JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

ROBERTS, W.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 209-219.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1848_1_13_A19_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE,

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

« Dublin, le 10 novembre 1847.

» ... Ayant lu avec beaucoup d'intérêt les remarques que vous avez faites sur une Lettre de M. Thomson, je prends cette occasion de vous communiquer quelques développements relatifs à une méthode de transmutation des courbes planes et sphériques, qui comprend, comme cas particulier, celle que vous avez nommée la transformation par rayons vecteurs réciproques. Voici en quoi elle consiste :

» Étant donnée l'équation d'une courbe entre les coordonnées polaires, supposons qu'on substitue pour le rayon vecteur r, $R^{\pm n}$, et pour l'angle polaire ω, $n\Omega$; il est évident qu'il en résultera une nouvelle courbe rapportée aux coordonnées polaires R et Ω, et que

$$\frac{rd\omega}{dr} = \pm \frac{Rd\Omega}{dR}.$$

» Par conséquent, les angles que font les rayons vecteurs tirés de l'origine commune aux points correspondants sur les deux courbes, avec les tangentes, sont égaux; d'où il suit que si les courbes

$$F(r, \omega) = 0, \quad f(r, \omega) = 0$$

se coupent sous l'angle i, les courbes transformées

$$F(r^{\pm n}, n\omega) = 0, \quad f(r^{\pm n}, n\omega) = 0$$

se couperont aussi sous le même angle, au point correspondant à l'intersection des deux premières.

» Le cas le plus simple auquel on peut appliquer cette méthode est celui des droites

$$r\cos\omega = \alpha, \quad r\cos(\omega - \theta) = \beta$$

(où α et β sont des paramètres arbitraires, et θ un angle donné), qui se coupent toujours sous l'angle θ; d'où l'on déduit sans peine que les deux systèmes curvilignes

$$(1)\qquad r^{\pm n}\cos n\omega = \alpha^{\pm n},\quad r^{\pm n}\cos n(\omega-\theta) = \beta^{\pm n}$$

se coupent toujours, quels que soient α et β, sous l'angle constant $n\theta$.

» Ce résultat comprend quelques cas intéressants; par exemple, si $n = 2$, on a le théorème suivant :

» *Un système d'hyperboles équilatères, concentriques et semblablement placées, sera coupé par un autre tel système ayant le même centre que le premier, sous un angle constant double de celui que font les axes des deux systèmes.*

» En posant $n = \frac{1}{2}$, on peut dire que :

» *Un système de paraboles, ayant le même foyer et semblablement placées, sera coupé par un autre tel système, ayant le même foyer que le premier, sous un angle constant, moitié de celui que font les axes des deux systèmes.*

» Il est évident encore que :

» *Dans un triangle formé par trois arcs d'hyperboles équilatères, ayant le même centre (ou bien de paraboles ayant le même foyer), la somme des angles vaut deux angles droits.*

» Des théorèmes analogues existent pour les courbes de degré plus élevé contenues dans l'équation (1).

» On sait qu'en faisant $n = 2$, on transformera une section conique rapportée au foyer, dans une autre rapportée au centre. D'ailleurs, toutes les droites dans le plan de la conique deviendront des hyperboles équilatères, ayant pour centre commun le centre de la nouvelle conique, avec l'exception de celles passant par le foyer, qui seront transformées dans des diamètres de cette dernière. D'après cela, le théorème fondamental des propriétés polaires nous donnera cet autre :

» *Étant données une section conique et une hyperbole équilatère ayant le même centre, si d'un point quelconque sur l'hyperbole on mène les deux hyperboles équilatères concentriques, tangentes à la conique* *donnée, l'hyperbole équilatère concentrique passant par les deux points de contact passera par un point fixe.*

» Dans une conique, si l'on tire du foyer deux droites aux extrémités d'une corde passant par un point fixe, le produit des tangentes trigonométriques des demi-angles que font ces deux droites avec celle menée du foyer au point fixe sera constant. Par conséquent :

» *Si l'on coupe une conique donnée par une hyperbole équilatère concentrique, et passant par un point fixe, le produit des tangentes trigonométriques des angles que font les deux diamètres passant par les points de l'intersection avec celui qui passe par le point fixe, sera constant.*

» Il est bon d'observer que, si l'on transforme un système de coniques homofocales par la méthode qu'on vient de considérer, les coniques résultantes seront aussi homofocales. Pour faciliter l'énoncé des propriétés qui dérivent de cette considération, nous désignerons une hyperbole équilatère, tangente à une conique et concentrique avec elle, par le nom de *tangente hyperbolique*. Cela posé, on aura les théorèmes suivants :

» *Étant données deux coniques homofocales, si d'un point quelconque sur l'extérieure on mène les deux tangentes hyperboliques à l'intérieure, les angles qu'elles font avec la première conique sont égaux.*

» *Étant données deux coniques homofocales, qu'on mène une tangente hyperbolique à l'intérieure; menons aussi, aux points que cette tangente détermine sur l'autre; deux tangentes hyperboliques à cette dernière. L'hyperbole équilatère, concentrique avec les coniques, et passant par le point de concours de ces tangentes et par le point de contact sur la conique intérieure, coupera cette conique, sous un angle droit.*

» On peut s'assurer sans peine qu'un cercle décrit autour du centre d'une conique du système primitif deviendra une cassinoïde, concentrique avec la conique transformée, dans le nouveau système. Par conséquent :

» *Étant données deux coniques homofocales, menons à l'une d'elles une tangente hyperbolique; puis menons à l'autre la tangente hyper-*

bolique qui coupera la première tangente à angle droit : le point de concours des deux tangentes décrira une cassinoïde.

» On sait que, si l'on mène du foyer d'une conique deux rayons vecteurs aux points de contact de deux tangentes, l'angle que font ces deux rayons sera divisé en parties égales par la droite qui passe par le foyer et par le point de concours des deux tangentes. Par conséquent :

» *Si du point de concours de deux tangentes hyperboliques à une conique on mène une droite passant par le centre, elle divisera en parties égales l'angle que font les deux diamètres passant par les points de contact.*

» Étant données deux tangentes à une conique, une troisième tangente quelconque, interceptée par les deux premières, soutendra un angle constant au foyer; ce qui nous donnera le théorème :

» *Étant données deux tangentes hyperboliques à une conique, l'arc d'une troisième tangente hyperbolique quelconque, qui est intercepté par les deux premières, soutendra un angle constant au centre.*

» On pourrait trouver une autre classe des propriétés analogues aux précédentes, en partant d'une section conique centrale, et en la transformant par la supposition de $n = \frac{1}{2}$. D'après cela, les droites, en général, deviendront des paraboles ayant pour foyer un des foyers de la conique transformée; mais les diamètres de la conique primitive seront transformés dans des droites passant par le foyer de la nouvelle conique, et les cercles autour du centre de la primitive dans des cercles autour du foyer de la transformée. Cela posé, et en désignant par le nom de *tangente parabolique* une parabole tangente à une conique, et ayant pour foyer un des foyers de la même conique, on aura :

» *Étant donnée une section conique et une parabole ayant pour foyer un des foyers de cette section, si d'un point quelconque sur la parabole on mène deux tangentes paraboliques à la conique, la parabole passant par les deux points de contact et ayant le même foyer que les autres, passera par un point fixe.*

» En se rappelant que, par cette substitution, un système de coniques homofocales sera transformé dans un autre système de coniques homofocales elles-mêmes, il est évident qu'on peut énoncer, pour les tangentes paraboliques, des propriétés semblables à celles que nous avons données pour le cas des tangentes hyperboliques.

» La propriété bien connue, savoir, que le lieu de l'intersection de tangentes orthogonales à deux ellipses homofocales est un cercle concentrique, donne le théorème suivant :

» *Étant données deux ellipses homofocales, menons à l'une d'elles une tangente parabolique, puis menons à l'autre la tangente parabolique qui coupera la première tangente à angles droits : le point de concours des deux tangentes décrira un cercle dont le centre coïncide avec le foyer commun des tangentes paraboliques.*

» La corde passant par les points de contact de deux tangentes à une ellipse qui se coupent orthogonalement, est enveloppée par une ellipse homofocale. On aura donc :

» *Si l'on mène à une ellipse donnée deux tangentes paraboliques (ou hyperboliques) qui se coupent orthogonalement, et si l'on mène par les deux points de contact une parabole ayant le même foyer que les tangentes paraboliques (ou bien une hyperbole équilatère concentrique avec l'ellipse), cette dernière parabole (ou hyperbole) sera enveloppée par une ellipse homofocale avec la donnée.*

» On sait que si d'un point fixe sur une conique on mène deux cordes qui se coupent mutuellement à angles droits, la corde, menée par les deux points de leur intersection avec la conique, passera par un point fixe. Par conséquent :

» *Si par un point fixe sur une conique on mène deux paraboles ayant pour foyer un des foyers de la conique et se coupant orthogonalement, et si par les deux points de leur intersection avec la conique on fait passer une troisième parabole ayant le même foyer que les deux premières, cette dernière passera par un point fixe.*

» *Le même théorème a lieu encore si l'on remplace les trois paraboles ayant un foyer commun par trois hyperboles équilatères concentriques avec la conique donnée.*

» On obtient une application assez élégante de notre méthode, en transformant un système de cercles concentriques, rapportés à un point fixe différent du centre. Je me bornerai, pour le moment, à la supposition de $n = 2$. Les résultats qu'on trouve ainsi pourront se généraliser sans la moindre difficulté.

» Il est évident que les cercles concentriques

$$r^2 - 2ar\cos\omega + a^2 = b^2, \tag{2}$$

où a désigne la distance invariable de l'origine au centre, et b le rayon d'un quelconque des cercles qui peut varier, se transformeront dans un système de cassinoïdes homofocales.

» Par conséquent, en se rappelant que quand deux cercles sont concentriques, une tangente quelconque au cercle intérieur coupe l'autre toujours sous le même angle, et en désignant par le nom de *tangente hyperbolique* une hyperbole équilatère tangente à une cassinoïde et concentrique avec elle, on aura :

» *Une tangente hyperbolique quelconque à l'intérieure des deux cassinoïdes homofocales coupe l'extérieure toujours sous le même angle.*

» En supposant que le rayon du cercle intérieur s'évanouit, on peut dire que :

» *Un système de cassinoïdes homofocales sera coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères passant par les foyers et concentriques avec les cassinoïdes.*

» Ce théorème, généralisé depuis par M. Serret, est dû à M. Lamé.

» Il est évident aussi que :

» *Étant données une cassinoïde et une hyperbole équilatère ayant le même centre, si d'un point quelconque sur l'hyperbole on mène les deux tangentes hyperboliques à la cassinoïde, l'hyperbole équilatère concentrique passant par les deux points de contact passera par un point fixe.*

» Voici quelques autres théorèmes qui se déduisent sans difficulté :

» *Étant donnés deux points fixes sur une cassinoïde, si par ces deux points et par un troisième, pris arbitrairement sur la courbe, on fait passer deux hyperboles équilatères, concentriques avec la cassinoïde, l'angle sous lequel elles se couperont sera constant.*

» *Étant données deux cassinoïdes homofocales, menons une tangente hyperbolique quelconque à l'intérieure; menons aussi aux points que cette tangente détermine sur l'autre, deux tangentes hyperboliques à cette dernière : leur point de concours décrira une cassinoïde homofocale.*

» *L'angle fait par ces deux tangentes sera constant, et les angles qu'elles font respectivement avec la cassinoïde, qui est lieu de leur intersection, seront égaux.*

» *Le point de contact sur l'intérieure et le point de concours des tangentes à l'extérieure appartiendront tous deux à la même hyperbole équilatère, concentrique avec les cassinoïdes et passant par les foyers.*

» *Le lieu des sommets de toutes les hyperboles équilatères, tangentes à une cassinoïde donnée et concentriques avec elle, sera la courbe lieu des projections orthogonales du centre d'une section conique sur ses tangentes.*

» Supposons maintenant que, dans l'équation (2), a varie, b restant le même; elle appartiendra évidemment à un système de cercles égaux, dont les centres sont tous situés sur la même droite. En se rappelant qu'une parallèle à cette droite coupera tous les cercles sous le même angle, on peut en déduire le théorème suivant :

» *Toutes les cassinoïdes concentriques et semblablement placées, dans lesquelles le rectangle formé par les rayons des foyers est constant, seront coupées sous le même angle par une hyperbole équilatère concentrique, ayant pour asymptotes les axes des cassinoïdes.*

» Par conséquent :

» *Toutes les cassinoïdes concentriques et semblablement placées, dans lesquelles le rectangle formé par les rayons des foyers est constant, seront enveloppées par une hyperbole équilatère concentrique, ayant pour asymptotes les axes des cassinoïdes.*

» Il est évident aussi que :

» *Étant donné un système de cassinoïdes, tel qu'il en a été question dans les deux derniers théorèmes, qu'on mène aux points où une quelconque d'elles est coupée par une hyperbole équilatère concen-*

trique ayant pour asymptotes les axes des cassinoïdes, deux tangentes hyperboliques, leur point de concours décrira une hyperbole équilatère concentrique, ayant pour asymptotes les axes des cassinoïdes.

» On verra facilement que l'équation d'une droite quelconque, passant par le centre d'un cercle représenté par l'équation (2), peut s'écrire sous la forme

$$r\cos(\omega - \theta) = a\cos\theta,$$

θ étant le complément de l'angle fait par cette ligne avec l'axe fixe.

» Par conséquent, on est à même d'énoncer immédiatement le théorème suivant :

» *Toutes les courbes*

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n}, \tag{3}$$

dans lesquelles b varie, seront coupées orthogonalement par les courbes

$$r^n \cos n(\omega - \theta) = a^n \cos n\theta, \tag{4}$$

dans lesquelles θ est un paramètre variable.

» C'est la généralisation donnée par M. Serret du théorème de M. Lamé.

» Dans le cas de n entier positif, la courbe (3) est lieu géométrique d'un point tel, que le produit de ses distances aux sommets d'un polygone régulier de n côtés et de rayon a soit constant (b^n). Elle peut donc s'appeler *cassinoïde à n foyers.* La courbe représentée par (4) jouit d'une propriété analogue; elle est lieu géométrique d'un point tel, que le produit de ses distances aux sommets d'un polygone régulier de n côtés soit égal à la $n^{ième}$ puissance de sa distance au centre du cercle circonscrit au polygone. On peut appeler cette courbe, ce me semble, *hyperbole équilatère à n foyers.* Cela posé, il est évident que nous sommes en droit d'énoncer des théorèmes relatifs aux cassinoïdes et aux hyperboles équilatères *à n foyers,* entièrement semblables à ceux que nous avons donnés pour des cassinoïdes et des hyperboles équilatères ordinaires à deux foyers.

» Il s'ensuit sans difficulté que, si l'on désigne par r et ω les coordonnées polaires de la courbe primitive, et par R et Ω celles de la transformée, on a

$$dr^2 + r^2 d\omega^2 = n^2 \mathrm{R}^{2n-2}(d\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}^2 d\Omega^2).$$

Par conséquent, s étant l'arc de la primitive, et σ celui de la transformée,

$$d\sigma = \frac{1}{n}\frac{ds}{r^{\frac{n-1}{n}}}.$$

» Maintenant l'arc du cercle représenté par (2) a pour différentielle $bd\theta$, θ étant le paramètre dans l'équation

$$r\cos(\omega - \theta) = a\cos\theta,$$

qui appartient à une droite passant par le centre ; et il est clair aussi que cette équation détermine deux rayons vecteurs, selon qu'on prend θ positif ou négatif. Un peu d'attention nous fera voir que ces deux rayons seront donnés par l'équation

$$r^2 = a^2 \pm 2ab\sin\theta + b^2,$$

en sorte qu'on peut conclure, sans aucun calcul, que l'arc de la courbe

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n}$$

a pour expression

$$b^n \int \frac{d\theta}{(a^{2n} \pm 2a^n b^n \sin n\theta + b^{2n})^{\frac{n-1}{2n}}},$$

θ étant le paramètre dans l'équation

$$r^n \cos n(\omega - \theta) = a^n \cos n\theta,$$

qui appartient aux courbes orthogonales.

» Lorsque $n = 2$, on retombe sur l'expression pour l'arc de la cassinoïde, donnée par M. Serret dans le tome IX de ce Journal ; si l'on fait $n = 3$, l'arc est encore exprimable par deux fonctions elliptiques de première espèce. (*Traité des Fonctions elliptiques*, tome I, page 180.)

» Il est digne de remarque que l'expression générale nous fournit une représentation, par un seul arc d'une courbe algébrique, de la transcendante $\int \frac{d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^\alpha}$, pour toutes les valeurs de α, sauf $\frac{1}{2}$.

» La méthode correspondante à la précédente pour le cas de courbes sphériques consiste à faire dans l'équation d'une courbe entre les coordonnées polaires sphériques (ρ et ω),

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho = k(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{R})^{\pm n}, \quad \omega = n\Omega$$

k étant une quantité constante quelconque), ce qui donne

$$\frac{\sin\rho\, d\omega}{d\rho} = \pm\frac{\sin \mathrm{R}\, d\Omega}{d\mathrm{R}};$$

c'est-à-dire que si deux courbes (entre les coordonnées ρ et ω) se coupent sous un certain angle, les courbes transformées (entre R et Ω) se couperont au point correspondant sous le même angle. Si l'on désire avoir la transformation la plus générale de ce genre, on ne saurait se passer du coefficient constant k, parce qu'en attribuant des valeurs diverses à cette constante, on obtient des courbes tout à fait différentes; ce qui n'aurait pas lieu sur le plan à cause de la similitude. On verra aussi qu'en supposant même que k soit imaginaire, on sera conduit à des résultats réels et véritables.

» Posons le cas des petits cercles concentriques qui sont tous coupés orthogonalement par de grands cercles passant par le centre. L'équation polaire d'un petit cercle de rayon sphérique b, dont le centre est placé à une distance a de l'origine des coordonnées, est

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\rho - \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}a(1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b)}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho\cos\omega \\ &\qquad + \frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a - \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b} = 0,\end{aligned}\right.$$

et, en désignant par θ l'angle que fait avec l'axe fixe un arc perpendiculaire abaissé de l'origine sur un grand cercle quelconque, passant par le centre, on aura, pour l'équation de ce dernier,

$$(6)\quad \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\rho}{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}\,\frac{\cos(\omega-\theta)}{\cos\theta}.$$

Des équations (5) et (6), dans lesquelles b et θ sont des paramètres variables, on peut évidemment déduire un nombre infini de systèmes de trajectoires orthogonales; mais je n'en considérerai qu'un qui répond à une transformation imaginaire. Posons, en effet,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\rho = \sqrt{-1}\,(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{R})^2, \quad \omega = 2\Omega,$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-1}\,(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha)^2, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{-1}\,(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta)^2,$$

ce qui nous donnera

$$\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} R - \frac{2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha (1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta)}{1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta} \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} R \cos 2\Omega$$
$$+ \frac{\operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta}{1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta} = 0,$$

$$\frac{1 + \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} R}{1 + \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} R}{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha} \, \frac{\cos 2(\omega - \theta)}{\cos 2\theta},$$

pour les deux équations de deux systèmes orthogonaux, dans lesquels β et θ sont les paramètres. Ces équations ont été déjà données par mon frère dans une Note insérée dans ce Journal, tome X, page 251. La première appartient à un système de cassinoïdes sphériques homofocales, si l'on prend pour définition de la cassinoïde sphérique le lieu d'un point tel que, si l'on mène de là deux arcs de grands cercles aux deux points fixes, le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs soit constant. L'autre représente un système de sphéro-coniques, ayant même centre et un point commun, de l'espèce que j'ai montré jouir des analogies les plus frappantes avec l'hyperbole équilatère vulgaire (la relation entre les demi-axes μ, ν sera $\sin \mu = \operatorname{tang} \nu$). On peut retrouver avec la même facilité tous les autres résultats de géométrie sphérique consignés dans l'article de mon frère.

» Il peut être utile de remarquer qu'à l'aide de la même substitution imaginaire, savoir,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \rho = \sqrt{-1} (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} R)^2, \quad \omega = 2\Omega,$$

on transformera une sphéro-conique rapportée au foyer, dans une autre rapportée au centre, tandis que la substitution

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \rho = \sqrt[4]{-1} (\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} R)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega = \tfrac{1}{2}\Omega,$$

servira à transformer une sphéro-conique centrale dans une autre relative au foyer. Il est évident qu'en appliquant l'une ou l'autre de ces méthodes à un système de coniques homofocales, il en résultera un autre système de coniques aussi homofocales.

» Le cas particulier de $n = -1$, ou celui des rayons vecteurs réciproques qui s'applique aux surfaces, a été traité avec détail par