JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

BOOLE, GEORGE

Théorème général concernant l'intégration définie.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 111-112.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1848_1_13_A15_0>

THÉORÈME GÉNÉRAL CONCERNANT L'INTÉGRATION DÉFINIE;

PAR M. GEORGE BOOLE (DE LINCOLN).

Soit R une fonction rationnelle de x, telle que les racines de l'équation

$$x - \mathrm{R} = v$$

soient réelles pour toutes les valeurs de v qui ne font pas évanouir la fonction $f(v)$; on a universellement

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x - \mathrm{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, f(v),$$

quelle que soit la forme de la fonction $f(v)$.

De là on déduit facilement

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f\left(x - \frac{a_1}{x-\lambda_1} - \frac{a_2}{x-\lambda^2} \cdots - \frac{a_n}{x-\lambda_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, f(v),$$

pourvu que les valeurs des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient réelles et positives; celles des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ réelles.

On peut se servir de ce théorème général pour trois applications différentes.

Premièrement, pour l'évaluation des intégrales. Voici un exemple :

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^n} = \frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

pourvu que n soit pair; d'où résulte, en supposant $n = 2$, la formule connue

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}\,\pi^{\frac{1}{2}}\, e^{-2a}.$$

Deuxièmement, pour exprimer les sommes des intégrales transcendantes. En supposant que $f(v)$ s'évanouisse dans l'équation (1) quand on a $v > q$ ou $v < p$, on obtient

$$\int_{p_1}^{q_1} dx f(x-\mathrm{R}) + \int_{p_2}^{q_2} dx f(x-\mathrm{R}) \ldots + \int_{p_n}^{q_n} dx f(x-\mathrm{R}) = \int_p^q dv f(v),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant respectivement les racines des équations

$$x - \mathrm{R} = p, \quad x - \mathrm{R} = q;$$

et les racines de l'équation

$$x - \mathrm{R} = v$$

étant toutes réelles pour toutes les valeurs de v qui se trouvent entre les limites p et q.

Troisièmement, le théorème s'applique à la réduction des intégrales définies multiples. Au point de vue de cette application, je l'ai communiqué à M. Cayley dès 1846.