

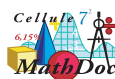
# JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

BOOLE, GEORGE

**Théorème général concernant l'intégration définie.**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 13 (1848), p. 111-112.

[http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher\\_notice.php?id=JMPA\\_1848\\_1\\_13\\_A15\\_0](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1848_1_13_A15_0)



Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par la Cellule MathDoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/CMD  
<http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/>

THÉORÈME GÉNÉRAL CONCERNANT L'INTÉGRATION DÉFINIE ;

PAR M. GEORGE BOOLE (DE LINCOLN).

Soit  $R$  une fonction rationnelle de  $x$ , telle que les racines de l'équation

$$x - R = \nu$$

soient réelles pour toutes les valeurs de  $\nu$  qui ne font pas évanouir la fonction  $f(\nu)$ ; on a universellement

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x - R) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu f(\nu),$$

quelle que soit la forme de la fonction  $f(\nu)$ .

De là on déduit facilement

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx f\left(x - \frac{a_1}{x - \lambda_1} - \frac{a_2}{x - \lambda_2} \dots - \frac{a_n}{x - \lambda_n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu f(\nu),$$

pourvu que les valeurs des constantes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  soient réelles et positives; celles des constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  réelles.

On peut se servir de ce théorème général pour trois applications différentes.

Premièrement, pour l'évaluation des intégrales. Voici un exemple :

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^n} = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

pourvu que  $n$  soit pair; d'où résulte, en supposant  $n = 2$ , la formule connue

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-2a}.$$

Deuxièmement, pour exprimer les sommes des intégrales transcen-

dantes. En supposant que  $f(v)$  s'évanouisse dans l'équation (1) quand on a  $v > q$  ou  $v < p$ , on obtient

$$\int_{p_1}^{q_1} dx f(x-R) + \int_{p_2}^{q_2} dx f(x-R) \dots + \int_{p_n}^{q_n} dx f(x-R) = \int_p^q dv f(v),$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$  et  $q_1, q_2, \dots, q_n$  étant respectivement les racines des équations

$$x - R = p, \quad x - R = q,$$

et les racines de l'équation

$$x - R = v$$

étant toutes réelles pour toutes les valeurs de  $v$  qui se trouvent entre les limites  $p$  et  $q$ .

Troisièmement, le théorème s'applique à la réduction des intégrales définies multiples. Au point de vue de cette application, je l'ai communiqué à M. Cayley dès 1846.

