{c^4}{16z^4}\right) - \mathrm{R}\right]Q = 0.$$

Or, si $\rho' = \sqrt{\rho^2 - c^2}$ est $> c$, on aura

$$\rho > c\sqrt{2}, \quad \frac{c}{z} < 2(\sqrt{2} - 1),$$

$$\frac{c^4}{16z^4} < 17 - 12\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad < 0{,}0306\ldots.$$

Donc si dans l'équation différentielle précédente, on réduit le facteur de $4\lambda^2 z^2$ à l'unité, celle qui en résultera fera connaître Q en général avec une certaine approximation. Or l'équation prend alors la forme que l'on a trouvée pour le cercle

$$z^2 \frac{d^2Q}{dz^2} + z\frac{dQ}{dz} + (4\lambda^2 z^2 - \mathrm{R})Q = 0,$$

et en posant $\mathrm{R} = n^2$, on aura pour valeur approchée l'expression

$$Q = Cz^n\left[1 - \frac{(\lambda z)^2}{1(n+1)} + \frac{(\lambda z)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{(\lambda z)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right],$$

où $n$ toutefois n'est plus un entier comme dans le cas du cercle, mais dépend de $h$. Au reste nous donnerons plus loin un autre moyen de développer Q.

*Développements de* $Q_1$ *et* $Q_2$.

**24.** Les fonctions Q et $Q_1$ satisfont à l'équation

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} = [\mathrm{R} - h^2(e^{2\beta} + e^{-2\beta})]Q;$$

posons

$$R - h^2(e^{2\beta} + e^{-2\beta}) = T,$$

et formons les dérivées

$$\frac{dT}{d\beta} = -2h^2(e^{2\beta} - e^{-2\beta}), \quad \frac{d^2T}{d\beta^2} = -2^2h^2(e^{2\beta} + e^{-2\beta}), \ldots$$

Si l'on fait $\beta = 0$, toutes les dérivées d'ordre impair s'annulent, et désignant les autres par $A_2, A_4, \ldots$, posons

$$T = A_0, \quad \frac{d^2T}{d\beta^2} = -2^3h^2 = A_2, \ldots, \quad \frac{d^{2i}T}{d\beta^{2i}} = -2^{2i+1}h^2 = A_{2i};$$

puis développons Q d'après la formule

$$Q = Q_0 + \left(\frac{dQ}{d\beta}\right)_0 \beta + \left(\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right)_0 \frac{\beta^2}{1.2} + \ldots,$$

et formons les dérivées au moyen des formules

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} = TQ, \quad \frac{d^3Q}{d\beta^3} = Q\frac{dT}{d\beta} + T\frac{dQ}{d\beta},$$

$$\frac{d^4Q}{d\beta^4} = Q\frac{d^2T}{d\beta^2} + 2\frac{dQ}{d\beta}\frac{dT}{d\beta} + T\frac{d^2Q}{d\beta^2},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Occupons-nous d'abord de $Q_1$; comme il est nul pour $\beta = 0$, toutes les dérivées d'ordre pair de Q s'annulent, et les dérivées d'ordre impair ont pour valeurs, en désignant la première par B :

$$\left(\frac{dQ}{d\beta}\right)_0 = B, \quad \left(\frac{d^3Q}{d\beta^3}\right)_0 = BA_0, \quad \left(\frac{d^5Q}{d\beta^5}\right)_0 = B(A_0^2 + 3A_2),$$

$$\left(\frac{d^7Q}{d\beta^7}\right)_0 = B\left(A_0^3 + \frac{2.3 + 4.5}{1.2}A_0A_2 + \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}A_4\right),$$

$$\left(\frac{d^9Q}{d\beta^9}\right)_0 = B\left(A_0^4 + \frac{2.3 + 4.5 + 6.7}{1.2}A_0^2A_2 + \frac{2.3.4.5 + 4.5.6.7}{1.2.3.4}A_0A_4 + \frac{2.3\times 6.7}{1.2\times 1.2}A_2^2 + \frac{2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.5.6}A_6\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Indiquons maintenant la forme générale de l'expression de la dérivée $\left(\frac{d^{2n+1}Q}{d\beta^{2n+1}}\right)_0$; d'abord si on y trouve un terme qui renferme $\frac{A_k A_l \ldots A_t}{\Pi k . \Pi l \ldots \Pi t}$ en facteur, c'est qu'on a

$$(k+2)+(l+2)+\ldots+(t+2)=2n.$$

Reste à déterminer le coefficient de $\frac{A_k A_l \ldots}{\Pi k . \Pi l \ldots}$; ce coefficient est composé de différentes parties réunies par le signe de l'addition, et on obtient l'une quelconque d'entre elles de la manière suivante.

Écrivons les nombres consécutifs

$$\text{(A)} \qquad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ldots,\quad 2n-1,$$

puis supposons que l'on mette dans une parenthèse $k$ consécutifs de ces nombres, puis dans une deuxième parenthèse $l$ autres nombres consécutifs pris parmi les nombres (A); mettons ensuite dans une troisième parenthèse $m$ autres nombres consécutifs, et ainsi de suite. Imaginons de plus que ces parenthèses soient séparées au moins par deux des nombres (A), et toujours par un nombre pair de nombres (A); enfin faisons encore cette restriction, que si la première parenthèse à la gauche ne commence pas par le facteur 2, il se trouve avant elle un nombre pair de nombres (A). On aura l'une quelconque des parties du coefficient cherché, en multipliant entre eux les produits des nombres renfermés dans chaque parenthèse.

Passons au développement de $Q_2$. La dérivée première de $Q_2$ est nulle pour $\beta = 0$, et on reconnaît qu'il en est de même de toutes les dérivées d'ordre impair, et en représentant par D la valeur de $Q_2$ pour $\beta = 0$, on a pour les dérivées d'ordre pair

$$\left(\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right)_0 = A_0 D, \quad \left(\frac{d^4Q}{d\beta^4}\right)_0 = D\left(A_0 + \frac{1.2}{1.2}A_2\right),$$

$$\left(\frac{d^6Q}{d\beta^6}\right)_0 = D\left(A_0^2 + \frac{1.2+3.4}{1.2}A_0 A_2 + A_4\right),$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^8Q}{d\beta^8}\right)_0 = D\Big(A_0^3 &+ \frac{1.2+3.4+5.6}{1.2}A_0^2 A_2 + \frac{1.2.3.4+3.4.5.6}{1.2.3.4}A_0 A_4 \\ &+ \frac{1.2\times 5.6}{1.2\times 1.2}A_2^2 + \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5.6}A_6\Big).\end{aligned}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Indiquons la forme générale de la dérivée $\left(\frac{d^{2n}Q}{d\beta^{2n}}\right)_0$. Pour que l'on y rencontre le terme

$$M\frac{A_a A_b A_c}{\Pi a.\Pi b.\Pi c\ldots},$$

$a, b, c,\ldots$ étant égaux ou inégaux, il faut qu'on ait

$$(a+2)+(b+2)+\ldots=2n;$$

il ne reste plus qu'à donner la valeur du coefficient M. A cet effet, écrivons les nombres

$$\text{(B)}\qquad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots,\quad 2n-2;$$

ce coefficient sera composé de plusieurs parties différentes entre elles, dont l'une quelconque s'obtiendra de la manière suivante. Mettons dans une parenthèse $a$ consécutifs des nombres (B), puis dans une deuxième parenthèse $b$ autres nombres consécutifs, et ainsi de suite. Imaginons de plus que ces parenthèses soient séparées au moins par deux nombres, et toujours par un nombre pair des nombres (B); enfin ajoutons cette restriction, que si la première parenthèse ne commence pas par le nombre 1, il se trouve avant elle un nombre pair de nombres (B). On aura la partie cherchée du coefficient M, en multipliant entre eux les produits des nombres renfermés dans chaque parenthèse.

**25.** Nous pouvons développer $P_1$ et $P_2$ de la même manière que les fonctions $Q_1$ et $Q_2$.

Les séries obtenues pour $Q_1$ et $Q_2$ peuvent s'écrire en posant

$$M=R-2h^2,$$

$$Q_1=B\left[\beta+M\frac{\beta^3}{1.2.3}+(M^2-24h^2)\frac{\beta^5}{1.2.3.4.5}\right.$$
$$\left.+(M^3-104h^2M-160h^2)\frac{\beta^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\right],$$

$$Q_2=D\left[1+M\frac{\beta^2}{1.2}+(M^2-8h^2)\frac{\beta^4}{1.2.3.4}\right.$$
$$\left.+(M^3-56hM-32h^3)\frac{\beta^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\right].$$

En changeant $\beta$ en $\alpha i$, on a

$$P_1 = B'\Big[\alpha - M\frac{\alpha^3}{1.2.3} + (M^2 - 24h^2)\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}$$
$$- (M^3 - 104h^2 M - 160h^2)\frac{\alpha^7}{1.2\ldots7} + \ldots\Big],$$

$$P_2 = D'\Big[1 - M\frac{\alpha^2}{1.2} + (M^2 - 8h^2)\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}$$
$$- (M^3 + 56hM - 32h^3)\frac{\alpha^6}{1.2\ldots6} + \ldots\Big].$$

La valeur de R ou de M doit être choisie de manière que $P_1$ et $P_2$ aient $2\pi$ pour période; donc les valeurs de ces deux expressions doivent rester invariables, quand on y remplace $\alpha$ par $\alpha + 2\pi$; un moyen très-simple de déterminer M, c'est de remarquer que $P_1$ doit s'annuler pour $\alpha = \pi$ comme pour $\alpha = 0$, et que $P_2$ doit rester le même pour ces deux valeurs de $\alpha$; on a ainsi l'une des deux équations

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\pi - M\frac{\pi^3}{1.2.3} + (M^2 - 24h^2)\frac{\pi^5}{1.2.3.4.5} \\ &\quad - (M^3 - 104h^2 M - 160h^2)\frac{\pi^7}{1.2\ldots7} + \ldots = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &1 - M\frac{\pi^2}{1.2} + (M^2 - 8h^2)\frac{\pi^4}{1.2.3.4} \\ &\quad - (M^3 - 56hM - 32h^3)\frac{\pi^6}{1.2\ldots6} + \ldots = 1. \end{aligned}\right.$$

Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un mouvement vibratoire du premier genre donné par la formule

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda m t.$$

Soit $\beta = ϐ$ l'équation du contour qui est fixe, M et $h$ seront fournis par $(a)$ et l'équation

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} &ϐ + \frac{Mϐ^3}{1.2.3} + (M^2 - 24h^2)\frac{ϐ^5}{1.2.3.4.5} \\ &\quad + (M^3 - 104h^2 M - 160h^2)\frac{ϐ^7}{1.2\ldots7} + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Si on a surtout en vue la comparaison de la théorie avec l'expérience, on pourra procéder comme il suit. Après avoir produit expérimentalement un état vibratoire de la membrane, on notera la hauteur du son, et, par suite, la valeur de $\lambda = \frac{h}{c}$. Alors l'équation $(a)$ ne renfermera plus que l'inconnue M, et il restera à vérifier que M et $h = \lambda c$ satisfont à $(c)$.

Les expressions précédentes de $P_2$ et $Q_2$ permettent de reconnaître que les parties du grand axe situées entre les foyers et les sommets voisins produisent des vibrations d'amplitude maximum et la partie située entre les foyers des vibrations d'amplitude minimum. En effet, la valeur de M qui y entre est positive ; car nous avons démontre (n° **21**) que R est $> 2h^2$. Prenons donc sur le grand axe entre le foyer et le sommet voisin un point $n$ pour lequel $\alpha$ est nul ; considérons un point $n'$ très-voisin sur l'ellipse homofocale qui passe par $n$ ; $\beta$ est le même pour ces deux points et $\alpha$ est nul pour $n$, très-petit pour $n'$ ; donc le déplacement vibratoire est plus grand pour $n$ que pour $n'$.

Prenons un point $m$ sur la ligne FF' qui joint les foyers, et aussi un point $m'$ très-voisin sur l'hyperbole homofocale qui passe par $m$ ; $\alpha$ est le même pour $m$ et $m'$, $\beta$ est nul pour $m$, très-petit pour $m'$ ; donc la grandeur de la vibration est plus petite en $m$ qu'en $m'$.

On a de nouvelles expressions de $P_1$ et $P_2$ en changeant dans les valeurs précédentes de $P_1$ ou $P_2$, suivant la parité de $g$ (n° **14**) $\alpha$ en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $h^2$ en $-h^2$ (par suite M en $R + 2h^2$), et on en conclut aisément que le petit axe de la membrane est immobile ou en maximum de vibration.

### *Membrane annulaire.*

**26**. Dans les deux équations

$$\rho = c\,\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2},$$

$$\frac{d^2Q}{d\beta^2} - [R - 2h^2 E(2\beta)]Q = 0,$$

faisons

$$\beta = \varepsilon - l\,\frac{c}{2a},$$

et nous aurons les deux autres équations

$$\rho = a\,(e^{\varepsilon} + qe^{-\varepsilon}),$$

$$\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2} - [R - f^2(e^{2\varepsilon} + qe^{-2\varepsilon})]\,Q = 0,$$

en posant

$$2\lambda a = f, \quad \frac{c^2}{4a^2} = q,$$

et les deux dernières ont cet avantage sur les premières qu'elles s'appliquent immédiatement au cercle en y faisant $q = 0$.

Supposons que Q soit nul sur l'ellipse $\rho = \mathcal{A}_0$, déterminons $a$ de manière que $\varepsilon$ soit nul sur cette ellipse, il faudra poser

$$a + \frac{c^2}{4a} = \mathcal{A}_0,$$

d'où

$$a = \frac{\mathcal{A}_0}{2} \pm \frac{\sqrt{\mathcal{A}_0^2 - c^2}}{2}.$$

Imaginons une membrane en forme d'anneau dont les deux bords fixes sont des ellipses homofocales; si nous désignons par $\rho = \mathcal{A}_0$ le contour intérieur, la fonction Q se développe ainsi :

$$Q = \varepsilon\left(\frac{dQ}{d\varepsilon}\right)_0 + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\left(\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2}\right)_0 + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3}\right)_0 + \ldots,$$

et il reste à déterminer les expressions de ces dérivées. Quoique nous ayons ici des dérivées d'ordre pair et d'autres d'ordre impair, on peut les former identiquement comme les dérivées de $Q_1$ par rapport à $\beta$ pour $\beta = 0$. Cependant contentons-nous d'écrire les premiers coefficients de cette série sous la forme la plus commode au calcul numérique :

$$\left(\frac{dQ}{d\varepsilon}\right)_0 = B, \quad \left(\frac{d^2Q}{d\varepsilon^2}\right)_0 = 0, \quad \frac{1}{B}\left(\frac{d^3Q}{d\varepsilon^3}\right)_0 = -f^2(1+q) + R,$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^4Q}{d\varepsilon^4}\right)_0 = -4f^2(1-q),$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^5Q}{d\varepsilon^5}\right)_0 = f^4(1+q)^2 - 2f^2(R+6)(1+q) + R^2,$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^6Q}{d\varepsilon^6}\right)_0 = 12f^4(1-q^2) - 4f^2(1-q)(3R+8),$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^7Q}{d\varepsilon^7}\right)_0 = -f^6(1+q)^3 + f^4[3R(1+q)^2 + 4(23+6q+23q^2)]$$
$$-f^2(1+q)(3R^2+52R+80) + R^3,$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^8Q}{d\varepsilon^8}\right)_0 = -24f^6(1-q)(1+q)^2 + 48f^4(1-q^2)(R+12)$$
$$-24f^2(1-q)(R^2+8R+8),$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^9Q}{d\varepsilon^9}\right)_0 = f^8(1+q)^4 - 4f^6(1+q)[R(1+q)^2 + 86 - 36q + 86q^2]$$
$$+f^4[6R^2(1+q)^2 + 32R(15+4q+15q^2)$$
$$+16(201+10q+201q^2)]$$
$$-4f^2(1+q)(R^3+34R^2+160R+112) + R^4,$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^{10}Q}{d\varepsilon^{10}}\right)_0 = 40f^8(1-q)(1+q)^3$$
$$-f^6(1-q)(1+q)^2\left[120R + 3200 + 640\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^2\right]$$
$$+f^4(1-q^2)(120R^2+3840R+16704)$$
$$-f^2(1-q)(40R^3+640R^2+1984R+1024),$$

$$\frac{1}{B}\left(\frac{d^{11}Q}{d\varepsilon^{11}}\right)_0 = -f^{10}(1+q)^5 + 5f^8(1+q)^2[R(1+q)^2 + 184 - 144q + 184q^2]$$
$$-f^6(1+q)[10R^2(1+q)^2 + 40R(53-22q+53q^2)$$
$$+36912 - 29216q + 36912q^2]$$
$$+f^4[10R^3(1+q)^2 + R^2(1480+400q+1480q^2)$$
$$+R(26896+1440q+26896q^2)$$
$$+82624+896q+82624q^2]$$
$$-f^2(1+q)(5R^4+280R^3+2656R^2+5824R+2304)+R^5.$$

Suivant que la constante R est relative à une fonction $P_1$ ou $P_2$, on a pour lemouvement vibratoire de la membrane annulaire

$$w = P_1 Q \sin 2\lambda mt$$

ou

$$w = P_2 Q \sin 2\lambda mt,$$

en donnant à Q la valeur que nous venons de calculer; puis on achève de déterminer le mouvement en calculant la quantité $\lambda$ d'après la condition que Q soit nul sur le contour extérieur $\rho = A$.

**27**. Ainsi on a deux genres de solutions : dans l'une, les portions du grand axe situées entre les deux contours fixes sont des nœuds, et dans l'autre, sont des ventres de vibration, et les lignes nodales sont encore des ellipses et des portions d'hyperboles homofocales.

Lorsqu'il s'agit d'une membrane pleine, on a deux solutions distinctes

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda mt, \quad w = P_2 Q_2 \sin 2\lambda mt,$$

et $Q_1$ et $Q_2$ ont deux formes distinctes, comme $P_1$ et $P_2$. Au contraire, lorsque la membrane est annulaire, les deux fonctions Q qui s'associent à $P_1$ et $P_2$ ne diffèrent plus que par la constante R qui y entre. Il suit de là que si le nombre entier $g$, qui désigne le nombre des lignes nodales hyperboliques, est assez grand, et surtout si en même temps l'excentricité est assez petite, la constante R différera très-peu pour une même valeur de $g$ dans les deux fonctions $P_1$ et $P_2$, et les deux fonctions Q qui leur sont associées seront à très-peu près identiques. Les deux états vibratoires correspondants rendront donc à très-peu près le même son, et, d'après un fait d'expérience, ils se superposeront, et l'état résultant sera représenté par la formule

$$w = (AP_1 + BP_2)\, Q \sin 2\lambda mt;$$

alors les lignes nodales hyperboliques seront données par l'équation

$$AP_1 + BP_2 = 0$$

et seront encore au nombre de $g$. Mais précédemment une même hyperbole fournissait des portions de ces quatre branches; maintenant une hyperbole ne fournit plus que deux portions de branches qui ont une même asymptote; car la fonction $AP_1 + BP_2$ n'est pas symétrique par rapport aux axes de l'ellipse, mais si on y change $\alpha$ en $\pi + \alpha$, elle reste la même ou change de signe suivant que $g$ est pair ou impair.

On voit qu'alors le son et les lignes nodales elliptiques restant invariables, la position des lignes hyperboliques qui dépend du rapport arbitraire $\frac{B}{A}$ peut varier quoique leur nombre $g$ ne change pas.

Il est évident que les formules précédentes s'appliquent à l'anneau circulaire en y faisant $q = 0$, $R = g^2$, et elles conviennent aussi à la membrane elliptique pleine pour le mouvement du premier genre

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda mt,$$

puisqu'il suffit de supposer que le contour fixe intérieur se réduit à la droite des foyers, qui est la limite des plus petites ellipses homofocales. Il faut donc faire $\mathcal{A} = c$, $a = \frac{c}{2}$, $q = 1$, et $\varepsilon$ se réduit à $\beta$.

### *Des lignes nodales elliptiques.*

**28**. Considérons les valeurs de $Q_1$ et de $Q_2$ données par l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 Q}{d\beta^2} + [h^2(e^{2\beta} + e^{-2\beta}) - R]\, Q = 0,$$

dont l'une est nulle et l'autre minimum pour $\beta = 0$.

Supposons que l'on fasse croître $\lambda$ et par suite $h = \lambda c$, puisque $c$ est fixe : $Q_1$ et $Q_2$ varient, mais en conservant leur caractère à la limite $\beta = 0$. R est une fonction de $h$, et commençons par faire cette hypothèse que

$$\frac{dR}{dh} - 4h \quad \text{est} \quad < 0;$$

alors, à mesure que $\lambda$ croîtra, le coefficient de Q dans (1) prendra des valeurs de plus en plus grandes; car de l'inégalité précédente on conclut que la dérivée de ce coefficient par rapport à $h$,

$$2h(e^{2\beta} + e^{-2\beta}) - \frac{dR}{dh},$$

est $> 0$. Donc les racines de l'équation en $\beta$

$$Q(\beta, \lambda) = 0$$

vont en diminuant de grandeur lorsque $\lambda$ croît.

Désignons par $\beta = B$ le paramètre de l'ellipse de contour, sur laquelle Q est nul, l'équation

$$Q(B, \lambda) = o$$

détermine le nombre $\lambda$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ ces racines par ordre de grandeur croissante : $\lambda_i$ étant la $i^{ième}$ racine, $Q(\beta, \lambda_i)$ est l'une des valeurs de Q de notre recherche, et l'équation

$$Q(\beta, \lambda_i) = o$$

donnera, par ses racines en $\beta$, les paramètres des lignes nodales elliptiques. Or nous allons prouver que cette équation a $i-1$ racines, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}$ inférieures à B, et que par conséquent les ellipses de nœud sont en nombre égal à $i-1$.

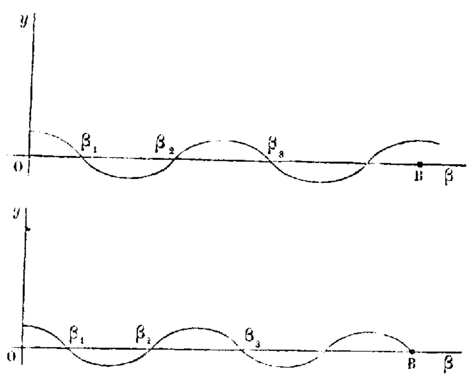
Considérons l'équation en $\beta$,

$$(a) \qquad Q(\beta, \lambda) = o,$$

et représentons la courbe

$$y = Q(\beta, \lambda),$$

$\beta$ étant pris pour abscisse et $y$ pour l'ordonnée, qui est nulle ou maximum pour $\beta = o$. Soit $i$ le nombre des racines comprises entre o et B, et qui sont déterminées par les points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$. Faisons croître $\lambda$,




les points $\beta_1, \beta_2, \ldots$ se rapprocheront de l'origine, les sinuosités de la courbe iront en diminuant d'amplitude, et pour une valeur $\lambda_{i+1}$ la courbe passera par le point B. Alors on a une valeur de $\lambda = \lambda_{i+1}$ qui satisfait à l'équation en $\lambda$

$$(b) \qquad Q(B, \lambda) = 0;$$

et si l'on donne un nouveau petit accroissement à $\lambda$, l'équation $(a)$ aura une nouvelle racine à la gauche de B, et aura par conséquent $i+1$ racines entre o et B.

Continuons à faire croître $\lambda$, les points $\beta_1$, $\beta_2$,.. se rapprochent encore de zéro, et, pour une valeur $\lambda = \lambda_{i+2}$, la courbe passera de nouveau par le point B; on aura donc encore une nouvelle valeur de $\lambda$, $\lambda_{i+2}$, qui satisfait à $(b)$, et l'équation

$$Q(\beta, \lambda_{i+2} + \varepsilon) = 0,$$

où $\varepsilon$ est positif et très-petit, a $i+2$ racines entre o et B; l'équation

$$Q(\beta, \lambda_{i+2}) = 0$$

elle-même en aura $i+2$, en comptant B. Or $\lambda_{i+1}$ et $\lambda_{i+2}$ sont évidemment deux racines consécutives de l'équation $(b)$ en $\lambda$; on en conclut que si $\lambda_{i+1}$ et $\lambda_{i+2}$ sont deux racines consécutives de $(b)$, l'équation en $\beta$

$$Q(\beta, \lambda_{i+2}) = 0$$

a une racine de plus que

$$Q(\beta, \lambda_{i+1}) = 0$$

entre les limites o et B. Ceci posé, on reconnaît aisément que $Q(\beta, \lambda_1) = 0$ n'a pas de racines entre o et B; donc $Q(\beta, \lambda_2) = 0$ en a une, $Q(\beta, \lambda_3) = 0$ en a deux, etc., et en général $Q(\beta, \lambda_i) = 0$ en a $i-1$.

Le nombre des lignes nodales hyperboliques restant le même, on voit que, à mesure que le son s'élève, le nombre des lignes nodales elliptiques augmente. Tout ce qui précède est fondé sur l'existence de l'inégalité

$$(c) \qquad \frac{dR}{dh} - 4h < 0.$$

Au nº **8**, nous avons trouvé l'équation

$$\frac{dP}{d\alpha}\delta P - P\delta\frac{dP}{d\alpha} = \delta h\int_0^\alpha P^2\left(\frac{dR}{dh} - 4h\cos 2\alpha\right)d\alpha;$$

pour $\alpha = 0$, les deux membres sont nuls; mais si on suppose $\alpha$ excessivement petit, $\frac{dR}{dh} - 4h\cos 2\alpha$ ne changera pas de signe entre o et cette valeur de $\alpha$; donc le premier membre aura le même signe que $\frac{dR}{dh} - 4h$.

Si cette quantité peut être positive, l'expression

$$\frac{dR}{dh} - 2h\left(e^{2\beta} + e^{-2\beta}\right)$$

le sera aussi pour des valeurs excessivement petites de $\beta$; donc en prenant B suffisamment petit, et, par suite, la membrane très-excentrique, le nombre des lignes nodales elliptiques diminuerait quand, le nombre des lignes nodales hyperboliques restant le même, la hauteur des sons augmenterait. Comme ce résultat ne paraît pas admissible, il semble que l'inégalité ($c$) doit toujours avoir lieu; toutefois ce qui précède ne peut en être regardé comme une démonstration rigoureuse.

*Mouvement vibratoire le plus général de la membrane elliptique.*

**29**. Nous ne nous sommes occupé jusqu'à présent que de mouvements vibratoires simples, qui sont ceux que l'on produirait le plus aisément dans l'expérience. Nous allons maintenant supposer que l'on donne à tous les points d'une membrane des vitesses initiales quelconques, et déterminer l'état vibratoire qui en résultera.

Mais auparavant faisons certaines réflexions sur les signes des coordonnées que nous employons. Comme nous l'avons dit au nº **4**, où nous avons posé

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= c\mathrm{E}(\beta)\cos\alpha,\\ y &= c\mathcal{E}(\beta)\sin\alpha,\end{aligned}\right.$$

lorsque l'on emploie les coordonnées $\alpha$ et $\beta$, on peut supposer que $\beta$

est essentiellement positif, et que $\alpha$ n'est susceptible de varier que de zéro à $2\pi$, ou de $-\pi$ à $+\pi$, et malgré ces restrictions on peut représenter par ces coordonnées un point quelconque du plan.

Mais il résulte des formules ($a$), que si l'on donne une valeur négative à $\beta$ au lieu de la donner à $\alpha$, le point $(x, y)$ reste le même, et par conséquent aussi que les coordonnées $(-\alpha, -\beta)$ représentent le même point que les coordonnées $(\alpha, \beta)$. Donc une formule qui donne le mouvement vibratoire de la membrane doit rester invariable lorsqu'on y remplace $\alpha$ et $\beta$ par $-\alpha$ et $-\beta$ : c'est ce que l'on vérifie en effet sur les deux solutions simples que nous avons trouvées

$$w = P_1 Q_1 \sin 2\lambda mt, \quad w = P_2 Q_2 \sin 2\lambda mt,$$

puisque $P_1$ et $Q_1$ sont des fonctions impaires de $\alpha$ et de $\beta$, et que $P_2$ et $Q_2$ sont des fonctions paires, et nous aurions pu associer les fonctions $Q_1$ et $Q_2$ aux fonctions $P_1$ et $P_2$, d'après cette condition (n° **15**).

Il faut toutefois remarquer que ces considérations ne seraient pas applicables à la membrane annulaire. En effet, la droite menée entre les foyers, et qui a pour équation $\beta = 0$ n'est plus située sur la surface de la membrane, et si nous avons exprimé que Q est nul pour $\beta = \beta_1$ contour intérieur et pris $\beta_1$ positif, nous ne pouvons donner à $\beta$ que les valeurs positives renfermées entre celles qui conviennent aux deux contours.

Revenant au mouvement vibratoire de la membrane pleine, supposons que la vitesse initiale donnée à chaque point de la membrane soit exprimée par la formule

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = \Phi(\alpha, \beta),$$

dans laquelle $\Phi(\alpha, \beta)$ est une fonction qui s'annule sur le contour de la membrane $\beta = \text{б}$, et qui, d'après ce que nous avons vu, reste invariable quand on y remplace $\alpha$ et $\beta$ par $-\alpha$ et $-\beta$. On en conclut facilement que $\Phi(\alpha, \beta)$ est la somme de deux fonctions $F_1(\alpha, \beta)$, $F_2(\alpha, \beta)$, qui, ordonnées par rapport aux puissances croissantes de $\alpha$ et $\beta$, sont : l'une de la forme

$$F_2 = a + A\alpha^2 + B\beta^2 + C\alpha^4 + D\alpha^2\beta^2 + E\beta^4 + F\alpha^6 + G\alpha^4\beta^2 + \ldots$$

paire en $\alpha$ et $\beta$; et l'autre de la forme

$$F_1 = A'\alpha\beta + B'\alpha^3\beta + C'\alpha\beta^3 + D'\alpha^5\beta + E'\alpha^3\beta^3 + F'\alpha\beta^5 + G'\alpha^7\beta + \ldots,$$

impaire en $\alpha$ et impaire en $\beta$, mais paire par rapport à leur ensemble.

Après donc avoir posé

$$\Phi(\alpha, \beta) = F_1(\alpha, \beta) + F_2(\alpha, \beta),$$

regardons le mouvement vibratoire résultant comme la somme d'une infinité de mouvements vibratoires simples, dont nous allons nous proposer de déterminer l'amplitude. Chaque mouvement simple du premier ou du second genre donné par les formules

$$w = a P_1 Q_1 \sin 2\lambda mt, \quad w = b P_2 Q_2 \sin 2\lambda mt$$

dépend d'abord d'un nombre entier $g$, et, ce nombre $g$ une fois désigné, ce mouvement peut varier d'une infinité de manières par le nombre $\lambda$, qui est susceptible des valeurs croissantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$, et nous les affecterons d'un second indice qui rappelle le nombre $g$, et nous remplacerons les deux formules précédentes par les deux suivantes :

$$w = a P_1\left(g, \lambda_i^g\right) Q_1\left(g, \lambda_i^g\right) \sin 2\lambda_i^g mt,$$
$$w = b P_2\left(g, \lambda_i'^g\right) Q_2\left(g, \lambda_i'^g\right) \sin 2\lambda_i'^g mt.$$

Considérant ensuite un état vibratoire composé d'une infinité d'états simples, on aura

$$w = \sum a_{g, \lambda_i} P_1\left(g, \lambda_i^g\right) Q_1\left(g, \lambda_i^g\right) \sin 2\lambda_i^g mt$$
$$+ \sum b_{g, \lambda'_i} P_2\left(g, \lambda_i'^g\right) Q_2\left(g, \lambda_i'^g\right) \sin 2\lambda_i'^g mt,$$

et on en tire pour la vitesse initiale

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = 2m\sum \lambda_i^g a_{g, \lambda_i} P_1\left(g, \lambda_i^g\right) Q_1\left(g, \lambda_i^g\right)$$
$$+ 2m\sum \lambda_i'^g b_{g, \lambda'_i} P_2\left(g, \lambda_i'^g\right) Q_2\left(g, \lambda_i'^g\right),$$

expression qui doit être identifiée à $\Phi(\alpha, \beta)$; mais nous décomposerons cette égalité en les deux suivantes

$$(1)\qquad F_1(\alpha,\beta) = 2m\sum \lambda_i^g a_{g,\lambda_i} P(g,\lambda_i^g)\,Q(g,\lambda_i^g),$$

$$(2)\qquad F_2(\alpha,\beta) = 2m\sum \lambda_i'^g b_{g,\lambda_i'} P(g,\lambda_i'^g)\,Q(g,\lambda_i'^g).$$

Considérons maintenant les quatre équations

$$(b)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2Q}{d\beta^2} - [R(g,\lambda c) - 2\lambda^2 c^2 E(2\beta)]\,Q = 0,\\[2mm] \dfrac{d^2Q'}{d\beta^2} - [R(g',\lambda' c) - 2\lambda'^2 c^2 E(2\beta)]\,Q' = 0; \end{cases}$$

$$(c)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2P}{d\alpha^2} + [R(g,\lambda c) - 2\lambda^2 c^2 \cos 2\alpha]\,P = 0,\\[2mm] \dfrac{d^2P'}{d\alpha^2} + [R(g',\lambda' c) - 2\lambda'^2 c^2 \cos 2\alpha]\,P' = 0. \end{cases}$$

En retranchant les deux équations $(b)$ multipliées par $Q'$ et $Q$, on a

$$0 = Q'\frac{d^2Q}{d\beta^2} - Q\frac{d^2Q'}{d\beta^2} + [2(\lambda^2 - \lambda'^2)c^2 E(2\beta) - (R - R')]\,QQ';$$

intégrons de $\beta = 0$ à $\beta = \mathfrak{b}$, paramètre du contour, et nous aurons

$$0 = \left(Q'\frac{dQ}{d\beta} - Q\frac{dQ'}{d\beta}\right)_{\mathfrak{b}} - \left(Q'\frac{dQ}{d\beta} - Q\frac{dQ'}{d\beta}\right)_0$$
$$+ 2(\lambda^2 - \lambda'^2)c^2\int_0^{\mathfrak{b}} E(2\beta)\,QQ'\,d\beta - (R - R')\int_0^{\mathfrak{b}} QQ'\,d\beta.$$

Le premier terme est nul parce que $Q$ et $Q'$ sont nuls pour $\beta = \mathfrak{b}$; ensuite, si $Q$ et $Q'$ ont le caractère de $Q_1$, ils sont nuls pour $\beta = 0$, et s'ils ont tous deux le caractère de $Q_2$, leurs dérivées sont nulles pour $\beta = 0$; donc le second terme est aussi nul. On trouve de même

$$0 = \left(P'\frac{dP}{d\alpha} - P\frac{dP'}{d\alpha}\right)_0^{2\pi} + 2(\lambda^2 - \lambda'^2)c^2\int_0^{2\pi} PP'\cos 2\alpha\, d\alpha$$
$$- (R - R')\int_0^{2\pi} PP'\,d\alpha,$$

dont la première partie est nulle, parce que P et P′ sont des fonctions périodiques. Ainsi on a les deux égalités

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{R}-\mathrm{R}')\int_0^{\mathrm{6}} \mathrm{QQ}'d\beta = 2(\lambda^2-\lambda'^2)\,c^2\int_0^{\mathrm{6}} \mathrm{QQ}'\mathrm{E}(2\beta)\,d\beta,\\ &2(\lambda^2-\lambda'^2)\,c^2\int_0^{2\pi}\mathrm{PP}'\cos 2\alpha\,d\alpha = (\mathrm{R}-\mathrm{R}')\int_0^{2\pi}\mathrm{PP}'d\alpha.\end{aligned}\right.$$

Multiplions ces égalités membre à membre, et, divisant par

$$2(\mathrm{R}-\mathrm{R}')(\lambda^2-\lambda'^2)\,c^2,$$

nous obtenons

$$(e)\qquad \int_0^{\mathrm{6}}\int_0^{2\pi}[\mathrm{E}(2\beta)-\cos 2\alpha]\,\mathrm{PP}'\mathrm{QQ}'d\beta\,d\alpha = 0.$$

Cette égalité n'est plus démontrée si $\lambda=\lambda'$ ou si $\mathrm{R}=\mathrm{R}'$; elle est cependant encore exacte, car, si $\lambda=\lambda'$, on déduira des équations $(d)$

$$\int_0^{\mathrm{6}}\mathrm{QQ}'d\beta = 0,\qquad \int_0^{2\pi}\mathrm{PP}'d\alpha = 0;$$

donc les deux parties de l'intégrale $(e)$ sont nulles. Si $\mathrm{R}'=\mathrm{R}$, on voit encore que les deux égalités $(d)$ entraînent $(e)$.

Multiplions les deux membres de l'égalité (1) par

$$\mathrm{P}_1\left(g,\lambda_i^g\right)\mathrm{Q}_1\left(g,\lambda_i^g\right)[\mathrm{E}(2\beta)-\cos 2\alpha]\,d\alpha\,d\beta,$$

et intégrons, par rapport à $\alpha$, de 0 à $2\pi$, et, par rapport à $\beta$, de 0 à $\mathrm{6}$ : tous les termes disparaîtront dans le second membre d'après $(e)$, excepté celui qui a pour coefficient $a_{g,\lambda_i}$ qui se trouve déterminé. On a de même $b_{g,\lambda_i}$ au moyen de (2).

On a un calcul analogue pour la membrane annulaire fixée entre deux ellipses homofocales; il serait superflu d'y insister, et même nous n'avons fait le calcul précédent que parce qu'il exigeait des considérations relatives aux signes de $\alpha$ et $\beta$ utiles à remarquer.

Pour revenir à ces signes, imaginons encore que l'on ait à chercher le mouvement d'une membrane elliptique dont on supprime les deux portions coupées par une hyperbole homofocale, et supposons tout le contour fixé. On aura de nouveau un mouvement vibratoire simple représenté par la formule

$$w = PQ \sin 2\lambda mt;$$

mais P n'est plus une fonction périodique de $\alpha$. On ne doit faire varier $\alpha$ qu'entre les limites $\alpha_1$ et $\pi - \alpha_1$ relatives à l'hyperbole du contour, et l'on fera varier $\beta$ entre les deux limites $-\beta$ et $+\beta$ relatives aux deux arcs d'ellipse de la périphérie de la membrane.