JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

CATALAN

**Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples.**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 4 (1839), p. 323-344.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1839_1_4_A28_0>

# MÉMOIRE

*Sur la Réduction d'une classe d'Intégrales multiples ;*

**Par E. CATALAN,**

Répétiteur à l'École Polytechnique.

Dans ses *Exercices de Calcul intégral,* Legendre détermine l'aire de l'ellipsoïde à trois axes, d'abord par le développement en série, et ensuite par la considération des lignes de courbure de la surface (*). En essayant de reprendre la même question sous un autre point de vue, j'ai rencontré une méthode de réduction pour une certaine classe d'intégrales multiples : l'exposition de cette méthode, et son application à quelques exemples, sont l'objet de ce Mémoire. Mais, afin de bien indiquer la marche que mes idées ont suivie, je traiterai en premier lieu la question de l'ellipsoïde.

## I.

Soit

$$\left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z'}{\gamma}\right)^2 = 1,$$

l'équation de la surface de l'ellipsoïde. L'élément de cette surface a pour expression

$$dx'dy' \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$p$ et $q$ désignant à l'ordinaire les coefficients différentiels partiels $\frac{dz'}{dx'}$,

(*) M. *Plana* a aussi traité ce sujet (*Journal de Crelle*, 1837, page 345) ; mais nos deux méthodes n'ont aucun point commun.

$\frac{dz'}{dy'}$; savoir, $p = -\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \frac{x'}{z'}$, $q = -\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 \frac{y'}{z'}$. En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et désignant par A′ la huitième partie de l'aire de l'ellipsoïde, il vient

$$A' = \iint dx'dy' \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right) - \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)}{1 - \left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2}}.$$

L'intégrale doit s'étendre à toutes les valeurs positives de $x$ et de $y$ satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{x'}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\beta}\right)^2 \overline{\overline{<}}\, 1.$$

Pour simplifier, je fais

$$\frac{x'}{\alpha} = x, \quad \frac{y'}{\beta} = y, \quad 1 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = a^2, \quad 1 - \frac{\gamma^2}{\beta^2} = b^2:$$

comme on peut supposer $\alpha > \beta > \gamma$, $a^2$ et $b^2$ seront des constantes positives, moindres que l'unité, $a^2$ étant la plus grande. L'intégrale qu'il s'agit de déterminer est alors, en faisant $A' = \alpha\beta A$,

$$A = \iint dxdy \sqrt{\frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2}{1 - x^2 - y^2}}; \tag{1}$$

et cette intégrale doit être étendue à toutes les valeurs positives de $x$ et de $y$ qui vérifieront la relation

$$x^2 + y^2 \overline{\overline{<}}\, 1. \tag{2}$$

Si nous désignons par $z$ la valeur positive du radical placé sous le signe $\int$, l'intégrale A devient $\int zdxdy$ : elle peut être considérée comme exprimant le volume d'une portion du cylindre dont l'équation est $x^2 + y^2 = 1$, portion comprise entre les parties positives des plans coordonnés, et la surface représentée par

$$z^2 = \frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2}{1 - x^2 - y^2}. \tag{3}$$

Or, si après avoir mis cette équation sous la forme

$$(z^2-a^2)x^2+(z^2-b^2)y^2=z^2-1, \tag{4}$$

nous y regardons $z$ comme un paramètre variable, nous conclurons que tout plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, et situé à une distance plus grande que 1 de l'origine, coupe la surface suivant une ellipse qui a pour projection sur le plan des $xy$, une ellipse égale, représentée par l'équation (4). Pour $z=1$, cette projection est l'origine des coordonnées; et si, à partir de cette limite inférieure, on fait croître $z$ indéfiniment, on obtient une série d'ellipses concentriques, ayant leurs axes dirigés suivant ceux des $x$ et des $y$, et dont la limite, répondant à $z$ infini, est le cercle représenté par $x^2+y^2=1$.

D'après cela, nous prendrons pour élément du volume dont il s'agit, le cylindre ayant pour hauteur $z$, et dont la base serait la *couronne* comprise entre les deux ellipses déterminées par l'équation (4), quand on attribue au paramètre deux valeurs consécutives, $z$ et $z+dz$.

Représentant par X et Y les demi-axes de la première ellipse, la couronne elliptique aura pour mesure $\pi d.\mathrm{XY}$; et comme nous ne devons prendre que le quart du cylindre correspondant, nous aurons, au lieu de l'intégrale (1),

$$\mathrm{A}=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty zd.\mathrm{XY}. \tag{5}$$

L'équation (4) donne

$$\mathrm{X}=\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-a^2}},\quad \mathrm{Y}=\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2-b^2}},$$

$$d\mathrm{X}=(1-a^2)\frac{zdz}{(z^2-a^2)\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-1)}},\quad d\mathrm{Y}=(1-b^2)\frac{zdz}{(z^2-b^2)\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-1)}},$$

$$d.\mathrm{XY}=\mathrm{X}d\mathrm{Y}+\mathrm{Y}d\mathrm{X}=\left(\frac{1-a^2}{z^2-a^2}+\frac{1-b^2}{z^2-b^2}\right)\frac{zdz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}};$$

ce qui change la formule (5) en celle-ci,

$$\mathrm{A}=\frac{\pi}{4}\left[(1-a^2)\int_1^\infty\frac{z^2dz}{(z^2-a^2)\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}+(1-b^2)\int_1^\infty\frac{z^2dz}{(z^2-b^2)\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}\right], \tag{6}$$

que l'on peut écrire sous la forme abrégée :

$$A = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1-a^2}{a}\cdot\frac{d.}{da} + \frac{1-b^2}{b}\frac{d.}{db}\right)\int_1^\infty \frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}, \qquad (7)$$

en observant que

$$\frac{d.}{da}\frac{z^2dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} = \frac{az^2}{(z^2-a^2)\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}}.$$

L'intégrale double (1) se trouvant ramenée ainsi à une ou à deux intégrales simples, la question principale est résolue : je vais actuellement, pour la compléter, transformer les intégrales contenues dans (6), de manière à exprimer A en fonctions elliptiques ordinaires.

On a

$$0 < b < a < 1 < z:$$

on peut donc supposer

$$z^2 - a^2 = (z^2 - b^2)\sin^2\varphi.$$

Ce changement de variable donne, en posant $b = ca$,

$$z^2 = \frac{a^2(1-c^2\sin^2\varphi)}{\cos^2\varphi}, \quad zdz = \frac{a^2(1-c^2)\sin\varphi d\varphi}{\cos^3\varphi}, \quad z^2dz = \frac{a^3(1-c^2)\sin\varphi d\varphi}{\cos^4\varphi}\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi},$$

$$z^2-a^2 = a^2(1-c^2)\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad z^2-b^2 = a^2(1-c^2)\frac{1}{\cos^2\varphi}, \quad \sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)} = a^2(1-c^2)\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$\frac{z^2dz}{(z^2-a^2)\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} = \frac{1}{a(1-c^2)}d\varphi\frac{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi},$$

$$\frac{z^2dz}{(z^2-b^2)\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} = \frac{1}{a(1-c^2)}d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}.$$

L'équation (6) devient, au moyen de ces valeurs,

$$A = \frac{\pi}{4a(1-c^2)}\left[(1-a^2)\int_\lambda^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi} + (1-b^2)\int_\lambda^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\right]: \quad (8)$$

$$\lambda = \arcsin\sqrt{\frac{1-a^2}{1-b^2}}.$$

Les intégrales elliptiques qui entrent dans cette expression sont prises à partir de la valeur $\lambda$ de l'amplitude : afin qu'elles s'évanouissent, ainsi qu'on le suppose ordinairement, pour $\varphi = 0$, je fais

$$\tang \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}\,\tang\theta};$$

ce qui donne, en représentant par $\Delta$ le radical $\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}$:

$$\sin^2\varphi = \frac{\cos^2\theta}{\Delta^2},\quad \cos^2\varphi = (1-c^2)\frac{\sin^2\theta}{\Delta^2},\quad 1-c^2\sin^2\varphi = (1-c^2)\frac{1}{\Delta^2},$$

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\frac{d\theta}{\sin^2\theta},$$

$$d\varphi = -\sqrt{1-c^2}\,\frac{d\theta}{\Delta^2},\quad d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi} = -(1-c^2)\frac{d\theta}{\Delta^3},$$

$$\frac{d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi} = -(1-c^2)\frac{d\theta}{\Delta\cos^2\theta}.$$

La limite supérieure $\mu$ des nouvelles intégrales est déterminée par l'équation

$$\frac{1-a^2}{1-a^2c^2} = \frac{1}{1+(1-c^2)\tang^2\mu};$$

laquelle donne

$$\tang\mu = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\quad \sin\mu = a,\quad \cos\mu = \sqrt{1-a^2}.$$

La substitution des valeurs précédentes dans la formule (8), donne

$$\mathrm{A} = \frac{\pi}{4a}\left[(1-a^2)\int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta\cos^2\theta} + (1-a^2c^2)\int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta^3}\right]. \qquad (9)$$

Or, on a (*)

$$\int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta\cos^2\theta} = \frac{1}{1-c^2}\left[\sqrt{1-c^2\sin^2\mu}\,\tang\mu + (1-c^2)\mathrm{F}(c,\mu) - \mathrm{E}(c,\mu)\right],$$

$$\int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta^3} = \frac{1}{1-c^2}\left[\mathrm{E}(c,\mu) - c^2\frac{\sin\mu\cos\mu}{\sqrt{1-c^2\sin^2\mu}}\right];$$

(*) *Exercices de Calcul intégral*, 1811, tome I, page 199.

en posant, à l'ordinaire,

$$F(c, \mu) = \int_0^\mu \frac{d\theta}{\Delta}, \quad E(c, \mu) = \int_0^\mu \Delta, d\theta.$$

Au moyen de ces valeurs, et de celles de tang $\mu$, sin $\mu$, cos $\mu$, la valeur de l'intégrale se change en

$$A = \frac{\pi}{4a}\left[a^2 E(c, \mu) + (1 - a^2) F(c, \mu) + a\sqrt{1 - a^2}\sqrt{1 - a^2 c^2}\right]. \quad (10)$$

Par suite, l'aire de l'ellipsoïde deviendra

$$8A' = 2\pi\gamma^2 + \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}[(\alpha^2 - \gamma^2)E(c, \mu) + \gamma^2 F(c, \mu)]. \quad (11)$$

Cette formule ne diffère que par la notation de celle qui se trouve à la page 191 du tome premier des *Exercices*. Pour l'appliquer, on doit se rappeler que

$$c^2 = \frac{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)}{\beta^2(\alpha^2 - \gamma^2)}, \quad \cos\mu = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

## II.

En second lieu, soit l'intégrale

$$A = \iiint dx\,dy\,dz\sqrt{\frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}}, \quad (12)$$

dans laquelle $a$, $b$, $c$ sont des constantes positives, moindres que l'unité. Cette intégrale doit être étendue à toutes les valeurs positives de $x$, $y$, $z$, propres à satisfaire à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \overset{=}{<} 1. \quad (13)$$

En regardant $x$, $y$, $z$ comme les coordonnées d'un même point matériel, rapporté à trois axes rectangulaires, cette relation (13) représentera l'ensemble de tous les points matériels contenus dans une sphère ayant son centre à l'origine, et ayant pour rayon, l'unité.

De plus, si l'on fait

$$v^2 = \frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}, \qquad (14)$$

on pourra supposer que $v$ représente une vitesse dont serait animée la molécule ayant pour coordonnées $x$, $y$, $z$, et pour volume, $dxdydz$. Prenant alors la densité de la sphère pour unité, le produit $vdxdydz$ exprimera une quantité de mouvement, et l'intégrale (12) ne sera autre chose que la somme des quantités de mouvement de tous les points matériels composant la sphère.

Pour évaluer cette somme, j'observe que les valeurs de $x$, $y$, $z$ qui répondent à une valeur donnée de $v$, devant satisfaire à l'équation

$$(v^2 - a^2)x^2 + (v^2 - b^2)y^2 + (v^2 - c^2)z^2 = v^2 - 1, \qquad (15)$$

il résulte de cette dépendance, que tous les points qui ont même vitesse, sont situés à la surface d'un ellipsoïde à trois axes, représentée par cette équation. En considérant alors la portion de la masse sphérique comprise entre les deux surfaces ellipsoïdales qui répondent à deux vitesses consécutives $v$ et $v + dv$, la somme des quantités de mouvement de toutes les molécules composant cette couche, sera égale au volume de la couche, multiplié par $v$.

Par suite, si nous désignons par X, Y, Z les demi-axes de l'ellipsoïde (15), l'intégrale (12) deviendra, à cause que nous ne devons prendre que le huitième de la couche,

$$\mathrm{A} = \frac{\pi}{6}\int_0^\infty v d.\mathrm{XYZ}. \qquad (16)$$

L'équation (15) donne

$$\mathrm{X} = \sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-a^2}}, \qquad \mathrm{Y} = \sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-b^2}}, \qquad \mathrm{Z} = \sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-c^2}},$$

$$d\mathrm{Z} = \frac{(1-c^2)\,vdv}{(v^2-c^2)\sqrt{(v^2-1)(v^2-c^2)}}, \qquad \mathrm{XY}d\mathrm{Z} = \frac{(1-c^2)\,vdv\sqrt{v^2-1}}{(v^2-c^2)\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}},$$

$$d.\mathrm{XYZ} = \frac{vdv\sqrt{v^2-1}}{\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}}\left(\frac{1-a^2}{v^2-a^2} + \frac{1-b^2}{v^2-b^2} + \frac{1-c^2}{v^2-c^2}\right).$$

Cette dernière valeur conduit à

$$A=\frac{1}{6}\pi\left[(1-a^2)\int_1^\infty\frac{v^2dv\sqrt{v^2-1}}{(v^2-a^2)\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}}+(1-b^2)\int_1^\infty\frac{v^2dv\sqrt{v^2-1}}{(v^2-b^2)\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}}\right.$$
$$\left.+(1-c^2)\int_1^\infty\frac{v^2dv\sqrt{v^2-1}}{(v^2-c^2)\sqrt{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}}\right]; \quad (17)$$

formule que l'on peut écrire

$$A=\frac{1}{6}\pi\left(\frac{1-a^2}{a}\frac{d.}{da}+\frac{1-b^2}{b}\frac{d.}{dc}+\frac{1-c^2}{c}\frac{d.}{dc}\right)\int_1^\infty\frac{v^2dv\sqrt{v^2-1}}{\sqrt{v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}}. \quad (18)$$

Le second membre de l'équation (17), si on le multiplie par 8, peut encore être considéré comme exprimant la masse d'une sphère ayant pour rayon l'unité, et dans laquelle la densité varierait suivant une loi donnée par l'équation (15).

## III.

Les résultats contenus dans les deux paragraphes précédents, ont été obtenus à l'aide de considérations géométriques ou de considérations mécaniques. Si l'on voulait, par des procédés analogues, s'élever à l'intégrale quadruple, la chose deviendrait, je crois, plus épineuse : mais il paraît évident, *à priori*, que toutes ces considérations détournées doivent être l'expression d'un seul et même fait analytique. C'est ce dont il est aisé de s'assurer.

Considérons en effet, l'intégrale multiple d'ordre $n$ :

$$A=\int\ldots dzdydx\sqrt{\frac{1-\ldots-c^2z^2-b^2y^2-a^2x^2}{1-\ldots-z^2-y^2-x^2}}, \quad (19)$$

dans laquelle nous supposerons que $a$, $b$, $c$,... sont des constantes positives moindres que l'unité, et $x$, $y$, $z$,... des variables positives, liées entre elles par la condition

$$x^2+y^2+z^2\ldots \overline{\overline{<}}\ 1. \quad (20)$$

Cette intégrale définie est égale à la somme des valeurs que prend la différentielle, quand on y fait varier $x$, $y$, $z$,... de toutes les manieres possibles, compatibles avec la relation (20). Ordinairement, pour obtenir la valeur de cette intégrale, on suppose en premier lieu, $y$, $z$... constantes et déterminées, et l'on somme par rapport à $x$, en faisant croître cette variable de o à $\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}$; puis, supposant $z$,..... constantes, on fait varier $y$ de o à $\sqrt{1-z^2-\ldots}$, etc. Cette manière d'arriver au résultat n'est pas la plus simple que l'on puisse adopter, au moins dans le cas actuel

Pour le faire voir, posons

$$v^2 = \frac{1-\ldots-c^2z^2-b^2y^2-a^2x^2}{1-\ldots-\ z^2-\ y^2-\ x^2}; \tag{21}$$

donnons pour un instant à $v$ une valeur constante et déterminée, puis cherchons $\int dxdydz\ldots$, en attribuant à $x$, $y$, $z$,... toutes les valeurs propres à satisfaire à la condition

$$(v^2-a^2)x^2+(v^2-b^2)y^2+(v^2-c^2)z^2+\ldots \overline{\underset{<}{}}\ v^2-1, \tag{22}$$

laquelle se déduit de l'équation (21), et n'est pas contradictoire avec (20), attendu que les rapports $\frac{v^2-a^2}{v^2-1}$, $\frac{v^2-b^2}{v^2-1}$,... sont tous plus grands que l'unité. Nous obtiendrons de la sorte une intégrale définie, exprimée en $v$, $a$, $b$, $c$,... que nous pouvons représenter par $F(v)$.

Attribuons maintenant à $v$ une nouvelle valeur $v'=v+dv$; calculons l'intégrale $\int dxdy\ldots$ entre les nouvelles limites, lesquelles se déduisent de (22) en y remplaçant $v$ par $v'$; puis, retranchons le premier résultat du second: la différence, égale à $d.F(v)$, représentera la somme des valeurs que prend la fonction $dxdydz\ldots$, lorsque les variables satisfont à l'équation (21), et que, dans cette équation, le paramètre passe de $v$ à $v'$. Par conséquent, d'après les premiers principes du calcul intégral, on pourra considérer le produit $vd.F(v)$, comme exprimant, dans l'intégrale (19), la partie que l'on obtiendrait, en faisant croître le radical de $v$ à $v+dv$. D'ailleurs, aux limites

$$x+y^2+z^2+\ldots=0, \qquad x^2+y^2+z^2+\ldots=1,$$

correspondent

$$\nu = 1, \qquad \nu = \infty\,;$$

donc pour déterminer la valeur complète de l'intégrale cherchée, il suffit de prendre la somme des valeurs qu'acquiert la fonction $\nu d.\mathrm{F}(\nu)$, lorsque $\nu$, croissant par degrés infiniment petits, passe de 1 à l'infini. Autrement dit, si l'on fait

$$\mathrm{F}(\nu) = \int \ldots dzdydx\,, \tag{23}$$

les limites étant déterminées par

$$(\nu^2 - a^2)x^2 + (\nu^2 - b^2)y^2 + (\nu^2 - c^2)z^2 + \ldots \overset{=}{<} \nu^2 - 1\,,$$

on aura ce théorème :

$$\int \ldots dzdydx \sqrt{\frac{1 - \ldots - c^2z^2 - b^2y^2 - a^2x^2}{1 - \ldots - z^2 - y^2 - x^2}} = \int_1^\infty \nu d.\mathrm{F}(\nu), \tag{24}$$

les limites de l'intégrale multiple étant données par

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots \overset{=}{<} 1.$$

## IV.

Pour déterminer la fonction $\mathrm{F}(\nu)$, j'emploie la formule très remarquable donnée par M. Dirichlet :

$$\int x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\ldots dxdydz = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots}{pqr\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right)\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \ldots\right)}.(*) \tag{25}$$

Dans cette équation, toutes les constantes sont positives : les variables $x$, $y$, $z$, ... sont aussi positives, et doivent satisfaire à la condition

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r + \ldots \overset{=}{<} 1. \tag{26}$$

(*) *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, tome VIII, page 156; ou *Journal de Mathématiques*, mars 1839, page 168.

Pour appliquer cette formule à l'intégrale (23), je mets la condition (22) sous la forme

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^2-a^2}}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^2-b^2}}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^2-c^2}}}\right)^2+\ldots \overset{=}{<} 1.$$

Comparant alors le second membre de l'équation (23) avec le premier membre de la formule (25), j'obtiens immédiatement

$$F(\nu)=\int dxdydz\ldots=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\left(\frac{\nu^2-1}{\nu^2-a^2}\right)\left(\frac{\nu^2-1}{\nu^2-b^2}\right)\ldots} \quad (27)$$

Donc l'intégrale multiple (19) se trouve ramenée à l'intégrale simple

$$A=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\int_1^\infty \nu d.\sqrt{\left(\frac{\nu^2-1}{\nu^2-a^2}\right)\left(\frac{\nu^2-1}{\nu^2-b^2}\right)\ldots\ldots} \quad (28)$$

Si, dans la formule (19), les variables pouvaient recevoir des valeurs négatives, il est évident que le résultat précédent devrait être multiplié par $2^n$.

En effectuant la différenciation indiquée, la formule (28) devient

$$A=\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\int_1^\infty \frac{\nu^2(\nu^2-1)^{\frac{n}{2}-1}d\nu}{\sqrt{(\nu^2-a^2)(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)\ldots}}\left(\frac{1-a^2}{\nu^2-a^2}+\frac{1-b^2}{\nu^2-b^2}+\ldots\right). \quad (29)$$

Le cas où les quantités $a, b, c, \ldots$ seraient égales entre elles, doit être remarqué : on a alors

$$A=$$

$$\int_0 \ldots dzdydx\sqrt{\frac{1-a^2(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}=n(1-a^2)\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\int_1^\infty \frac{\nu^2(\nu^2-1)^{\frac{n}{2}-1}d\nu}{(\nu^2-a^2)^{\frac{n}{2}-1}}. \quad (30)$$

En posant $v^2 - 1 = (v^2 - a^2)\sin^2\varphi$, il vient successivement

$$v^2 = \frac{1 - a^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},\quad v^2 - a^2 = \frac{1-a^2}{\cos^2\varphi},\quad v^2 - 1 = (1-a^2)\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},\quad v dv = (1-a^2)\frac{\sin\varphi d\varphi}{\cos^3\varphi},$$

$$v^2 dv = (1-a^2)\frac{\sin\varphi d\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}{\cos^4\varphi},\quad \frac{v^2 dv}{(v^2-a^2)^2}\left(\frac{v^2-1}{v^2-a^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{1-a^2}\sin^{n-1}\varphi d\varphi\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi};$$

d'ou

$$A = 2\frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi d\varphi\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}. \qquad (31)$$

Si $n$ est impair, l'intégrale sera réductible aux transcendantes elliptiques de première et de seconde espèces, et si $n$ est pair, cette même intégrale pourra s'exprimer par des logarithmes. Dans les deux cas, la reduction se fera par le calcul suivant.

$\Delta$ représentant le radical $\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}$, on a identiquement

$$\sin^{n-1}\varphi . d\varphi\Delta = \sin^{n-3}\varphi d\varphi\Delta + \frac{1}{2a^2}\sin^{n-4}\varphi\cos\varphi \times -2a^2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\Delta;$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi d\varphi\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi d\varphi\Delta - \frac{1}{3a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta^3\left[(n-4)\sin^{n-5}\varphi\cos^2\varphi d\varphi - \sin^{n-3}\varphi d\varphi\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi d\varphi\Delta - \frac{n-4}{3a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-5}\varphi d\varphi\Delta + \frac{n-4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi d\varphi\Delta$$

$$+ \frac{n-3}{3a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-3}\varphi d\varphi\Delta - \frac{n-3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi d\varphi\Delta.$$

Cette équation donne

$$A_{n-1} = \frac{(n-1)a^2 + (n-3)}{n a^2}A_{n-3} - \frac{n-4}{na^2}A_{n-5}, \qquad (32)$$

en posant, pour abréger,

$$A_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi d\varphi\sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}.$$

Nous devons actuellement faire la séparation des deux cas :

1°. $n$ impair.

On a (*)

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{E}_1, \quad \mathrm{A}_2 = \frac{2a^2 - 1}{3a^2}\mathrm{E}_1 + \frac{1 - a^2}{3a^2}\mathrm{F}_1;$$

et la formule (32) donne ensuite

$$\mathrm{A}_4 = \left(\frac{4a^2+2}{5a^2}\cdot\frac{2a^2-1}{3a^2} - \frac{1}{5a^2}\right)\mathrm{E}_1 + \left(\frac{4a^2+2}{5a^2}\cdot\frac{1-a^2}{3a^2}\right)\mathrm{F}_1,$$

$$\mathrm{A}_6 = \left(\frac{6a^2+4}{7a^2}\cdot\frac{4a^2+2}{5a^2}\cdot\frac{2a^2-1}{3a^2} - \frac{6a^2+4}{7a^2}\cdot\frac{1}{5a^2} - \frac{3}{7a^2}\cdot\frac{2a^2-1}{3a^2}\right)\mathrm{E}_1$$
$$+\left(\frac{6a^2+4}{7a^2}\cdot\frac{4a^2+2}{5a^2}\cdot\frac{1-a^2}{3a^2} - \frac{3}{7a^2}\cdot\frac{1-a^2}{3a^2}\right)\mathrm{F}_1,$$

etc.

2°. $n$ pair.

Les termes initiaux de la série sont

$$\mathrm{A}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}, \quad \mathrm{A}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi \sqrt{1 - a^2\sin^2\varphi}.$$

Pour déterminer ces deux intégrales, je pose

$$1 - a^2\sin^2\varphi = \frac{a^2\cos^2\varphi}{\sin^2\theta}:$$

cette transformation est permise, attendu que, $a$ étant moindre que l'unité, on a

$$a^2(1 - \sin^2\varphi) < 1 - a^2\sin^2\varphi.$$

J'obtiens successivement,

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2 - \sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta}, \quad \cos^2\varphi = \frac{(1-a^2)\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta}, \quad \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = -\frac{1-a^2}{a^2}\frac{\sin\theta d\theta}{\cos^3\theta},$$

$$d\varphi = -\sqrt{1-a^2}\,\frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{a^2 - \sin^2\theta}}, \quad \sqrt{1 - a^2\sin^2\theta} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\cos\theta},$$

$$\mathrm{A}_1 = \frac{1-a^2}{a}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\cos^3\theta}, \quad \mathrm{A}_3 = \frac{1-a^2}{a^3}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta\,(a^2 - \sin^2\theta)}{\cos^5\theta},$$

en posant $\qquad \alpha = \arc\sin a.$

(*) *Exercices de Calcul intégral*, tome I[er], pages 199 et 200.

On trouve facilement,

$$\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-a^2} + l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right), \quad \int_0^\alpha \frac{d\theta(a^2-\sin^2\theta)}{\cos^5\theta} = \frac{1}{8}\left[\frac{a(3a^2-2)}{1-a^2} + (3a^2+1)\, l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right]$$

Il résulte de ces valeurs,

$$A_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-a^2}{a}\, l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}, \quad A_3 = \frac{1}{8}\,\frac{3a^2-2}{a^2} + \frac{1}{8}\,\frac{(1-a^2)(3a^2+1)}{a^3}\, l\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Les deux premiers termes de la série étant ainsi connus, la formule (32) donnera ensuite, de proche en proche, les valeurs de $A_5$, $A_7$, etc.

Dans l'équation (31), supposons $a = 0$ : l'intégrale contenue dans le second membre, se réduit à $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$; d'où résulte cette formule très simple

$$\int^n \frac{dxdydz\ldots}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2\ldots}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \qquad (33)$$

Dans cette intégrale, les variables sont positives et satisfont à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots \overset{=}{<} 1.$$

## V.

La méthode dont nous avons fait usage dans les deux paragraphes précédents, peut être présentée sous la forme générale suivante.

Supposons, 1° que l'intégrale proposée soit

$$A = \int^n dxdydz\ldots \mathfrak{F}(x, y, z, \ldots).f[\varphi(x, y, z, \ldots)]; \qquad (34)$$

2° Que les $n$ variables $x, y, z, \ldots$ positives pour plus de simplicité, doivent toujours satisfaire à une condition exprimée par

$$\psi(x, y, z, \ldots) \overset{=}{<} 0; \qquad (35)$$

3°. Que la fonction $\varphi(x, y, z, \ldots)$ soit de telle nature, qu'elle prenne des valeurs déterminées et connues, $\alpha$ et $\beta$, quand on fera $x = y = z = \ldots = 0$, et quand ces variables satisferont à l'équation $\psi = 0$ ;

4°. Que de plus, l'intégrale $\int dx dy dz \ldots \vartheta(x, y, z, \ldots)$, prise entre les limites

$$x = y = z = \ldots = 0, \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, z, \ldots) \overset{=}{<} v,$$

soit connue, et égale à $F(v)$ ;

5°. Qu'enfin, la condition $\varphi(x, y, z, \ldots) \overset{=}{<} v$ ne soit pas contradictoire avec (35), et qu'en faisant varier $v$ dans la première, depuis $\alpha$ jusqu'à $\beta$, on reproduise tous les systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots$ satisfaisant à la seconde ; on aura

$$A = \int_\alpha^\beta f(v) . \frac{d . F(v)}{dv} . dv. \tag{36}$$

Ce théorème deviendra évident, si l'on répète, sur ce cas général, les raisonnements qui ont été développés, dans le paragraphe III, sur un exemple particulier. Les paragraphes qui vont suivre sont destinés à faire voir quelques-unes des applications que l'on peut faire de la formule (36).

## VI.

Pour premier exemple, je considérerai l'intégrale

$$A = \int dx dy dz \ldots \times x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots \left( \frac{1 - a x^\alpha - b y^\beta - c z^\gamma - \ldots}{1 - x^\alpha - y^\beta - z^\gamma - \ldots} \right)^{\frac{1}{m}}, \tag{37}$$

dans laquelle les quantités $p, q, r, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont des constantes positives quelconques ; $a, b, c, \ldots$ des constantes moindres que l'unité ; $m$ une constante positive plus grande que un, et $x, y, \ldots$ des variables qui peuvent recevoir toutes les valeurs positives compatibles avec la condition

$$x^\alpha + y^\beta + z^\gamma + \ldots \overset{=}{<} 1. \tag{38}$$

Si je fais

$$v^m = \frac{1 - ax^\alpha - by^\beta - cz^\gamma - \ldots}{1 - x^\alpha - y^\beta - z^\gamma - \ldots}, \tag{39}$$

puis si je pose

$$F(v) = \int dx dy dz \ldots \times x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots, \tag{40}$$

les limites étant déterminées par

$$(v^m - a)x^\alpha + (v^m - b)y^\beta + (v^m - c)z^\gamma + \ldots \overset{=}{<} v^m - 1; \tag{41}$$

j'aurai
$$A = \int_1^\infty v dF(v).$$

Pour déterminer F $(v)$, je mets la condition (41) sous la forme

$$\left(\frac{x}{\sqrt[\alpha]{\frac{v^m-1}{v^m-a}}}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{\sqrt[\beta]{\frac{v^m-1}{v^m-b}}}\right)^\beta + \left(\frac{z}{\sqrt[\gamma]{\frac{v^m-1}{v^m-c}}}\right)^\gamma + \ldots \overset{=}{<} 1:$$

le théorème de M. Dirichlet (25) donne alors

$$F(v) = \frac{\left(\frac{v^m-1}{v^m-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \left(\frac{v^m-1}{v^m-b}\right)^{\frac{q}{\beta}} \left(\frac{v^m-1}{v^m-c}\right)^{\frac{r}{\gamma}} \ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \ldots\right)}.$$

Donc,

$$A = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \ldots\right)} \int_1^\infty v d.\left[\left(\frac{v^m-1}{v^m-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \left(\frac{v^m-1}{v^m-b}\right)^{\frac{q}{\beta}} \ldots\right]; \tag{42}$$

ou bien,

$$A =$$

$$\frac{m}{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \right)\ldots} \int_1^\infty \frac{v^m (v^m - 1)^{-1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \ldots}}{(v^m - a)^{\frac{p}{\alpha}} (v^m - b)^{\frac{q}{\beta}} \ldots} \left[\frac{p(1-a)}{\alpha(v^m - a)} + \frac{q(1-b)}{\beta(v^m - c)} + \ldots\right] dv; \tag{43}$$

ou encore, en posant $v^m = u$, et $\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots = k$:

$$A=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(1+k)}\int_1^\infty \frac{u^{\frac{1}{m}}(u-1)^{k-1}\,du}{(u-a)^{\frac{p}{\alpha}}(u-b)^{\frac{q}{\beta}}\ldots\ldots}\left[\frac{p(1-a)}{\alpha(u-a)}+\frac{q(1-b)}{\beta(u-b)}+\ldots\right] \quad (44).$$

Si les constantes $a$, $b$, $c$, sont égales entre elles, la formule se simplifie beaucoup : elle devient

$$\int dx\,dy\ldots\ldots dz\, x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\ldots\left[\frac{1-a\,(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)}{1-(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$=(1-a)\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(k)}\int_1^\infty \frac{u^{\frac{1}{m}}(u-1)^{k-1}\,du}{(u-a)^{k+1}}. \quad (45)$$

Si, dans cette dernière, $a$ est nul, le second membre se réduit à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(k)}\int_1^\infty \frac{(u-1)^{k-1}du}{u^{k+1-\frac{1}{m}}}.$$

Je pose $u=\frac{1}{\theta}$ : l'intégrale se transforme en

$$\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{m}}(1-\theta)^{k-1}d\theta=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma(k)}{\Gamma\left(k+1-\frac{1}{m}\right)};$$

donc

$$\int\frac{dx\,dy\,dz\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots}{(1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots)^{\frac{1}{m}}}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(1-\frac{1}{m}+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)}. \quad (46)$$

Dans toutes ces intégrales multiples, la condition aux limites est toujours

$$x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots \leqq 1.$$

## VII.

La formule (46) peut se déduire d'une autre formule très générale.

Prenons $A = \int x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots dxdydz.\varphi(x+y+z+\ldots)$, (47)

la condition aux limites étant $x+y+z+\ldots \overset{=}{<} \lambda$.

En posant

$$x+y+z+\ldots = v,$$

nous aurons à chercher l'intégrale

$$F(v) = \int x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots dxdydz,$$

entre des limites données par

$$\frac{x}{v}+\frac{y}{v}+\frac{z}{v}+\ldots \overset{=}{<} 1.$$

Or, par la formule de Dirichlet,

$$F(v) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\ldots}{\Gamma(1+p+q+r+\ldots)}.v^{+p+q+r+\ldots}$$

donc,

$$A = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\ldots}{\Gamma(p+q+r+\ldots)}\int_0^{(\lambda)} v^{-1+p+q+r\ldots}\varphi(v)dv \; (*). \tag{48}$$

Il est clair que, par un simple changement de variables, cette formule donnera l'équation (46); elle conduit également à celle-ci :

$$\int dxdydz\ldots \times x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\left(1-x^{\alpha}-y^{\beta}-z^{\gamma}-\ldots\right)^{\frac{1}{m}}$$
$$= \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(1+\frac{1}{m}+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)}. \tag{49}$$

Dans cette dernière équation, toutes les constantes ont la même signification que dans (46) ; l'équation aux limites est la même ; $m$ est une constante positive quelconque.

---

(*) Cette formule a été démontrée d'une autre manière par M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, mai 1839).

## VIII.

Pour application de la formule (48), je prendrai l'intégrale

$$A = \int dx dy dz \ldots \sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1+(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}, \qquad (50)$$

dans laquelle les $n$ variables seront positives et satisferont à la condition

$$x^2+y^2+z^2+\ldots \overset{=}{<} 1.$$

Cette intégrale se transforme d'abord en

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^n \int \frac{dx dy dz \ldots}{\sqrt{xyz\ldots}} \sqrt{\frac{1-(x+y+z+\ldots)}{1+(x+y+z+\ldots)}}, \qquad (51)$$

la condition aux limites étant

$$x+y+z+\ldots \overset{=}{<} 1.$$

J'applique actuellement la formule en question, et j'obtiens

$$A = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 v^{\frac{n}{2}-1} dv . \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}. \qquad (52)$$

L'intégrale équivaut à

$$-\int_0^1 \frac{v^{\frac{n}{2}} dv}{\sqrt{1-v^2}} + \int_0^1 \frac{v^{\frac{n}{2}-1} dv}{\sqrt{1-v^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{n}{4}-\frac{2}{1}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{n}{4}-1} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+1\right)} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)};$$

en posant $v = \theta^{\frac{1}{2}}$, et faisant usage de la relation,

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 \theta^{p-1}(1-\theta)^{q-1} d\theta.$$

Au moyen de ces valeurs, je trouve, au lieu de l'intégrale (50),

$$A = \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[-\frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+1\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right].$$

Cette formule donnera successivement

$$\int_0^1 dx\sqrt{\frac{1-x^4}{1+x^4}} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right] = \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}, \quad (54)$$

à cause de

$$\Gamma\frac{1}{4}\Gamma\frac{3}{4} = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi};$$

$$\int dxdy\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right), \quad (55)$$

$$\int dxdydz\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2)}{1+(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{1}{8}\sqrt{2\pi}\left[\frac{4\pi^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2\right], \quad (56)$$

$$\int dxdydzdt\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2+t^2)}{1+(x^2+y^2+z^2+t^2)}} = \frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right), \quad (57)$$

etc.

## IX.

Je choisirai enfin, pour application de la formule (48), l'intégrale

$$A = \int\frac{dxdydz\ldots}{(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)^m}, \quad (58)$$

entre les limites

$$x^\alpha + y^\beta + z^\gamma + \ldots \overset{=}{<} 1.$$

En remplaçant $x^\alpha$ par $x$, $y^\beta$ par $y$, etc., elle devient

$$A = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots}\int^n \frac{dxdydz\ldots \times x^{\frac{1}{\alpha}-1}y^{\frac{1}{\beta}-1}z^{\frac{1}{\gamma}-1}\ldots}{(x+y+z+\ldots)^m};$$

et la condition aux limites :

$$x + y + z + \ldots \overline{\overline{<}}\, 1.$$

La formule (48) donne alors

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)}\int_0^1 v^{-1-m+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots}\,dv.$$

Pour que l'intégrale ne soit pas infinie, on doit avoir

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \ldots > m;$$

et, cela étant,

$$A = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots-m\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)}. \tag{59}$$

Si les exposants $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... sont égaux entre eux,

$$A = \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^n}{\left(\frac{n}{\alpha}-m\right)\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}. \tag{60}$$

Nous avons supposé l'exposant $m$ positif; s'il était négatif, nous trouverions

$$\int(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)^m dxdydz\ldots = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{-}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\left(m+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)}. \tag{61}$$

Dans le premier membre, supposons $m$ entier, et développons la puissance du polynome: l'un des termes à intégrer sera de la forme

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(a+1)\;\Gamma(b+1)\ldots}\int x^{a\alpha}y^{b\beta}z^{c\gamma}\ldots dxdydz,$$

en posant

$$a + b + c + \ldots = m.$$

Or, en observant que l'intégrale doit être prise entre les limites données par

$$x^\alpha + y^\beta + z^\gamma + \ldots \overset{=}{<} 1,$$

la formule de M. Dirichlet donne

$$\int x^{a\alpha} y^{b\beta} z^{c\gamma} \ldots dxdydz = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+m+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)};$$

d'où résulte, en comparant avec l'équation (61),

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots\right)} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots\right)} \sum \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\ldots}. \quad (62)$$

Le signe $\Sigma$ indique une somme de termes de même forme que celui placé sous ce signe : $a$, $b$, $c$,... doivent recevoir toutes les valeurs entières non négatives satisfaisant à l'équation

$$a + b + c + \ldots = m.$$

Le nombre de ces termes est d'ailleurs (*)

$$N = \frac{(m+1)}{1} \cdot \frac{m+2}{2} \ldots \frac{m+n-1}{n-1}.$$

(Avril 1839.)

(*) *Journal de Mathématiques*, tome III, page 112.