Journal de mathématiques pures et appliquées

LIOUVILLE, J.

Sur l'équation aux différences partielles qui concerne l'équilibre de la chaleur dans un corps hétérogène.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 72-.

<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1848_1_13_A9_0>

Sur l'équation aux différences partielles qui concerne l'équilibre de la chaleur dans un corps hétérogène;

Par J. LIOUVILLE.

Cette équation bien connue

$$\frac{d.k\frac{du}{dx}}{dx} + \frac{d.k\frac{du}{dy}}{dy} + \frac{d.k\frac{du}{dz}}{dz} = 0, \tag{1}$$

où k est une fonction de x, y, z représentant la conductibilité variable d'un point à un autre, se ramène à l'équation plus simple relative au cas d'une conductibilité constante, lorsque l'on a

$$\frac{d^2.\sqrt{k}}{dx^2} + \frac{d^2.\sqrt{k}}{dy^2} + \frac{d^2.\sqrt{k}}{dz^2} = 0. \tag{2}$$

En développant, en effet, les différentiations indiquées dans l'équation (1), divisant ensuite par $\sqrt{k}$, et ajoutant au résultat le premier membre de l'équation (2) multiplié par u, j'obtiens, à l'aide d'une réduction facile, l'équation

$$\frac{d^2.u\sqrt{k}}{dx^2} + \frac{d^2.u\sqrt{k}}{dy^2} + \frac{d^2.u\sqrt{k}}{dz^2} = 0,$$

laquelle prend la forme indiquée

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

en posant $u\sqrt{k} = \varphi$.